VILNIAUS UNIVERSITETAS

KRISTINA KAULAKYTĖ

STACIONARI NAVJĖ–STOKSO SISTEMA SU NEHOMOGENINE KRAŠTINE SĄLYGA SRITYSE SU NEKOMPAKTIŠKAIS KRAŠTAIS

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2013

Disertacija rengta 2008–2012 m. Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas
Prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto matematikos mokslo krypties taryboje.

Taryba

Pirmininkas

- Prof. habil. dr. Mifodijus Sapagovas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Nariai:

- Prof. habil. dr. Michel Chipot (Ciuricho universitetas, Šveicarija, fiziniai mokslai, matematika - 01P)
- Prof. habil. dr. Raimondas Čiegis (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)
- Prof. dr. Vytautas Kleiza (Kauno technologijos universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)
- Prof. dr. Vladas Skakauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Oponentai:

- Prof. habil. dr. Reinhard Farwig (Darmštato technikos universitetas, Vokietija, fiziniai mokslai, matematika - 01P)
- Prof. dr. Artūras Štikonas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2013 m. sausio 18 d. 14 val. VU Matematikos ir informatikos fakultete, 102 auditorijoje, Naugarduko g. 24.
Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva.
Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2012 m. gruodžio 18 d.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

KRISTINA KAULAKYTĖ

NONHOMOGENEOUS BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE STATIONARY NAVIER–STOKES SYSTEM IN DOMAINS WITH NONCOMPACT BOUNDARIES

Summary of doctoral dissertation
Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2013

The scientific work was carried out in 2008 – 2012 at Vilnius University.

Scientific supervisor

Prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

The thesis is defended in the council of Mathematics of Vilnius University.

The council

Chairman

- Prof. habil. dr. Mifodijus Sapagovas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

Members:

- Prof. habil. dr. Michel Chipot (University of Zurich, Physical sciences, Mathematics - 01P)
- Prof. habil. dr. Raimondas Čiegis (Vilnius Gediminas Technical University, Physical sciences, Mathematics - 01P)
- Prof. dr. Vytautas Kleiza (Kaunas University of Technology, Physical sciences, Mathematics - 01P)
- Prof. dr. Vladas Skakauskas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

Opponents:

- Prof. habil. dr. Reinhard Farwig (Darmstadt University of Technology, Physical sciences, Mathematics - 01P)
- Prof. dr. Artūras Štikonas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on January 18, 2013 at 2pm at Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, lecture room 102, Naugarduko st. 4.
Address: Naugarduko st. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania.
The summary of the dissertation was distributed on 18 December, 2012.
The dissertation is available at the library of Vilnius University.

Disertacinio darbo aprašymas

1 Tyrimo objektas

Disertacijoje nagrinėjama stacionari Navjė–Stokso sistema su nehomogenine kraštine sąlyga

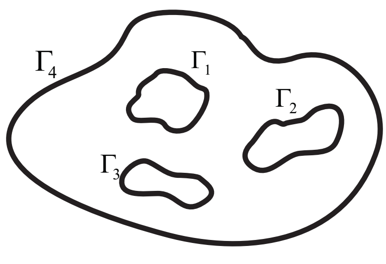
$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + \big(\mathbf{u}\cdot\nabla\big)\mathbf{u} + \nabla p &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{a}, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

čia $\mathbf{u}$ ir p yra duotosios sistemos nežinomieji, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x) = \big(u_1(x), u_2(x), u_3(x)\big)$ yra skysčio greičio vektorius, $p = p(x)$ yra skysčio slėgis; $\mathbf{a}(x) = \big(a_1(x), a_2(x), a_3(x)\big)$ yra užduotas skysčio greitis ant srities krašto, $\nu > 0$ - skysčio klampumo koeficientas.
Šis uždavinys nagrinėjamas srityse su išėjimais į begalybę, kai srities kraštas susideda iš keleto atskirų komponenčių (tiek baigtinių, tiek begalinių).

2 Mokslinės problemos istorija ir aktualumas

Navjė–Stokso lygtys, aprašančios klampaus nespūdaus skysčio tekėjimą, yra vienas iš svarbiausių tyrimo objektų matematinėje hidrodinamikoje. Matematinės Navjė–Stokso lygčių teorijos vystymasis ypatingai suaktyvėjo XX amžiaus pabaigoje. Neišspręsti Navjė–Stokso uždaviniai yra svarbūs tiek savo turiniu ir taikymais, tiek tuo, kad stimuliuoja daugelio matematikos sričių vystymąsi.

Matematiškai pagrįsta Navjė–Stokso lygčių teorijos pradžia siejama su prancūzų matematiko Prof. J. Leray vardu. Būtent J. Leray pirmasis nagrinėjo (1.1) uždavinį aprėžtoje srityje su daugiajungiu kraštu dar 1933 metais paskelbtame [17] straipsnyje. Po to minėtas



1 pav.: Aprėžta sritis su daugiajungiu kraštu.

uždavinys susilaukė daugelio kitų matematikų dėmesio (pavyzdžiui, [1]-[7]). Iš (1.1_2) tolydumo lygties aprėžtosios srities atveju išplaukia būtinoji (1.1) uždavinio išsprendžiamumo sąlyga

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,dS = \sum_{j=1}^{N}\int_{\Gamma_j} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,dS = 0, \tag{2.2}$$

čia $\mathbf{n}$ yra vienetinis normalės vektorius, Γ_i nesikertančios srities Ω krašto $\partial\Omega$ komponentės.

