VILNIAUS UNIVERSITETAS
ŠIAULIŲ AKADEMIJA

MATEMATIKOS MAGISTRO STUDIJŲ PROGRAMA
Didžiųjų duomenų analitikos specializacija

GRETA KATKUTĖ

Magistro studijų baigiamasis darbas

SUDĖTINĖS FUNKCIJOS NUO HURVICO DZETA FUNKCIJŲ JUNGTINIS UNIVERSALUMAS

Darbo vadovas: prof. dr. Darius Šiaučiūnas

Šiauliai, 2021

Studijuojančiojo, teikiančio baigiamąjį darbą, GARANTIJA	*WARRANTY of Final Thesis*

Vardas, pavardė *Name, Surname*	**Greta Katkutė**
Padalinys *Faculty*	**Šiaulių akademija** ***Šiauliai Academy***
Studijų programa *Study Programme*	**Matematikos magistro studijų programa** ***Master's Degree Program in Mathematics***
Darbo pavadinimas *Thesis topic*	**Sudėtinės funkcijos nuo Hurvico dzeta funkcijų jungtinis universalumas** ***Joint Universality of Composite Function of Hurwitz Zeta-Functions***
Darbo tipas *Thesis type*	**Baigiamasis darbas** ***Final Thesis***

Garantuoju, kad mano baigiamasis darbas yra parengtas sąžiningai ir savarankiškai, kitų asmenų indėlio į parengtą darbą nėra. Jokių neteisėtų mokėjimų už šį darbą niekam nesu mokėjęs.

I guarantee that my thesis is prepared in good faith and independently, there is no contribution to this work from other individuals. I have not made any illegal payments related to this work.

Šiame darbe tiesiogiai ar netiesiogiai panaudotos kitų šaltinių citatos yra pažymėtos literatūros nuorodose.

Quotes from other sources directly or indirectly used in this thesis, are indicated in literature references.

Aš, Greta katkutė, pateikdamas (-a) šį darbą, patvirtinu (*pažymėti*) ☒

Embargo laikotarpis
Embargo Period

Prašau nustatyti šiam baigiamajam darbui toliau nurodytos trukmės embargo laikotarpį:
I am requesting an embargo of this thesis for the period indicated below:

☐ __________ mėnesių / *months*
(embargo laikotarpis negali viršyti 60 mėn. / *an embargo period shall not exceed 60 months*).

☐ Embargo laikotarpis nereikalingas / *no embargo requested.*

Embargo laikotarpio nustatymo priežastis / *Reason for embargo period*:

Turinys

1. Įvadas

Viena svarbiausių funkcijų teorijos, o kartu ir bendrosios matematikos, problemų yra analizinių funkcijų aproksimavimas. Šia problema domėjosi ir domisi daug matematikų. Išskirsime tik S. N. Mergeliano (Mergelyan) rezultatą iš [15] straipsnio. Jis įrodė, kad bet kuri tolydžioji kompaktinėje aibėje K, turinčioje jungųjį papildinį, ir analizinė aibės K viduje kompleksinio kintamojo $s = \sigma + it$ funkcija $g(s)$ norimu tikslumu gali būti aproksimuojama daugianariu. Taigi su visais $\varepsilon > 0$ egzistuoja daugianaris $p(s)$ toks, kad

$$\sup_{s \in K} |g(s) - p(s)| < \varepsilon.$$

Mergeliano teorema rodo, kad kai kuriuose uždaviniuose analizinių funkcijų nagrinėjimas gali būti pakeistas daugianarių nagrinėjimu.

Rusų matematikas S. M. Voroninas (Voronin) 1975 m. [20] straipsnyje įrodė, kad egzistuoja dar vienas analizinis objektas, turintis aproksimavimo savybę visai analizinių funkcijų klasei. Šis objektas – garsioji Rymano (Riemann) dzeta funkcija, kuri pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama Dirichlė (Dirichlet) eilute arba Oilerio (Euler) sandauga pirminiais skaičiais

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

čia $\mathbb{P}$ žymi visų pirminių skaičių aibę, ir meromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, o taškas $s = 1$ yra jos paprastasis polius su reziduumu 1. Tegul $0 < r < 1/4$, funkcija $g(s)$ yra analizinė skritulyje $|s| \leqslant r$ ir tolydžioji bei neįgyjanti nulių srityje $|s| < r$. Tuomet su visais $\varepsilon > 0$ egzistuoja $\tau = \tau(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ toks, kad

$$\max_{|s| \leqslant r} \left| \zeta\left(s + \frac{3}{4} + i\tau\right) - g(s) \right| < \varepsilon.$$

Šiuo metu Voronino teorema turi bendresnį pavidalą. Kad galėtume suformuluoti šiuolaikinę Voronino teoremos versiją, apibrėšime keletą objektų.

1 apibrėžimas. *Tarkime, kad turime metrinę erdvę $\{\mathbb{X}, d\}$. Aibė $S \subset \mathbb{X}$ yra vadinama reliatyviai kompaktiška, jei iš kiekvienos begalinės jos elementų sekos $\{x_n\} \subset S$ galima išrinkti erdvėje $\mathbb{X}$ konverguojantį posekį. Jei S yra reliatyviai kompaktiška ir uždara, tai ji vadinama kompaktiška aibe arba kompaktu.*

2 apibrėžimas. *Matu aibės E poaibių algebroje $\mathcal{A}$ vadinamas atvaizdis $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$, tenkinantis šiuos reikalavimus:*

a) $\mu(\varnothing) = 0$,

b) jei $\{A_m : m \in \mathbb{N}\}$ *– poromis nesikertančių aibių iš* $\mathcal{A}$ *seka ir* $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{A}$*, tai*

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m).$$

Priminsime analizinės ir sveikosios funkcijos apibrėžimus.

3 apibrėžimas ([17])**.** *Funkcija* $f(s)$ *yra vadinama analizine aibėje* $E \subset \mathbb{C}$*, jeigu ji yra diferencijuojama* $\mathbb{C}$ *prasme visuose tos aibės taškuose. Jeigu funkcija yra analizinė visoje baigtinėje kompleksinėje plokštumoje, tai ji yra vadinama sveikąja funkcija.*

Tegul $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$, $\mathcal{K}$ žymi juostos D kompaktinių poaibių su jungiaisiais papildiniais klasę, $H(K)$, kai $K \in \mathcal{K}$, yra tolydžiųjų aibėje K ir analizinių aibės K viduje funkcijų klasė, o $H_0(K) \subset H(K)$ – neįgyjančių nulių aibėje K funkcijų klasė. Be to, tegul meas$A$ žymi mačiosios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego (Lebesgue) matą. Dabar suformuluosime šiuolaikinę Voronino teoremos versiją.

