VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Diana Sosnovskaja,
Statistikos programos studijų studentė

ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ TRANSFORMACIJOS

Baigiamasis magistro darbas

Vadovas prof. habil. dr. A. Bikelis

Vilnius, 2007

Turinys

Įvadas

Statistikų tikimybinių skirstinių analizėje ypatingą vietą užima jų išreiškimas gerai žinomų atsitiktinių dydžių funkcijomis, tai yra nuo vieno tikimybinio skirstinio analizės pereiname prie kito lengviau įvertinamo tikimybinio skirstinio analizės. Ši tematika labai sena. Joje iškylančių uždavinių sprendimams yra pasiūlyta daugybė metodų. Čia mes apžvelgsime, kaip Br. Grigelionio GZD (, , , ,) bei (, , ,) tikimybinių skirstinių pasiskirstymo funkcija skleidžiama Edžvorto daugianariais (pagal E. D. Melune ir H. L. Gray [1] straipsnį), t.y. atsitiktinius dydžius iš klasių GZD(, , , ,) ir (, , ,) aproksimuosim Gauso atsitiktiniu dydžiu .

Kai , tai tikimybinis skirstinys ([7] 2.2 lema, 54psl.)

, visiems .

Čia atsitiktinis dydis , , jo tankio funkcija

, .

Darbe tikimybinis skirstinys atsitiktinio dydžio GZD(, , , ,) yra aproksimuojamas tikimybiniu skirstiniu atsitiktinio dydžio GZD(, , , ,). Sudaroma lygčių sistema , , , radimui ir gaunamos apytikslės jų reikšmės

(žymėjimus žiūrėti 22-23 psl.).

Padėka. Dėkoju magistrantūros vadovui prof. A. Bikeliui už vadovavimą ir konsultacijas mano studijų Vilniaus universitete metu.

1. Asimptotinės formulės

E. D. Melune ir H. L. Gray [1] apžvelgia Korniš – Fišer bei Edžvorto skleidinius ir mano, jog Edžvorto skleidiniai yra pirmas žingsnis į atsitiktinių dydžių asimptotinius skleidinius.

Tegu ir yra pasiskirstymo funkcijos su semiinvariantais tokiais, jog .

Autoriai priima, kad tikimybinis skirstinys yra išskleistas Ermito daugianariais, t.y. jam galioja Edžvorto formali eilutė:

, **(1)**

kai semiinvariantai ir tenkina sąlygą , .

Čia

. **(2)**

(2) - ąją lygybę galime išskleisti

kai

kur , o yra Čebyševo – Ermito daugianariai. Jie apibrėžti

ir

,

kai .

Kai yra standartinio normalaus dėsnio pasiskirstymo funkcija, tai turime , kai yra nelyginis, , kai – lyginis. Jeigu formaliai išplėsime lygybę **(1)** ir išdėstysime narius didėjančia tvarka, tai gausime:

. **(4)**

Priimta, kad lygybė **(4)** yra tokia:

,

kur

,

čia funkciją nusako semiinvariantai .

Tegu ir , kur 0<p<1, yra funkcijų ir atitinkami kvantiliai, t. y.

. **(5)**

Pasinaudoję Teiloro formule gauname:

. **(6)**

Pakeitę lygybes **(1)** ir **(6)** į **(5)**, gausime Korniš – Fišer išplėtimą funkcijai nuo

Atvirkštinė Korniš – Fišer išraiška funkcijai pagal yra tokia

2. Grigelionio GZD dėsnio aproksimavimas

Apibrėžimas 1. Atsitiktinis dydis pasiskirstęs pagal GZD dėsnį, ~ GZD (, , , ,), kai jo charakteristinė funkcija yra

,

kur , , , , ir Eulerio beta funkcija.

Jo semiinvariantai

,

, ,

čia

,

Kai at. d. charakteristinė funkcija yra

,

tuomet semiinvariantai apibrėžiami formule

.

Centruokim ir normuokim atsitiktinį dydį . Gauto at. d. charakteristinę f-ją žymėkime . Tuomet

.

Atsitiktinio dydžio vidurkis , o dispersija . Logaritmuojam charakteristinę f-ją:

.

Lema1. Atsitiktinio dydžio semiinvariantai yra

, , čia .

Įrodymas.

.

Pažymėkim , tuomet

,

,

,

, , čia .