(2.2) sąlyga reiškia, kad bendras srautas turi būti lygus nuliui. Tačiau ilgą laiką (1.1) uždavinio išsprendžiamumas buvo įrodytas esant papildomai sąlygai

$$\mathcal{F}_j = \int\limits_{\Gamma_j} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.3}$$

kuri reikalauja, kad per kiekvieną krašto komponentę srautas būtų lygus nuliui (pavyzdžiui, darbuose [13], [14], [17]). Kiti autoriai (2.3) sąlygą pakeitė reikalavimu, kad srautai $\mathcal{F}_i$ per kiekvieną krašto komponentę būtų pakankamai maži[1] (pavyzdžiui, darbuose [2] ir [12]). Taip pat (1.1) uždavinys buvo nagrinėjamas, atsisakant apribojimų srautų $\mathcal{F}_i$ dydžiui, dvimatėje simetrinėje srityje su simetriniais kraštiniais duomenimis (pavyzdžiui, darbuose [11] ir [22]). Naujausias mums žinomas rezultatas gautas (1.1) uždaviniui, kai srities kraštą sudaro dvi jungios komponentės, o srautas yra bet kokio dydžio su "teisingai parinktu" ženklu, t.y., skystis įteka per išorinę paviršiaus komponentę, o išteka - per vidinę ([10]). Visais minėtais atvejais turi būti tenkinama (2.2) būtinoji išsprendžiamumo sąlyga, kuri reiškia, kad iš srities skysčio turi ištekėti tiek, kiek jo įteka į sritį (skystis nespūdus). [17] darbe J. Leray suformulavo klausimą, ar (1.1) uždavinys yra išsprendžiamas tik esant patenkintai (2.2) būtinajai išsprendžiamumo sąlygai. Bendru atveju šis klausimas (dažnai vadinama Leray problema) lieka neatsakytas, nepaisant daugelio žymių matematikų pastangų.

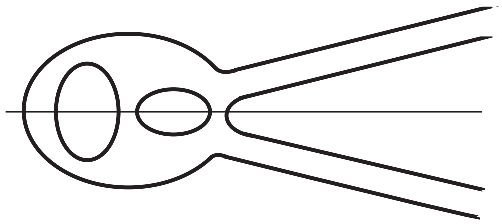
Pastaruosius 35 metus srityse su nekompaktiškais kraštais (1.1) uždavinys buvo nagrinėjamas su nuline kraštine sąlyga ($\mathbf{a}(x) = 0$). Toliau, turėdami omenyje, kad kalbame apie (1.1) uždavinį su nuline kraštine sąlyga, žymėsime jį (1.1_0). 1976 metais J. Heywood savo darbe (žr. [8]) parodė, kad korektiškam uždavinio formulavimui, srityse su nekompaktiškais kraštais, būtina papildomai suformuluoti tam tikras sąlygas begalybėje, pavyzdžiui, sąlygas srautams per išėjimų į begalybę skerspjūvius. Be to, [8] straipsnyje buvo įrodytas Navjė–Stokso sistemos išsprendžiamumas prie mažų srautų. Vėliau [9], [15], [16], [26] ir [27] darbuose J. Heywood rezultatai buvo apibendrinti bet kokio dydžio srautams. Visi minėti rezultatai gauti esant patenkintai tik būtinajai išsprendžiamumo sąlygai.

Tačiau nedaug yra žinoma apie stacionarios Navjė–Stokso sistemos su nehomogenine kraštine sąlyga išsprendžiamumą srityse su nekompaktiškais kraštais. Kiek mums žinoma, pirmą kartą (1.1) uždavinys, be jokių apribojimų kraštinių duomenų dydžiui, išnagrinėtas 1999 metais S.A. Nazarovo ir K. Pilecko [23] straipsnyje. Šiame straipsnyje (1.1) uždavinys nagrinėjamas begaliniame sluoksnyje, kai skystis į sritį įleidžiamas per sluoksnio dugną, darant prielaidą, kad kraštinių duomenų atrama yra kompaktas. Jei srautas yra nenulinis, tai uždavinio sprendinio Dirichlė integralas, priklausomai nuo srities geometrijos, gali būti tiek baigtinis, tiek begalinis. [23] darbe yra sukonstruotas sprendinys, turintis begalinį Dirichlė integralą.

(1.1) uždavinį taip pat nagrinėjo H. Morimoto ir H. Fujita. Jie minėtą uždavinį nagrinėjo simetrinėse dvimatėse begalinėse srityse Ω su daugiajungiu kraštu $\partial\Omega$, darydami prielaidą,

[1]Reikalaujant mažumo sąlygos srautams, kraštinės funkcijos normai nėra jokių dydžio apribojimų.

kad kraštiniai duomenys tenkina simetriškumo sąlygas ([18]–[21]).



2 pav.: Simetrinės srities Ω pavyzdys.

Vėliausias mūsų žinomas rezultatas priklauso J. Neustupa ([24], [25]), kuris (1.1) uždavinį nagrinėjo srityje su išėjimais į begalybę, kai srities kraštas yra daugiajungis, kurį sudaro vidinis ir išorinis paviršiai. Vidinį paviršių sudaro baigtinis skaičius jungių kompaktiškų komponenčių, o išorinį paviršių - jungių nekompaktiškų komponenčių. J. Neustupa darė prielaidą, kad srautai per vidinio paviršiaus komponentes turi būti pakankamai maži, o per išorinio paviršiaus komponentes srautų dydžiai - be jokių apribojimų. Apriorinio įverčio gavimui J. Neustupa naudoja prieštaros metodą. Šis metodas reikalauja, kad sprendinys turėtų baigtinį Dirichlė integralą. Todėl išėjimai į begalybę turi pakankamai greitai plėstis begalybėje tam, kad būtų vietos srauto "išleidimui". Taigi, [24], [25] darbuose sprendinio Dirichlė integralas yra baigtinis.

