

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS METODIKOS KATEDRA

Svetlana Roman

DUFFINGO LYGTIES SPRENDINIŲ SINCHRONIZAVIMAS

Magistro baigiamasis darbas

Vadovas
prof. habil. dr. Feliksas Ivanauskas

VILNIUS 2007

TURINYS

ĮVADAS.....	3
1. PIRMA DALIS	5
1.1. Uždavinio formulavimas	5
1.2. Parametrų parinkimas	6
1.3. Rezultatai	6
1.3.1. Pirmas atvejis (Poveikis pastovaus ženklo).....	6
1.3.2. Antras atvejis (Alternuojantis poveikis)	9
2. ANTRA DALIS	13
3. TREČIA DALIS	18
4. KETVIRTA DALIS (Konservatyvus dėsnis)	22
5. KRAŠTINIO UŽDAVINIO SPRENDIMO ALGORITMAS	23
IŠVADOS	25
REZIUMĖ	26
LITERATŪROS SĄRAŠAS	27
Priedas Nr.1	

IVADAS

Viena iš pagrindinių chaotinių sistemų yra Duffingo lygtis. Duffingo lygtis – tai antro laipsnio netiesinė diferencialinė lygtis. Be to tai yra dinaminė sistema, kurioje nagrinėjamas chaotinis elgesys.

Duffingo lygties pagrindinė forma yra:

$$\boxed{\phantom{\text{Duffingo lygties pagrindinė forma yra:}}}, \quad (1)$$

kur ω , β , α , ψ ir \square – konstantos.

Ši lygtis aprašo osciliatorių judėjimą su žymiai sunkesniu potencialu negu paprastame harmoniniame judėjime.

Duffingo lygtis neturi tikslo sprendimo, bet egzistuoja daug gerų apytikslių sprendimo metodų:

1. Skaidymas į Furje eilutę.
2. Kai narys prie \square artimas nuliui. Tada sistema nagrinėjama kaip sujaudintas paprastas harmoninis osciliatorius.
3. Frobenius metodas. Šitas metodas siūlo sudėtingą, bet įmanomą sprendimą.
4. Gali būti naudojamas vienas iš skaitinių sprendimų metodų, tokiu kaip Niutono arba Rungės-Kutos metodų.
5. Specialiu atveju, kai $\alpha = 0$ ir $\psi = 0$, Duffingo lygties sprendinys gali būti gautas naudojant elipsines Jakobio funkcijas.

Chaotinių sistemų sinchronizavimo problemą tyrė daug įvairių mokslininkų daugeliuose srityse: fizikoje, biologijoje, chemijoje, medicinoje, buvo parašyta daug mokslinių darbų, tokių kaip:

[2] („Chaos synchronization of two stochastic Duffing oscillators by feedback control“, Cunli Wu, Tong Fang);

[1] („Chaos control in the uncertain Duffing oscillator“, S.Bowong, FMM.Kakmeni, JL.Dimi);

[3] („A general solution of the Duffing equation“, A.Elias-Zuniga);

ir kt.

Tong Fang ir Cunli Wu savo darbe nagrinėjo dviejų stochastinių Duffingo sistemų sinchronizavimą su aprėžtais atsitiktiniais parametrais. Gegenbauer aproksimavimu jie transformavo stochastinį Duffingo sistemą į ekvivalentinį determinuotą netiesinį sistemą ir panaudojo Liapunovo modelio strategiją per grįžtamojo ryšio kontrolę. Jie parodė, kad ši

strategija yra efektyvus būdas sinchronizuoti dvi Duffingo sistemas su skirtingomis pradinėmis sąlygomis.

S.Bowong, FMM.Kakmeni, JL.Dimi darbe teorinėje ir skaitinėje formoje, remiantis stabilumo Liapunovo teorija, išanalizavo pakankamas sąlygas glodžios periodinės orbitos atsekimui. Atvirkštinio sąryšio kontrolės dėsnis buvo sudarytas iš dinaminio kompensatoriaus ir kontrolės. Be to buvo apskaičiuotas kontrolės laikas. S.Bowong, FMM.Kakmeni, JL.Dimi pateikė modeliavimo rezultatus, kad patikrinti pasiūlytos schemos dėsningumą.

Duffingo lygties sprendinio gavimui A.Elias-Zuniga pritaikė elipsinį balansinį metodą ir nagrinėjo silpną ir stiprų netiesiškumą. Tam jis padarė prielaidą, kad Jakobiano elipsinių funkcijų modelis lėtai keičiasi kaip laiko funkcija. Be to jis palygina sprendinius, taikant kompiuterinį ir skaitinį metodus. Taip pat buvo pasinaudota Furjė eilutė.

Magistro darbe nagrinėsime Duffingo lygties atskirą atvejį. Priklausomai nuo pradinių sąlygų ir parametrų parinkimo tirsime lygties sprendinių sinchronizavimą, kai veikia papildomos jėgos. Mus domina kokie parametrai įtakoja sprendinių sinchronizavimui, kiek laiko reikalaujama kad sprendinių skirtumas konverguotų į nulį. Be to ištirsime ar sprendinių apvalinimas sugreitina jų sinchronizavimą. Tam sukursime algoritmą Maple programoje, kuris apskaičiuos sprendinius ir paklaidas bendru atveju.

Magistro darbą suskirsime į penkias pagrindines dalis:

1. Pirmoje dalyje nagrinėsime Duffingo lygtį su k skirtingomis pradinėmis sąlygomis. Naudojant skaitinį metodą, apskaičiuosime šių sistemų sprendinius ir jų skirtumus. Be to ištirsime sprendinių sinchronizavimą ir sinchronizavimo sritį alternuojančio poveikio bei poveikio pastovaus ženklo atveju.
2. Antroje dalyje tirsime Duffingo lygtį su pradinėmis sąlygomis, turinčiomis mažiausią energiją. Tam paimsime tik dvi pradines sąlygas ir nagrinėsime laiko reikšmes, kai sprendinių skirtumas konverguoja į nulį. Priklausomai nuo apvalinimo ir kitų parametrų ištirsime kaip keičiasi dviejų sprendinių sutapimo laikas. Šitoje dalyje pagrindinį dėmesį skirsime dažniui τ .
3. Trečioje dalyje analogiškai kaip pirmoje imsime k uždavinius su k skirtingomis pradinėmis sąlygomis ir kiekvienu atveju apskaičiuosime sprendinio periodą bei energiją. Patikrinsime ar išsaugotas tvermės dėsnis. Taip pat ištirsime kaip elgiasi energijos grafikai, priklausomai nuo pradinių sąlygų ir laiko t parinkimo.
4. Ketvirtoje dalyje pateiksime dar vieną metodą Duffingo lygties sprendimui.
5. Penktoje dalyje aprašysime kraštinio uždavinio sprendimo algoritmą Maple programoje. Pirmoje ir trečioje dalyje nagrinėsime homogeninį Duffingo lygtį.

1 PIRMA DALIS

1.1 UŽDAVINIO FORMULAVIMAS

Nagrinėsime Duffingo lygties atskirą atvejį:

$$\boxed{}, t > 0 \quad (2)$$

čia α – trintis, $\alpha = \text{const} > 0$.

Tai yra antros eilės netiesinė lygtis.

Ieškosime (2)-os lygties sprendinius $y_k(t)$, kurie tenkina (2) lygtį srityje $t > 0$ ir pradinės sąlygas

$$\boxed{} \quad (3)$$

čia $k = 1, 2, 3, \dots, n$, o y_k ir y_k' – duoti skaičiai.

Turime k skirtingus uždavinius su k skirtingomis pradinėmis sąlygomis. (2), (3) uždavinio sprendimui taikysime šį poveikio metodą: įvedame tinklą su žingsniu $\tau > 0$ pagal kintamąjį t ir tinklo taškus

$$\boxed{}, i = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

Iš pradžių apskaičiuojame sprendinių reikšmes $y_k(t_1)$, $y_k'(t_1)$. Tada atliekame sprendinių korekciją pagal šias formules (keičiame išvestinės reikšmę taške t_1).

$$\boxed{} \quad (5)$$

čia β ir r_1 – konstantos ir $0 < \beta < 1$, $r_1 > 0$.

