

Vilniaus universiteto
Fizikos fakulteto
Teorinės fizikos ir astronomijos institutas

Ignas Kazakevičius
GYVYBĖS IR MIRTIES PROCESŲ PIRMO KIRTIMO LAIKAI

Magistrantūros studijų baigiamasis darbas

Aplinkos ir cheminės fizikos
studijų programa

Studentas

Ignas Kazakevičius

Leista ginti

2019-05-

Darbo vadovas

dr. Vygintas Gontis

Instituto direktoriaus pavaduotojas

prof. habil. dr. Egidijus Anisimovas

Vilnius 2019

Turinys

1. Įvadas.....	1
2. Modelių skirstų stochastiniams procesams aprašyti apžvalga ir ilga atmintis	3
3. Teorinės medžiagos susijusios su nagrinėjama tema apžvalga	5
3.1. Markovo procesai ir Kirmano bandos jausmo agentų modelis	5
3.2. Makroskopinis Kirmano modelio aprašymas	9
3.3. Kirmano modelis ir Beselio procesas	12
3.4. Darbe nagrinėjamos SDL ir jų generuojamų pikų ir duobių trukmių statistinės ypatybės	13
3.5. Analizinis Beselio proceso pikų ir duobių trukmių skirstinių gavimas.....	16
3.4. Pasirinktas SDL sprendimo būdas skaitmeniniu būdu	21
4. SDL, aprašančios Kirmano agentų modelio evoliuciją, duobių trukmių skaitmeniškai gautų skirstinių analizinio aproksimavimo rezultatai.....	22
5. Išvados	32
6. Literatūros sąrašas	33
7. Summary.....	37
8. Rašto darbo bibliografinis aprašas.....	38
9. Anotacija.....	38

1. Įvadas

Daugiadalelių sistemų aprašymas daugumoje atvejų yra įmanomas tik makroskopiniame statistiniame lygyje naudojant statistinę fiziką. Kai sąveikos yra netiesinės, sistemos paprastai laikomos sudėtingomis, kadangi didelio skaičiaus tarpusavyje sąveikaujančių sistemos dalių kolektyvinis elgesys trivaliai neseka iš individualaus jų sudedamųjų dalių elgesio mikroskopinio aprašymo. Dažniausiai statistinėje fizikoje tokių sistemų sudedamosios dalys – tai elektronai, atomai, molekulės ir kitos mikroskopinės dalelės ar kvazidalelės, tokios kaip fotonai ar fononai.

Vis dėl to, statistinės fizikos metodai yra taikomi sprendžiant ne vien tik fizikos, bet ir kitų sričių, pavyzdžiui, tokių kaip socialinių sistemų, finansų, ekonomikos, biologijos, epidemiologijos problemas, modeliuojant sudėtingas sistemas, aprašomas stochastiniais procesais bei agentų modeliais [1–7]. Savo ruožtu, vystosi sritis, kurioje fizikai naudoja jų sukurtas teorijas ir metodus spręsti finansų ir ekonomikos uždavinius ar problemas, kuri yra vadinama ekonofizika [8].

Atliekant įvairių sudėtingų ekonominių ir finansinių sistemų empirinių duomenų analizę, nepaisant pasiūlytų modelių gausos, vis dar nėra modelių pakankamai aprašančių ir paaiškinančių empiriškai stebimų statistinių ypatybių atsiradimą. Nėra aišku, kokios universalios sistemos sudedamųjų dalių elgesio ypatybės gali atkurti tokiems procesams būdingas empirines ypatybes, fundamentaliai paaiškinti jų kilmę [9, 10].

Viena iš problemų – stebimos ilgos atminties interpretavimas, nes yra sunku nustatyti, koks procesas atsakingas už šios statistinės ypatybės atsiradimą. Pavyzdžiui, tai gali būti netiesinės Markovo proceso transformacijos arba trumpėninis Brauno judėjimas, t. y. nėra aišku koks modelis yra tinkamesnis atitinkamoms empirinėms laiko sekoms aprašyti ar jas pagrįsti [9, 10].

Vienas iš pastarosios problemos sprendimo būdų pasiūlytų [11–14] darbuose yra iš gyvybės ir mirties proceso, Kirmano bandos jausmo agentų modelio, išvestų pirmo kirtimo laikų skirstinių tyrimas, kurio specialus atvejis yra vadinamas pikų (angl. *burst*) ar duobių (angl. *inter burst*) trukmių skirstiniu, kurį naudojant galima nustatyti ar tiriamas reiškinys yra Markovo procesas, o gal priešingai, turi tikros ilgos atminties ypatybes. Tačiau ir šiuo atveju susiduriama su problema suskaičiuoti pakankamai tiksliai pikų ar duobių trukmių skirstinių išraiškas. Šiame rašto darbe šiai problemai ir skirsime daugiausiai dėmesio, siekdami nagrinėjamą bandos jausmo uždavinį

transformuoti į Beselio procesą aprašančią stochastinę lygtį, kurios pikų ir duobių trukmių skirstinių analizinė išraiška yra žinoma [9].

Šio rašto darbo tikslas yra parodyti, kad Kirmano gyvybės ir mirties proceso ir panašių agentų modelių pirmo kirtimo laiko (arba pikų ar duobių trukmių) tikimybės tankio funkcijos (skirstiniai) gali būti suskaičiuojamos skaitmeniniu būdu ir aproksimuojamos analizinėmis išraiškomis, gaunamomis Beselio proceso atveju.

Rašto darbo rengimo metu buvo iškelti šie uždaviniai:

1. Susipažinti su agentų modeliavimu grindžiamu gyvybės ir mirties procesais ir tokių modelių makroskopinio aprašymo lygtimis.
2. Susipažinti su netiesinių stochastinių lygčių, SDL, aprašančių makroskopinę agentų sistemų bei gyvybės ir mirties procesų evoliuciją, skaitmeninio sprendimo metodais.
3. Naudojant netiesines SDL, aprašančias Kirmano agentų modelio evoliuciją, suskaičiuoti pikų ir duobių trukmių skirstinius.
4. Parodyti, kad 3 punkte nurodyti skaitmeniškai gauti skirstiniai gali būti aproksimuojami analiziškai dėl labai bendrų tokių skirstinių ypatybių ir asimptotinio ryšio su Beselio procesu.
5. Nustatyti 4 punkte nurodytos aproksimacijos taikymo ribas atliekant skaičiavimus su pasirinktomis skirtingomis ribinėmis slenkstinėmis vertėmis.

2. Modelių skirstų stochastiniams procesams aprašyti apžvalga ir ilga atmintis

Šiame skirsnyje pristatomos pagrindinės modelių, grindžiamų gyvybės ir mirties procesais, esminės ypatybės, siekiant plačiau įsigilinti į rašto darbe nagrinėjamą problemą, susijusią su tokių modelių taikymu praktikoje.

Atliekant empirinę finansų rinkų ar kitų socialinių sistemų analizę pastebėta, kad joms yra būdingos tam tikros specifinės statistinės ypatybės. Jos apibendrintai yra vadinamos – stilizuotais statistiniais faktais arba tiesiog stilizuotais faktais. Keli tokių ypatybių pavyzdžiai yra investicijų gražos laiko sekų skirstinių laipsninis pobūdis, perteklinis kintamumas, kintamumo klasterizavimas (angl. *volatility clustering*), lėtai gėstančios autokoreliacijos ir kt. [9, 10, 15].

Dažnai pastarosioms sistemoms modeliuoti yra pasitelkiami agentų modeliai (angl. *Agent-Based Models*), kur agentais vadinama abstrakti, supaprastinta sistemoje veikiančio realaus subjekto teorinė imitacija [9]. Agentais gali būti modeliuojamos įvairios sudėtingos sistemos, tokios kaip finansų rinkos, gyvūnų populiacija ekosistemoje ir kt. [16]. Vienas konkrečių tokių modelių pavyzdžių yra Kirmano bandos jausmo agentų modelis, kuris bus plačiau nagrinėjamas šiame darbe. Taip pat, šio rašto darbo kontekste svarbiausias nagrinėjamas stilizuotas faktas yra skirstinių ir autokoreliacijos laipsninis pobūdis.

Pastarieji modeliai yra reikšmingi aprašant ekonomines ir socialines sistemas, nes padeda suprasti, kokios universalios individualių agentų elgesio ypatybės gali atkurti stilizuotus faktus. Agentų modeliai puikiai paaiškina vyksmus individualiame, mikroskopiniame, lygmenyje. Taigi, tokie modeliai padeda paaiškinti kokios fundamentalios priežastys lemia sistemos parametrus [9]. Tačiau agentų modeliai dažniausiai yra sudėtingos struktūros, turi daug parametrų, todėl dėl tokio šių modelių sudėtingumo dažnai nėra aišku, kuris modelio aspektas yra atsakingas už tam tikrų empiriškai stebimų statistinių ypatybių atsiradimą [10].

Kita plačiai naudojama modelių rūšis ar šeima – regresinės statistinių duomenų analizės stochastiniai modeliai (pvz., ARCH, GARCH, COGARCH, FIGARCH modeliai ir kt.¹) [9, 17]. Tokie modeliai lengviau atkuria stilizuotus faktus, tačiau prasčiau paaiškina arba visiškai nepaaiškina modeliuojamų vyksmų kilmės, lyginant su agentų modeliais. Tokie modeliai dažnai yra

¹ čia:

ARCH – angl. *Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity*;

GARCH – angl. *Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity*;

COGARCH – angl. *Continuous Time Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity*;

FIGARCH – angl. *Fractionally Integrated Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity*.

naudojami atlikti įvairių akcijų, vertybinių popierių ar produktų (elektros energijos, aukso, grūdų ir kt.) kainos ar investicijų gražos kintamumo prognozavimui [17, 18].

Atsižvelgus į minėtų dviejų rūšių modelių silpnybes ir stiprybes, pradėti plėtoti modeliai, kurie apjungia agentų modeliavimą su stochastiniu aprašymu [9]. Tam daug pasitarnauja Kirmano bandos jausmo agentų modelis, kuris yra vienas iš galimų taikyti gyvybės ir mirties procesų.

Šio modelio pagrindu iš mikroskopinio aprašymo lygčių išvedamos makroskopinio aprašymo lygtys padeda savaip interpretuoti ilgos atminties problemą, atsirandančią dėl laipsninio pobūdžio autokoreliacijų grynuose Markovo procesuose. Dėl to, siekiant tinkamai interpretuoti empirinius duomenis yra reikalinga turėti tokių modelių statistinių ypatybių teorinį aprašymą, kuris suteikia daugiau žinių apie nagrinėjamas sistemas ir suteikia supratimą, kaip modelių parametrai yra susiję su empiriniais duomenimis [14].

Kaip minėta šio rašto darbo įvade, vienas iš metodų spręsti šiame darbe iškeltą ilgą atminties problemą yra pikų ir duobių trukmių skirstinių tyrimas [11–14]. Pažymėtina, kad tikros ilgą atminties atskyrimo nuo apgaulingos ilgą atminties koncepcija yra pakankamai nauja, o pikų ir duobių trukmių nagrinėjimo metodas yra pakankamai originalus [14], todėl kol kas nėra kitų išvystytų alternatyvių metodų šiai problemai spręsti.

Pikų ir duobių trukmių skirstinių bei pikų ir duobių statistikos apibrėžimas įtvirtintas darbe [19], tačiau kitame šaltinyje [9] tam pačiam dalykui apibūdinti vartojami burbulų skirstinių ir atitinkamai burbulų statistikos terminai. Taip pat [20] darbe atitinkamai vartojamas ir pliūpsnių terminas. Atsižvelgiant į tai, kad nėra įtvirtintos vieningos terminologijos lietuvių kalba, siekiant išvengti klaidingo šių terminų interpretavimo, toliau šiame darbe bus vartojami pikų ir duobių trukmių terminai. Platesnis šių skirstinių matematinis apibrėžimas ir ypatybės pateikiamos tolimesnėse šio rašto darbo dalyse.

Papildomai paaiškinama, kad pikų ir duobių trukmių skirstiniai yra atskiras pirmo kirtimo laikų skirstinių atvejis. Pirmasis kirtimo laikas stochastinėje sistemoje – tai laikas, per kurį kintamasis startuodamas nuo pradinės vertės pasiekia ribinę slenkstinę vertę. Šis dydis leidžia matematizuoti daugelį praktinių uždavinių, todėl jis yra labai plačiai naudojamas įvairiose srityse – nuo ekonomikos iki ekologijos [21]. Pvz., pikų ir duobių skirstinių statistikos supratimas yra reikalingas siekiant efektyviai modeliuoti prekybos veiklą ir investicijų gražą pagal įvairias bendrojo pavidalo SDL variacijas / versijas [12].