Šioje disertacijoje nagrinėjama stacionari Navjė–Stokso sistema su nehomogenine kraštine sąlyga srityse su nekompaktiškais ir daugiajungiais kraštais. Kaip ir [24], [25] darbuose, mes darome prielaidą, kad srautai per vidinio paviršiaus komponentes turi būti pakankamai maži bei nedarome jokių apribojimų srautams per išorinio paviršiaus komponentes. Sprendinio apriorinį įvertį gauname konstruktyviuoju būdu, sukonstruodami tinkamą kraštinių duomenų į visą sritį pratęsimą. Uždavinys nagrinėjamas srityje, kai ji turi dviejų tipų išėjimus į begalybę: paraboloidinio ir sluoksnio tipų. Priklausomai nuo išėjimų į begalybę geometrijos, sprendinio Dirichlė integralas gali būti tiek baigtinis, tiek begalinis.

3 Disertacijos struktūra ir apimtis

Disertaciją sudaro šeši skyriai, išvados ir naudojamos literatūros sąrašas. Pirmajame skyriuje skaitytojas supažindinamas su nagrinėjamos problemos istorija bei aktualumu. Antrajame skyriuje įvedami pagrindiniai žymėjimai ir suformuluojami žinomi rezultatai, kurie naudojami vėlesniuose skyriuose. Likusiuose skyriuose pateikiami gauti moksliniai rezultatai. Disertacija užbaigiama išvadomis ir cituojamos literatūros sąrašu. Bendra darbo apimtis yra 103 puslapiai.

4 Disertacijoje nagrinėjami uždaviniai ir gauti rezultatai

Disertacijoje nagrinėjamas stacionarus kraštinis Navjė–Stokso uždavinys su nenuline kraštine salyga srityse su išėjimais į begalybę, t.y.,

$$\Omega = \Omega_0 \bigcup \Omega^{(1)} \bigcup \Omega^{(2)} \bigcup ... \bigcup \Omega^{(J)},$$

čia $\Omega_0 = \Omega \bigcap B_{R_0}(0)$ - aprėžtoji srities dalis, o $\Omega^{(j)},\ j = 1, ..., J$, - "išėjimai" į begalybę, kurie gali būti tiek paraboloidinio, tiek sluoksnio tipų. Pažymėkime paraboloidinio tipo išėjimus D_p, o sluoksnio tipo - E_r. Lokaliose koordinatėse $z^{(j)}$ išėjimai D_p ir E_r aprašomi taip:

$$E_1 = \left\{ z^{(1)} : 0 < z_3^{(1)} < h_1(|z^{(1)\prime}|),\ |z^{(1)\prime}| > 1 \right\},$$

$$E_r = \left\{ z^{(r)} : 0 < z_3^{(r)} < 1,\ |z^{(r)\prime}| > 1 \right\},\ r = 2, ..., P-1,$$

$$E_P = \left\{ z^{(P)} : 0 < z_3^{(P)} < h_P(|z^{(P)\prime}|),\ |z^{(P)\prime}| > 1 \right\},$$

$$D_p = \left\{ z^{(p)} : |z^{(p)\prime}| < g_p(z_3^{(p)}),\ z_3^{(p)} > 1 \right\},\ p = P+1, ..., J,$$

čia funkcijos $g_p(t)$ tenkina Lipšico sąlygas

$$|g_p(t_1) - g_p(t_2)| \le L_p|t_1 - t_2|, \quad t_1, t_2 \ge 1, \quad g_p(t) \ge 1\ \forall t,$$

o funkcijos $h_r(t)$, kai $r = 1$ ir $r = P$, turi tokias savybes

$$\mu_1 h_r(t) \le \max_{t \le t_1 \le 2t} h_r(t_1) \le \mu_2 h_r(t), \quad h_r(t) \ge 1, \quad \forall t,$$

$$|h_r(t_1) - h_r(t_2)| \le L_r(t)|t_1 - t_2|, \quad t_1, t_2 \in [t, 2t]$$

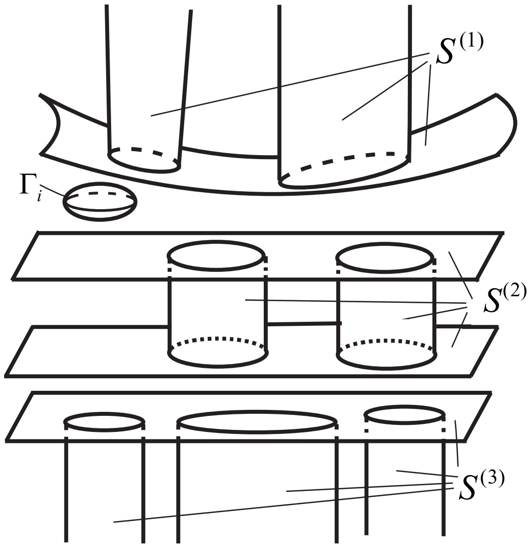
su teigiamomis konstantomis μ_1, μ_2 ir $L_r(t)$ galiojančiu įverčiu

$$\frac{L_r(t) \cdot t}{h_r(t)} \le const, \quad L_r(t) \le const\ \ \forall t.$$