Į dešinę pusę įeina visos žinomos reikšmės. Todėl galima apskaičiuoti $\boxed{}$ ir $\boxed{}$. Dabar imkime $i = 2$ ir apskaičiuojame sprendinių reikšmes taške t_2 . Vėl atliekame sprendinių korekciją pagal formules:

$$\boxed{}$$

čia β ir r_2 – konstantos ir $0 < \beta < 1$, $r_2 > 0$.

Į dešinę pusę vėl įeina visos žinomos reikšmės, todėl nuosekliai galima apskaičiuoti reikšmes $\boxed{}$ ir $\boxed{}$ pagal formules

$$\boxed{\phantom{\text{[Empty box]}}}$$

(6)

čia β ir r_i – konstantos ir $0 < \beta < 1$, $r_i > 0$, $i = 1, \dots, m$ ir taip tęsiame toliau, kol apskaičiuosime visas funkcijos y_k , $k = 1, \dots, n$ reikšmes intervale $[0, t_m]$.

1.2 PARAMETRŲ PARINKIMAS

Tarkime $\boxed{\phantom{\text{[Empty box]}}}$, $\boxed{\phantom{\text{[Empty box]}}}$, $k = 1, \dots, n$. Tada (3) pradinės sąlygas galima užrašyti taip:

$$\boxed{\phantom{\text{[Empty box]}}}$$

(7)

Tarkime, kad trintis α ir dažnis τ yra pastovios konstantos ir lygios $\alpha = 1$, $\tau = 0.1$, o parametrai β ir r_i , $i = 1, \dots, m$ keičiasi.

Išnagrinėsime (2), (7) uždavinio sprendinius, kai β yra fiksuotas skaičius ir lygus $\beta = 0.5$.

1.3 REZULTATAI

Nagrinėsime 2 atvejus:

1. Kai $r_i = 1, \dots, p$.

2. Kai $\boxed{\phantom{\text{[Empty box]}}}$, čia $d = 1, \dots, p$.

1.3.1 PIRMAS ATVEJIS (Poveikis pastovaus ženklo)

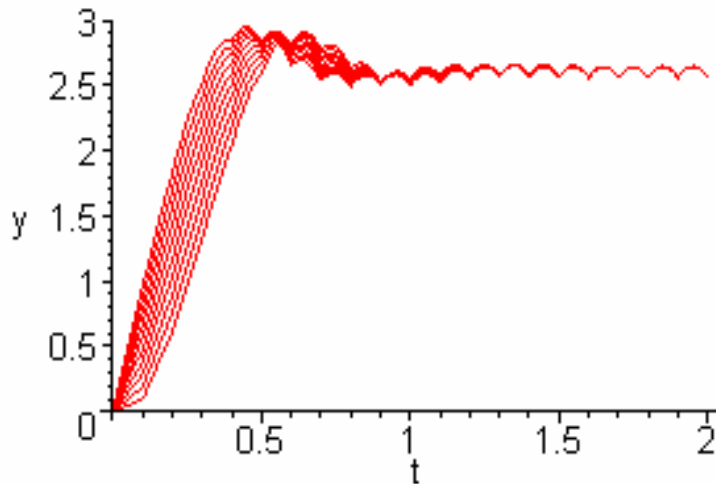
Imkime pirmą atvejį.

Tarkime $k = 1, \dots, 10$ ir $r_i = 5$, $i = 1, \dots, m$. Imkime laiko intervalą $\boxed{\phantom{\text{[Empty box]}}}$. Tada iš (4) formulės apskaičiuosime m . Iš lygybių

$\boxed{\phantom{\text{[Empty box]}}}$ ir $\boxed{\phantom{\text{[Empty box]}}}$ gauname, kad $\boxed{\phantom{\text{[Empty box]}}}$. Kadangi $\tau = 0.1$, tai

$$\boxed{\phantom{\text{[Empty box]}}}$$

Išsprendę Duffingo lygtį anksčiau aprašytų metodų su fiksuotais parametrais gausime sprendinius, kurie grafiškai atrodo taip:

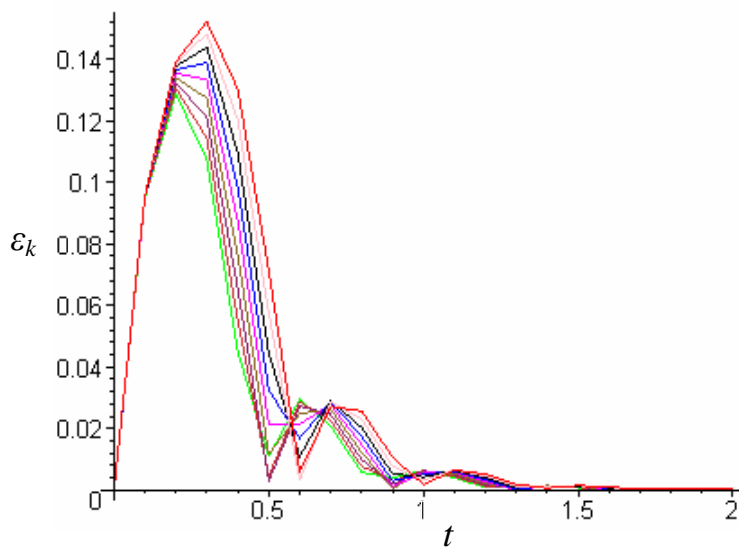


1 br. Sprendinių grafikai pagal laiką t ir sprendinius y_k , kai $r_i = 5$.

Šitame brėžinyje visi sprendiniai y_k , $k = 1, \dots, 10$, laikui t bėgant, konverguoja į vieną sprendinį. Rasime šių sprendinių skirtumus. Skirtumus kiekviename laiko t taške ieškome pagal formulę:

$$\boxed{}, i = 0, \dots, m, k = 2, \dots, n. \quad (8)$$

Tada gausime tokius skirtumų grafikus:



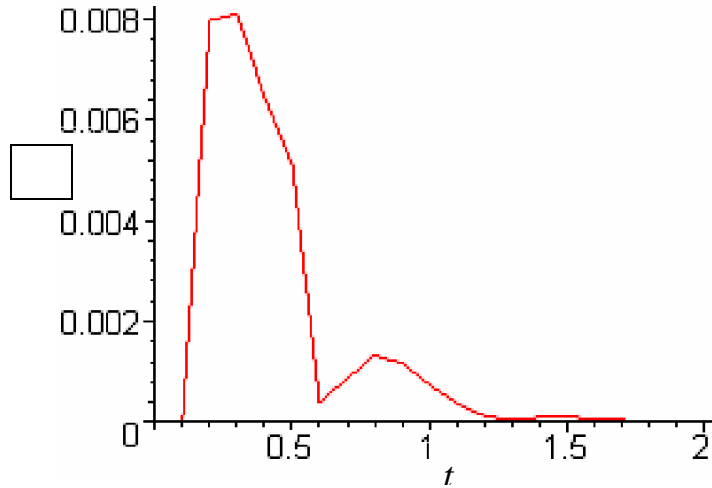
2 br. Skirtumų grafikai pagal laiką t ir skirtumus ϵ_k , kai $r_i = 5$.

Matome, kad visi sprendinių skirtumai ϵ_k , $k = 2, \dots, 10$ artėja į nulį, kai laikas t didėja.

Išnagrinėsime atvejus, kai parametrai r_i ir β keičiasi.

Pakeiskime skaičių r_i . Didinat r_i gauname, kad iki konkretaus skaičiaus $r = b$ iš intervalo $[1..p]$, skirtumai mažėja, o po to pradeda didėti.

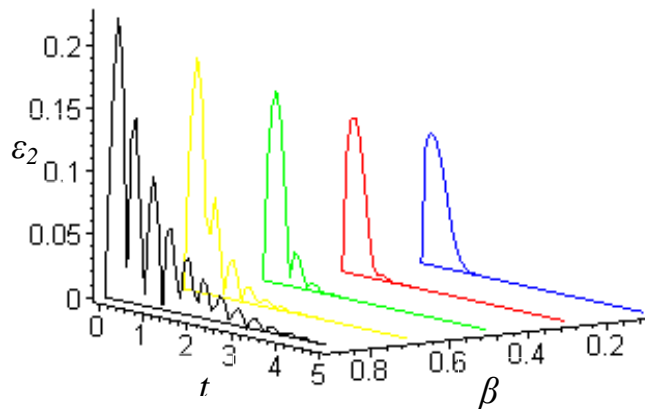
Galima rasti tokius parametrus r_i ir k , kad skirtumai įgys kuo mažesnes reikšmes.