Pirmo kirtimo laikų formalizmas (angl. *first passage time framework*) yra plačiai išvystytas tiek matematikų, tiek fizikų. Nepaisant to, modeliai, kurių kirtimo laikų skirstiniai yra aiškiai

žinomi nėra daug. Dauguma tokių modelių yra palyginti paprasti. Pavyzdžiui, Brauno judėjimas, Geometrinis Brauno judėjimas, Beselio procesas [9].

Visgi, kol kas nėra žinomo bendro pobūdžio SDL universalaus sprendimo metodo, kuris pateiktų pakankamai tikslius pikų ir duobių trukmių skirstinius. Ši problema gali būti sprendžiama atliekant kintamųjų pakeitimą ir tiriamą procesą transformuojant į tokią lygtį, kurios pikų ir duobių trukmių skirstinių analizinė išraiška yra žinoma. Viena iš tokių – Beselio procesą aprašanti lygtis [9].

Šiame rašto darbe daugiau dėmesio tam ir skiriama, stengiantis iširti agentų modelių, tokių, kaip Kirmano modelis, ypatybes ir siekdami parodyti, kad Kirmano ir panašių agentų modelių pikų ir duobių trukmių (arba pirmo kirtimo laiko) tikimybės tankio funkcijos (skirstiniai) gali būti suskaičiuojamos skaitmeniniu būdu ir aproksimuojamos analizinėmis išraiškomis, gaunamomis Beselio proceso atveju.

3. Teorinės medžiagos susijusios su nagrinėjama tema apžvalga

3.1. Markovo procesai ir Kirmano bandos jausmo agentų modelis

Šis rašto darbas teorinio pobūdžio, todėl jame svarbu išdėstyti esminius apibrėžimus, koncepcijas ir pagrindines formules, kuriomis vadovaujantis bus atliekami pagrindiniai skaičiavimai susiję su rašto darbo tikslu.

Toliau šiame skirsnyje bus pateikiami stochastinių procesų ir Kirmano bandos jausmo agentų modelio apibrėžimai. Vieni iš svarbiausių stochastinių procesų fizikoje yra Markovo procesai [22]. Bendru atveju procesas yra laikomas Markovo procesu, kai galioja Markovo sąlyga, užrašoma tokia sąlygine tikimybe [22]:

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_1, t_1) = P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (1)$$

Aptariant šią formulę, galima teigti, kad tai tokie procesai, kurie „neturi atminties“. Taigi, jeigu turime kažkokį vyksmą, kuris yra „dabarties“ būsenoje, tai „ateities“ būseną priklauso tik nuo dabarties būsenos ir nepriklauso nuo visų „praeities“ būsenų, t. y., jei turime laikus $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, tai Markovo procesai yra tokie, kurių būseną laiko momentu t_n priklauso tik nuo būsenų pasiskirstymo laiko momentu t_{n-1} , o nuo visų kitų tolimesnių praeities momentų nepriklauso. Vienas labiausiai žinomų Markovo procesų yra Brauno judėjimas [22].

Kitas svarbus apibrėžimas vartojamas šiame rašto darbe – gyvybės ir mirties procesas (angl. *birth–death process*). Tai yra specialusis Markovo proceso atvejis – tolydaus laiko Markovo procesas, kur perėjimo tikimybės tarp sistemos būsenų yra tik dviejų tipų, „gimimai“ – kurie padidina sistemos kintamąjį vienetu ir „mirtys“, kurie pamažina sistemos kintamąjį vienetu, t. y. kur būsenos yra charakterizuojamos diskrečiais sveikaisiais skaičiais, o perėjimo tikimybės tarp sistemos būsenų yra tik diskretūs teigiami skaičiai. Šie procesai literatūroje taip pat yra vadinami „vieno žingsnio procesais“ arba „generacijos–rekombinacijos“ procesais [22]. Atvejis, kai egzistuoja tik pastovios spartos „gimimai“ ir nėra „mirčių“ yra vadinamas Puasono procesu [22, 23]. Sistemų aprašomų gyvybės ir mirties procesais pavyzdžiai yra kvantinis harmoninis osciliatorius, cheminės reakcijos, populiacijos augimas ir kt. [22].

Nagrinėjant šiame rašto darbe numatytą spręsti problemą yra tikslinga plačiau susipažinti su teorine medžiaga susijusia su nagrinėti pasirinktu Kirmano agentų modeliu ir pristatyti esmines jo formulavimo prielaidas ir ypatybes.

Atsižvelgdamas į empirinius socialinių ir biologinių sistemų stebėjimus Kirmanas pasiūlė tokias perėjimo tikimybės tarp sistemos būsenų [11, 24]:

$$p(X \rightarrow X + 1) = (N - X)(\sigma_1 + hX)\Delta t, \quad (2)$$

$$p(X \rightarrow X - 1) = X((\sigma_2 + h(N - X))\Delta t, \quad (3)$$

čia:

N – visų agentų (pvz., prekybininkų, skruzdžių) skaičius sistemoje (pvz. rinkoje, skruzdžių kolonijoje);

X – agentų, pasirenkančių vieną alternatyvą (pvz., prekybos strategiją, maitinimosi šaltinis skruzdžių atveju) skaičius;

$N - X$ – agentų, pasirenkančių kitą alternatyvą skaičius;

Δt – laiko tarpas per kurį sistema pereina iš vienos būsenos į kitą (angl. *time step*);

h – dydis, apibūdinantis agentų bandos jausmą, kai agentai pakeičia savo pasirinktą alternatyvą dėl kitų agentų įtakos;

σ – dydis apibūdinantis agentų individualumą, kad agentas individualiai pakeis savo prieš tai pasirinktą alternatyvą.

Dydžio Δt vertė turėtų būti pasirinkta maža, kad per šį laiką įvyktų tik vieno agento būsenos pasikeitimas, t. y., galiojūt sąlyga:

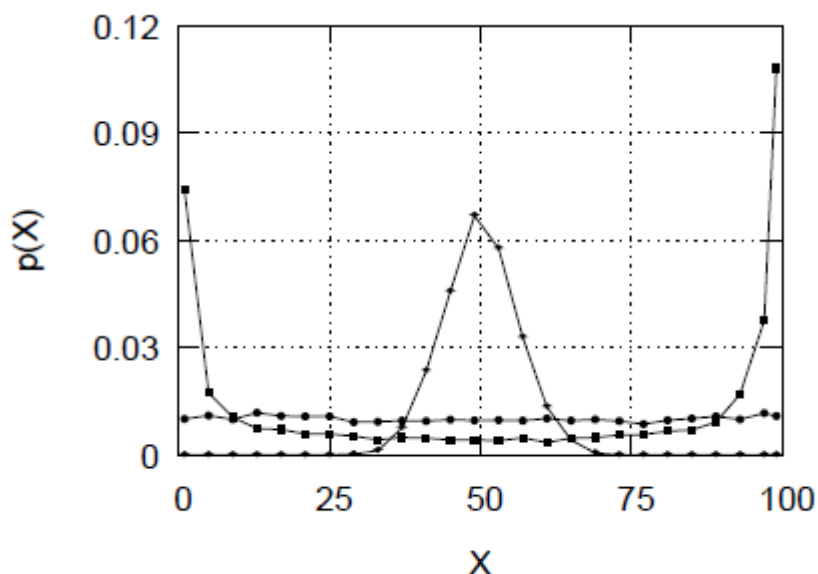
$$p(X \rightarrow X + 1) + p(X \rightarrow X - 1) \leq 1.$$

Vadovaujantis perėjimo tikimybės (2) ir (3) išraiškomis, pastebima, kad sistemos būseną X , momentu t , kai momentu t_0 ji buvo būsenoje X_0 , nepriklauso nuo to, kokia sistemos būseną buvo prieš momentą t_0 . Dėl pastarosios ypatybės šis modelis yra laikomas Markovo grandine, kadangi šiame procese sistemos būseną pagal apibrėžimą „neturi atminties“, t. y. perėjimo į kitą būseną tikimybė priklauso tik nuo sistemos būsenos prieš tai esančiu laiko momentu ir nepriklauso nuo to, kokia buvo sistemos būseną ankstesniais laiko momentais.

Taigi, atsižvelgiant į tai kas išdėstyta ir į (1) formulę, Kirmano bandos jausmo agentų modelis pagal apibrėžimą gali būti laikomas Markovo procesu, o atsižvelgiant į tai, kad pagal (2) ir (3) formules pateiktos sistemos būsenos yra diskrečios ir perėjimo tikimybė tarp sistemos būsenų yra teigiamas skaičius, gali būti laikomas ir gyvybės ir mirties procesu.

Siekiant suprasti modelio pritaikymą praktikoje ir jo dinamiką, kaip nuo modelio parametrų keičiasi sistemos būsenos, išnagrinėsime kelis ribinius šio Kirmano agentų modelio atvejus pateiktus nagrinėtuose moksliniuose darbuose, esant skirtingoms pagrindinių modelio parametrų h ir σ vertėms [9, 24]. Esant atvejui, kai $\sigma_1 = \sigma_2$ modelis yra simetrinis ir tokiu atveju vidutinė kintamojo vertė $X = \frac{N}{2}$. Tada keičiant σ vertes yra gaunami skirtingi agentų elgesio sistemoje režimai (žiūrėti 1 paveikslą) [9].

Pagal (2) ir (3) formules suskaičiuoti signalo skirstiniai pateikti 1 paveiksle parodo 3 skirtingus elgesio režimus, kurių pavidalas priklauso nuo $\frac{\sigma}{h}$ santykio. Todėl patogiu atlikti pažymėjimą, kurį toliau naudosime šiame darbe – $\varepsilon = \frac{\sigma}{h}$. Matyti, kad pirmuoju a) atveju, kai $\varepsilon < 1$ vyrauja bandos jausmas – didžiąją laiko dalį dauguma agentų užima tokią pačią būseną kaip ir kiti. Antruoju b) atveju, kai $\varepsilon > 1$, matyti vyraujantis individualistinis elgesys – agentai savo būseną pasirenka atsitiktinai. Trečiuoju c) atveju, kai $\varepsilon = 1$, stebimas subalansuotas elgesys – „konfliktas“ tarp individualistinio elgesio ir bandos jausmo, kuris sukuria nestabilią sistemos dinamiką [9].



1 pav. Stebimi 3 ribiniai agentų elgesio pagal Kirmano modelį režimai: a) vyrauja bandos jausmas (kvadratai, $\varepsilon = 0,01$), b) subalansuotas elgesys (apskritimai, $\varepsilon = 1$), c) vyrauja individualistinis elgesys (trikampiai, $\varepsilon = 100$). Kitų dydžių vertės yra tokios: $h = 1$, $N = 100$ [9].

Nagrinėtuose moksliniuose darbuose pateikiamas modelis paaiškina skruzdžių populiacijos elgseną, aprašo labai bendrą biologinėms bei socialinėms sistemoms bandos jausmo sąveiką tarp agentų. Atsižvelgiant į tai, šis sistemos aprašymas agentais pasirodė tinkamas ekonominėmis bei finansų rinkoms aprašyti [9, 24]. Pažymėtina, kad vadovaujantis šiuo mikroskopiniu Kirmano modeliu yra gaunamos panašios makroskopinių kintamųjų statistinės ypatybės kaip empiriškai analizuojant finansų rinkas [10, 25].

Svarbiausia šio modelio ypatybė yra ta, kad jis parodo nuolatinį kitimą – stochastinės fluktuacijos neužgęsta. Dauguma sudėtingų sistemų modelių konverguoja į stabilią būseną, kurioje ekonominė rinka galiausiai pasiekia pusiausvyrą, o pats modelis demonstruoja norimas statistines ypatybes tik labai konkrečioms agentų skaičiaus vertėms. Pavyzdžiui, dažnai yra galvojama, kad finansinės rinkos yra apibūdinamos kaip investuotojų kolektyvinės nuotaikos stochastiniai svyravimai, nulemti išorinės informacijos srauto. Svyravimai bandos jausmo modelyje, kitaip nei daugelyje kitų modelių, nėra inicijuojami išorinių kilmės veiksnių, bet kyla iš agentų tarpusavio sąveikos [9].

Svarbu atkreipti dėmesį, kad (2) ir (3) formulėse pateiktas Kirmano bandos jausmo modelis yra simetrinis, kai $\sigma_1 = \sigma_2$, t. y., pereinamosios būsenos tikimybės generuoja simetrinę agentų populiacijos skirstinį. Tokios tikimybės tankio funkcijos trečiasis momentas yra lygus nuliui.

Bendresniu atveju, darant prielaidą, kad individualumo tikimybė σ yra skirtinga, agentų grupėms, gaunama kitokia – asimetrinė tikimybės tankio funkcija [25].