1 teorema. *Tegul* $K \in \mathcal{K}$*, o* $f(s) \in H_0(K)$*. Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Be to, riba

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$*, nebent išskyrus skaičiąją* $\varepsilon > 0$ *reikšmių aibę.*

Šios teoremos pirmos dalies įrodymą galima rasti [6], [1] disertacijose bei [7] ir[19] monografijose, o antrosios dalies – [11] straipsnyje.

Iš 1 teoremos matome, kad egzistuoja be galo daug postūmių $\zeta(s + i\tau)$, aproksimuojančių duotąją funkciją $f(s) \in H_0(K)$.

Taigi, Voronino teorema rodo, kad plati analizinių funkcijų klasė $H_0(K)$, su $K \in \mathcal{K}$, aproksimuojama vienos ir tos pačios Rymano dzeta funkcijos postūmiais $\zeta(s + i\tau)$. Vadinasi funkcija $\zeta(s)$ turi visus universalumo požymius, o Voronino teorema – vadinama universalumo teorema.

Po to, kai Voroninas įrodė savo genealiąją universalumo teoremą, buvo gauta, kad dauguma kitų klasikinių dzeta ir L funkcijų taip pat turi universalumo savybę.

Tegul $0 < \alpha \leqslant 1$ yra fiksuotas parametras. Tuomet Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama tokia Dirichlė eilute

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}$$

ir analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra jos paprastasis polius su reziduumu 1. Kai $\alpha = 1$, Hurvico dzeta funkcija virsta Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$: $\zeta(s, 1) = \zeta(s)$. Be to,

$$\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) = (2^s - 1)\,\zeta(s).$$

Taigi, Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ yra Rymano dzeta funkcijos apibendrinimas. Skirtingai negu funkcija $\zeta(s)$, Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ turi Oilerio sandaugą tik tuo atveju, kai $\alpha = 1$ ir $\alpha = \frac{1}{2}$. Vadinasi Hurvico dzeta funkcijos analizinės savybės iš esmės skiriasi nuo Rymano dzeta funkcijų savybių. Be to, funkcijos $\zeta(s, \alpha)$ savybės priklauso nuo parametro α aritmetinės prigimties. Pavyzdžiui, yra gerai žinoma, kad $\zeta(s) \neq 0$ pusplokštumėje $\sigma > 1$, o funkcija $\zeta(s, \alpha)$, kai $\alpha \neq 1, \frac{1}{2}$, šioje pusplokštumėje turi begalo daug nulių, žr., pvz., [4], [3]. Iš kitos pusės, funkcijos $\zeta(s)$ ir $\zeta(s, \alpha)$ su kai kuriomis parametro α klasėmis turi bendrą universalumo savybę. Taigi, Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ yra labai svarbus analizinis objektas, todėl jos reikšmių pasiskirstymas yra plačiai ištirtas. Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s, \alpha)$ universalumas yra pateiktas 2 teoremoje.

2 teorema. *Tarkime, kad parametras α yra transcendentusis arba racionalusis skaičius $\neq 1, \frac{1}{2}$. Tegul $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H(K)$. Tuomet su visais $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Be to, riba

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičiąją $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę.

Šios teoremos pirmąją dalį, nepriklausomai vienas nuo kito, įrodė S. M. Gonekas (Gonek) [6] ir B. Bagčis (Bagchi) [1]. Antrosios teoremos dalies įrodymas yra pateiktas A. Laurinčiko ir L. Meškos [12] straipsnyje. Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s, \alpha)$ universalumas su algebriniu iracionaliuoju parametru α iki šiol nėra pilnai išspręstas.

1 ir 2 teoremose τ, postūmiuose $\zeta(s + i\tau)$ ir $\zeta(s + i\tau, \alpha)$, gali įgyti visas realiąsias reikšmes, todėl šios teoremos yra tolydžiojo tipo. Lygiagrečiai yra nagrinėjamas taip vadinamas diskretusis universalumas, kai τ, postūmiuose $\zeta(s + i\tau)$ ir $\zeta(s + i\tau, \alpha)$, įgyja reikšmes iš diskrečiosios aibės. Pirmąją diskretaus universalumo teoremą 1980 m. [18] straipsnyje įrodė Reichas (Reich). Magistro darbe didžiausią dėmesį skirsime Hurvico dzeta funkcijos diskrečiąjam universalumui.

Tegul $\# A$ žymi aibės A galią. Pateiksime pirmąją diskretaus universalumo teoremą Hurvico dzeta funkcijai $\zeta(s,\alpha)$.

3 teorema. *Tarkime, kad parametras α yra transcendentusis arba racionalusis skaičius $\neq 1, \frac{1}{2}$, $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H(K)$. Racionalaus α atveju skaičius $h > 0$ yra bet koks, o transcendentaus parametro α atveju, $h > 0$ yra toks, kad $\exp\left\{\frac{2\pi}{h}\right\}$ yra racionalusis skaičius. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\#\left\{0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K}|\zeta(s+ikh,\alpha)-f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Be to, riba

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\#\left\{0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K}|\zeta(s+ikh,\alpha)-f(s)| < \varepsilon\right\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičiąją $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę.

Racionalaus α atveju 3 teoremos pirmąją dalį įrodė Bagčis [1]. Transcendenčiojo α atveju pirmoji teoremos dalis išplaukia iš bendresnės universalumo teoremos periodinei Hurvico dzeta funkcijai, kurią įrodė A. Laurinčikas ir R. Macaitienė [10] straipsnyje. Antrosios teoremos dalies įrodymą galima rasti A. Laurinčiko ir L. Meškos [12] straipsnyje. Šioje teoremoje τ postūmiuose $\zeta(s+i\tau,\alpha)$ įgyja reikšmes iš aritmetinės progresijos $\{kh : k \in \mathbb{N}\}$, čia $h > 0$ yra fiksuotas skaičius.