3 br. Skirtumo ε_{192} grafikas pagal laiką t ir skirtumą ε_{192} , kai $r_i = 121$.

Čia pavaizduotas sprendinių y_{191} ir y_{192} skirtumas , kai . Grafiko didžiausia reikšmė yra . Todėl galima sakyti, kad su tokiais parametrais kaip $\alpha = 1$, $\tau = 0.1$, $\beta = 0.5$, $k = 191, \dots, 192$, $r_i = 121$, skirtumas yra labai mažas.

Jeigu pakeisime dar skaičių , gausime, kad skirtumai didėja, augant skaičiui β .



4 br. Skirtumo ε_2 grafikai pagal laiką t , skirtumą ε_2 ir β , kai $r_i = 5$.

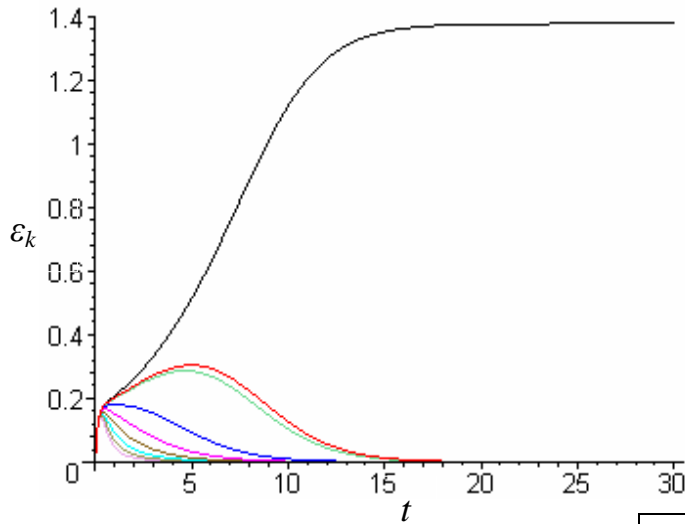
Iš šio brėžinio matome, kad mėlynas ir juodas grafikai žymiai skiriasi tarpusavyje ir tai priklauso nuo dydžio β . Mėlynas grafikas yra skirtumo ε_2 grafikas, kai $\beta = 0.1$, o juodas, kai $\beta = 0.9$.

1.3.2 ANTRAS ATVEJIS (Alternuojantis poveikis)

Dabar panagrinėkime antrą atvejį.

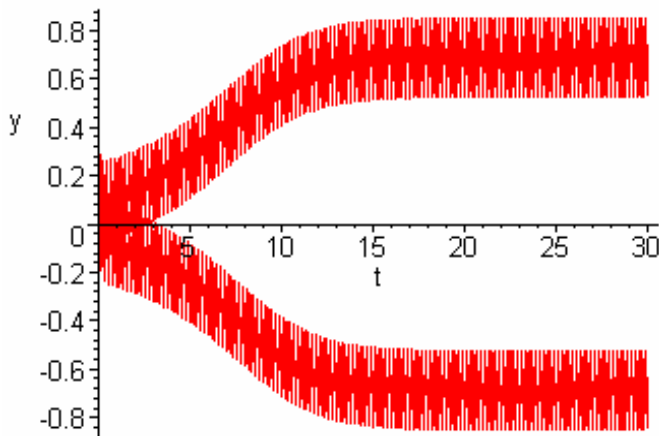
Tarkime $\beta = 0.5$, $k = 1, \dots, 10$ ir , $i = 1, \dots, m$.

Šiuo atvejų skirtumų grafikai atrodo taip:



5 br. Skirtumų grafikai pagal laiką t ir skirtumus ε_k , kai .

Šitame brėžinyje juodas grafikas yra skirtumo grafikas. Matome, kad jis, laikui t bėgant, didėja, o visi kiti skirtumai artėja į nulį. Taip atsitinka dėl to, kad sprendiniai y_2 ir y_3 išsiskiria. Tai matome iš šio brėžinio:



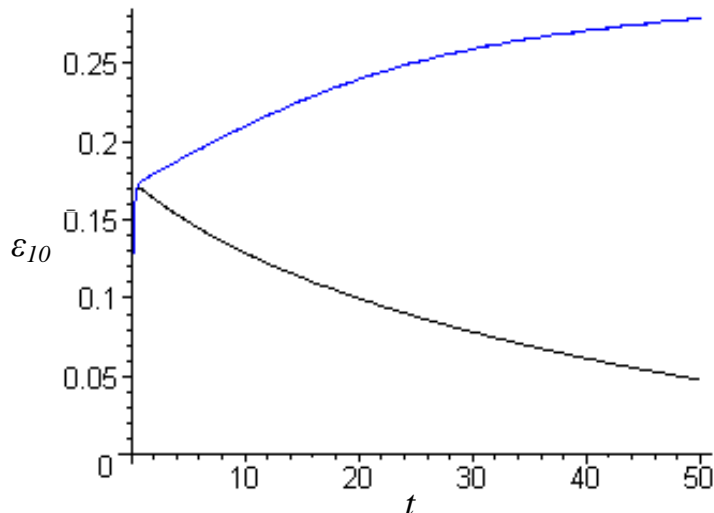
6 br. Sprendinių y_2, y_3 grafikai pagal laiką t ir sprendinius y_k , $k = 2, 3$, kai .

Pastebėsime, kad sprendiniai y_2 ir y_3 yra skirtingose pusplokštumose, t.y. y_2 – neigiamoje, o y_3 – teigiamoje pusplokštumose. Todėl skaičiuojant skirtumą ε_3 intervale $[0, 30]$ pagal (8) formulę gauname, kad ε_3 didėja, laikui t augant. Jei du sprendiniai $y_k, y_{k-1}, k = 1, \dots, n$ patenka į vieną pusplokštumą, tai skirtumas mažėja.

Galima rasti tokį r_i , kad visi skirtumai artės į nulį. Kai $k = 1, \dots, 10$, tokia reikšmė bus

Palyginus 2 grafikus matome, kai (mėlynas grafikas) ε_{10} didėja, o kai

(juodas grafikas) jis jau mažėja.



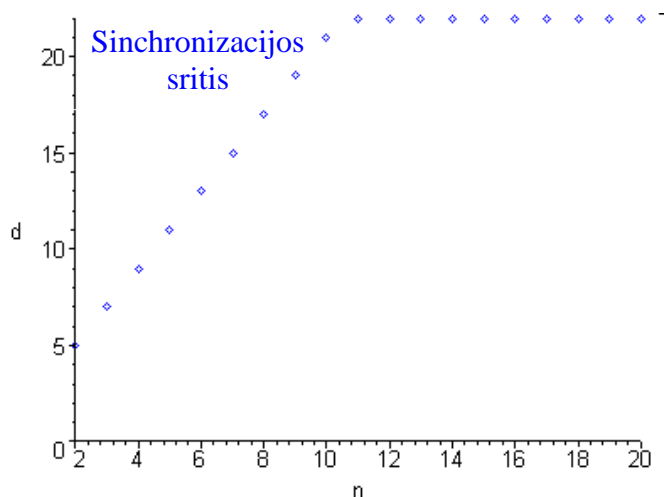
7 br. Skirtumo ε_{10} grafikai pagal laiką t ir skirtumą ε_{10} , priklausomai nuo r_i parinkimo.

(juodas , mėlynas)

Kokią išvestinės reikšmę taške nulyje bepaimtume, visada galima rasti tokį

, kad visi skirtumai artės į nulį. Pavyzdžiui, imant $k = 1, \dots, 6$ tokia reikšmė

bus



8 br. Synchronizavimo režimo grafikas pagal n ir d .