Pažymėtina, kad nagrinėtuose moksliniuose darbuose yra pateikiama ir kitokių, bendresnių šio modelio išraiškų. Galimos ekstensyvios šio modelio išraiškos, kai agentai gali sąveikauti tik su gretimais agentais [9, 11–14, 25, 27]. Taip pat naudojant tinklų topologiją galima detaliau aprašyti agentų sąveikas su juos supančia aplinka, kas galimai tiksliau atspindėtų realybę [26]. Taip pat, (2) ir (3) formulėse pateikta agentų modelio išraiška gali būti aproksimuojama ir pakeičiama įvairiomis tolydžios išraiškos SDL, kurių pritaikymas yra universalesnis siekiant aprašyti empirinius ekonominių bei finansų rinkų duomenis [9].

3.2. Makroskopinis Kirmano modelio aprašymas

Siekiant gyvybės ir mirties modelius taikyti kuo plačiau yra naudinga parodyti kaip (2) ir (3) formulėmis aprašomas Kirmano bandos jausmo modelis, gali būti aproksimuojamas tolydžios išraiškos SDL.

Socialinėms sistemoms aprašyti dažnai naudojami įvairūs stochastiniai modeliai. Tačiau tokių modelių pagrindimas išlieka didelė problema, kadangi labai retai socialinių sistemų interpretavimas naudojant agentų ir jų tarpusavio sąveikų modelius gali būti išsprendžiamas makroskopiniame lygmenyje, užrašant SDL ar Fokerio ir Planko lygtis. Kirmano bandos jausmo modelis apibrėžiamas kaip gyvybės ir mirties procesas yra vienas iš nedaugelio atvejų, kai agentų bandos jausmo sąveikomis grindžiama pagrindinė kinetinė lygtis (angl. *master equation*) gali būti pakeista Fokerio ir Planko lygtimi ar ją atitinkančia SDL [9].

Svarbu yra suprasti kaip iš Kirmano modelio pagrindinės kinetinės lygties yra išvedamas makroskopinis sistemos aprašymas SDL. Šio uždavinio sprendimo metodas buvo aprašytas daugelyje nagrinėtų mokslinių darbų [9, 11–14, 25, 27]. Šiai užduočiai yra naudojamas bendras gyvybės ir mirties proceso formalizmas.

Pirmiausiai iš 3.1 skirsnyje aprašytos Markovo grandinės sudaroma pagrindinė kinetinė lygtis, kuri yra diskreti, nes bendras agentų skaičius ribotas. Tačiau bendresnis ir vertingesnis yra aprašymas, kuris nepriklauso nuo agentų skaičiaus N . Toks apibendrinimas gaunamas riboje, kai

agentų skaičius $N \rightarrow \infty$, o pagrindinis makroskopinis sistemos kintamasis tampa tolygus $x = \frac{X}{N}$. Tokiu atveju perėjimo spartą tarp sistemos būsenų per laiko vienetą užrašoma taip [9, 11]:

$$\pi^+(x) = (1-x)\left(\frac{\sigma_1}{N} + hx\right), \quad (4)$$

$$\pi^-(x) = x\left(\frac{\sigma_2}{N} + h(1-x)\right). \quad (5)$$

Matyti, kad tarp anksčiau užrašytų vieno žingsnio tikimybių $p(X \rightarrow X \pm 1)$ ir naujos jų formos π^\pm , galioja toks sąryšis [9, 11]:

$$p(X \rightarrow X \pm 1) = N^2 \pi^\pm(x) \Delta t. \quad (6)$$

Panaudojus vieno žingsnio perėjimo tikimybės operatorius \mathbf{E} ir \mathbf{E}^{-1} yra užrašoma pagrindinė kinetinė lygtis [11, 22]:

$$\frac{\partial}{\partial t} w(x, t) = N^2 \{ (\mathbf{E} - 1)[\pi^-(x)w(x, t)] + (\mathbf{E}^{-1} - 1)[\pi^+(x)w(x, t)] \}, \quad (7)$$

čia, $w(x, t)$ – tikimybė surasti sistemą makroskopinėje būsenoje x , laiko momentu t . Pasinaudojant \mathbf{E} ir \mathbf{E}^{-1} apibrėžimais [22] ir išskleidžiant juos Teiloro eilute iki antrojo nario, gaunama:

$$\mathbf{E}[f(x)] = f(x + \Delta x) \approx f(x) + \Delta x \frac{d}{dx} f(x) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} f(x), \quad (8)$$

$$\mathbf{E}^{-1}[f(x)] = f(x - \Delta x) \approx f(x) - \Delta x \frac{d}{dx} f(x) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} f(x). \quad (9)$$

Įstačius 8 ir 9 išraiškas į pagrindinę kinetinę lygtį (7), gaunama Fokerio ir Planko lygtis:

$$\frac{\partial}{\partial t} w(x, t) = -N \frac{\partial}{\partial x} [\{ \pi^+(x) - \pi^-(x) \} w(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\{ \pi^+(x) + \pi^-(x) \} w(x, t)] \quad (10)$$

Įvedami pažymėjimai, kur $A(x)$ – lygties dreifo narys, o $B(x)$ – lygties difuzijos narys:

$$A(x) = N \{ \pi^+(x) - \pi^-(x) \} = \sigma_1(1-x) - \sigma_2 x, \quad (11)$$

$$B(x) = \pi^+(x) + \pi^-(x) = 2hx(1-x) + \frac{\sigma_1}{N}(1-x) + \frac{\sigma_2}{N}x \approx 2hx(1-x). \quad (12)$$

Išvestai Fokerio ir Planko lygčiai (10) yra užrašoma atitinkama SDL, Ito interpretacijoje [9, 15]:

$$dx = A(x)dt + \sqrt{B(x)}dW = [\varepsilon_1(1-x) - \varepsilon_2 x]dt + \sqrt{2x(1-x)}dW, \quad (13)$$

čia:

W – Vynerio procesas, tai tolydinis vienmatis Brauno judėjimas [9];

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{h}.$$

Svarbu parodyti, kaip Kirmano modelį aprašanti (13) SDL ir jos parametrai yra susiję su pačio bendriausio pavidalo SDL išraiška naudota nagrinėtuose darbuose [9]. Atlikus kintamųjų pakeitimą $\mu = \frac{x(t)}{1-x(t)}$ ir perrašius (13) SDL naujam kintamajam Ito interpretacijoje [14, 27]:

$$d\mu = [\varepsilon_1 + \mu(2 - \varepsilon_2)](1 + \mu)dt + \sqrt{2\mu}(1 + \mu)dW. \quad (14)$$

Pasinaudojant tuo, kad šiame rašto darbe yra aktualios kintamųjų vertės, kai vyrauja laipsninio pobūdžio dėsningumai, t. y. $\mu \gg 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$, $\varepsilon_1 = 0$, (14) formulė perrašoma Ito interpretacijoje [14, 27]:

$$d\mu = \left(\eta - \frac{\lambda}{2}\right)\mu^{2\eta-1}dt + \mu^\eta dW, \quad (15)$$

čia:

η – triukšmo netiesiškumo parametras;

λ – laipsninės tikimybės tankio funkcijos laipsnio rodiklis.

(15) lygtis yra laikoma bendrąja SDL forma skirta laipsninio pobūdžio statistinėms ypatybėms modeliuoti arba bendrąją SDL klase [9].

Po kintamųjų pakeitimo, (13) ir (15) lygčių parametrai yra susiję tokiais ryšiais [11]:

$$\eta = \frac{3}{2}, \quad (16)$$

$$\lambda = \varepsilon + 1. \quad (17)$$

Nagrinėtuose moksliniuose darbuose yra parodyta, kad (13) ir (15) gautų SDL išraiška apibendrina Kirmano modelio taikymus investicijų grąžai finansų rinkose aprašyti [9, 11–14, 25, 27].

3.3. Kirmano modelis ir Beselio procesas

Siekiant nagrinėti šiame rašto darbe numatytą problemą, svarbu susipažinti su Beselio proceso apibrėžimu, nes būtent jį vėliau šiame rašto darbe naudosime atitinkamai aproksimacijai išvesti. Taip pat svarbu susipažinti su Kirmano modelio aprašomo (13) SDE sąsaja su Beselio procesu.

Praeitame 3.2 skirsnyje buvo parodyta, kaip iš Kirmano modelį aprašančių perėjimo spartų tarp sistemos būsenų per laiko vienetą yra išvedama šį modelį aprašanti SDL. Galima būtų manyti, kad ir kitos vienmatės SDL gali turėti atitinkamus gyvybės ir mirties procesus, kaip buvo parodyta nagrinėtuose moksliniuose darbuose [31].

Beselio procesas yra stochastinis procesas, apibūdinantis N -mačio Brauno judėjimo padėties vektoriaus ilgį (Euklidinė norma), kuris aprašomas tokia lygtimi [9, 12]:

$$R(t) = \left\| \overline{W(t)^N} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N W_i^2(t)}. \quad (18)$$

Šis procesas, taip pat gali būti aprašomas štai tokia SDL [9, 12]:

$$dR = \frac{N-1}{2} \frac{dt}{R} + dW = \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \frac{dt}{R} + dW, \quad (19)$$

čia:

ν – Beselio funkcijos eilė;

N – dimensijų skaičius.

Beselio funkcijos eilė yra susijusi su dimensijos skaičiumi N ir yra lygi [9, 12]:

$$\nu = \frac{N}{2} - 1. \quad (20)$$

Yra akivaizdu, kad netiesinės signalo kartu su atitinkama barjero transformacija negali pakeisti trukmių, priklausančių tik nuo susikirtimo taškų laiko skalėje. Todėl pikų ir duobių trukmių statistika yra invariantiška šių transformacijų atžvilgiu. Ši ypatybė leidžia nagrinėti trukmių statistiką ir po transformacijos, kuri pakeičia multiplikatyvų triukšmą į paprastesnę adityvų. Tuo tikslu nagrinėjant Kirmano modelį yra naudinga atlikti Lamperti transformaciją, kuri leidžia supaprastinti (13) SDL aprašančią Kirmano modelį ir ją tiesiogiai palyginti su Beselio procesu:

$$z(x) = \sqrt{2} \arcsin(\sqrt{x}). \quad (21)$$

(13) SDL pritaikius (21) kintamųjų pakeitimą, taip pat darant prielaidą, kad $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ gaunama štai tokia SDL išraiška Ito interpretacijoje su adityviu triukšmu:

$$dz = \frac{2\varepsilon-1}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg}(z\sqrt{2})dt + dW. \quad (22)$$

Pažymėtina, kad lygčių (13) ir (22) kintamieji atitinkamai kinta tokiuose režiuose: $0 \leq x \leq 1$, o $0 \leq z \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Specialiu atveju, padarius papildomą prielaidą, kai $z \rightarrow 0$, matyti, kad (22) lygtis šioje riboje įgyja Beselio proceso pavidalą:

$$dz = \frac{2\varepsilon-1}{2z} dt + dW = \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right) \frac{dt}{z} + dW. \quad (23)$$

Šiuo atveju Beselio funkcijos eilė $\nu = \varepsilon - 1$. Taigi, pasiūlyta idėja dėl Kirmano modelio aproksimavimo Beselio proceso pavidalo SDL turėtų galioti asimptotiškai, esant sąlyginai mažoms z vertėms.

(22) ir (23) SDL yra patogios tuo, kad triukšmas jose yra adityvus, o pirmą narį galima interpretuoti kaip narį apibrėžiantį judėjimo potencialą. Kai triukšmas yra adityvus, atliekant skaičiavimus skaitmeniškai galima naudoti pastovų laiko žingsnį, nes SDL triukšmo narys yra tiesinis, t. y. lyginant su situacija, jeigu triukšmo narys būtų netiesinis, atliekant skaitmeninius skaičiavimus išvengiama labai didelių signalo pasikeitimų. Matome, kad (13) SDL gali būti transformuojama į (22) lygtį. Tai reiškia, kad šia lygtimi generuojama pikų ir duobių trukmių statistika turi bendrų bruožų su atitinkama statistika generuojama Beselio proceso.

3.4. Darbe nagrinėjamos SDL ir jų generuojamų pikų ir duobių trukmių statistinės ypatybės

Šiame skirsnyje išdėstomos rašto darbe nagrinjamų SDL ypatybės, pikų ir duobių trukmių apibrėžimas, jų ypatybės, apibūdinama kas yra laiko sekų ilga atmintis, aptariama medžiaga apie jos apgaulingą pasireiškimą vienmačiuose Markovo procesuose ir aptariama kaip tą apgaulingumą diagnozuoti, atsižvelgiant į tai, kad vadovaujantis šia teorine medžiaga bus aptariami pagrindiniai šio rašto darbo rezultatai.