◢

Paskaičiuokime dar kelis semiinvanriantus ir t. t., užrašykime n-tąjį

Galime juos suprastinti. Naudosimės Eulerio–Makloreno sumavimo formule:

kur tolydinė funkcija, kuri turi netrūkias išvestines kiekviename taške iš intervalo , kur ir yra konstantos.

yra Bernulio skaičiai: , , , , , , ,

, , , [...], , ir t. t.

Juos galima rasti sprendžiant lygybę , kai yra natūralūs skaičiai ir .

Nelyginiams skaičiams , visi lygūs nuliui. Bernulio skaičiams galioja nelygybė

, kuri išplaukia iš šios lygybės .

Be to

.

Mūsų nagrinėjamu atveju funkcija , čia , , , ,

:

,

Tad gauname

,

Pasinaudoję derinių formule , galime užrašyti, jog

,

kai , gauname:

,

kai , gauname:

,

kai :

,

kai :

.

Kitoms funkcijoms, naudojamoms šiame darbe, Eulerio – Makloreno formulę taikome analogiškai.

Be to naudosimės lygybėmis , čia , ir , bei gama funkcija . Integruokime :

,

,

.

Raskime bendrą :

Naudokimės gama funkcija . Atlikę pakeitimą

, ,

gauname, jog

Tuomet

,

Kadangi

,

,

Tad galima rašyti, jog

Galima sutraukti panašius narius, tuomet gausime:

Bendru atveju galima užrašyti:

Paimkime gautojo pirmąjį narį. Tada semiinvariantai atsitiktinio dydžio bus lygūs:

ir n-tasis semiinvariantas lygus

.

Naudosimės Edžvorto skleidiniu (pagal E. D. Melune ir H. L. Gray [2]). Pastebėsime, jog semiinvariantai turi tenkinti sąlygą , kai . Turėsime liekamąjį narį , kai . Jei pasirinktume, kad , tuomet

.

Tuomet liekamasis narys bus lygus , kai .

Galime užrašyti atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkciją:

,

čia yra normalaus standartinio dėsnio semiinvariantai. Vidurkis , dispersija ir visi kiti semiinvariantai . Todėl a. d. pasiskirstymo funkciją bus lygi čia yra Čebyševo – Ermito daugianariai (aprašyti 1 psl.), .

.

Įstatykime :

.

Pažiūrėkime, kaip kinta pasiskirstymo funkcija, jei keistume parametrus ir .

Tarkime, jog , tada at. d. pasiskirstymo funkciją galima užrašyti tokiu pavidalu

.

Galimas ir toks atvejis, kai :

,

čia liekamasis narys , kur .

Pabandykime surasti GZD dėsniui parametrą , kai . Atvejui paimkime , kur . Panaudoję jau minėtus derinių bei Bernulio skaičių apibrėžimus, gauname:

.

Prisiminkime, jog . Tarkim , kur , čia žinomas. Galime užrašyti:

,

,

čia . Pažymėkime :

,

.

Naudosimės Biurmano – Lagranžo apvertimo formule. Tarkime, kad eilutė

konverguoja srityje , , tuomet eilutė

konverguoja srityje , . Koeficientai gaunami, apskaičiavus funkcijos

n – 1 – osios eilės išvestines taške , t.y.

.

Iš šios lygybės seka, kad

,

,

,

,

,

.

Taikome Biurmano-Lagranžo apvertimo formulę:

, pažymėkime ,

, ,

, čia ,

Norint išreikšti parametrus ir , kai , reikia išspręsti lygčių sistemą

.

Naudojant apytiksles formules, gauname:

,

.

5. Grigelionio gama pasiskirstymo aproksimavimas

Tegul yra Eulerio gama funkcija ir atsitiktinis dydis, turintis gama pasiskirstymą, t.y. tokiems , ir

.

Kai , apibrėžkime . Tuomet turėsime pasiskirstymo funkciją

, ,

ir charakteristinę funkciją

, .

Apibrėžimas. Atsitiktinis dydis ~ (, , ,), jo charakteristinė funkcija, kai , , , , yra

, .

A. d. semiinvariantai

,

, ,

čia

, ,

asimetrijos koeficientas, o eksceso koeficientas.

Y semiinvariantai apibrėžiami formule

,

kur

.

Centruokim ir normuokim atsitiktinį dydį . Gauto at. d. charakteristinę f-ją žymėkime . Tuomet

.

Atsitiktinio dydžio vidurkis , o dispersija . Logaritmuojam charakteristinę f-ją:

.