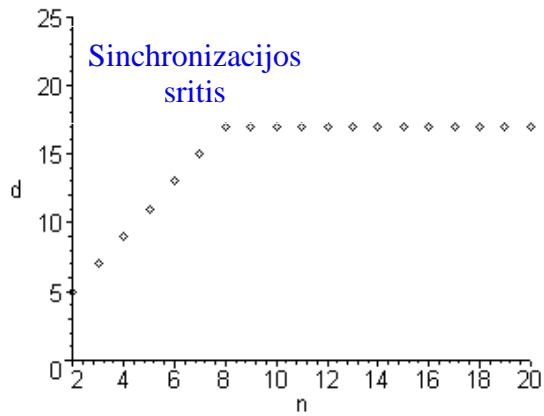
Šis brėžinys rodo, kaip keičiasi reikšmė d priklausomai nuo n . Kai , d didėja, o po to, kai , d visada lygi 22. Tai reiškia kad kiekvienam $k = 1, \dots, n$,

Pakeisime skaičių . Tada gausime, kad skaičiui β augant, dydis d didės.

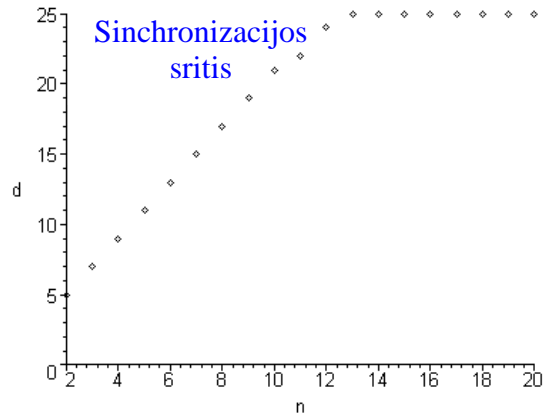
Lentelė Nr.1: Dydžio d reikšmės, kai visi sprendiniai artėja į vieną sprendinį.

$n \backslash \beta$	0.1	0.3	0.5	0.7
2	5	5	5	5
3	7	7	7	7
4	9	9	9	9
5	11	11	11	11
6	13	13	13	13
7	15	15	15	15
8	17	17	17	17
9	17	19	19	19
10	17	19	21	21
11	17	19	22	22
12	17	19	22	24
13	17	19	22	25
14	17	19	22	25
15	17	19	22	25
16	17	19	22	25
17	17	19	22	25
18	17	19	22	25
19	17	19	22	25
20	17	19	22	25

Iš šios lentelės matome, kaip keičiasi d priklausomai nuo β ir n . Pavyzdžiui, jei paimsime $\beta = 0.7$ ir $n = 9$, gausime, kad $d = 19$. Tai reiškia, kad .



9 br. Synchronizavimo režimo grafikas pagal n ir d kai $\beta = 0.1$.



10 br. Synchronizavimo režimo grafikas pagal n ir d , kai $\beta = 0.7$.

Iš lentelės ir šitų brėžinių gauname, kai (9 br.) pastovus dydis

, o kai (10 br.) . Tai reiškia, kad pastovus dydis r_i didėja, kai β auga.

2 ANTRA DALIS

Dabar panagrinėkime (1) homogeninį Duffingo lygtį:

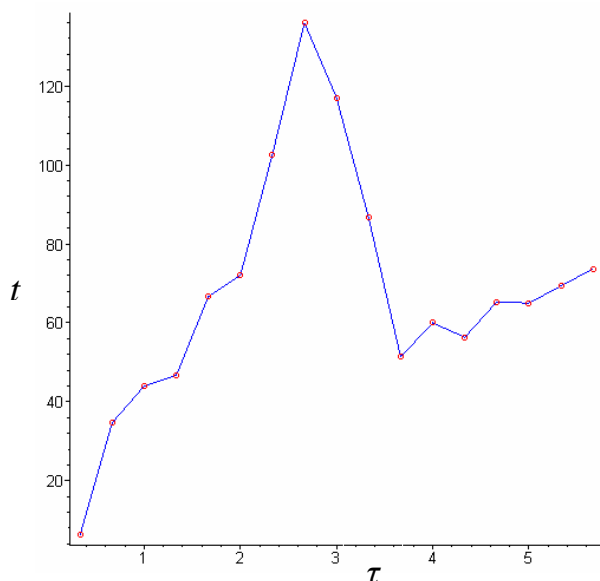
$$\boxed{}, t > 0$$

su pradinėmis sąlygomis

$$\boxed{} \text{ ir } \boxed{}. \quad (9)$$

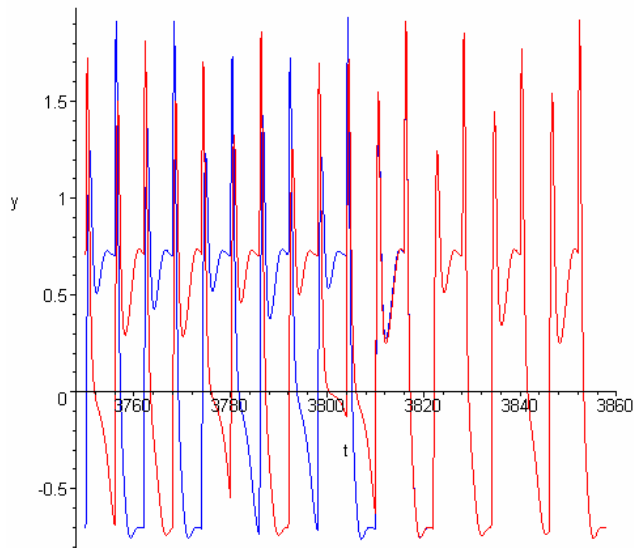
Tarkime reikšmės $\boxed{}$ ir $\boxed{}$, kur $\boxed{}$ - atsitiktinis dydis, o dažnis τ keičiasi intervale $(0,6]$ su žingsniu $\boxed{}$.

Taikant poveikio metodą, kuris yra aprašytas pirmoje dalyje, apskaičiuojame (2), (9) sistemų sprendinius y_1 ir y_2 bei jų skirtumą pagal (8) formulę kiekvienam dažniui τ . Kiekvienu atveju surandame tokį laiką t , kad dviejų sistemų sprendinių skirtumas būtų lygus nuliui, t.y. sprendiniai suartėtų. Šiuo atveju su aukščiau aprašytais parametrais gauname tokį sprendinių sutapimo fazinį vaizdą:



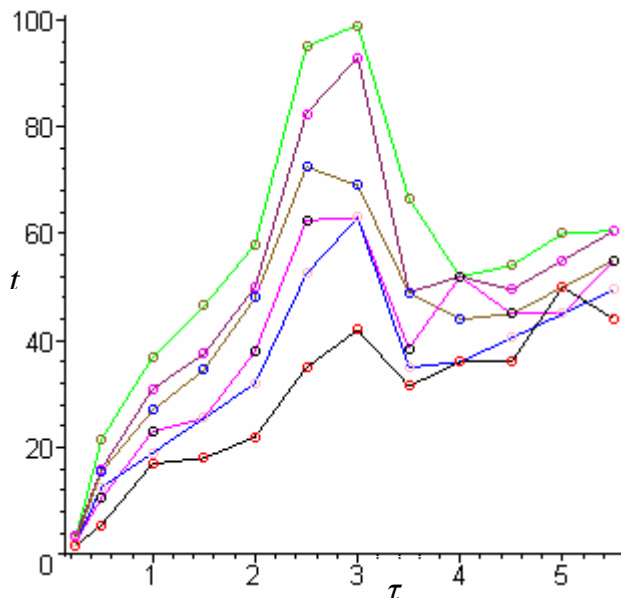
11 br. Sprendinių sutapimo grafikas pagal τ ir t , kur $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$.

Pastebėsime, kad laikas, reikalingas sprendiniams sutapti, yra nemonotoniška funkcija. Be to, kai $\boxed{}$ sprendinių skirtumas greičiau konverguoja į nulį, negu kai $\boxed{}$. Čia τ priklauso intervalui $\boxed{}$. Jeigu paimsime $\boxed{}$, sutapimo laikas pradeda staigiai didėti. Pavyzdžiui, kai $\boxed{}$ laikas yra $t = 3840$. Brėžinys 12 rodo kaip elgiasi dviejų sistemų sprendiniai intervale $[3750, 3858]$.



12 br. Sprendinių y_1 , y_2 grafikai pagal laiką t ir sprendinius y_k intervale $[3750, 3858]$.