Aprėžtoji srities dalis Ω_0 turi tokį pavidalą

$$G_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{I} \overline{G}_i,$$

čia G_0 ir $G_i, i = 1, \ldots, I,\ I \geq 0$, yra aprėžtosios vienjungės sritys, tenkinančios sąlygą $\overline{G}_i \subset G_0,\ \overline{G}_{i_1} \bigcap \overline{G}_{i_2} = \emptyset$, kai $i_1 \neq i_2$. Pažymėkime $\partial G_i = \Gamma_i,\ i = 1, ..., I$. Tuomet $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{I} \Gamma_i$ sudaro vidinį srities Ω kraštą $\partial\Omega$. Išorinį srities Ω kraštą $\partial\Omega$ taip pat gali sudaryti baigtinis skaičius komponenčių, pažymėkime $S = \bigcup\limits_{m=1}^{M} S^{(m)}$.



3 pav.: Srities Ω pavyzdys.

Neaprėžtose srityse korektiškam uždavinio formulavimui reikia apibrėžti papildomas sąlygas per išėjimų į begalybę skerspjūvius. Taigi, nagrinėjame tokį uždavinį

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + \big(\mathbf{u}\cdot\nabla\big)\mathbf{u} + \nabla p &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{a}, \quad x \in \partial\Omega, \\ \int\limits_{\sigma_j(R)} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, dS &= \mathcal{F}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, J,\ R \geq R_0, \end{cases} \tag{4.4}$$

čia $\mathcal{F}_j$ yra užduoti skysčio srautai per išėjimų į begalybę skerspjūvius σ_j[2].

Spręsdami (4.4) uždavinį darome prielaidą, kad kraštiniai duomenys $\mathbf{a} \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ turi kompaktinę atramą

$$\operatorname{supp}\mathbf{a} \subset \partial\Omega \bigcap B_{R_1}(0) = \big(\Gamma \bigcup S\big) \bigcap B_{R_1}(0),\ R_1 \geq R_0. \tag{4.5}$$

Pažymėkime $\Lambda_m = \operatorname{supp}\,\mathbf{a} \bigcap S^{(m)} \subset S^{(m)} \bigcap B_{R_1}(0)$. Kadangi nagrinėjamas nespūdaus skysčio

[2]Paraboloidinio išėjimo į begalybę skerspjūvis gali būti ir sritis su daugiajungiu kraštu.

atvejis, tai iš tolydumo lygties gaunama būtinoji (4.4) uždavinio išsprendžiamumo sąlyga:

$$\sum_{i=1}^{I} \mathbb{F}_i^{(inn)} + \sum_{m=1}^{M} \mathfrak{F}_m^{(out)} + \sum_{j=1}^{J} \mathcal{F}_k = 0, \tag{4.6}$$

čia $\mathbb{F}_i^{(inn)} = \int\limits_{\Gamma_i} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dS$, $i = 1, ..., I$, ir $\mathfrak{F}_m^{(out)} \int\limits_{\Lambda_m} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, dS$, $m = 1, ..., M$, yra srautai per vidinio ir išorinio srities kraštų komponentes. (4.6) sąlyga reiškia, kad bendras srautas turi būti lygus nuliui, t.y., kiek skysčio į sritį įteka, tiek jo turi ir ištekėti.

Apibrėžimas. *Apibendrintuoju (4.4) uždavinio sprendiniu vadinsime tokį solenoidinį vektorinį lauką* $\mathbf{u} \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$, *kuris tenkina kraštinę sąlygą* $\mathbf{u}\big|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{a}$, *srauto sąlygas*

$$\int\limits_{\sigma_j(R)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \mathcal{F}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, J, \quad R \geq R_0, \tag{4.7}$$

ir integralinę tapatybę

$$\nu \int\limits_{\Omega} \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{\eta}\, dx - \int\limits_{\Omega} (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{v}\, dx = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\eta} \in J_0^{\infty}(\Omega), \tag{4.8}$$

čia $J_0^{\infty}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in C_0^{\infty}(\Omega) : \ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}$.

Tam kad įrodytume uždavinio (4.8) išsprendžiamumą, reikia šį uždavinį suvesti į uždavinį su nuline kraštine sąlyga. Tuo tikslu reikia sukonstruoti solenoidinį kraštinių duomenų $\mathbf{a}$ pratęsimą $\mathbf{A}$ į visą sritį tokį, kad

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{A}\big|_{\partial\Omega} = \mathbf{a}, \quad \int\limits_{\sigma_j(R)} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \mathcal{F}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, J.$$

Įsistatę į (4.8) integralinę tapatybę išraišką $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{A}$, gauname uždavinį

$$\begin{aligned} &\nu \int\limits_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \boldsymbol{\eta}\ dx - \int\limits_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{v}\, dx - \int\limits_{\Omega} (\mathbf{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{v}\, dx - \int\limits_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{A}\, dx \\ &= \int\limits_{\Omega} (\mathbf{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{A}\, dx - \nu \int\limits_{\Omega} \nabla \mathbf{A} : \nabla \boldsymbol{\eta}\, dx \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in J_0^{\infty}(\Omega). \end{aligned} \tag{4.9}$$