Pastaraisiais metais labai daug dėmesio yra skiriama dzeta funkcijų universalumui naudojant taip vadinamus apibendrintus postūmius, t. y. postūmius $\zeta(s+i\varphi(\tau),\alpha)$ ir $\zeta(s+i\varphi(k),\alpha)$, čia $\varphi(\tau)$ yra tam tikra funkcija. A. Laurinčikas [8] straipsnyje įrodė universalumo teoremą funkcijai $\zeta(s,\alpha)$ su postūmiais $\zeta(s+i\varphi(k)h,\alpha)$, čia $\{\varphi(k)\}$ yra tam tikra seka tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1 ir tenkinati augimo sąlygą.

Tegul $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots \leqslant \gamma_k \leqslant \gamma_{k+1} \leqslant \cdots$ yra Rymano dzeta funkcijos netrivialiųjų nulių menamųjų dalių seka. R. Garunkštis, A. Laurinčikas ir R. Macaitienė 2017 m. [5] straipsnyje įrodė universalumo teoremą Rymano dzeta funkcijai naudodami postūmius $\zeta(s+ih\gamma_k)$. Įrodyme buvo naudojamas įvertis

$$\sum_{\substack{\gamma_k,\gamma_l \leqslant T \\ |\gamma_k-\gamma_l| < c/\log T}}\sum 1 \ll T\log T, \qquad c > 0, \tag{1.1}$$

kuris yra gaunamas iš Montgomerio (Montgomery) netrivialiųjų nulių porų koreliacijos hipotezės, žr. [16]. Diskretaus universalumo teoremą Hurvico dzeta funkcijai, postūmiuose naudodamas Rymano dzeta funkcijos netrivialiųjų nulių menamąsias dalis, įrodė Laurinčikas [9] straipsnyje. Kad galėtume suformuluoti Laurinčiko teoremą, reikia apibrėžti vieną aibę:

$$L(\alpha) = \{\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

4 teorema. *Tarkime, kad galioja (1.1) įvertis, o aibė $L(\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$. Tegul $K \in \mathcal{K}$ ir $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ ir $h > 0$*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\gamma_k h, \alpha) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Be to, riba

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\gamma_k h, \alpha) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičiąją $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę.

2019 m. R. Macaitienė ir D. Šiaučiūnas [13] straipsnyje pastarąją teoremą apibendrino didesniam Hurvico dzeta funkcijų skaičiui, t. y. įrodė jungtinio universalumo teoremą. Tegul $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in (0,1]$, o

$$L(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \{(\log(m+\alpha_1) : m \in \mathbb{N}_0), \ldots, (\log(m+\alpha_r) : m \in \mathbb{N}_0)\}.$$

Tuomet Macaitienės ir Šiaučiūno straipsnio pagrindinis rezultatas yra tokia teorema:

5 teorema. *Tarkime, kad galioja (1.1) įvertis, o aibė $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Kai $j = 1, \ldots, r$, tegul $K_j \in \mathcal{K}$ ir $f_j(s) \in H(K_j)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ ir $h > 0$*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s+ih\gamma_k, \alpha_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Be to, riba

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s+ih\gamma_k, \alpha_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičiąją $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę.

Tegul $H(D)$ yra juostos D analizinių funkcijų klasė su tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija,

$$H^r(D) = \underbrace{H(D) \times \cdots \times H(D)}_{r},$$

o

$$\underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}) = (\zeta(s, \alpha_1), \ldots, \zeta(s, \alpha_r)).$$

Magistro darbo tikslas – įrodyti universalumo teoremas sudėtinėms funkcijoms $F\left(\underline{\zeta}(s,\underline{\alpha})\right)$ su tam tikromis operatorių $F: H^r(D) \to H(D)$ klasėmis, t. y. yra apibendrinti 5 teoremą.

Sakysime, kad operatorius $F: H^r(D) \to H(D)$ priklauso Lipšico (Lipschitz) klasei $Lip(\underline{\beta})$, čia $\underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_r)$, jeigu:

1° kiekvienam daugianariui $p = p(s)$ egzistuoja funkcijos $(g_1, \dots, g_r) \in F^{-1}\{p\}$;

2° visoms aibėms $K \in \mathcal{K}$ egzistuoja konstanta $c > 0$, teigiami skaičiai $\beta_1, \dots, \beta_r$ bei aibės $K_1, \dots, K_r \in \mathcal{K}$ tokie, kad

$$\sup_{s\in K} |F(\underline{g}_1(s)) - F(\underline{g}_2(s))| \leqslant c \sup_{1\leqslant j\leqslant r} \sup_{s\in K_j} |g_{1j}(s) - g_{2j}(s)|^{\beta_j}$$

su visomis funkcijomis $\underline{g}_1 = (g_{11}, \dots, g_{1r}), \underline{g}_2 = (g_{21}, \dots, g_{2r}) \in H^r(D)$.

Dabar suformuluosime pirmąjį magistro darbo rezultatą.

6 teorema. *Tarkime, kad galioja* (1.1) *įvertis, aibė* $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš* $\mathbb{Q}$, *o* $F \in Lip(\underline{\beta})$. *Tegul* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H(K)$. *Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$ *ir* $h > 0$

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} \left| F\left(\underline{\zeta}(s + ih\gamma_k, \underline{\alpha})\right) - f(s) \right| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Pavyzdžiui, operatorius

$$F(g_1, \dots, g_r) = c_1 g_1^{(k_1)} + \dots + c_r g_r^{(k_r)}, \quad g_1, \dots, g_r \in H(D),$$

kai $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ir $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ yra klasės $Lip(1, \dots, 1)$ elementas.

Suformuluosime universalumo teoremą dar vienai operatorių $F: H^r(D) \to H(D)$ klasei.

7 teorema. *Tarkime, kad galioja* (1.1) *įvertis, aibė* $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš* $\mathbb{Q}$, *o* $F: H^r(D) \to H(D)$ *yra tolydusis operatorius toks, kad kiekvienas polinomas* $p = p(s)$ *turi savo pirmavaizdį* $F^{-1}\{p\}$. *Tegul* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H(K)$. *Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$ *ir* $h > 0$

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} \left| F\left(\underline{\zeta}(s + ih\gamma_k, \underline{\alpha})\right) - f(s) \right| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Be to, riba

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} \left| F\left(\underline{\zeta}(s + ih\gamma_k, \underline{\alpha})\right) - f(s) \right| < \varepsilon \right\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, *nebent išskyrus skaičiąją* $\varepsilon > 0$ *reikšmių aibę.*

6 teoremos įrodymas remiasi 5 teorema, o 7 teoremos įrodymas yra paremtas silpnuoju tikimybinių matų konvergavimu.