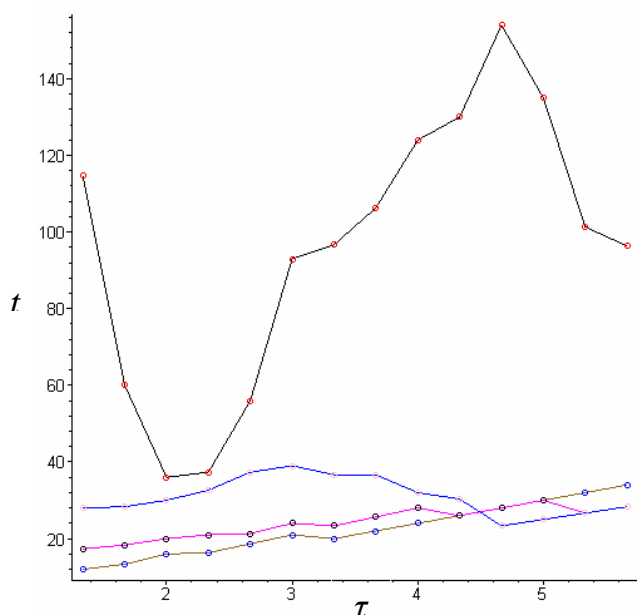
Jeigu kiekviena karta, naudojant (6) formulę darysime reikšmių $y(t_i)$ ir $y'(t_i)$ apvalinimą iki konkretaus skaičiaus s po kablelio, tai gauname brėžinį, iš kurio matome, kad apvalinant reikšmes iki 3 skaičių po kablelio, reikalaujama mažiau laiko, kad sprendiniai sutaptų, negu apvalinant iki 8 (*13 br.*: žalias grafikas – apvalinimas iki 8 skaičių po kablelio, juodas – iki 3 skaičių).



13 br. Sprendinių sutapimo grafikai pagal τ ir t , apvalinant sprendinius iki s skaičiaus po kablelio. (žalias $s = 8$, raudonas $s = 5$, juodas $s = 3$)

Pastebėsime, kad kompiuteris Maple programoje visas reikšmes dažniausiai apvalina iki 10 skaičių po kablelio. Tolimesniame darbe naudosime kompiuterinį apvalinimą rezultatams gauti.

Pakeisime trintį α , kai visi kiti parametrai išlieka pastovūs. Tada iš 14 brėžinio galima padaryti išvadą, kad sutapimo laikas t mažėja, kai α didėja.



14 br. Sprendinių sutapimo grafikai pagal τ ir t , priklausomai nuo α parinkimo. (juodas $\alpha = 1$, mėlynas $\alpha = 3$, raudonas $\alpha = 5$, rudas $\alpha = 7$)

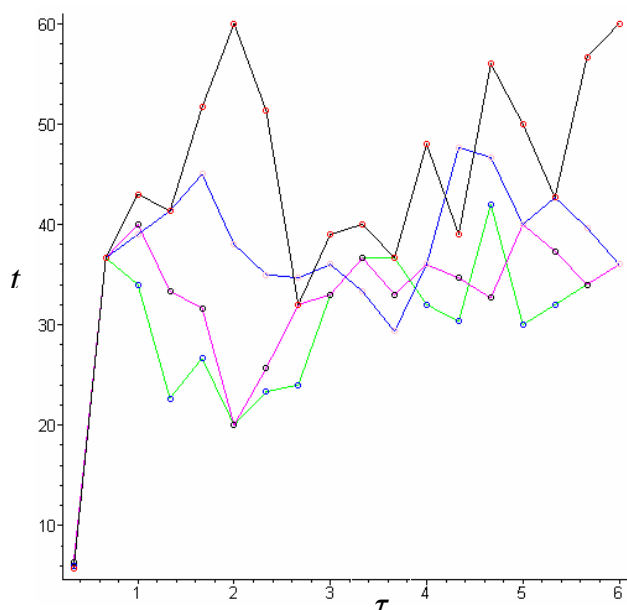
Matome kad sutapimo laikas, kai $\alpha = 1$ (juodas grafikas) yra daug didesnis negu kai $\alpha = 7$ (rudas grafikas).

Įveskime dešinėje pusėje papildomą narį (jėgą) . Paimkime $\alpha = 2$, $\omega = 1$,

, o ψ apibrėžkime žemiau. Tada Duffingo lygtis atrodo taip:

$$\ddot{x} + \psi \dot{x} + x = \cos(\omega t) + \epsilon \cos(\omega t) \cos(x)$$

Keisdami ψ , gauname tokį sprendinių sutapimo fazinį vaizdą:



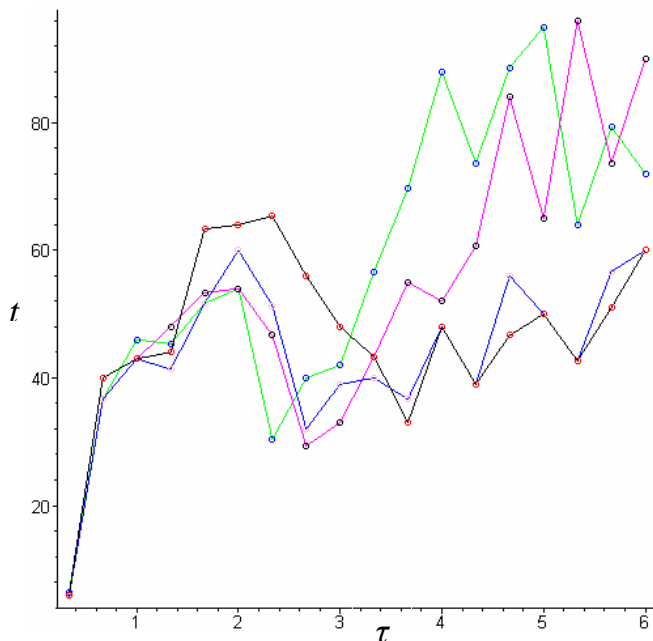
15 br. Sprendinių sutapimo grafikai pagal τ ir t , priklausomai nuo ψ parinkimo. (juodas $\psi = 1$, mėlynas $\psi = 2$, raudonas $\psi = 3$, žalias $\psi = 4$)

Iš šio brėžinio turime, kad augant ψ , sutapimo laikas t mažėja. Jeigu šioje vietoje pritaikyti reikšmių $y(t_i)$ ir $y'(t_i)$ apvalinimą iki 5 skaičių po kablelio, turėsime, kad beveik dvigubai mažiau reikalaujama laiko, kad sprendiniai sutaptų.

Apibendrinant šiuos du atvejus, galima tvirtinti, kad sprendinių sinchronizavimas bus greičiausias, kai parametrai α ir ψ gana dideli.

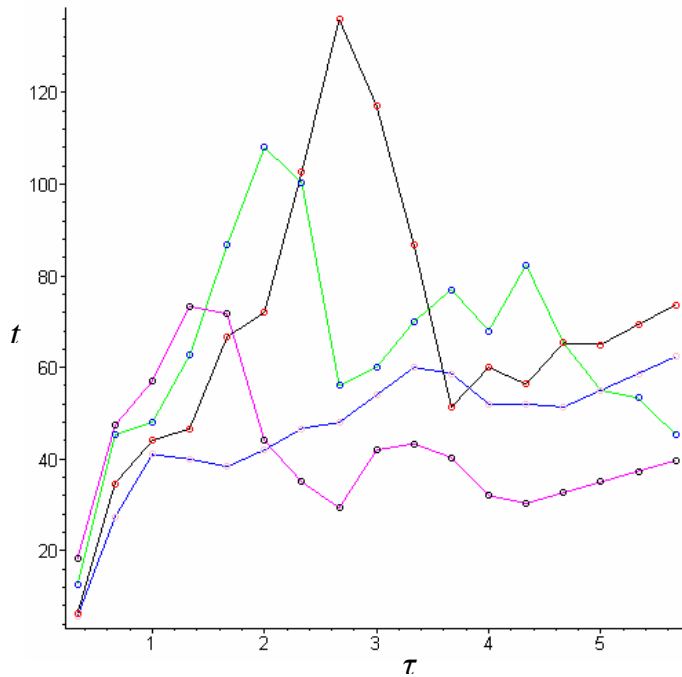
Taip pat buvo atlikti skaičiavimai, iš kurių buvo pastebėta kad β ir γ beveik nedaro įtakos laikui, per kurį sprendiniai sutampa.