Pirmoji svarbi ypatybė yra ta, kad laiko sekos, gaunamos sprendžiant (15) lygtį, pasižymi laipsniniu stacionariu skirstiniu [9]:

$$p_{st}(x) \sim Cx^{-\lambda} \quad (24)$$

čia:

C – normavimo konstanta;

λ – laipsninės tikimybės tankio funkcijos laipsnio rodiklis.

Pažymėtina, kad ta pati (24) formulėje nurodyta ypatybė galioja ir pikų ir duobių trukmių skirstiniams [14].

Kita svarbi ypatybė yra procesų atmintis. Laikoma, kad signalas $x(t)$ turi tikrą ilgą atmintį, jeigu jo galios spektrinis tankis (riboje, kai $f \rightarrow 0$) yra laipsninio pobūdžio [28]:

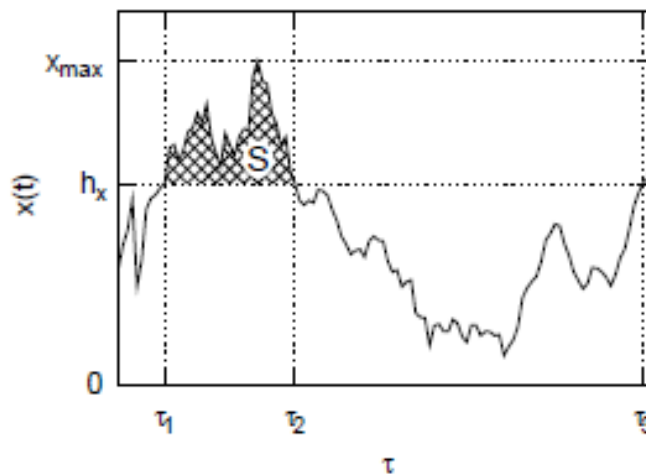
$$S(f) \sim \frac{1}{f^{1-\kappa}}, \quad 0 < \kappa < 1, \quad (25)$$

Arba autokoreliacijos funkcija $C(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle$ asimptotinėje riboje, kai $\tau \rightarrow \infty$ elgiasi kaip laipsninio pobūdžio funkcija, [28]:

$$C(\tau) \sim \frac{1}{\tau^\rho}, \quad 0 < \kappa < 1. \quad (26)$$

Toks tikros ilgos atminties apibrėžimas, formuluojamas griežtai matematiniu pagrindu, kelia praktinių problemų, nes realios laiko sekos visada yra baigtinės, o jų išmatuojamas ribinis dažnis visada yra didesnis už nulį. Todėl net iš empirinių laiko sekų nustačius aukščiau minėtas laipsninio pobūdžio priklausomybes, lieka neaišku ar tos priklausomybės išlaiko savo ypatybes asimptotiškai, t. y., kai $\tau \rightarrow \infty$ ar $f \rightarrow 0$. Kita vertus, paradoksalu, bet vienmatis Markovo procesas, pagal apibrėžimą, neturintis ilgos atminties, ir aprašomas (15) formule visgi generuoja aukščiau aprašytas laipsninio pobūdžio autokoreliacijas ir galios spektrinį tankį tam tikrame pasirinktame laiko ir dažnių intervale $S(f) \sim 1/f^{1-\kappa}$, kur $\kappa = \frac{3-\lambda}{2\eta-2}$ [14, 28]. Todėl iškyla būtinybė surasti priemones, padedančias praktiškai atskirti laiko sekas, kurių demonstruojamos ilgos atminties ypatybės yra apgaulingos, t. y., jas generuoja Markovo procesas.

Šiai problemai spręsti buvo pasiūlyta pasitelkti pikų ir duobių trukmių statistinę analizę [14], nes tikros ilgos atminties procesai, tokie kaip trupmeninis Brauno judėjimas, charakterizuojami Hursto rodikliu H , generuoja laipsninio pobūdžio trukmių skirstinius su skirtingu laipsniniu rodikliu $2 - H$ [22]. Pikų ir duobių trukmės apibūdinamos naudojant signalo $x(t)$ susikirtimą su pasirinkto aukščio h_x barjeru – ribine slenkstine verte (žr. 1 paveiksle). Trukmė, kurią signalo vertė yra didesnė nei ribinės slenkstinės vertės („barjero“ vertės) $T_h = \tau_2 - \tau_1$, yra piko trukmė, o trukmė, kurią signalo vertė yra mažesnė nei ribinės slenkstinės vertės $\theta_h = \tau_3 - \tau_2$, duobės trukmė [9, 12].



2 pav. Signalo $x(t)$ pikų ir duobių trukmės apibrėžimas [9, 12]

2 pav. pavaizduotas signalo $x(t)$ pikų ir duobių trukmės ribinei slenkstinei vertei h_x apibrėžimas, čia pažymėti trys laikai, kai signalas kerta ribinę slenkstinę vertę h_x , – τ_1, τ_2, τ_3 .

Kitas svarbus aspektas yra tas, kad vienmačiams Markovo procesams, kuriuo tai pat yra ir šiame rašto darbe tiriamas Kirmano modelis, pikų ir duobių trukmių skirstiniams yra būdingas $3/2$ laipsninis pobūdis, $P(T) \sim T^{-3/2}$ [14].

Esant sąlygai, kai stochastinis procesas prasideda taške nykstamai arti aukščiau kaip pasirinkta h_x riba, tai pirmasis šios ribos kirtimo laikas, pagal apibrėžimą atitinka piko trukmę [9]. Atitinkamai esant tokiai sąlygai, pikų skirstinys paprasčiausiai yra pirmo kirtimo laiko skirstinys.

Kituose moksliniuose darbuose [14, 32] buvo atlikta pikų ir duobių trukmių skirstinių pavidalo priklausomybės nuo ribinės slenkstinės vertės analizė ir buvo pastebėta, kad stochastiniams procesams aprašomais (15) SDL nėra būdinga tikra ilga atmintis, o būdinga

apgaulinga ilga atmintis, t. y. keičiant ribines slenkstines vertes esant skirtingoms jų vertėms beveik visame T diapazone skirstiniai yra to paties $3/2$ laipsninio pobūdžio, išskyrus didesnių T verčių diapazone (pvz., kai $h_x = 0,4$, $T > 10^{-2}$) skirstiniams yra būdingas eksponentinis apribojimas. Kaip ir turėtume tikėtis, keičiant ribines slenkstines vertes (15) formule aprašomiems procesams yra būdingas tas pats Hursto rodiklis $H = \frac{1}{2}$. Apibendrinant apibrėžimus pateiktus šiame skirsnyje, vadovaudamiesi (15) SDL generuojamomis statistinėmis ypatybėmis, galima atlikti skaitmeninį šios ir kitų netiesinių SDL sprendimą, siekdami iširti generuojamų signalų pikų ir duobių trukmių skirstinius ir aptarti jų apgaulingos ilgos atminties kilmę.

3.5. Analizinis Beselio proceso pikų ir duobių trukmių skirstinių gavimas

Aukščiau 3.2 ir 3.3 skirsniuose išdėstytos SDL gali būti spendžiamos skaitmeniniu būdu, tačiau siekiant gauti bendresnio pobūdžio rezultatus prasminga rasti tokių SDL pagrindu gaunamų pikų ir duobių trukmių analizes skirstinių aproksimacijas. Šiame skirsnyje parodoma, kaip gauti šias aproksimacijas, pasinaudojant Beselio proceso pirmo kirtimo laikų analizinėmis išraiškėmis.

Ankstesniame 3.3 skirsnyje parodyta, kad (13) SDL kintamųjų pakeitimu gali būti transformuojama į (22) lygtį. Tai reiškia, kad (13) lygties generuojamos pikų ir duobių trukmės sutampa su trukmėmis, generuojamomis (22) lygtimi. Bet to, (22) lygtis mažoms kintamojo vertėms asimptotiškai yra tapati Beselio proceso SDL todėl galime pasinaudoti žinomais analiziniais rezultatais. Vienas iš tokių metodų pasinaudoti Beselio proceso rezultatais, kurį plačiau aptarsime šiame skirsnyje, yra išdėstytas ir naudotas rašto darbo rengimo metu nagrinėtoje moksliniuose darbuose [9, 12, 31].

(22) SDL stochastinio proceso kintamasis su Kirmano proceso kintamuoju yra susijęs pagal Lamperti transformaciją nurodytą (21) formulėje. Pagal apibrėžimą, duobės trukmė yra pirmo kirtimo trukmė, kuri tęsiasi tam tikrą laiko momentą t , kai proceso kintamasis z kerta ribinę slenkstinę vertę $h_z := l(h_x)$ iš apačios, o procesas prasideda laiko momentu $t = 0$ taške $z_0 = z(0)$, labai arti, bet žemiau ribinės slenkstinės vertės. $z_0 = l(x_0) < h_z$ [9, 12].

Duobės trukmė θ_h yra apibrėžiama, kaip proceso pirmo kirtimo laikas, kai procesas prasideda be galo arti žemiau ribinės slenkstinės vertės h_z ir yra lygi [9, 12]:

$$\theta_h = \tau_{z_0, h_z}^{(v)} = \inf\{t - t_0, z(t) \leq h_z\}, 0 < h_z - z_0 \ll 1. \quad (27)$$

Beselio proceso prasidedančio taške z_0 pirmo kirtimo laikų skirstinys, kai $0 < z_0 < h_z$ yra lygus [9, 12]:

$$\rho_{z_0, h_z}^{(v)}(\theta_h) = \frac{h_z^{v-2}}{z_0^v} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j_{v,k} J_v\left(\frac{z_0}{h_z} j_{v,k}\right)}{J_{v+1}(j_{v,k})} \exp\left(-\frac{j_{v,k}^2}{2h_z^2} \theta_h\right), \quad (28)$$

čia:

h_z – Beselio proceso ribinė slenkstinė vertė;

$j_{v,k}$ – yra k -tasis v eilės Beselio funkcijos nulis;

J_v – pirmojo tipo Beselio funkcija;

θ_h – Beselio proceso pirmo kirtimo laikas (arba duobės trukmė), esant konkrečiai h vertei.

Pažymėtina, kad, kai $z_0 \rightarrow h_z$, tai $\rho_{z_0, h_z}^{(v)}(\theta_h) \rightarrow 0$, žr. formulę (28), nes stochastinis procesas prasidedantis arti ribinės slenkstinės vertės akimirksniu ją kerta. Siekiant išvengti tokio konvergavimo įvedamas skirstinys $p_{h_z}^{(v)}(\theta_h)$, kaip skirstinio $\rho_{z_0, h_z}^{(v)}(\theta_h)$ riba [9, 12]:

$$p_{h_z}^{(v)}(\theta_h) = \lim_{z_0 \rightarrow h_z} \frac{\rho_{z_0, h_z}^{(v)}(\theta_h)}{h_z - z_0}. \quad (29)$$

Siekiant suskaičiuoti šią ribą Beselio funkcija $J_v\left(\frac{z_0}{h_z} j_{v,k}\right)$ skleidžiama Teiloro eilute $\frac{z_0}{h_z} = 1$ aplinkoje, apsiribojant dviem pirmaisiais Teiloro eilutės nariais [9, 12]:

$$J_v\left(\frac{z_0}{h_z} j_{v,k}\right) \approx J_v(j_{v,k}) - \left(1 - \frac{z_0}{h_z}\right) [v J_v(j_{v,k}) - j_{v,k} J_{v+1}(j_{v,k})] = \left(1 - \frac{z_0}{h_z}\right) j_{v,k} J_{v+1}(j_{v,k}). \quad (30)$$

Taip pat, kai kurie nariai yra atmetami, nes $J_v(j_{v,k}) = 0$ visiems sveikiems k skaičiams.