2. Ribinės teoremos

Šiame skyriuje priminsime tikimybinį modelį naudotą Macaitienės ir Šiaučiūno [13] straipsnyje ir pritaikysime jį sudėtinėms funkcijoms. Pirmiausia apibrėšime keletą matematinių objektų.

4 apibrėžimas. *Aibės Ω poaibių šeimoje $\mathcal{F}$ apibrėžta neneigiama funkcija P vadinama tikimybiniu matu, jeigu ji tenkina šias savybes:*

a) $P(\Omega) = 1$,

b) $P\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} P(A_m)$ *su visais* $A_m \in \mathcal{F}$ *tokiais, kad* $A_k \cap A_l = \varnothing$, *jei* $k \neq l$.

5 apibrėžimas. *Tegul Ω nėra tuščioji aibė. Aibės Ω poaibių šeima $\mathcal{F}$ yra vadinama Borelio (Borel) σ-kūnu, jeigu*

a) $\Omega \in \mathcal{F}$,

b) $A^c \in \mathcal{F}$, *kai* $A \in \mathcal{F}$,

c) $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{F}$, *kai* $A_m \in \mathcal{F}$, $m = 1, 2, \dots$.

Tegul γ yra vienetinis apskritimas komplesinėje plokštumoje. Apibrėžkime aibę

$$\Omega = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m,$$

čia $\gamma_m = \gamma$ su visais $m \in \mathbb{N}_0$. Su sandaugos topologija ir pataškine daugyba begaliniamatis toras Ω yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Todėl

$$\underline{\Omega} = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_r,$$

čia $\Omega_j = \Omega$ su visais $j = 1, \dots, r$, taip pat yra kompaktinė topologinė grupė. Tegul $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ žymi erdvės $\mathbb{X}$ Borelio σ-kūnas. Vadinasi, erdvėje $(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega}))$ egzistuoja tikimybinis Haro (Haar) matas $\underline{m}_H$, todėl gauname tikimybinę erdvę $(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega}), \underline{m}_H)$. Tegul $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_r)$ yra toro $\underline{\Omega}$ elementai, o $\omega_j(m)$ yra elemento $\omega_j \in \Omega_j$, $m \in \mathbb{N}_0$, $j = 1, \dots, r$, m-toji komponentė. Tikimybinėje erdvėje $(\underline{\Omega}, \mathcal{B}(\underline{\Omega}), \underline{m}_H)$ apibrėžkime erdvėje $H^r(D)$ reikšmes įgyjantį atsitiktinį elementą $\underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}, \omega)$, $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, tokia lygybe:

$$\underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}, \omega) = \left(\zeta(s, \alpha_1, \omega_1), \dots, \zeta(s, \alpha_r, \omega_r)\right),$$

čia

$$\zeta(s, \alpha_j, \omega_j) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega_j(m)}{(m + \alpha_j)^s}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Tegul $P_{\underline{\zeta}, \underline{\alpha}}$ yra atsitiktinio elemento $\underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}, \omega)$ skirstinys. Pažymėkime

$$\underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}) = \left(\zeta(s, \alpha_1), \dots, \zeta(s, \alpha_r)\right).$$

Tuomet Macaitienės ir Šiaučiūno straipsnyje [13] buvo įrodyta tokia teorema (Teorema 7).

1 lema. *Tarkime, kad galioja* (1.1) *įvertis, o aibė* $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ *yra tiesiškai nepriklausoma vrš racionaliųjų skaičių kūno* $\mathbb{Q}$. *Tuomet matas*

$$P_{N,\underline{\alpha}}(A) \stackrel{def}{=} \frac{1}{N}\#\left\{1 \leqslant k \leqslant N : \underline{\zeta}(s + i\gamma_k h, \underline{\alpha}) \in A\right\}, \quad A \in \mathcal{B}(H^r(D)),$$

silpnai konverguoja į matą $P_{\underline{\zeta},\underline{\alpha}}$, *kai* $N \to \infty$. *Be to, mato* $P_{\underline{\zeta},\underline{\alpha}}$ *atrama yra visa erdvė* $H^r(D)$.

Norėdami įrodyti universalumo teoremą sudėtinei funkcijai $F(\underline{\zeta}(s,\underline{\alpha}))$, turime apibendrinti 1 lemą matui

$$P_{N,F,\underline{\alpha}}(A) \stackrel{def}{=} \frac{1}{N}\#\left\{1 \leqslant k \leqslant N : F(\underline{\zeta}(s,\underline{\alpha})) \in A\right\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Priminsime silpnojo tikimybinių matų konvergavimo apibrėžimą.

6 apibrėžimas. *Sakome, kad matas* P_n *silpnai konverguoja į matą* P, *kai* $n \to \infty$, *jeigu su kiekviena realiąja tolydžiąja aprėžtąja funkcija* f *erdvėje* X *galioja lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f \mathrm{d}P_n = \int_X f \mathrm{d}P.$$

Silpnasis mato $P_{N,F,\underline{\alpha}}$ konvergavimas, kai $N \to \infty$, gaunamas iš klasikinės silpnojo konvergavimo savybės išsaugojimo tolydžiuosiuose atvaizdžiuose. Priminsime šią savybę. Tegul $u : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ yra $(\mathcal{B}(\mathbb{X}_1), \mathcal{B}(\mathbb{X}_2))$-matusis atvaizdis, t. y. $u^{-1}\mathcal{B}(\mathbb{X}_2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{X}_1)$. Tuomet erdvės $(\mathbb{X}_1, \mathcal{B}(\mathbb{X}_1))$ matas P indukuoja vienintelį tikimybinį matą Pu^{-1} erdvėje $(\mathbb{X}_2, \mathcal{B}(\mathbb{X}_2))$ apibrėžiamą formule

$$Pu^{-1}(A) = P(u^{-1}A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}_2).$$

Bilingslio (Billingsley) [2] monografijoje yra įrodyta, kad kiekvienas tolydusis atvaizdis taip pat yra ir $(\mathcal{B}(\mathbb{X}_1), \mathcal{B}(\mathbb{X}_2))$-matusis. Taip pat suformuluosime dar vieną silpnojo konvergavimo savybę, žr. [2].