Panagrinėkime parametro ω įtaką. Gauname, kad kai $\alpha = 2$, $\psi = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, sprendinių sinchronizavimas yra geriausias. Jeigu paimti $\beta = 1$ arba $\gamma = 1$ sutapimo laikas yra daug didesnis, negu kai $\beta = 1$ ir $\gamma = 1$. (16 br)



16 br. Sprendinių sutapimo grafikai pagal τ ir t , priklausomai nuo ω parinkimo. (juodas $\omega = 0.8$, mėlynas $\omega = 1$, raudonas $\omega = 1.2$, žalias $\omega = 1.4$)

Paimsime skirtingus α ir ψ ir panagrinėsime kaip keičiasi sutapimo laikas. Negalima tvirtinti, kad atskirai keičiant d arba plusą ir minusą laikas keičiasi į didesnę ar mažesnę pusę. Tik keičiant kartu šias reikšmes galima pasiekti geresnius sinchronizavimo rezultatus.



17 br. Sprendinių sutapimo grafikai pagal τ ir t , priklausomai nuo parinkimo.

(juodas , mėlynas , raudonas , žalias ,)

Matome, kad jeigu imti su plusu, tai kai $d = 10$ laikas, kai sprendinių skirtumas lygus nuliui, yra mažesnis negu kai $d = 5$. Ir atvirkščiai, jeigu imti su minusu, tai kai $d = 10$ laikas didesnis negu kai $d = 5$. Todėl sutapimo laiko didėjimas arba mažėjimas nesusiję su parinkimu. Tačiau vis tiek galima rasti mums palankiausias reikšmes. Bet tai nepaprasta padaryti, nes sunku pastebėti keitimo dėsninę.

Pakeiskime nežymiai pradines sąlygas, t.y. pridėkime prie esamų pirmų pradinių sąlygų skaičių c , kuris priklauso intervalui $[0, 1]$. Tada .

Keičiant c nuo nulio iki vieneto gauname, kad kai $c = 0.8$ sprendinių skirtumas greičiausiai konverguoja į nulį. Bet šis parametras nedaro didelės įtakos sprendinių sinchronizavimui palyginus su α .

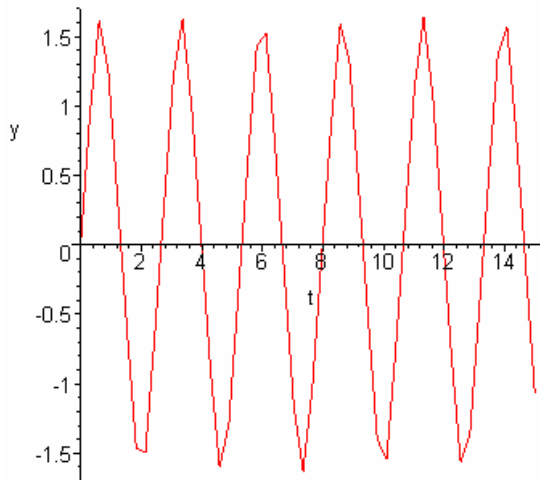
3 TREČIA DALIS

Nagrinėsime Duffingo lygtį kai \square ir \square , t.y.

$$\square, t > 0 \quad (10)$$

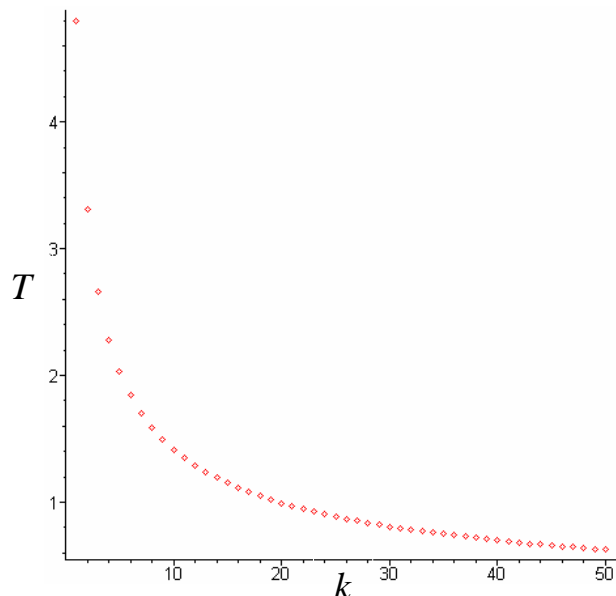
su (7) pradinėmis sąlygomis \square .

Šias sistemas išsprendžiame, sukuriant paprastą algoritmą Maple programoje. Gauti sprendiniai yra periodinės funkcijos. Tai matome iš sprendinio grafiko, kai \square .



18 br. Sprendinio grafikas pagal laiką t ir sprendinį y_3 .

Šios funkcijos periodai nėra vienodi, bet jie keičiasi nežymiai. Apskaičiuosime tik pirmus periodus. Jiems gauti, buvo parašytos dvi procedūros, kurių esmė yra surasti antras laiko t reikšmes, kai \square . Tada periodo grafikas, kuris priklauso nuo k , atrodys taip:



19 br. Periodo grafikas pagal k ir periodą T .

Matome, kad periodas T mažėja, kai k auga. Taip atsitinka dėl to, kad sprendiniai siaurėja. Apskaičiuosime energiją W ir integralą skaitiniu būdu pagal Simpsono formulę¹,

kuris apibūdina energijos mažėjimą. Energija skaičiuojama pagal formulę

$$\int_0^t \dots dt,$$

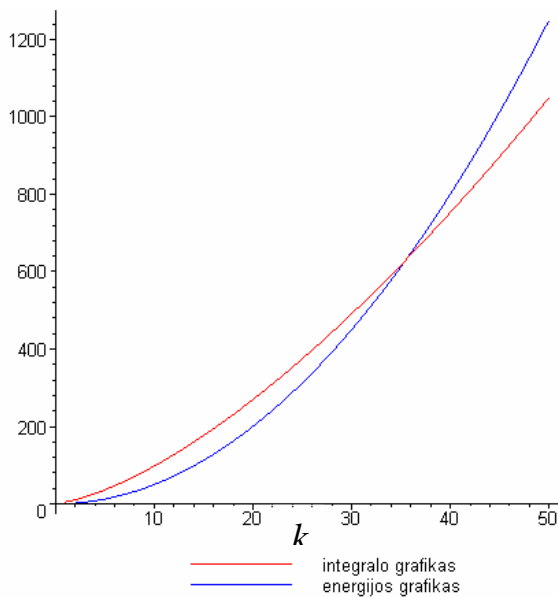
(11)

kur $\int_0^t \dots dt$.

(11) lygybė gaunama iš (10) diferencialinės lygties, padauginant ją iš ir integruojant intervale $[0, t]$.

Kadangi , turime kad $W(t) = W(0)$.

Tada integralo ir energijos grafikai, priklausomai nuo k , atrodoys taip:



20 br. Integralo ir energijos grafikai pagal k ir integralo bei energijos reikšmes.

Pastebėsime, kad iki energija yra mažesnė negu integralo reikšmės, o po yra didesnė.

¹Simpsono formulė:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)],$$

kur $\int_a^b f(x) dx$, n – būtinai lyginis skaičius.

Patikrinsime ar išsaugotas energijos tvermės dėsnis pagal formulę

$$\boxed{}$$

(12)