(30) formulę įstačius į (29) formulę gaunama paprastesnė pirmo kirtimo laiko skirstinio išraiška [9, 12]:

$$p_{h_z}^{(v)}(\theta_h) = C_{\Delta} \sum_{k=1}^{\infty} j_{v,k}^2 \exp\left(-\frac{j_{v,k}^2}{2h_z^2} \theta_h\right), \quad (31)$$

čia, C_Δ – normavimo konstanta. Ši lygtis gali būti toliau supaprastinama, pasinaudojus ypatybe, kad Beselio nuliai yra vienodai tarpusavyje nutolę (angl. *equally spaced*), kur sumą galima pakeisti integralu, tarsi tai būtų Rymano suma [9, 12, 31]:

$$p_{h_z}^{(v)}(\theta_h) \approx C_\Delta \int_{j_{v,1}}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2h_z^2} \theta_h\right) dx = C_\Delta \left[\frac{h_z^2 j_{v,1} \exp\left(-\frac{j_{v,1}^2}{2h_z^2} \theta_h\right)}{\theta_h} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{h_z^3 \operatorname{erfc}\left(\frac{j_{v,1} \sqrt{\theta_h}}{\sqrt{2} h_z}\right)}{\theta_h^{3/2}} \right]. \quad (32)$$

Pažymėtina, kad, kai $\theta_h \rightarrow 0$, (32) išraiškos skirstinys diverguoja, todėl C_Δ normavimo konstantos vertės bendru atveju nėra galima surasti, o galima surasti tik konkrečiu atveju, kai yra nustatoma konkreti minimali Δ vertė [9, 12]. C_Δ išraiškos nustatymas pateiktas 4 šio rašto darbo dalyje skirtoje skaičiavimo, modeliavimo rezultatams ir jų aptarimui.

Svarbu atkreipti dėmesį į tai, kad esant skirtingoms θ_h vertėms vyrauja skirtingi (32) skirstinio išraiškos dėmenys [9, 12]:

$$p_{h_z}^{(v)}(\theta_h) \sim \theta_h^{-3/2}, \text{ kai } 0 < \theta_h \ll \frac{2h_z^2}{j_{v,1}^2}, \quad (33)$$

$$p_{h_z}^{(v)}(\theta_h) \sim \frac{\exp\left(-\frac{j_{v,k}^2}{2h_z^2} \theta_h\right)}{\theta_h}, \text{ kai } \theta_h \gg \frac{2h_z^2}{j_{v,1}^2}. \quad (34)$$

Pažymėtina, kad (33) lygties atveju, pikų trukmių skirstiniams būdingas 3/2 laipsninis pobūdis, o (34) atveju, esant didesnėms θ_h vertėms, skirstinių pavidalams būdingas eksponentinis nupjovimas. Išvedus pikų (duobių) trukmių skirstinio išraišką (32) t. y. Beselio proceso aproksimaciją, matyti, kad aproksimacijos išraiškos ypatybės yra analogiškos pikų ir duobių trukmių skirstiniams aprašomiems kitoms šiame rašto darbe nagrinėjamos SDL, tai reiškia, kad ši aproksimacija gali būti naudojama aproksimuojant trukmių skirstinius ir kitoms SDL.

Taip pat (32) lygtyje nurodyta aproksimacija buvo naudota kituose darbuose [9, 12, 33]. Apibendrinant juos galima teigti, kad skaitmeniškai suskaičiavus pikų ir duobių trukmių skirstinius keičiant proceso ribinę slenkstinę vertę h_x , naudojant SDL, asimptotiškai aprašančias Kirmano agentų modelį, aproksimacija gauta iš Beselio proceso bendru atveju tiksliai neaprašo nagrinėto Kirmano modelio ir jį atitinkančios SDL. Tačiau, aproksimacija gerai aprašo laipsninę pikų trukmių skirstinio dalį, o specifiniais atvejais gali būti naudojama ir sudėtingesniems procesams nei Beselio aproksimuoti. Atsižvelgus į [9, 12, 33] pateiktos pikų ir duobių trukmių skirstinių analizės rezultatus ir aproksimacijos tikslumą, galima teigti, kad toks metodas yra tobulintinas siekiant sukurti tikslesnes aproksimacijas tinkamas nagrinėtoms SDL.

Naujesniame darbe [31] buvo pasiūlyta atlikti kitą iš Beselio proceso gautą aproksimaciją, kuri tiksliau aprašo diskretaus pavidalo Kirmano modelį.

Šiame darbe [31] pasinaudojus Keilsono teorema buvo pasinaudota diskretaus pavidalo Markovo proceso pirmųjų kirtimo laikų Laplaso transformacija iš k būsenos į būseną n , kur $0 < k < n$, kuri yra lygi [31]:

$$\langle e^{-s\theta_{h,k,n}} \rangle = \frac{\prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i^{(n)}}{s + \lambda_i^{(n)}}}{\prod_{i=1}^k \frac{\lambda_i^{(k)}}{s + \lambda_i^{(k)}}}, \quad s \geq 0, \quad (35)$$

$\lambda_i^{(n)}$ – neigiamo n -tojo rango gyvybės ir mirties proceso generatoriaus matricos teigiamos tikrinės vertės. (35) išraiškos atvirkštinės Laplaso transformacijos nepavyksta atlikti daugumai verčių nuo k iki n . Tačiau, yra pastebėta, kad kai kuriems mažiems n ir $k = n - 1$ atvirkštinė Laplaso transformacija yra lygi eksponenčių sumai, kurių tikrinės vertės yra $\lambda_i^{(n)}$ [31].

Pažymėtina, kad ši suma yra panašaus pavidalo, kaip ir (31) išraiška. Atsižvelgiant į šį panašumą, naudojant tą pačią metodiką, buvo pasiūlyta štai tokia aproksimacija [31]:

$$\begin{aligned} p(\theta_h) &\approx \frac{1}{\left(\sqrt{\lambda_n^{(n)}} - \sqrt{\lambda_1^{(n)}}\right)} \int \frac{\sqrt{\lambda_n^{(n)}}}{\sqrt{\lambda_1^{(n)}}} x^2 \exp(-x^2 \theta_h) dx = \\ &= \frac{1}{4 \left(\sqrt{\lambda_n^{(n)}} - \sqrt{\lambda_1^{(n)}}\right)} \left[2 \frac{\sqrt{\lambda_1^{(n)}} \exp(-\lambda_1^{(n)} \theta_h) - \sqrt{\lambda_n^{(n)}} \exp(-\lambda_n^{(n)} \theta_h)}{\theta_h} \right] + \\ &+ \sqrt{\pi} \frac{\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\lambda_1^{(n)} \theta_h}\right) - \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\lambda_n^{(n)} \theta_h}\right)}{\theta_h^{3/2}} = I(\theta_h, \lambda_1^{(n)}, \lambda_n^{(n)}), \quad (36) \end{aligned}$$

čia:

$\lambda_1^{(n)}$ – pirma, mažiausia teigiama tikrinė vertė;

$\lambda_n^{(n)}$ – paskutinė, didžiausia teigiama tikrinė vertė;

$I(\theta_h, \lambda_1^{(n)}, \lambda_n^{(n)})$ – patogumo tikslais įvestas pažymėjimas.

Atkreipiamas dėmesys, kad (37) aproksimacija galioja tol, kol $\sqrt{\lambda_i^{(n)}}$ keičiant i didėja tiesiškai. Atrodo, kad tai yra vienintelis būdas gauti laipsninio pavidalo skirstinį $p(\theta_h) \propto \theta_h^{3/2}$, kur ši ypatybė yra bendra bet kokiam vienmačiam Markovo procesui. Taigi, atrodo, kad pastaroji laipsninio pobūdžio priklausomybė turėtų galioti kiekvienam gyvybės ir mirties procesui pakankamai ilgame θ_h intervale, kol $\sqrt{\lambda_i^{(n)}}$ keičiant i didėja tiesiškai [31].

Pažymėtina ir tai, kad (37) formulės pirmos eilės aproksimacija dažniausiai yra nepakankama aproksimuoti θ_h skirstinio, nes dažniausiai λ_1 nario įtaka lieka nepakankamai įvertina [31].

Šiai problemai spęsti, siekiant pagerinti (36) aproksimaciją [31] buvo pasiūlyta atlikti papildomą aproksimaciją, kur yra integruojama nuo antro ir tolesnių narių, pirmąjį narį įvertinant atskirai. Tokia θ_h skirstinio aproksimacija nuo antro nario yra lygi [31]:

$$p(\theta_h) \approx \rho \lambda_1^{(n)} \exp(-\lambda_1^{(n)} \theta_h) + (1 - \rho) I(\theta_h, \lambda_2^{(n)}, \lambda_n^{(n)}), \quad (37).$$

čia:

ρ – dydis, skirtas įvertinti santykinį pirmos tikrinės vertės svorį (įtaką) θ_h skirstiniui.

ρ vertė nustatoma įvertinant (37) formulės abiejų narių indėlių [31]. Pagal pateiktą išraišką, akivaizdžiai matyti, kad kai $\rho = 0$, θ_h skirstinio pavidalui nėra būdingas eksponentinis nupjovimas, o kai $\rho = 1$, θ_h skirstinys – eksponentinis skirstinys.

Nagrinėtuojų atveju, pirmasis θ_h skirstinio momentas $\bar{\theta}_h$ (vidutinė duobės trukmė) lygus [31]:

$$\bar{\theta}_h = \rho \frac{1}{\lambda_1^{(n)}} + (1 - \rho) \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^{(n)} \lambda_n^{(n)}}} \quad (38)$$

Iš 39 išsireiškiamas ρ :

$$\rho = \frac{\lambda_1(1 - \bar{\theta}_h \sqrt{\lambda_2^{(n)} \lambda_n^{(n)}})}{\lambda_1 - \sqrt{\lambda_2^{(n)} \lambda_n^{(n)}}} \quad (39)$$

Pažymėtina, kad $\bar{\theta}_h$, taip pat ir tolimesni momentai yra tiesiogiai žinomi ir gali būti tiksliai gaunami. Taigi, jeigu yra poreikis toliau pagerinti ir patikslinti aproksimaciją, galima toliau skaidyti vėlesnius narius iš sumos ir įvertinti jų santykinę įtaką pagal aukštesnius momentus [31].

Rašto darbo rengimo metu buvo iškelta originali idėja pasinaudojant aukščiau [31] darbe išdėstyta aproksimacijos metodika atlikti analogišką aproksimaciją tolydaus proceso atveju, kurią galima palyginti su skirstiniu gaunamu skaitmeniškai sprendžiant (22) formulėje pateiktą SDL.

Atsižvelgiant į tai, kad (32) formulėje pateiktas skirstinys neaprašo θ_h skirstinių pavidalams būdingo eksponentinio nupjovimo, pasinaudojus (28), (31), (32) ir (36) formulių pavidalų panašumais ir (37) formule, nauja θ_h skirstinio aproksimacija pažymima taip:

$$\tilde{p}_{h_z}^{(v)}(\theta_h) = \tilde{C}_\Delta \left[(1 - \rho) p_{h_z}^{(v)}(\theta_h) + \frac{\rho}{\tau_0} \exp\left(-\frac{\theta_h}{\tau_0}\right) \right], \quad (40)$$

čia:

τ_0 – eksponentinio apribojimo parametras. Šis dydis yra papildomai įvedamas parametras, vietoje tikrinių verčių, nes jos tolydžiam atvejui nėra žinomos.

$p_{h_z}^{(v)}(\theta_h)$ – (32) formulėje nurodyta θ_h skirstinio išraiška.

ρ – dydis, skirtas įvertinti santykinį pirmojo (40) formulės nario (įtaką) naujai užrašomam θ_h skirstiniui – $\tilde{p}_{h_z}^{(v)}(\theta_h)$.

Pasinaudojant (40) išraiška gali būti gaunama tikslesnė (22) SDL aproksimacija. (40) formulės parametų išraiškų nustatymas pateiktas 4 šio rašto darbo dalyje skirtoje skaičiavimo, modeliavimo rezultatams ir jų aptarimui.

3.4. Pasirinktas SDL sprendimo būdas skaitmeniniu būdu

Šiame skirsnyje pateikiamas pasirinktas SDL skaitmeninio skaičiavimo būdas, atsižvelgiant į tai, kad juo vadovaujantis bus atliekami vieni iš pagrindinių šio rašto darbo skaičiavimų.

Bendroji SDL forma pažymima taip:

$$dz = A(z)dt + B(z)dW \quad (41)$$

Pirmasis ir antrasis (41) lygties dėmuo ir jo žymėjimas atitinka (13) formulę. Paprastosioms diferencialinėms lygtims (PDL) skaitmeniniu būdu spręsti yra naudojamas Oilerio metodas, o SDL spręsti yra naudojamas modifikuotas Oilerio metodas, kuris vadinamas Oilerio–Marujamos metodu. Šio metodo iteracija yra lygi [15, 29, 30]:

$$z_{i+1} = z_i + A(z_i)\Delta t + B(z_i)\Delta W. \quad (42)$$

Ši išraiška nuo iteracijos išraiškos PDL skiriasi tik Vynerio proceso nariu.