2 lema. *Tarkime, kad* P *ir* P_n, $n \in \mathbb{N}$, *yra erdvės* $(\mathbb{X}_1, \mathcal{B}(\mathbb{X}_1))$ *tikimybiniai matai, be to matas* P_n *silpnai konverguoja į matą* P, *kai* $n \to \infty$. *Jeigu* $u : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ *yra tolydusis atvaizdis, tai matas* $P_n u^{-1}$ *taip pat silpnai konverguoja į matą* Pu^{-1}, *kai* $n \to \infty$.

Dabar suformuluosime mato $P_{N,F,\underline{\alpha}}$ ribinę teoremą.

3 lema. *Tarkime, kad* (1.1) *įvertis galioja, aibė* $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno* $\mathbb{Q}$, *o* $F : H^r(D) \to H(D)$ *yra tolydusis operatorius. Tuomet matas* $P_{N,F,\underline{\alpha}}$ *silpnai konverguoja į matą* $P_{\underline{\zeta},\underline{\alpha}}F^{-1}$, *kai* $N \to \infty$.

Įrodymas. Lema yra 1 ir 2 lemų tiesioginė išvada. □

3. Universalumo teoremų įrodymas

Šiame skyriuje pateiksime universalumo teoremų, suformuluotų įvade, įrodymus. Abiejų teoremų įrodymuose yra naudojama įvade paminėta Mergeliano teorema [15], kurią suformuluosime 4 lemoje. Priminsime kompaktinės aibės apibrėžimą.

7 apibrėžimas. *Tarkime, kad turime metrinę erdvę $\{\mathbb{X}, d\}$. Aibė $S \subset \mathbb{X}$ yra vadinama reliatyviai kompaktiška, jei iš kiekvienos begalinės jos elementų sekos $\{x_n\} \subset S$ galima išrinkti erdvėje $\mathbb{X}$ konverguojantį posekį. Jei S yra reliatyviai kompaktiška ir uždara, tai ji vadinama kompaktiška aibe arba kompaktu.*

4 lema. *Tarkime, kad $K \subset \mathbb{C}$ yra kompaktinė aibė su jungiuoju papildiniu, o $g(s)$ tolydžioji aibėje K ir analizinė aibės K viduje funkcija. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ egzistuoja daugianaris $p_\varepsilon(s)$ toks, kad*

$$\sup_{s \in K} |g(s) - p_\varepsilon(s)| < \varepsilon.$$

3.1. 6 teoremos įrodymas

Šiame skyrelyje įrodysime 6 teoremą. Priminsime, kad šios teoremos įrodymas remiasi 5 teorema.

6 teoremos įrodymas. Tegul $p = p(s)$ yra bet koks daugianaris. Tuomet, pagal klasės $Lip(\underline{\beta})$ 1° savybę, egzistuoja analizinių funkcijų rinkinys $(g_1, \ldots, g_r) \in H^r(D)$ toks, kad $F(g_1, \ldots, g_r) = p$. Tarkime, kad $1 > \delta > 0$ ir apibrėžkime

$$A_N(\delta, \underline{\alpha}) = \left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{1 \leqslant j \leqslant r} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + ih\gamma_k, \alpha_j) - g_j(s)| < \delta \right\},$$

čia aibės $K_1, \ldots, K_r \in \mathcal{K}$ atitinka aibę K iš 2° Lipšoco klasės $Lip(\underline{\beta})$ apibrėžimo reikalavimo. Iš 5 teoremos gauname, kad

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N} \# A_N(\delta, \underline{\alpha}) > 0. \tag{3.1}$$

Tegul $k \in A_N(\delta, \underline{\alpha})$. Tuomet iš klasės $Lip(\underline{\beta})$ apibrėžimo 2° turime

$$\begin{aligned} \sup_{s \in K} \left| F(\underline{\zeta}(s + ih\gamma_k, \underline{\alpha})) - p(s) \right| &= \sup_{s \in K} \left| F(\underline{\zeta}(s + ih\gamma_k, \underline{\alpha})) - F(g_1, \ldots, g_r) \right| \\ &\leqslant c \sup_{1 \leqslant j \leqslant r} \sup_{s \in K_j} |\zeta(s + ih\gamma_k, \alpha_j) - g_j(s)|^{\beta_j} \\ &< c\,\delta^\beta, \end{aligned} \tag{3.2}$$

čia $\beta = \min_{1\leqslant j\leqslant r}\beta_j$. Paėmę $\delta = c^{-1/\beta}(\varepsilon/2)^{1/\beta}$ bei atsižvelgę į (3.1) nelygybę gauname, kad

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#\left\{1\leqslant k\leqslant N : \sup_{s\in K}\Big|F(\underline{\zeta}(s+ih\gamma_k,\underline{\alpha}))-p(s)\Big|<\frac{\varepsilon}{2}\right\}>0. \tag{3.3}$$

Priminsime, kad daugianaris $p(s)$ yra bet koks. Iš 4 lemos matome, kad galime parinkti daugianarį $p(s)$ tenkinantį nelygybę

$$\sup_{s\in K}|f(s)-p(s)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.4}$$

Todėl, jeigu k tenkina (3.2) nelygybę, tai

$$\sup_{s\in K}\Big|F(\underline{\zeta}(s+ih\gamma_k,\underline{\alpha}))-p(s)\Big|<\varepsilon.$$

Remdamiesi (3.4) nelygybe gauname, kad

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#\left\{1\leqslant k\leqslant N : \sup_{s\in K}\Big|F(\underline{\zeta}(s+ih\gamma_k,\underline{\alpha}))-f(s)\Big|<\varepsilon\right\}>0.$$

Teorema įrodyta. □

3.2. Mato atrama

7 teoremos įrodyme labai svarbi yra ribinio mato $P_{\underline{\zeta},\underline{\alpha}}F^{-1}$ atrama. Priminsime tikimybinio mato atramos apibrėžimą.