Lema1. Atsitiktinio dydžio semiinvariantai yra

, , čia .

Įrodymas.

.

Pažymėkim , tuomet

,

,

,

, , čia .

Paskaičiuokime dar kelis semiinvanriantus:

,

,

,

,

ir t. t., užrašykime n-tąjį

.

Galime juos suprastinti. Integruokime , naudosimės lygybe , čia

:

Naudokimės gama funkcija . Atlikę pakeitimą

, ,

gauname, jog

.

Tuomet

,

Kadangi

,

,

Žymėjimus žiūrėti 2-me skyriuje.

Tolesniems skaičiavimams naudosime apytiksles formules, gauto imsime tik pirmąjį narį.

Galima rašyti, jog

, .

Integruokime , kai :

,

kai :

,

įsitikinome, jog bendrąjį apytikslį gavome teisingai.

O semiinvarinatai bus lygūs

,

,

,

,

,

,

,

n-tasis narys lygus

.

Naudosimės Edžvorto skleidiniu (pagal E. D. Melune ir H. L. Gray [2]). Pastebėsime, jog semiinvariantai turi tenkinti sąlygą , kai . Turėsime liekamąjį narį , kur .

Galime užrašyti atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkciją:

,

čia yra normalaus standartinio dėsnio momentai. Vidurkis , dispersija ir visi kiti semiinvariantai . Todėl a. d. pasiskirstymo funkciją bus lygi

,

čia yra Čebyševo-Ermito daugianariai (aprašyti .. psl.), .

.

Įstatykime□:

.

Pritaikę Biurmano – Lagranžo apvertimo formulę analogiškai kaip 2-ąjame skyriuje, galime rasti parametrą .

Išvados

Atsitiktinių dydžių transformacijas, naudojančias normalų dėsnį, kone pirmieji išnagrinėjo E. A. Korniš ir R. A. Fišer [5]. Jie savo straipsnyje pasiūlė funkcijų □ ir □ formalų skleidimą eilute. Šios eilutės (tiksliau, jų dalinės sumos) yra plačiai naudojamos matematinėje statistikoje, jos vadinamos Korniš – Fišer skleidiniais.

Šio darbo tikslas yra išnagrinėti, kaip Grigelionio GZD (□, □, □, □, □) bei □ (□, □, □, □) pasiskirstymams taikomas asimptotinis Edžvorto skleidinys (daugianaris). Nagrinėjome kaip užsirašo minėtas skleidinys keičiantis parametrams. Edžvorto skleidinį išreiškėme apytiksliai. Nes naujieji semiinvariantai, gauti po to, kai centravom bei normavom Grigelionio GZD (□, □, □, □, □) ir □(□, □, □, □) atsitiktinį dydį, užrašyti apytiksliai. Semiinvariantų išreiškimui buvo naudojamas tik pirmas narys funkcijos □, kuri užrašyta, naudojantis Eulerio – Makloreno sumavimo formule.

Summary

Cornish and Fisher were the firsts scholars who have analysed transformations of the random variables are associated with normal distribution. They suggested formal expansions of the functions x(y) and y(x). These expansions are widely spread in the statistics, they are called Cornish – Fisher expansions. The research is investigated the normal approximations for other distributions.

The research is investigated how Edgeworth expansions applied for Br. Grigelionis distributions GZD (□, □, □, □, □) and □(□, □, □, □).

Literatūra

[1] MELUNE E. D., GRAY H. L. (1983): Cornish-Fisher and Edgeworth expansions. Encyclopedia of Statistic Sciences II, 188 – 193.

[2] GRIGELIONIS, B. (2001): Generalized z-distributions and related stochastic processes. Lietuvos matem. rink., 41(3), 303-319.

[3] GRIGELIONIS, B. (2003): Eulerio gama funkcijos saviskaidumas. Lietuvos matem. rink., 43(3), 359-370.

[4] КРАМЕР, Г. (1975): Математические методы статистики. М.: Мир, 141-143.

[5] CORNISH, E. A. and FISHER, R. A. (1937): Moments and cumulants in the specification of distributions. Revue de l'Institut Internat. de Statist. 5, 307-322.

[6] ГРАДШТЕЙН И. С., РЫЖИК И. М. (1962): Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гос. изд. физ.-мат. литературы, Москва, 28-29, 1090-1094.

[7] TURKUVIENĖ J. (2007): Imčių iš baigtinių visumų statistikų skirstinių analizė, 51, 54-55.