Pagal centrinę ribinę teoremą bet kokių atsitiktinių veikslių sumos skirstinys didėjant jų skaičiui artėja link Gauso skirstinio. Taigi, skirstinio standartinis nuokrypis priklauso nuo Δt šaknies. Pastarąją (42) formuluotę galima pateikti tokia išraiška [15, 29, 30]:

$$z_{i+1} = A(z_i)\Delta t + B(z_i)\sqrt{\Delta t}\xi_i, \quad (43)$$

čia: ξ_i – atsitiktinis Gauso kintamasis (jėga), kurio vidurkis yra nulis, o dispersija 1. Suskaičiuoti šio dydžio vertes rašto darbo rengimo metu buvo naudojama speciali funkcija, integruota C++ programavimo kalbos matematikos bibliotekose („*generate random gaussian*“). Aproximacija naudojama pakeisti (42) į (43) išraišką vadinama Oilerio–Marujamos aproksimacija [29, 30].

Pažymėtina, kad šiame rašto darbe atliekant pikų ir duobių trukmių skirstinių skaičiavimus yra taikoma nekintanti (vienoda) laiko tarpo per kurį sistema pereina iš vienos būsenos į kitą vertė Δ .

4. SDL, aprašančios Kirmano agentų modelio evoliuciją, duobių trukmių skaitmeniškai gautų skirstinių analizinio aproksimavimo rezultatai

Rašto darbo rengimo metu vadovaujantis 3 dalyje išdėstytu SDL sprendimo skaitmeniniu būdu buvo panaudotas C++ programavimo kalba sukurtas kodas, skirtas šioms SDL spręsti. Taip pat, vadovaujantis 3 skirsnyje išdėstyta teorine medžiaga buvo išvesta analizinė duobių trukmių skirstinio išraiška (40 formulė) ir pateiktos jos parametrų išraiškos.

Šiame skirsnyje pristatomi (13) ir (22) SDL skaitmeninio sprendimo būdu gauti pikų ir duobių trukmių skirstiniai, kurie lyginami su skirstiniais gaunamais pagal (32) ir (40) formules.

Šio darbo metu atlikti modeliavimą pagal (22) lygtį pasirinkta dėl šių priežasčių:

- lygtis yra tiksli tolydinė gyvybės ir mirties proceso – Kirmano modelio versija, kai kintamasis yra transformuotas taip, kad triukšmas taptų adityvus;
- lygtis yra supaprastinta, egzistuoja aiškumas, kurie modelio parametrai lemia skirstinio pavidalą. Lygtis asimptotiškai artėja į Beselio procesą, kai kintamasis artėja į nulį. Palyginimui, (23) lygtis, kuri yra (22) lygties asimptotinė versija, yra Beselio proceso pavidalo lygtis. Ji nebuvo pasirinkta, nes aprašo Kirmano procesą tik mažoms (artimoms nuliui) z vertėms.
- kol kas būtent tokia lygtis mokslinėje literatūroje nebuvo siejama su Kirmano modeliu.

Taip pat atlikti skaičiavimai naudojant ir (13) lygtį, siekiant patvirtinti trukmių invariantiškumą atliekant kintamųjų transformacijas ir įsitikinti, kad naudojami SDL skaitmeninio sprendimo būdai veikia gerai.

Pasinaudojant (42) ir (43) formulėmis suskaičiuotas SDL stochastinis signalas – laiko sekos, suskaičiuoti pikų ir duobių trukmių skirstiniai, pagal (32) ir (40) formules nubrėžtos analizinės pikų trukmių skirstinio išraiškos. Atlikus $h_z \rightarrow h_x$ pakeitimą pagal (21) išraišką, nubrėžti atitinkami 3–7 paveikslai.

Rašto darbo metu pasinaudojus „*Wolfram Mathematica*“ programiniu paketu buvo:

- Nustatyta (32) formulės C_Δ vertė, integruojant (32) formulę pagal laiką, nuo $\theta_h = \Delta$, iki $\theta_h = \infty$, kurios vertė yra lygi:

$$C_\Delta = \frac{\sqrt{\Delta}}{h_z^3 \sqrt{2\pi} \operatorname{erfc}\left(\frac{jv_1 \sqrt{\Delta}}{\sqrt{2}h_z}\right)}, \quad (33)$$

čia:

Δ – normavimo parametras, $\Delta = 10^{-4}$;

$\operatorname{erfc}\left(\frac{j_{v,1}\sqrt{\Delta}}{\sqrt{2}h_z}\right)$, – Atvirkštinė Gauso paklaidos funkcija. Pagal apibrėžimą, $\operatorname{erfc}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^{\infty} e^{-b^2} db$.

• Nustatyti (40) formulės parametrai. Atsižvelgiant į tai, kad atliekant tolydžiai aprašomo proceso normavimą gaunamos ilgos formulių išraiškos, patogumo tikslais yra įvedama daug pažymėjimų. Žemiau pateikiami esminiai skaičiavimo etapai.

1. Atliekamas pažymėjimas:

$$b = \frac{j_{v,1}^2}{2h_z^2}. \quad (44)$$

2. (32) formulė įstatoma į (40) formulę.

3. Nustatyta (40) formulės \tilde{C}_Δ vertė, ją integruojant pagal laiką, nuo $\theta_h = \Delta$, iki $\theta_h = \infty$, kurios vertė yra lygi:

$$\tilde{C}_\Delta = \frac{2\sqrt{b^3\Delta}}{(\rho e^{-\frac{\Delta}{\tau_0} 2\sqrt{b^3\Delta}} + (1-\rho)j_{v,1}^3\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(\sqrt{b\Delta})}}, \quad (45)$$

4. Vadovaujantis skirstinio momentų apibrėžimu, integruojant (31) formulę buvo suskaičiuoti 1 ir 2 skirstinio momentai:

$\bar{\theta}_h$ – pirmasis θ_h skirstinio momentas (vidutinė duobės trukmė).

$\overline{\theta^2}_h$ – antrasis θ_h skirstinio momentas (skirstinio duobių trukmių dispersija).

5. Užrašomi štai tokie nagrinėjamų skirstinių sąryšiai su momentais:

$$\int_{\Delta}^{\infty} \theta_h \tilde{p}_{h_z}^{(v)}(\theta_h) d\theta_h = \bar{\theta}_h, \quad (46)$$

$$\int_{\Delta}^{\infty} \theta_h^2 \tilde{p}_{h_z}^{(v)}(\theta_h) d\theta_h = \overline{\theta^2}_h, \quad (47)$$

6. Suskaičius (46) ir (47) buvo gauta dviejų lygčių sistema su dviem nežinomaisiais ρ ir τ_0 , kurią išsprendus surastos ρ ir τ_0 priklausomybės nuo momentų:

$$c_{1\rho} = \bar{\theta}_h \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(\sqrt{b\Delta}) + f(\tau_0, \bar{\theta}_h) \rho = 0, \quad (48)$$

$$(1 - \rho)(a_1 - \bar{\theta}_h^2 + a_2 \rho e^{-\frac{\Delta}{\tau_0}} (\tau_0^2 + \Delta \tau_0 + \frac{\Delta^2 - \theta_h^2}{2})) = 0, \quad (49)$$

čia:

$$c_{1,\rho} = \frac{2e^{-b\Delta\Delta}}{\sqrt{b\Delta}} - \sqrt{\pi}\Delta \operatorname{erfc}(\sqrt{b\Delta})$$

$$f(\tau_0, \bar{\theta}_h) = 2 \frac{\sqrt{b^3\Delta} \rho}{j_{v,1}^3 \tau_0} e^{-\frac{\Delta}{\tau_0}} (\tau_0 + \Delta - \bar{\theta}_h) + \bar{\theta}_h \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(\sqrt{b\Delta}) + c_{2\rho},$$

$$c_{2\rho} = \sqrt{\pi}\Delta \operatorname{erfc}(\sqrt{b\Delta}) - 2e^{b\Delta} \sqrt{\frac{\Delta}{b}},$$

$$a_1 = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\Delta}{\pi}} \frac{(1+b\Delta)e^{-b\Delta}}{b^{3/2} \operatorname{erfc}(\sqrt{b\Delta})} - \Delta^2,$$

$$a_2 = 4 \sqrt{\frac{\Delta}{\pi}} \frac{b^{3/2} j_{v,1}^{-3}}{\operatorname{erfc}(\sqrt{b\Delta})}.$$

Siekiant išspręsti (48) ir (49) lygtis, įvedama aproksimacija $e^{-\frac{\Delta}{\tau_0}} = 1$ ir randamos ρ , τ_0 išraiškos, kurios yra lygios:

$$\rho(\bar{\theta}_h, \theta_h^2) = \frac{1 - \frac{2\sqrt{\Delta}}{(\Delta + \bar{\theta}_h)c_p} e^{-b\Delta}}{1 - \frac{2\sqrt{\Delta}}{(\Delta + \bar{\theta}_h)c_p} \left[e^{-b\Delta} - \frac{b^2}{j_{v,1}^3} (\tau_0(\bar{\theta}_h, \theta_h^2) + \Delta - \bar{\theta}_h) \right]}, \quad (50)$$

čia:

$$c_p = \sqrt{\pi b} \operatorname{erfc}(\sqrt{b\Delta}), \quad (52)$$

$$\tau_0(\bar{\theta}_h, \bar{\theta}_h^2) = \frac{c_{t01} - (2\Delta\bar{\theta}_h - \bar{\theta}_h^2) 3b^{\frac{3}{2}} e^{b\Delta} \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(\sqrt{b\Delta}) + \frac{1}{\Delta} b^{-\frac{11}{2}} \sqrt{S}}{12b[(\Delta + \bar{\theta}_h)\sqrt{\pi b} e^{b\Delta} \operatorname{erfc}(\sqrt{b\Delta}) - 2\sqrt{\Delta}]}, \quad (51)$$

čia:

$$c_{t01} = \Delta^{\frac{1}{2}} (-4 + 8b\Delta - 5e^{b\Delta} \sqrt{\pi} (b\Delta)^{\frac{3}{2}} \operatorname{erfc}(\sqrt{b\Delta})),$$

$$S = c_{t02} + c_{t11} \bar{\theta}_h + c_{t11} \bar{\theta}_h^2 + c_{t21} \theta_h^2 + c_{t22} \bar{\theta}_h^2 + c \bar{\theta}_h \bar{\theta}_h^2,$$

$$\begin{aligned}
c_{t02} &= -b^{11}\Delta^3(16(-1 + 2b\Delta(-4 + b\Delta)) - 8e^{b\Delta}\sqrt{\pi}(b\Delta)^{\frac{3}{2}}(-7 + 8b\Delta)\operatorname{erfc}(\sqrt{b\Delta}) + \\
&\quad 23b^3e^{2b\Delta}\pi\Delta^3\operatorname{erfc}(\sqrt{b\Delta})^2), \\
c_{t21} &= 6b^{\frac{23}{2}}\Delta^{\frac{5}{2}}(48\sqrt{b^3\Delta} - 4be^{b\Delta}\sqrt{\pi}(1 + 16b\Delta)\operatorname{erfc}(\sqrt{b\Delta}) + 19be^{2b\Delta}\pi(b\Delta)^{\frac{3}{2}}\operatorname{erfc}(\sqrt{b\Delta})^2), \\
c_{t22} &= 9b^{14}e^{2b\Delta}\pi\Delta^2\operatorname{erfc}(\sqrt{b\Delta})^2, \\
c_{t11} &= -12b^{11}\Delta^{\frac{5}{2}}(16(b^2\Delta^{\frac{3}{2}} + b\sqrt{\Delta} - 4b^{\frac{3}{2}}e^{b\Delta}\sqrt{\pi}\Delta(1 + 5b\Delta)\operatorname{erfc}(\sqrt{b\Delta}) + \\
&\quad 7b^3e^{2b\Delta}\pi\Delta^{\frac{5}{2}}\operatorname{erfc}(\sqrt{b\Delta})^2), \\
c_{t12} &= 12b^{11}e^{b\Delta}\sqrt{\pi}\Delta^2\operatorname{erfc}(\sqrt{b\Delta})(2b^3e^{b\Delta}\sqrt{\pi}\Delta^2\operatorname{erf}(\sqrt{b\Delta}) + b^{\frac{3}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}(8 + 8b\Delta - 2e^{b\Delta}\sqrt{\pi}(b\Delta)^{\frac{3}{2}} - \\
&\quad 3e^{b\Delta}\sqrt{\pi}(b\Delta)^{\frac{3}{2}}\operatorname{erfc}(\sqrt{b\Delta})), \\
c &= 36b^{13}\sqrt{\pi}\Delta\Delta^2e^{b\Delta}\operatorname{erfc}(\sqrt{b\Delta})(3be^{b\Delta}\sqrt{\pi}\Delta\operatorname{erfc}(\sqrt{b\Delta}) - 4b^{\frac{1}{2}}).
\end{aligned}$$

Suskaičiuotus parametrus įstačius į (40) formulę, pagal ją buvo nubrėžti duobių trukmių skirstiniai.