8 apibrėžimas. *Tikimybinio mato P atrama erdvėje $(\mathbb{X},\mathcal{B}(\mathbb{X}))$ vadinama minimali uždaroji aibė S_P tokia, kad $P(S_P)=1$.*

Tegul $\mathbb{X}$ yra separabilioji erdvė, o P yra tikimybinis matas erdvėje $(\mathbb{X},\mathcal{B}(\mathbb{X}))$. Tuomet mato atramą S_P sudaro visi elementai $x\in\mathbb{X}$ tokie, kad, su visomis elemento x aplinkomis G galioja nelygybė $P(G)>0$, žr. [2].

Tegul $\{K_l : l\in\mathbb{N}\}\subset D$ yra kompaktinių poaibių seka, tokia, kad

$$D=\bigcup_{l=1}^{\infty}K_l,$$

čia $K_l\subset K_{l+1}$ su visais $l\in\mathbb{N}$ ir, jeigu $K\subset D$ yra kompaktinė aibė, tuomet $K\subset K_l$ tam tikriems l. Šiuo atveju

$$\rho(g_1,g_2)=\sum_{l=1}^{\infty}2^{-l}\frac{\sup_{s\in K_l}|g_1(s)-g_2(s)|}{1+\sup_{s\in K_l}|g_1(s)-g_2(s)|}$$

yra erdvės $H(D)$ metrika indukuojanti jos tolygųjį konvergavimą kompaktuose. Atkreipsime dėmesį, kad mes galime imti aibes K_l su jungiaisis papildiniais. Pavyzdžiui, galime imti uždaruosius stačiakampius.

5 lema. *Tarkime, kad seka $\{\gamma_k\}$, aibė $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ ir operatorius F tenkina 7 teoremos sąlygas. Tuomet mato $P_{\underline{\zeta},\underline{\alpha}}F^{-1}$ atrama yra visa erdvė $H(D)$.*

Įrodymas. Tegul g yra bet kuris erdvės $H(D)$ elementas, o G yra bet kuri jo atviroji aplinka. Fiksuotam $\varepsilon > 0$ imkime l_0 tokį, kad

$$\sum_{l>l_0} 2^{-l} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pagal 4 lemą, egzistuoja daugianaris $p_\varepsilon(s)$ toks, kad

$$\sup_{s\in K_{l_0}} |g(s) - p_\varepsilon(s)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Iš pastarosios nelygybės turime, kad

$$\rho(g(s), p_\varepsilon(s)) < \varepsilon.$$

Vadinasi, jeigu ε yra kiek norima mažas dydis, daugianaris $p_\varepsilon(s)$ priklauso aibei G. Kadangi, pagal operatoriaus F savybes, kiekvienas daugianaris turi pirmavaizdį, turime, kad $F^{-1}G \neq \varnothing$. Operatorius F yra tolydusis. Vadinasi, aibė $F^{-1}G$ yra tam tikro elemento $\underline{g} \in H^r D$ atviroji aplinka. Pagal 1 lemos antrąjį tvirtinimą, matome, kad

$$P_{\underline{\zeta},\underline{\alpha}}(F^{-1}G) > 0.$$

Todėl, iš mato $P_{\underline{\zeta},\underline{\alpha}}F^{-1}$ apibrėžimo, gauname, kad

$$P_{\underline{\zeta},\underline{\alpha}}F^{-1}(G) = P_{\underline{\zeta},\underline{\alpha}}(F^{-1}G) > 0. \tag{3.5}$$

Kadangi g yra bet koks erdvės $H(D)$ elementas, pastaroji nelygybė įrodo lemos tvirtinimą. □

3.3. 7 teoremos įrodymas

Šiame skyrelyje įrodysime antrąją magistro darbo teoremą. Jos įrodyme naudosime tikimybinių matų silpnojo konvergavimo ekvivalentus. Priminsime tikimybinio mato tolydumo aibės apibrėžimą.

9 apibrėžimas. *Aibė A yra vadinama tikimybinio mato P tolydumo aibe, jeigu*

$$P(\partial A) = 0,$$

čia ∂A yra aibės A siena.

6 lema. *Tarkime, kad P ir P_n, čia $n \in \mathbb{N}$, yra tikimybiniai matai erdvje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$. Tuomet šie teiginiai yra ekvivalentūs:*

1° *matas P_n silpnai konverguoja į matą P, kai $n \to \infty$;*

2° *su kiekviena atvirąja aibe $G \subset \mathbb{X}$*

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \geqslant P(G);$$

3° *su kiekviena mato P tolydumo aibe A*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A).$$

7 teoremos įrodymas. Iš 5 lemos gaunane, kad su kiekvienu daugianariu $p_\varepsilon(s)$ aibė

$$G = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s\in K} |g(s) - p_\varepsilon(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

yra elemento iš mato $P_{\underline{\zeta},\underline{\alpha}} F^{-1}$ atramos atviroji aplinka. Todėl, iš 3 ir 6 lemų, turime, kad

$$\liminf_{N\to\infty} P_{N,F,\underline{\alpha}}(G_\varepsilon) \geqslant P_{\underline{\zeta},\underline{\alpha}} F^{-1} > 0. \tag{3.6}$$

Remdamiesi mato $P_{N,F,\underline{\alpha}}$ ir aibės G_ε apibrėžimais gauname, kad

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} \left| F(\underline{\zeta}(s + ikh\gamma_k, \underline{\alpha})) - p_\varepsilon(s) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} > 0.$$

Pasirinkę daugianarį $p_\varepsilon(s)$ tenkinantį (3.3) nelygybę, gauname pirmąjį teoremos tvirtinimą.