(4.9) uždavinio nežinomasis $\mathbf{v} \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ turi tenkinti tokias sąlygas

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int\limits_{\sigma_j(R)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, J.$$

Turint uždavinį su nuline kraštine sąlyga yra pasinaudojama tam tikra technika, kuri buvo išvystyta mokslininkų O.A. Ladyzhenskaya ir V.A. Solonnikov. Svarbiausias disertacijos tikslas yra sukonstruoti tinkamą kraštinių duomenų pratęsimą $\mathbf{A}$. Kadangi kraštinių duomenų pratęsimo sukonstravimas yra sudėtingas ir priklauso nuo srities geometrinių savybių, pirmiausia nagrinėjame atskirus pavyzdžius. Ketvirtajame disetacijos skyriuje pirmajame pavyzdyje (4.4) uždavinys nagrinėjamas srityje su vienu paraboloidinio tipo išėjimu į begalybę, o antrajame pavyzdyje - srityje su dviem sluoksnio tipo išėjimais. Abiem atvejais yra sukonstruotas tinkamas kraštinių duomenų pratęsimas į visą sritį bei įrodomas sprendinio egzistavimas.

Penktajame disertacinio darbo skyriuje yra apibendrinamas pirmasis pavyzdys ir (4.4) uždavinys nagrinėjamas srityje su baigtiniu skaičiumi paraboloidinių išėjimų į begalybę. Paraboloidinio tipo išėjimo į begalybę apibrėžimas apima ir cilindrinius išėjimus (kai paraboloidinio išėjimo į begalybę skersmuo yra pastovus dydis). Šiuo atveju sukonstruotas tinkamas kraštinių duomenų pratęsimas ir suformuluota sprendinio egzistavimo teorema.

Galiausiai šeštajame skyriuje (4.4) uždavinys yra nagrinėjamas gana bendroje srityje, kuri turi dviejų tipų išėjimus į begalybę: paraboloidinio ir sluoksnio tipų. Šiuo atveju sukonstruotas tinkamas kraštinių duomenų pratęsimas, kai srautai nuo baigtinių krašto dalių yra "išleidžiami" į sluoksnio tipo išėjimą.

Pagrindinis disertacinio darbo rezultatas pateikiamas žemiau esančioje teoremoje [3].

Teorema. *Tarkime, kad kraštiniai duomenys* $\mathbf{a} \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ *turi kompaktinę atramą, t.y., tenkina* (4.5) *sąlygą, o srautai* $\mathbb{F}_i^{(inn)}, i = 1, \ldots, I$, *yra pakankamai maži. Tada* (4.4), (4.6) *uždavinys turi bent vieną sprendinį* $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{A} \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$, *kuriam galioja įvertis*

$$\int\limits_{\Omega_{(k)}} |\nabla \mathbf{u}(x)|^2\, dx \le c(data)\Big(1 + \sum_{j=1}^{J} \int\limits_{1}^{R_{jk}} \frac{dz_3^{(j)}}{g_j^4(z_3^{(j)})}\Big),$$

$$c(data) = c_0\Big(\|\mathbf{a}\|^2_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} + \|\mathbf{a}\|^4_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} + |\vec{\mathcal{F}}|^2 + |\vec{\mathcal{F}}|^4\Big),$$

čia

$$|\vec{\mathcal{F}}|^2 = \sum_{j=1}^{J} \mathcal{F}_j^2, \quad \vec{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_J),$$

$$R_{j1} = 1, \; R_{jl+1} = R_{jl} + \frac{g_j(R_{jl})}{2L_j}, \; l \ge 1, \; j = 1, \ldots, J,$$

$$\Omega_{(k)} = \Omega_0 \bigcup D_1^{(k)} \bigcup \ldots \bigcup D_J^{(k)}, \quad D_j^{(k)} = \Big\{z^{(j)} \in D_j : \; z_3^{(j)} < R_{jk}\Big\}.$$

[3]Teorema suformuluota tuo atveju, kai (4.4) uždavinys nagrinėjamas srityje su baigtiniu skaičiumi paraboloidinio tipo išėjimų į begalybę.

5 Naujumas

Disertacijoje gauti rezultatai yra nauji. Stacionarios Navjė–Stokso sistemos su nehomogenine kraštine sąlyga srityse su nekompaktiškais daugiajungiais kraštais, kai sprendinio Dirichlė integralas yra begalinis, išsprendžiamumas iki šiol nebuvo įrodytas.

6 Aprobacija

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti šiose mokslinėse konferencijose, kurios vyko Lietuvoje ir užsienyje:

- *Tarptautinė konferencija "Parabolic and Navier–Stokes equations",* Bedlew, Lenkija, rugsėjo 2 - 8, 2012.
- *53-oji Lietuvos matematikų draugijos konferencija,* Klaipėda, Lietuva, birželio 11 - 12, 2012.
- *52-oji Lietuvos matematikų draugijos konferencija,* Vilnius, Lietuva, birželio 16 - 17, 2012.
- *Tarptautinė konferencija "Regularity Aspects of PDE",* Bedlew, Lenkija, rugsėjo 5 - 11, 2010.

Doktorantų mokyklos

- *Tarptautinė vasaros mokykla "EVEQ 2012",* Praha, Čekija, liepos 9 - 13, 2012.
- *12-oji tarptautinė vasaros mokykla "Mathematical Theory in Fluid Mechanics",* Kacovas, Čekija, gegužės 27 - birželio 3, 2011.