Pasinaudojant (22) lygtimi suskaičiuotas stochastinis signalas. Pažymėtina, kad minimali apatinė atspindinti kraštinė sąlyga $x_{min.} = 0$, o viršutinė atspindinti kraštinė sąlyga $x_{maks.} = 1$.

3–7 paveiksluose logaritminėje skalėje pateikti (13) ir (22) SDL signalo $x(t)$ pikų ir duobių trukmių skirstiniai esant skirtingoms ribinėms slenkstinėms vertėms h_x . Taip pat nubrėžti analogiškai pagal (32) ir (40) formules suskaičiuoti pikų ir duobių trukmių skirstiniai.

Skaičiavimai rodo, kad pagal pastarąsias formules suskaičiuotiems skirstiniams būdinga analogiška 3/2 laipsniško pobūdžio sritis ir jos apribojimo forma (pavyzdžiui, eksponentinis apribojimas) didesnių trukmių diapazone, kaip buvo nurodyta kituose darbuose [14, 32]. Pvz., 3 paveikslo atveju 10^{-2} – 10^2 trukmių diapazone stebimas eksponentinis nupjovimas.

5 paveiksle (kairėje) iš gautų rezultatų matyti, kad kai ribinė slenkstinė vertė $h_x = 0,5$ pagal (22) SDL suskaičiuoti pikų ir duobių trukmių skirstinių pavidalai sutampa, kaip buvo nurodyta ir kituose moksliniuose darbuose [14, 32].

Vadovaujantis (32) lygties ypatybėmis aptartomis (33) ir (34) išraiškose ir 3–7 paveiksluose pateiktais skaičiavimo rezultatus matyti, kad (32) lygtis puikiai tinka aprašyti trumpų 10^{-4} – 10^{-2} duobių trukmių sritis, tačiau netiksliai aprašo ilgų 10^{-2} – 10^2 duobių trukmių sritis. Taigi (32) lygtis pagal jos apibrėžimą tiksliai negali aproksimuoti pagal (13) ar (22) SDL gautų skirstinių. Toks rezultatas buvo gautas ir kito [33] rašto darbo metu.

Vadovaujantis (40) formule ir 3–7 paveiksluose pateiktais skaičiavimo rezultatus matyti, kad (40) formule kaip ir (32) puikiai tinka aprašyti trumpų 10^{-4} – 10^{-2} duobių trukmių sritis, tačiau, kai $h_x > 0,5$ netiksliai aprašo ilgų 10^{-2} – 10^1 duobių trukmių sritis.

Tai galima paaiškinti vadovaujantis aproksimacijos apibrėžimu, kadangi Beselio procesas aproksimuoja Kirmano modelį tik asimptotiškai, t. y. kai z ar x vertės yra mažos.

Vis dėl to, (40) formulėje įtvirtinta duobių trukmių skirstinio aproksimacija, kai $h_x < 0,5$ puikiai aproksimuoja pagal (13) ir (22) SDL gautus duobių trukmių skirstinius visame trukmių diapazone. Taigi, galima teigti, kad 40 formulėje pateiktas skirstinio aproksimavimo metodas yra pranašesnis nei (32) formulėje, nes tiksliau aproksimuoja pagal pasirinktas (13) ir (22) SDL gautus duobių trukmių skirstinius.

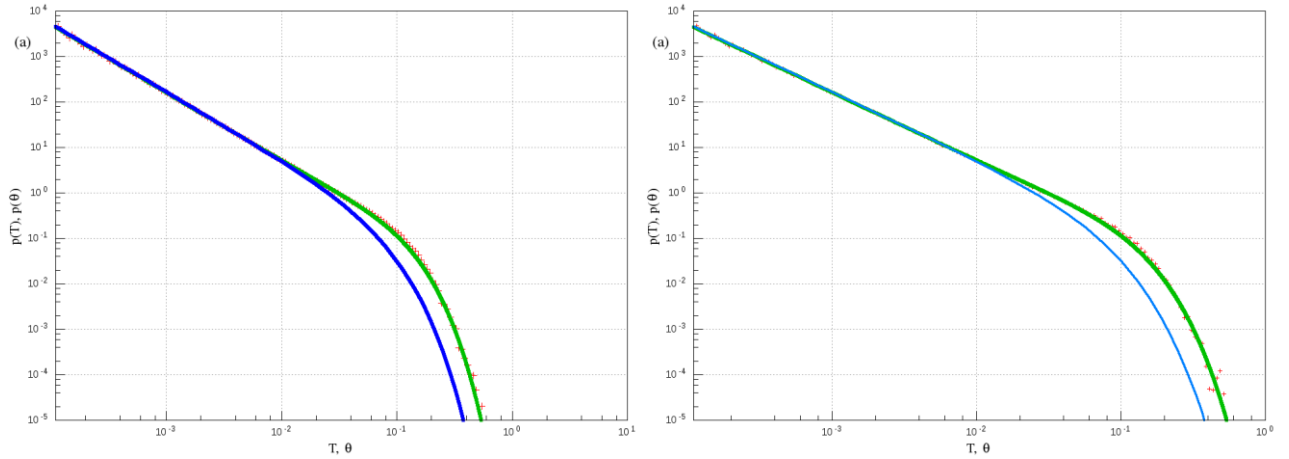
Atsižvelgiant į tai, kad pagal (13) SDL suskaičiuotą duobių trukmių skirstinį galima aproksimuoti (40) lygtimi, galima teigti, kad net ir labai bendra iš gyvybės ir mirties proceso, Kirmano modelio, išvesta SDL asimptotiškai gali būti aproksimuojama Beselio proceso išraiška. Taip pat, kad įvairios netiesinės signalo transformacijos neturi įtakos duobių trukmių skirstinių pavidalui. Sutampantys rezultatai patvirtina, kad skaitmeninis SDL skaičiavimo algoritmas yra tinkamas.

Atlikus skaičiavimus, nustatyta, kad nagrinėtame [32] moksliniame darbe diskrečiam gyvybės ir mirties procesui pasiūlytas metodas yra tinkamas ir tolydžios SDL atveju, kai $h_x < 0,5$.

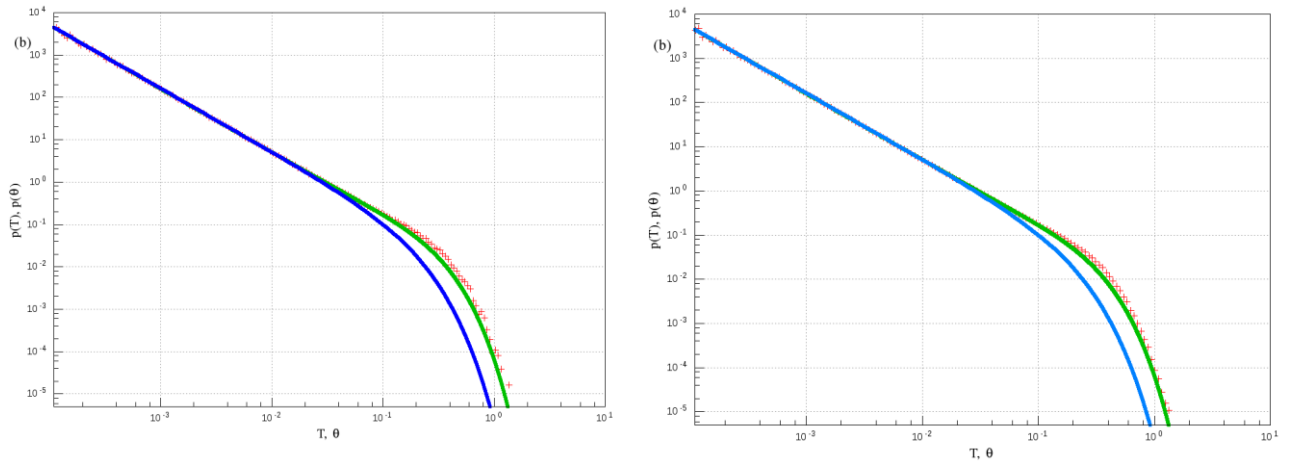
Atsižvelgiant į tai, kad kituose moksliniuose darbuose nėra atliekamų skaičiavimų naudojant (22) SDL aproksimavimo panašaus pavidalo, kaip (40) lygtimi, platesnis palyginimas su kitų mokslinių darbų rezultatais nėra atliekamas.

Apibendrinant, galima teigti, kad siekiant sukurti tikslesnę darbo metu nagrinėtų SDL pikų ir duobių trukmių aproksimaciją būtų galima tobulinti (40) formulėje pateiktą metodą, pavyzdžiui, naudojant kitokias skaičiavimo metu naudotų parametrų vertes (pvz., naudojant mažesnę

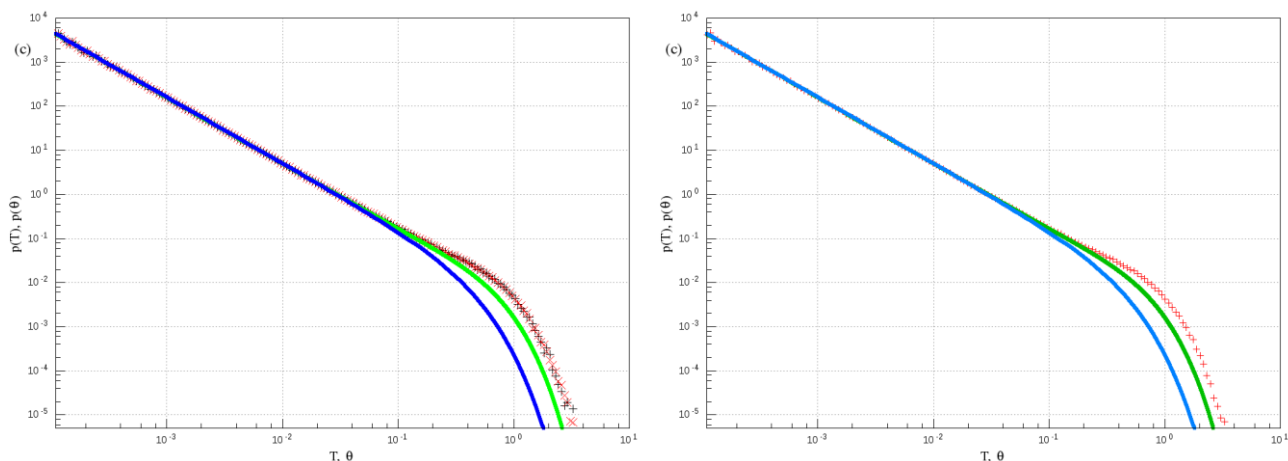
normavimo tikslumo parametro Δ vertę ir vietoje (40) formulėje naudojamo pirmos Beselio nulio vertės būtų galima naudoti pagal Keilsono teoremą suskaičiuotą tikrinę vertę).



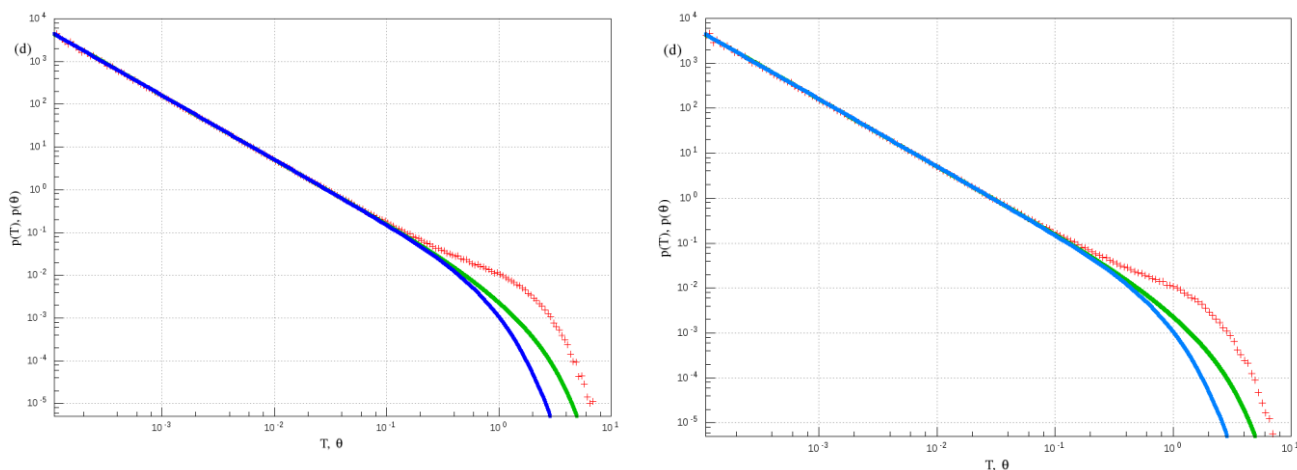
3 pav. Duobių trukmių skirstinių modeliavimo rezultatai. Kairėje – pagal (22) SDL, dešinėje – pagal (13) SDL. Raudona (kryželiai) spalva pažymėti taškai priskiriami duobių trukmių skirstiniui. Mėlyna linija yra pavaizduotas pagal (32) formulę apskaičiuotas duobių trukmių skirstinys. Žalia spalva pažymėtas pagal (40) formulę apskaičiuotas duobių trukmių skirstinys. Parametrai: $\mathbf{h}_x = \mathbf{0}, \mathbf{1}$; $\rho = 0,422$; $\tau_0 = 0,0486$; $\varepsilon = \frac{3}{2}$; $v = \frac{1}{2}$; $j_{\frac{1}{2},1} = \pi$.