Apibrėžkime dar vieną aibę

$$\hat{G} = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s\in K} |g(s) - f(s)| < \varepsilon \right\}.$$

Aibės $\hat{G}_\varepsilon$ siena $\partial \hat{G}_\varepsilon$ yra aibė

$$\left\{ g \in H(D) : \sup_{s\in K} |g(s) - f(s)| = \varepsilon \right\},$$

todėl sienos $\partial \hat{G}_{\varepsilon_1}$ ir $\partial \hat{G}_{\varepsilon_2}$ nesikerta su skirtingais teigiamais ε_1 ir ε_2. Vadinasi,

$$P_{\underline{\zeta},\underline{\alpha}} F^{-1}(\partial \hat{G}_\varepsilon) > 0$$

su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičiąją $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę. Kitais žodžiais tariant, aibė $\hat{G}_\varepsilon$ yra mato $P_{\underline{\zeta},\underline{\alpha}} F^{-1}$ tolydumo aibė su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičiąją $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę. Be to, iš (3.4) nelygybės turime, kad $G_\varepsilon \subset \hat{G}_\varepsilon$. Todėl iš (3.6) nelygybės gauname, kad $P_{\underline{\zeta},\underline{\alpha}} F^{-1}(\hat{G}_\varepsilon) > 0$. Vadinasi, remiantis 3 ir 6 lemomis, matome, kad

$$\lim_{N\to\infty} P_{N,F,\underline{\alpha}}(\hat{G}_\varepsilon) = P_{\underline{\zeta},\underline{\alpha}}(\hat{G}_\varepsilon) > 0$$

su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičiąją $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę. Iš mato $P_{N,F,\underline{\alpha}}$ ir aibės $\hat{G}_\varepsilon$ apibrėžimų gauname antrąjį teoremos tvirtinimą. □

Sudėtinės funkcijos nuo Hurvico dzeta funkcijų jungtinis universalumas

Santrauka

Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s,\alpha)$, čia $s=\sigma+it$, o $0<\alpha\leqslant 1$ yra fiksuotas parametras, pusplokštumėje $\sigma>1$ yra apibrėžiama tokia Dirichlė eilute

$$\zeta(s,\alpha)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+\alpha)^s}$$

ir analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s=1$, kuris yra jos paprastasis polius su reziduumu 1.

Tegul $0<\gamma_1<\gamma_2<\cdots\leqslant\gamma_k\leqslant\gamma_{k+1}\leqslant\cdots$ yra Rymano dzeta funkcijos netrivialiųjų nulių menamųjų dalių seka, kuriai galioja įvertis

$$\sum_{\substack{\gamma_k,\gamma_l\leqslant T\\ |\gamma_k-\gamma_l|<c/\log T}}\sum 1\ll T\log T,\quad c>0, \tag{1.1}$$

gaunamas iš Montgomerio netrivialiųjų nulių porų koreliacijos hipotezės. Be to, tegul

$$\underline{\zeta}(s,\underline{\alpha},\omega)=(\zeta(s,\alpha_1,\omega_1),\ldots,\zeta(s,\alpha_r,\omega_r)),$$

čia

$$\zeta(s,\alpha_j,\omega_j)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\omega_j(m)}{(m+\alpha_j)^s},\quad j=1,\ldots,r.$$

Magistro darbe įrodytos universalumo teoremos sudėtinėms funkcijoms $F\left(\underline{\zeta}(s,\underline{\alpha})\right)$ tam tikroms operatorių $F:H^r(D)\to H(D)$ klasėms. Apibrėžkime aibę

$$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=\{(\log(m+\alpha_1):m\in\mathbb{N}_0),\ldots,(\log(m+\alpha_r):m\in\mathbb{N}_0)\}.$$

Sakysime, kad operatorius $F:H^r(D)\to H(D)$ priklauso Lipšico klasei $Lip(\underline{\beta})$, čia $\underline{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_r)$, jeigu:

1° kiekvienam daugianariui $p=p(s)$ egzistuoja funkcijos $(g_1,\ldots,g_r)\in F^{-1}\{p\}$;

2° visoms aibėms $K\in\mathcal{K}$ egzistuoja konstanta $c>0$, teigiami skaičiai $\beta_1,\ldots,\beta_r$ bei aibės $K_1,\ldots,K_r\in\mathcal{K}$ tokie, kad

$$\sup_{s\in K}|F(\underline{g}_1(s))-F(\underline{g}_2(s))|\leqslant c\sup_{1\leqslant j\leqslant r}\sup_{s\in K_j}|g_{1j}(s)-g_{2j}(s)|^{\beta_j}$$

su visomis funkcijomis $\underline{g}_1=(g_{11},\ldots,g_{1r}),\underline{g}_2=(g_{21},\ldots,g_{2r})\in H^r(D)$.

Tuomet teisinga tokia teorema:

6 teorema. *Tarkime, kad galioja* (1.1) *įvertis, aibė* $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš* $\mathbb{Q}$, *o* $F \in Lip(\underline{\beta})$. *Tegul* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H(K)$. *Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$ *ir* $h > 0$

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} \left| F\left(\underline{\zeta}(s + ih\gamma_k, \underline{\alpha})\right) - f(s) \right| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Magistro darbe yra suformuluota universalumo teorem dar vienai operatorių $F : H^r(D) \to H(D)$ klasei.

7 teorema. *Tarkime, kad galioja* (1.1) *įvertis, aibė* $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ *yra tiesiškai nepriklausoma virš* $\mathbb{Q}$, *o* $F : H^r(D) \to H(D)$ *yra tolydusis operatorius toks, kad kiekvienas polinomas* $p = p(s)$ *turi savo pirmavaizdį* $F^{-1}\{p\}$. *Tegul* $K \in \mathcal{K}$ *ir* $f(s) \in H(K)$. *Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$ *ir* $h > 0$

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} \left| F\left(\underline{\zeta}(s + ih\gamma_k, \underline{\alpha})\right) - f(s) \right| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Be to, riba

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} \left| F\left(\underline{\zeta}(s + ih\gamma_k, \underline{\alpha})\right) - f(s) \right| < \varepsilon \right\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, *nebent išskyrus skaičiąją* $\varepsilon > 0$ *reikšmių aibę.*

Joint Universality of Composite Function of Hurwitz Zeta-Functions

Summary

The Hurwitz zeta-function $\zeta(s,\alpha)$, $s=\sigma+it$, where $0<\alpha\leqslant 1$ is a fixed parameter, in the half-plane $\sigma>1$ is defined by the Dirichlet series

$$\zeta(s,\alpha)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+\alpha)^s},$$

and has analytic continuation to the whole complex plane, except for the unique simple pole at the point $s=1$ with residue 1.