Disertacijos rezultatai pristatyti Vilniaus Universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Diferencialinių lygčių ir skaičiavimo matematikos katedros matematiniuose seminaruose. Skaitytas pranešimas Vilniaus Universitete doktorantų seminare 2011 m. gruodžio 1 d.

7 Publikacijos

Disertacijos rezultatai yra publikuoti šiuose straipsniuose:

Išspausdinti straipsniai

1. K. Kaulakytė, K. Pileckas, On the nonhomogeneous boundary value problem for the Navier-Stokes system in a class of unbounded domains, *Journal of Mathematical Fluid Mechanics,* **14**, No. 4 (2012). 693 - 716.

2. K. Kaulakytė, Stacionarios Navjė–Stokso lygtys su nenuline kraštine sąlyga dviejų sluoksnių sistemoje, *Lietuvos matematikos rinkinys, LMD darbai,* **53**, (2012), 13-18.

3. K. Kaulakytė, Stacionarus Navjė–Stokso uždavinys su nehomogenine kraštine sąlyga neaprėžtoje srityje, *Lietuvos matematikos rinkinys, LMD darbai,* **52**, (2011), 28-33.

Įteikti straipsniai

1. K. Kaulakytė, K. Pileckas, On nonhomogeneous boundary value problem for Navier–Stokes system in domains with layer type outlets to infinity, *Topological Methods in Nonlinear Analysis,* (2012), 29p.

8 Išvados

Disertaciniame darbe yra įrodytas (4.4) uždavinio bent vieno sprendinio egzistavimas neaprėžtose srityse su nekompaktiškais daugiajungiais kraštais. (4.4) uždavinys yra suvedamas į uždavinį su nuline kraštine sąlyga, sukonstruojant tinkamą kraštinių duomenų $\mathbf{a}$ pratęsimą $\mathbf{A}$, kuris turi tokį pavidalą

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{(inn)} + \sum_{m=1}^{M} \mathbf{B}_m^{(out)} + \mathbf{B}^{(flux)},$$

čia $\mathbf{B}^{(inn)}$ pratęsia kraštinius duomenis $\mathbf{a}$ nuo vidinio paviršiaus Γ, $\mathbf{B}_m^{(out)}$ - nuo išorinio paviršiaus komponenčių $S^{(m)}$, o $\mathbf{B}^{(flux)}$ tenkina nulinę kraštinę sąlygą ant srities krašto $\partial\Omega$ ir "nuima" srautus nuo išėjimų į begalybę skerspjūvių. Kadangi vektoriniai laukai $\mathbf{B}_m^{(out)}$ ir $\mathbf{B}^{(flux)}$ konstruojami taip, kad tenkintų Leray–Hopf nelygybes, tai srautai per išorinio paviršiaus komponentes $\mathfrak{F}_m^{(out)}$ ir srautai per išėjimų į begalybę skerspjūvius $\mathcal{F}_j$ gali būti bet kokio dydžio. Tačiau vektorinio lauko $\mathbf{B}^{(inn)}$ bendru atveju negalime sukonstruoti taip, kad tenkintų Leray–Hopf nelygybes. Jei srautai yra nenuliniai, tai bendru atveju aprėžtoje srityje yra žinomas (žr. [28]) toks srities ir kraštinės funkcijos kontrapavyzdys, kad sukonstruoti solenoidinį pratęsimą, tenkinantį Leray–Hopf nelygybes, yra neįmanoma. Todėl srautai per vidinio paviršiaus komponentes $\mathbb{F}_i^{(inn)}$ turi būti pakankamai maži.

1. Jei srautai $\mathbb{F}_i^{(inn)}$ yra pakankamai maži ($\mathfrak{F}_m^{(out)}$ ir $\mathcal{F}_j$ yra bet kokie), tai (4.4) uždavinys srityse su nekompaktiškais daugiajungiais kraštais turi bent vieną sprendinį, kurio Dirichlė integralas gali būti tiek baigtinis, tiek begalinis.

2. Jei srautai $\mathbb{F}_i^{(inn)}$ yra "dideli", tai naudojamu metodu (4.4) uždavinio sprendinio egzistavimo įrodyti neįmanoma.

9 Summary

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n,\ n = 2, 3$, be an unbounded domain which splits outside the ball $B_{R_0}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R_0\}$ into $J \geq 1$ noncompact disjoint components, i.e.,

$$\Omega = \Omega_0 \bigcup \Omega^{(1)} \bigcup \Omega^{(2)} \bigcup ... \bigcup \Omega^{(J)},$$

where $\Omega_0 = \Omega \bigcap B_{R_0}(0)$. The unbounded components $\Omega^{(j)},\ j = 1, ..., J$, are called "outlets" to infinity. We study two types of outlets to infinity: paraboloidal and layer type outlets. The bounded domain Ω_0 has the form

$$G_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{I} \overline{G}_i,$$

where G_0 and $G_i, i = 1, \ldots, I,\ I \geq 0$, are bounded simply connected domains such that $\overline{G}_i \subset G_0,\ \overline{G}_{i_1} \bigcap \overline{G}_{i_2} = \emptyset$ for $i_1 \neq i_2$. Therefore, boundary of the domain Ω consists of inner and outer boundaries. Let us denote them by Γ and S, respectively. Both of these boundaries may consist of finite number of components, i.e., $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{I} \Gamma_i$ and $S = \bigcup\limits_{m=1}^{M} S^{(m)}$. Components of inner boundary are bounded, and components of outer boundary are unbounded. We consider stationary Navier – Stokes system with nonhomogeneous boundary condition in a domain Ω:

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + \big(\mathbf{u}\cdot\nabla\big)\mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{a} & \text{on } \partial\Omega, \\ \int\limits_{\sigma_j(R)} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\, dS = \mathcal{F}_j, & j = 1, 2, \ldots, J,\ R \geq R_0, \end{cases} \tag{9.10}$$

where $\mathcal{F}_j,\ j = 1, ..., J$, are the prescribed fluxes of the velocity field over cross sections $\sigma_j(R)$ of the outlets $\Omega^{(j)}$, $\mathbf{n}$ is the unit vector of the normal to σ_j.