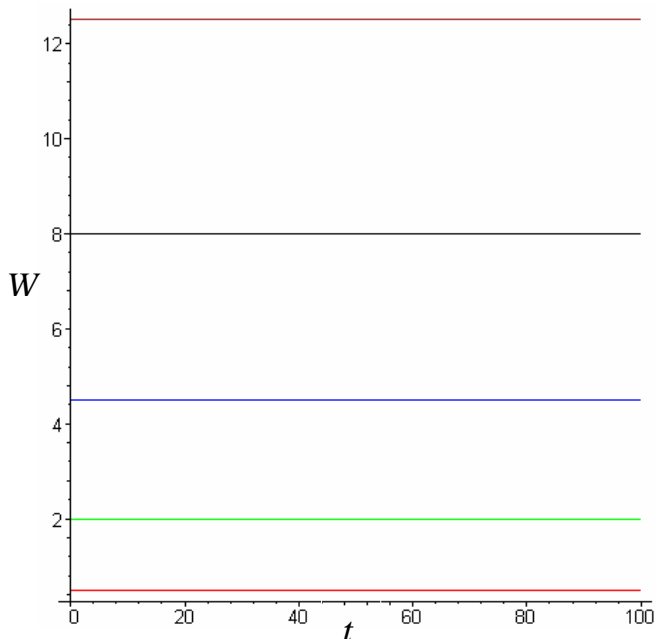
Žinome, kad integralas

$$\boxed{}$$

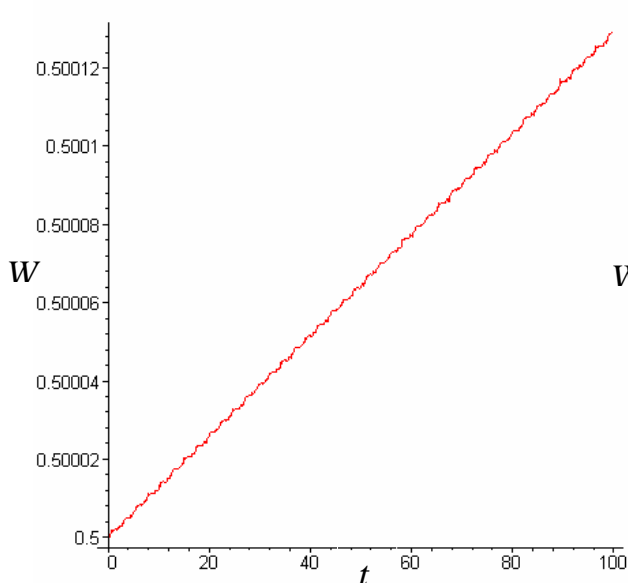
ir

$$\boxed{}$$

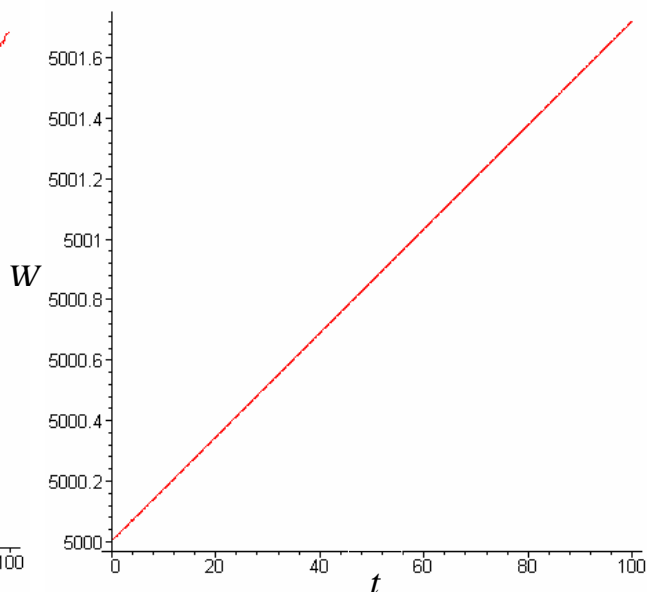
Todėl ir $\boxed{}$, $\boxed{}$ turi būti konstanta ir nepriklausyti nuo laiko. Patikrinsime, ar laikui bėgant energija (12) keičiasi.



21 br. Energijos grafikai pagal laiką t ir energiją W , priklausomai nuo k parinkimo (raudonas $k = 1$, žalias $k = 2$, mėlynas $k = 3$, juodas $k = 4$, rudas $k = 5$)



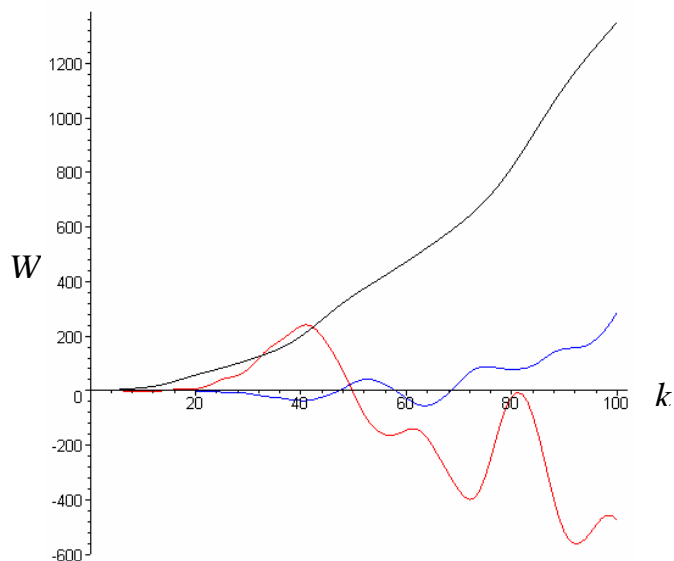
22 br. Energijos grafikas pagal laiką t ir energiją W , kai $k = 1$.



23 br. Energijos grafikas pagal laiką t ir energiją W , kai $k = 100$.

Iš 21, 22, 23 brėžinių matome, kad energija keičiasi nežymiai. Pavyzdžiui, kai $k = 1$ ir laikas energija , o kai $k = 100$. Todėl gauname, kad kuo k didesnis, tuo energijos keitimo intervalas didesnis ir tvermės dėsnis išsaugotas blogiau.

Jei (2) lygtyje paimsime , tai energija W apskaičiuojama pagal (11) formulę, o integralas šioje formulėje pagal Simpsono formulę. Tada imkime , , bei ir panagrinėkime kaip kinta energija priklausomai nuo k , kiekvienai laiko t reikšmei.



24 br. Energijos grafikai pagal k ir energiją W , priklausomai nuo t parinkimo. (juodas $t = 1$, mėlynas $t = 100$, raudonas $t = 200$)

Jeigu panagrinėti kitas laiko t reikšmes, pastebėsime kad energija W keičiasi skirtingai. Ji gali kaip didėti taip ir mažėti, nepriklausomai nuo laiko t parinkimo.

4 KETVIRTA DALIS (Konservatyvus dėsnis)

Duffingo lygties sprendimui taip pat galima naudoti ir konservatyvų dėsnį.

(2) Duffingo lygtį galima išreikšti skirtumine schema:

Padauginkime šią lygybę iš . Tada gauname:

Paskutinę lygybę padauginkime iš h ir susumuokime pagal i nuo 1 iki $n-1$. Gauname

Tada

Iš čia išplaukia

Gavome energiją, kuri yra išreikšta skirtumine schema ir yra analogiška (11)-ai formulei.

5 KRAŠTINIO UŽDAVINIO SPRENDIMO ALGORITMAS

(2), (7) uždavinio sprendimui buvo sukurtas algoritmas Maple 7 programoje [4]. Tam buvo parašyta programa su tokiais parametrais kaip $\alpha = 1$, $\tau = 0.1$, $\beta = 0.5$, $n = 10$, $m = 20$, $r_i = 5$.

Išnagrinėsime programą:

1. Iš pradžių buvo apibrėžta Duffingo lygtis, naudojant komandą **diff**:

```
>f:=diff(y(t),t,t)+alpha*diff(y(t),t)-2*y(t)+4*(y(t))^3=0;
```

2. Priskirti reikšmės parametrus α , τ , β , n , m , r_i .

3. Po to pagal (4) formulę įvestas tinklas t_i , $i = 1, \dots, m$. Programoje šis tinklas pažymėtas raide **T**.

```
>T:=seq(0+tau*i,i=0..m):
```

4. Tada buvo sukurtas dvigubas ciklas, kuris skaičiuoja sprendinių reikšmes $y_k(t_i)$, $y_k'(t_i)$ kiekviename laiko t taške, kai $k = 1, \dots, n$ ir brėžia sprendinių grafikus. Šiame cikle Duffingo lygties sprendimui naudojama komanda **dsolve**, o grafikams brėžti kiekviename laiko t intervale $\boxed{}$, $i = 0, \dots, m-1$ komanda **plots[odeplot]**. Šis ciklas atrodo taip:

```
>for k from 1 to n do
sal[k,0]:=y(0)=0,D(y)(0)=k;
F[k,1]:=dsolve({f,sal[k,0]},numeric);
for i from 1 to m do
sal[k,i]:=y(T[i+1])=rhs(F[k,i](T[i+1])[2]),
D(y)(T[i+1])=beta*rhs(F[k,i](T[i+1])[3])+r(i);
F[k,i+1]:=dsolve({f,sal[k,i]},numeric);
br[k,i-1]:=plots[odeplot](F[k,i],T[i]..T[i+1]);
od:
p[k]:=plots[display](seq(br[k,i],i=0..m-1));
od:
```

5. Visi sprendinių grafikai buvo pavaizduoti vienoje koordinatinių ašyje. Tam naudojama komanda **plots[display]**:

```
>plots[display](seq(p[k],k=1..n));
```

6. Paskui buvo apskaičiuoti sprendinių skirtumai kiekviename taške t_i , $i = 0, \dots, m$. Tam buvo sudaryta seka:

```
>seq(pakl[k]=seq(epsilon[k](T[i+1])=abs(rhs(sal[k,i][1])-
rhs(sal[k-1,i][1])),i=0..m),k=2..n):
```

7. Tada nubrėžti skirtumų grafikai:

```
>p1:=plots[display](seq(plot([seq([T[i],rhs(pakl[k][i])],
i=1..m+1)],style=[line],color=Col[k-1]),k=2..n)):
> plots[display](p1);
```

Čia spalvų parametras **Col** buvo apibrėžtas tokiu būdu:

```
> Col:=[red, pink, black, blue, magenta, sienna, maroon, orange,
green];
```

Visa programa pateikta *priede Nr.1*.