Let $0<\gamma_1<\gamma_2<\cdots\leqslant\gamma_k\leqslant\gamma_{k+1}\leqslant\cdots$ be the sequence of imaginary parts of non-trivial zeros of the Riemann zeta-function, for which the estimate

$$\sum_{\substack{\gamma_k,\gamma_l\leqslant T\\ |\gamma_k-\gamma_l|<c/\log T}}\sum 1\ll T\log T,\quad c>0, \tag{1.1}$$

inspired by the Montgomery pair correlation conjecture, holds. Moreover, let

$$\underline{\zeta}(s,\underline{\alpha},\omega)=\left(\zeta(s,\alpha_1,\omega_1),\ldots,\zeta(s,\alpha_r,\omega_r)\right),$$

where

$$\zeta(s,\alpha_j,\omega_j)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\omega_j(m)}{(m+\alpha_j)^s},\quad j=1,\ldots,r.$$

In the master thesis we obtain universality theorems for $F\left(\underline{\zeta}(s,\underline{\alpha})\right)$ for some classes of operators $F:H^r(D)\to H(D)$. Define the set

$$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=\{(\log(m+\alpha_1):m\in\mathbb{N}_0),\ldots,(\log(m+\alpha_r):m\in\mathbb{N}_0)\}.$$

We say that the operator $F:H^r(D)\to H(D)$ belongs to the class $Lip(\underline{\beta})$, $\underline{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_r)$, if:

1° for every polynomial $p=p(s)$, there exists $(g_1,\ldots,g_r)\in F^{-1}\{p\}$;

2° for all $K\in\mathcal{K}$, there exists a constant $c>0$, positive $\beta_1,\ldots,\beta_r$, and $K_1,\ldots,K_r\in\mathcal{K}$ such that

$$\sup_{s\in K}|F(\underline{g}_1(s))-F(\underline{g}_2(s))|\leqslant c\sup_{1\leqslant j\leqslant r}\sup_{s\in K_j}|g_{1j}(s)-g_{2j}(s)|^{\beta_j}$$

for all $\underline{g}_1=(g_{11},\ldots,g_{1r}),\underline{g}_2=(g_{21},\ldots,g_{2r})\in H^r(D)$.

Then we obtain the following theorem:

Theorem 6. *Suppose that the estimate* (1.1) *is valid, the set* $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ *is linearly independent over* $\mathbb{Q}$, *and* $F \in Lip(\underline{\beta})$. *Let* $K \in \mathcal{K}$ *and* $f(s) \in H(K)$. *Then, for all* $\varepsilon > 0$ *and* $h > 0$,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left\{1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K}\left|F\left(\underline{\zeta}(s + ih\gamma_k, \underline{\alpha})\right) - f(s)\right| < \varepsilon\right\} > 0.$$

In the master thesis we obtain universality theorem for one more class of operators $F : H^r(D) \to H(D)$.

Theorem 7. *Suppose that the estimate* (1.1) *is valid, the set* $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ *is linearly independent over* $\mathbb{Q}$, *and* $F : H^r(D) \to H(D)$ *is a continuous operator such that each polynomial* $p = p(s)$ *has its preimage* $F^{-1}\{p\}$. *Let* $K \in \mathcal{K}$ *and* $f(s) \in H(K)$. *Then, for all* $\varepsilon > 0$ *and* $h > 0$,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left\{1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K}\left|F\left(\underline{\zeta}(s + ih\gamma_k, \underline{\alpha})\right) - f(s)\right| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Moreover, the limit

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left\{1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K}\left|F\left(\underline{\zeta}(s + ih\gamma_k, \underline{\alpha})\right) - f(s)\right| < \varepsilon\right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

Literatūra

[1] B. Bagchi, *The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and allied Dirichlet series*, Ph.D. Thesis, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981.

[2] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York, 1968.

[3] J. W. S. Cassels, Footnote to a note of Davenport and Heilbronn, *J. London Math. Soc.* **36** (1961), 177–184.

[4] H. Davenport, H. Heilbronn, On the zeros of certain Dirichlet series, *J. London Math. Soc.* **11** (1936), 181–185.

[5] R. Garunkštis, A. Laurinčikas, R. Macaitienė, Zeros of the Riemann zeta-function and its universality, *Acta Arith.* **181** (2017), no. 2, 127–142.

[6] S. M. Gonek, *Analytic properties of zeta and L-functions*, Ph.D. Thesis, University of Michigan, Ann Arbor, 1979.

[7] A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1996.

[8] A. Laurinčikas, On discrete universality of the Hurwitz zeta-function, *Results Math.* **72** (2017), no. 1–2, 907–917.

[9] A. Laurinčikas, Zeros of the Riemann zeta-function in the discrete universality of the Hurwitz zeta-function, *Stud. Sci. Math. Hung.* **57** (2020), no. 2, 147–164.

[10] A. Laurinčikas, R. Macaitienė, The discrete universality of the periodic Hurwitz zeta-function, *Integral Tranforms Spec. Funct.* **20** (2009), no. 9–10, 673–686.

[11] A. Laurinčikas, L. Meška, Sharpening of the universality inequality, *Math. Notes* **96** (2014), no. 5–6, 971–976.

[12] A. Laurinčikas, L. Meška, On the modification of the universality of Hurwitz zeta-functions, *Nonlinear Analysis: Model. Control* **21** (2016), no. 4, 564–576.

[13] R. Macaitienė, D. Šiaučiūnas, Joint universality of Hurwitz zeta-functions and nontrivial zeros of the Riemann zeta-function, *Lith. Math. J.* **59** (2019), no. 1, 81–95.

[14] R. Macaitienė, D. Šiaučiūnas, Joint universality of Hurwitz zeta-functions and nontrivial zeros of the Riemann zeta-function. II, *Lith. Math. J.* (priimtas spaudai).

[15] S. N. Mergelyan, Uniform approximations to functions of a complex variable, *Amer. Math. Soc. Translation* **1954**, (1954) no. 101, 99 pp.

[16] H. L. Montgomery, The pair correlation of zeros of the zeta function, in: *Analytic Number Theory* (ed. H.G. Diamond), Proc. Sympos. Pure Math., vol. XXIV, Amer. Math. Soc., Providence (1973), 181–193.

[17] A. Nagelė, L. Papreckienė, *Kompleksinio kintamojo funkcijų teorija*, Žara, Vilnius, 1996.

[18] A. Reich, Werteverteilung von Zetafunktionen, *Arch. Math.* **34** (1980), 440–451.

[19] J. Steuding, *Value-Distribution of L-Functions*, Lecture Notes Math. vol. 1877, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2007.

[20] S. M. Voronin, Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem.* **39** (1975), no. 3, 475–486.