Since we consider the incompressible fluid, from the continuity equation follows the necessary compatibility condinion

$$\sum_{i=1}^{I} \mathbb{F}_i^{(inn)} + \sum_{m=1}^{M} \mathfrak{F}_m^{(out)} + \sum_{j=1}^{J} \mathcal{F}_k = 0,$$

where $\mathbb{F}_i^{(inn)}$ and $\mathfrak{F}_m^{(out)}$ are the fluxes of the boundary value $\mathbf{a}$ over connected components of the inner and outer boundaries, respectively.

The main purpose of the thesis is to construct an appropriate extension of the boundary value $\mathbf{a}$ which gives the possibility to reduce the nonhomogeneous boundary conditions to the homogeneous ones. This extension is constructed as the sum

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{(inn)} + \sum_{m=1}^{M} \mathbf{B}_m^{(out)} + \mathbf{B}^{(flux)},$$

where $\mathbf{B}^{(inn)}$ extends the boundary value $\mathbf{a}$ from the inner boundary Γ, $\mathbf{B}_m^{(out)}$ extend $\mathbf{a}$ from the connected component $S^{(m)}$ of the noncompact outer boundary S, and $\mathbf{B}^{(flux)}$ has zero boundary value over $\partial\Omega$ and removes the fluxes over the cross sections of outlets to infinity. The vector fields $\mathbf{B}_m^{(out)}$ and $\mathbf{B}^{(flux)}$ are constructed to satisfy Leray–Hopf's inequalities which allows to obtain a priori estimates of the solution for arbitrary large fluxes $\mathfrak{F}_m^{(out)}$ and $\mathcal{F}_j$. The construction of vector fields $\mathbf{B}_m^{(out)}$ and $\mathbf{B}^{(flux)}$ is based on methods proposed in [16], [26]. Notice that the Leray–Hopf's inequality cannot be true, in general, for the vector field $\mathbf{B}^{(inn)}$. If the fluxes of the boundary value $\mathbf{a}$ over connected components of the boundary do not vanish, in [28], [3] were constructed counterexamples showing that in bounded domains Leray–Hopf inequality can be false whatever the choice of the solenoidal extension is taken. Therefore, we have to suppose that the fluxes $\mathbb{F}_i^{(inn)}$ of $\mathbf{a}$ over the compact components Γ_i of the inner boundary Γ are "sufficiently small".

Since the construction of a suitable extension is rather complicated and strongly depends on geometry of the domain, we start with two examples. First, we consider the nonhomogeneous boundary value problem for the stationary Navier–Stokes equations in the domain with one paraboloidal outlet to infinity, and in the domain consisting of two connected layers. The next part of the thesis consists of the generalization of these examples for general domains having paraboloidal and layer type outlets to infinity.

Literatūra

[1] CH.J. AMICK: Existence of solutions to the nonhomogeneous steady Navier–Stokes equations, *Indiana Univ. Math. J.* **33** (1984), 817–830.

[2] W. BORCHERS AND K. PILECKAS: Note on the flux problem for stationary Navier–Stokes equations in domains with multiply connected boundary, *Acta App. Math.* **37** (1994), 21–30.

[3] R. FARWIG, H. KOZONO AND T. YANAGISAWA: Leray's inequality in general multi-connected domains in $\mathbb{R}^n$, *Math. Ann.* **354** (2012), 137–145.

[4] R. FARWIG, H. MORIMOTO: Leray's inequality for fluid flow in symmetric multi-connected two-dimensional domains, *Tokyo J. Math.* **35,** No. 1 (2012), 63–70.

[5] R. FARWIG, G. P. GALDI, H. SOHR: Very weak solutions and large uniqueness classes of stationary Navier–Stokes equations in bounded domains of R-2, *Journal of Differential Equations* **227,** No. 2 (2006), 564–580.

[6] H. FUJITA: On stationary solutions to Navier-Stokes equation in symmetric plane domain under general outflow condition, *Pitman research notes in mathematics, Proceedings of International conference on Navier-Stokes equations. Theory and numerical methods. June 1997. Varenna, Italy* (1997) **388**, 16-30.

[7] H. FUJITA AND H. MORIMOTO: A remark on the existence of the Navier-Stokes flow with non-vanishing outflow condition, *GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl.* **10** (1997), 53–61.

[8] J.G. HEYWOOD: On uniqueness questions in the theory of viscous flow, *Acta. Math.* **136**, (1976), 61–102.

[9] L.V. KAPITANSKII AND K. PILECKAS: On spaces of solenoidal vector fields and boundary value problems for the Navier-Stokes equations in domains with noncompact boundaries, *Trudy Mat. Inst. Steklov* **159** (1983), 5–36 . English Transl.: *Proc. Math. Inst. Steklov* **159** (1984), 3–34.