Naudojant šią programą galima apskaičiuoti (2), (7) uždavinio sprendinio reikšmes su įvairiais parametrais. Tam reikia pakeisti parametrus programos pradžioje.

Tačiau kai kuriems brėžiniams pavaizduoti negalima taikyti šios programos. Dažniausiai užtenka pakeisti ciklą. Norint nubrėžti 7 br. reikia pridėti dar vieną ciklą pagal d , kur



. Šiuo atveju ciklas pagal d bus nuo 20 iki 21 ir k nuo 9 iki 10. Kadangi 4 brėžinyje skirtumo grafikai yra pagal laiką t , skirtumą \square ir β , kai r_1 fiksuotas ir lygus 5, tai naudoti ciklą pagal d negalima, o reikia imti pagal β .

Antroje dalyje buvo nežymiai pakeista programa, t.y. pridėtas dar vienas ciklas pagal \square ir sukurta procedūra tam, kad apskaičiuoti laiko reikšmes, kai sprendinių skirtumai konverguoja į nulį. Ši procedūra tikrina ar skirtumas lygus nuliui:

```
>prp:=proc(w,z)
if epsilon[w](T(w)[z])=0 then T(w)[z] else prp(w,z+1) fi;
end proc;
```

Taip pat sprendinių apvalinimui buvo panaudota komanda **convert**.

Trečioje dalyje buvo sukurti ciklai, kurie apskaičiuoja sistemų sprendinius ir integralus pagal Simpsono formulę bei procedūros periodui apskaičiuoti.

Keičiant programą galima greičiau surasti reikalingas reikšmes ir nubrėžti grafikus.

IŠVADOS

Magistro darbe mes išnaginėjome Duffingo lygtį su pradinėmis sąlygomis ir tyrėme lygties sprendinių sinchronizavimą.

Buvo sukurta programa, kuri sprendžia duotą uždavinį laiko t intervale ir apskaičiuoja sprendinių skirtumus. Šią programą modifikavome, priklausomai nuo reikalaujamų rezultatų. Tai padėjo greičiau surasti reikalingus duomenis ir jas panaudoti brėžiniuose ir išvadose.

Pirmoje dalyje mes išnaginėjome Duffingo lygties sprendinius ir jų skirtumus. Skaitinio modeliavimo rezultatus analizavome naudodami grafikus. Gavome, kad priklausomai nuo parametrų parinkimo, sprendiniai konverguoja į vieną ar du sprendinius. Tai atsitikdavo dėl to, kad sprendiniai išsiskirdavo ir patekdavo į skirtingų potencialių duobių aplinką. Buvo nustatyti tokie parametrai, kada visi sprendiniai artėja į vieną sprendinį. Buvo išsiaiškinta sprendinių konvergavimo priklausomybė nuo šių parametrų.

Antroje dalyje mus domino laikas, kai sprendiniai sutampa. Priklausomai nuo skirtingų parametrų sutapimo laikas elgiasi skirtingai. Didėjimas arba mažėjimas priklauso nuo α ir ψ . Tačiau β ir \square beveik nedaro įtakos laiko pakeitimui. Be to, sprendinių apvalinimas sugreitina laiką, kurio metu sprendiniai suartėja.

Trečioje dalyje nagrinėjome Duffingo lygtį, kai \square ir \square . Apskaičiavome sprendinių periodus bei išanalizavome sprendinių energijos keitimą. Patikrinome energijos tvermės dėsnį.

REZIU MÈ

Solutions Synchronization to the Duffing Equation

In my final degree project we have investigated Duffing's equation with initial conditions and researched synchrony of solutions. A special program was created, it solves determined problem in t time range and finds the difference between answers. Depending on results, this program was modified in order to get the results needed.

In first part we have looked at Duffing equation's answers and their difference. Numeric modeling results were studied using graphs. We have received that results are converging into one or two separate answers depending on parameters chosen. This happens because results split into two potential rows. Parameters were chosen for all results be converged to one solution only. As well, we studied their convergence depending on those parameters.

In the second part, we were interested in the time period when results match. Growth or slip depended on α and ψ , though β and \square almost didn't have any impact on time change. Rounded conditions are quickening the time for answers to be simulated.

The third part was dedicated to Duffing's equation, when \square and \square . We found periods for our solutions and researched their energy. Law of the energy conservation was double-checked as well.

LITERATŪROS SĄRAŠAS

1. S.Bowong, FMM.Kakmeni, JL.Dimi. „Chaos control in the uncertain Duffing oscillator“, *Journal of sound and vibration* 292 (3-5): p. 869-880 MAY 9 2006
2. Cunli Wu, Tong Fang. „Chaos synchronization of two stochastic Duffing oscillators by feedback control“, *Chaos solitons fractals* 32 (3): p. 1201-1207 MAY 2007
3. A.Elias-Zuniga. „A general solution of the Duffing equation“, *Nonlinear dynamics* 45 (3-4): p. 227-235 AUG 2006
4. В.Дьяконов, Марле7, Учебный курс, СПб.: Питер, 2002, Санкт-Петербург.

Priedas Nr.1: (2), (7) uždavinio sprendimas su parametrais $\alpha := 1$, $\tau := .1$, $\beta := .5$, $n := 10$, $r := 5$, $m := 20$.

```
> restart;
```

```
> f:=diff(y(t),t,t)+alpha*diff(y(t),t)-2*y(t)+4*(y(t))^3=0;
alpha:=1;
```

$$f := \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + \alpha \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) - 2 y(t) + 4 y(t)^3 = 0$$

$\alpha := 1$

```
> tau:=0.1; beta:=0.5;
```

```
tau:=0.1
beta:=0.5
```

```
> n:=10; r:=i->5; m:=20;
```

```
n:=10
r:=5
m:=20
```

```
> T:= [seq(0+tau*i, i=0..m)]:
```

```
> for k from 1 to n do
sal[k,0]:=y(0)=0,D(y)(0)=k;
F[k,1]:=dsolve({f,sal[k,0]},numeric);
for i from 1 to m do
sal[k,i]:= y(T[i+1])=rhs(F[k,i](T[i+1])[2]),
D(y)(T[i+1])=beta*rhs(F[k,i](T[i+1])[3])+r(i);
F[k,i+1]:=dsolve({f,sal[k,i]},numeric);
br[k,i-1]:=plots[odeplot](F[k,i],T[i]..T[i+1]);
od:
p[k]:=plots[display](seq(br[k,i],i=0..m-1));
od:
```

```
> plots[display](seq(p[k],k=1..n)):
```

```
> seq(pakl[k]=[seq(epsilon[k](T[i+1])=abs(rhs(sal[k,i][1])-
rhs(sal[k-1,i][1])),i=0..m)],k=2..n):
```

```
> assign(%);
```

```
> Col:=[red, pink, black, blue, magenta, sienna, maroon, orange,
green];
```

```
Col := [red, pink, black, blue, magenta, sienna, maroon, orange, green]
```

```
> p1:=plots[display](seq(plot([seq([T[i],rhs(pakl[k][i])],i=1..m+
1)],style=[line],color=Col[k-1]),k=2..n)):
```

```
> plots[display](p1);
```