[10] M.V. Korobkov, K. Pileckas and R. Russo: On the flux problem in the theory of steady Navier–Stokes equations with nonhomogeneous boundary conditions, *Arch. Rational Mech. Anal.*, online first (2012), DOI: 10.1007/s00205-012-0563-y.

[11] M.V. Korobkov, K. Pileckas and R. Russo: Steady NavierStokes system with nonhomogeneous boundary conditions in the axially symmetric case, *C. R. Mecanique* **340** (2012), 115119.

[12] H. Kozono and T. Yanagisawa: Leray's problem on the stationary Navier–Stokes equations with inhomogeneous boundary data, *Math. Z.* **262** No. 1 (2009), 27–39 .

[13] O.A. Ladyzhenskaya: Investigation of the Navier–Stokes equations in the case of stationary motion of an incompressible fluid, *Uspech Mat. Nauk* **3** (1959), 75–97 (in Russian).

[14] O.A. Ladyzhenskaya: *The Mathematical theory of viscous incompressible fluid*, Gordon and Breach (1969).

[15] O.A. Ladyzhenskaya and V.A. Solonnikov: On some problems of vector analysis and generalized formulations of boundary value problems for the Navier–Stokes equations, *Zapiski Nauchn. Sem. LOMI* **59** (1976), 81–116. English Transl.: *J. Sov. Math.* **10**, No. 2 (1978), 257–285.

[16] O.A. Ladyzhenskaya and V.A. Solonnikov: On the solvability of boundary value problems for the Navier-Stokes equations in regions with noncompact boundaries, *Vestnik Leningrad. Univ.* **13** (Ser. Mat. Mekh. Astr. vyp. 3) (1977), 39–47. English Transl.: *Vestnik Leningrad Univ. Math.* **10** (1982), 271–280.

[17] J. Leray: Étude de diverses équations intégrales non linéaire et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique, *J. Math. Pures Appl.* **12** (1933), 1–82.

[18] H. Morimoto and H. Fujita: A remark on the existence of steady Navier–Stokes flows in 2D semi–infinite channel infolving the general outflow condition, *Mathematica Bohemica* **25**, No. 2 (2002), 307–321.

[19] H. Morimoto and H. Fujita: A remark on the existence of steady Navier–Stokes flows in a certain two–dimensional infinite channel, *Tokyo Journal of Mathematics* **126**, No. 2 (2001), 457–468.

[20] H. Morimoto and H. Fujita: Stationary Navier–Stokes flow in 2–dimensional Y–shape channel under general outflow condition, *The Navier-Stokes Equations: Theorey and Numerical Methods, Lecture Note in Pure and Applied Mathematics, Marcel Decker (Morimoto Hiroko ,Other)* **223**, (2001), 65–72.

[21] H. Morimoto: Stationary Navier–Stokes flow in 2–D channels infolving the general outflow condition, *Handbook of differential equations: stationary partial differential equations* **4**, Ch. 5, Elsevier (2007), 299–353.

[22] H. Morimoto: A remark on the existence of 2–D steady Navier–Stokes flow in bounded symmetric domain under general outflow condition, *J. Math. Fluid Mech.* **9**, No. 3 (2007), 411–418.

[23] S.A. Nazarov and K. Pileckas: On the solvability of the Stokes and Navier–Stokes problems in domains that are layer–like at infinity, *J. Math. Fluid Mech.* **1**, No. 1 (1999), 78-116.

[24] J. Neustupa: On the steady Navier–Stokes boundary value problem in an unbounded $2D$ domain with arbitrary fluxes through the components of the boundary, *Ann. Univ. Ferrara*, **55**, No. 2 (2009), 353-365.

[25] J. Neustupa: A new approach to the existence of weak solutions of the steady Navier–Stokes system with inhomoheneous boundary data in domains with noncompact boundaries, *Arch. Rational Mech. Anal* **198**, No. 1 (2010), 331–348.

[26] V.A. Solonnikov and K. Pileckas: Certain spaces of solenoidal vectors and the solvability of the boundary value problem for the Navier-Stokes system of equations in domains with noncompact boundaries, *Zapiski Nauchn. Sem. LOMI* **73** (1977), 136–151. English Transl.: *J. Sov. Math.* **34**, No. 6 (1986), 2101–2111.

[27] V.A. Solonnikov: On the solvability of boundary and initial–boundary value problems for the Navier–Stokes system in domains with noncompact boundaries, *Pacific J. Math.* **93**, No. 2 (1981), 443–458.

[28] A. Takeshita: A remark on Leray's inequality, *Pacific J. Math.* **157** (1993), 151–158.

Trumpos žinios apie autorių

Gimimo data ir vieta

1983 metų rugpjūčio 10 diena, Anykščiai.

Išsilavinimas

- 1990–2002 Anykščių Jono Biliūno gimnazija,
- 2002-2006 Matematikos bakalauras, Vilniaus universitetas,
- 2006-2008 Matematikos magistras, Vilniaus universitetas,
- 2008–2012 Matematikos doktorantūros studijos, Vilniaus universitetas.

Akademinio darbo patirtis

- 2008–2010 Lektorė, Mykolo Romerio universitetas,
- 2010–dabar Lektorė, Vilniaus universitetas,
- 2011-2012 Jaunesnioji mokslo darbuotoja LMT projekte "Kraštiniai Navjė–Stokso sistemos uždaviniai neaprėžtose srityse" (Nr. MIP–2011/030).