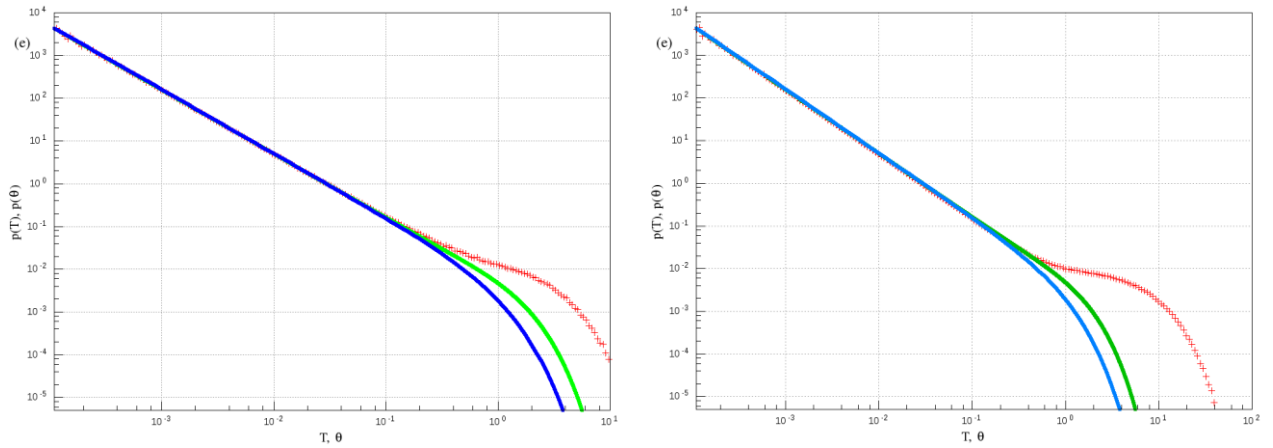
4 pav. Duobių trukmių skirstinių modeliavimo rezultatai. Kairėje – pagal (22) SDL, dešinėje – pagal (13) SDL. Raudona (kryželiai) spalva pažymėti taškai priskiriami duobių trukmių skirstiniui. Mėlyna linija yra pavaizduotas pagal (32) formulę apskaičiuotas duobių trukmių skirstinys. Žalia spalva pažymėtas pagal (40) formulę apskaičiuotas duobių trukmių skirstinys. Parametrai: $\mathbf{h}_x = \mathbf{0}, \mathbf{25}$; $\rho = 0,658$; $\tau_0 = 0,129$; $\varepsilon = \frac{3}{2}$; $v = \frac{1}{2}$; $j_{\frac{1}{2},1} = \pi$.



5 pav. Duobių trukmių skirstinių modeliavimo rezultatai. Kairėje – pagal (22) SDL, dešinėje – pagal (13) SDL. Raudona (kryželiai) spalva pažymėti taškai priskiriami duobių trukmių skirstiniui, o juoda (kryželiai) pikų trukmių skirstiniui. Mėlyna linija yra pavaizduotas pagal (32) formulę apskaičiuotas duobių trukmių skirstinys. Žalia spalva pažymėtas pagal (40) formulę apskaičiuotas duobių trukmių skirstinys. Parametrai: $\mathbf{h}_x = \mathbf{0,5}$; $\rho = 0,816$; $\tau_0 = 0,288$; $\varepsilon = \frac{3}{2}$; $\nu = \frac{1}{2}$; $j_{\frac{1}{2},1} = \pi$.



6 pav. Duobių trukmių skirstinių modeliavimo rezultatai. Kairėje – pagal (22) SDL, dešinėje – pagal (13) SDL. Raudona (kryželiai) spalva pažymėti taškai priskiriami duobių trukmių skirstiniui. Mėlyna linija yra pavaizduotas pagal (32) formulę apskaičiuotas duobių trukmių skirstinys. Žalia spalva pažymėtas pagal (40) formulę apskaičiuotas duobių trukmių skirstinys. Parametrai: $\mathbf{h}_x = \mathbf{0,75}$; $\rho = 0,738$; $\tau_0 = 0,724$; $\varepsilon = \frac{3}{2}$; $\nu = \frac{1}{2}$; $j_{\frac{1}{2},1} = \pi$.



7 pav. Duobių trukmių skirstinių modeliavimo rezultatai. Kairėje – pagal (22) SDL, dešinėje – pagal (13) SDL. Raudona (kryželiai) spalva pažymėti taškai priskiriami duobių trukmių skirstiniui. Mėlyna linija yra pavaizduotas pagal (32) formulę apskaičiuotas duobių trukmių skirstinys. Žalia spalva pažymėtas pagal (40) formulę apskaičiuotas duobių trukmių skirstinys. Parametrai: $\mathbf{h}_x = \mathbf{0}, 9$; $\rho = 0,919$; $\tau_0 = 0,724$; $\varepsilon = \frac{3}{2}$; $v = \frac{1}{2}$; $j_{\frac{1}{2},1} = \pi$.

5. Išvados

Skaitmeniškai suskaičiavus Kirmano gyvybės ir mirties proceso duobių trukmių skirstinius keičiant proceso ribinę slenkstinę vertę h_x , naudojant SDL, asimptotiškai aprašančias Kirmano agentų modelį ($N \rightarrow \infty$), gautos šios pagrindinės rašto darbo išvados:

1. Parodyta, kad naudota Kirmano gyvybės ir mirties proceso duobių trukmių (pirmo kirtimo laikų) skirstinio aproksimacija (40 formulė) gauta iš tolydinio Beselio proceso bendru atveju tiksliai neaprašo nagrinėto Kirmano modelio ir jį atitinkančių pagal SDL generuojamų skaitmeninių pikų ir duobių trukmių skirstinių.

2. Parodyta, kad naudota aproksimacija (40 formulė) gerai aprašo laipsninę pikų trukmių skirstinio dalį, taip pat ir skirstinio dalį, kuriai būdingas eksponentinis nupjovimas, esant $h_x < 0,5$, taigi specifiniais atvejais gali būti naudojama ir sudėtingesniems procesams nei Beselio aproksimuoti.

Atsižvelgus į rašto darbo rengimo metu atliktos pikų ir duobių trukmių skirstinių analizės rezultatus ir aproksimacijos tikslumą, galima teigti, kad šiuos metodus tobulinant ateityje, juos būtų galima panaudoti kituose tyrimuose siekiant sukurti tikslesnes aproksimacijas tinkamas nagrinėtoms SDL ir jas atitinkantiems gyvybės ir mirties procesams.

Taip pat, toliau gilinant žinias šia tematika, būtų galima tęsti empirinius finansų rinkų ar produktų rinkų tyrimus, pateikiamus duomenis analizuojant, aproksimuojant šiame darbe nagrinėtomis SDL ir jas atitinkančiais gyvybės ir mirties procesais.

6. Literatūros sąrašas

- [1] M. Ausloos, N. Vandewalle, P. Boveroux, A. Minguet, K. Ivanova. Applications of statistical physics to economic and financial topics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 1999, 274, 229–240. DOI: 10.1016/S0378-4371(99)00307-6.
- [2] Blythe, R.A., McKane, A.J. Stochastic models of evolution in genetics, ecology and linguistics. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. Volume 2007. IOP Publishing Ltd. 2007. DOI:10.1088/1742-5468/2007/07/P07018.
- [3] Nishimori, H. *Statistical Physics of Spin Glasses and Information Processing: An Introduction*. Oxford University Press: New York, NY, USA. 2001. ISBN-13: 9780198509417. DOI:10.1093/acprof:oso/9780198509417.001.0001.
- [4] Castellano, C., Fortunato, S., Loreto, V. Statistical physics of social dynamics. *Rev. Mod. Phys.* 2009. 81, 591–646. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.591.
- [5] A. L. Lloyd, R. M. May. How viruses spread among computers and people. *Science*. 292 (2001) 1316. 2001. DOI: 10.1126/science.1061076.
- [6] Eder Johnson de Area Leão Pereira, Marcus Fernandes da Silva, H.B.B. Pereira. Econophysics: Past and present, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. Volume 473, 1 May 2017, p. 251-261. 2017. DOI: 10.1016/j.physa.2017.01.007.
- [7] D. Sornette. Physics and financial economics (1776–2014): puzzles, Ising and agent-based models. *Reports on Progress in Physics*. 77, 062001.2014. DOI: 10.1088/0034-4885/77/6/062001.
- [8] Mantegna R. N., Stanley H. E. *Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press. 2000. ISBN 0 521 62008 2.
- [9] Kononovičius A. *Applications of Statistical Physics in Modeling of Financial Markets and Social Processes*. Doctoral Dissertation, Physical sciences, physics (02P). 2015.
- [10] Cont R. Volatility Clustering in Financial Markets: Empirical Facts and Agent-Based Models. Centre de Mathématiques appliquées, Ecole Polytechnique. F-91128 Palaiseau. To appear in: A Kirman & G Teyssiere (eds.): *Long memory in economics*. Springer. 2005. DOI: 10.1007/978-3-540-34625-8_1.

[11] Kononovičius A., Gontis V. Agent based reasoning for the non-linear stochastic models of long-range memory. *Physica A.* 391(4), 1309–1314 (2012). 2012. DOI: 10.1016/j.physa.2011.08.061.

[12] Gontis V., Kononovičius A., Reimann S. The class of nonlinear stochastic models as a background for the bursty behavior in financial markets. *Advances in Complex Systems.* Vol. 15. World Scientific Publishing Company. 2012. DOI: 10.1142/S0219525912500713.

[13] Gontis V., Kononovičius A. Burst and inter-burst duration statistics as empirical test of long-range memory in the financial markets. *Physica A.* 483 (2017), 266–272. 2017. DOI: 10.1016/j.physa.2017.04.163.

[14] V. Gontis, A. Kononovičius. Spurious Memory in Non-Equilibrium Stochastic Models of Imitative Behavior. *Entropy.* 19 (8), 2017, p. 387. 2017. DOI: 10.3390/e19080387.

[15] C. W. Gardiner. *Stochastic Methods: A Handbook for the Natural and Social Sciences.* Springer. Berlin. 2009. ISSN 0172-7389.

[16] Volker Grimm, Eloy Revilla, Uta Berger, Florian Jeltsch, Wolf M. Mooij, Steven F. Railsback, Hans-Hermann Thulke. Pattern-Oriented Modeling of Agent-Based Complex Systems: Lessons from Ecology. *Science.* Vol. 310, Issue 5750, p. 987-991. 2005. DOI: 10.1126/science.1116681.

[17] S. A. Mir, Rumana Majid. *Advances in Statistical Forecasting Methods: An Overview,* Economic Affairs. 63(4):815-831. 2018. DOI: 10.30954/0424-2513.4.2018.5\.

[18] Tim Bollerslev, Ray Y.Chou, Kenneth F.Kroner. ARCH modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence. *Journal of Econometrics.* Volume 52, Issues 1–2, April–May 1992, p. 5-59. 1992. DOI: 10.1016/0304-4076(92)90064-X.

[19] Kononovičius A., Gontis V. Pikių statistika minučių, dienų ir mėnesių laiko skalėse. 41-oji, Lietuvos Nacionalinė fizikos konferencija, Programa ir pranešimų tezės. Vilniaus universitetas, Teorines fizikos ir astronomijos institutas. 356 p. 2015.

[20] Kononovičius A., Gontis V. Pliupsnių statistika ir netikra ilga atmintis FOREX duomenyse. 42-oji, Lietuvos Nacionalinė fizikos konferencija, Programa ir pranešimų tezės. Vilniaus universitetas, Teorines fizikos ir astronomijos institutas. 124 p. 2017.

- [21] Redner, S. A Guide to First-Passage Processes. Cambridge University Press. 2001. ISBN 0-521-65248-0.
- [22] G. van Kampen N. Stochastic Process in Physics and Chemistry. North Holland, Amsterdam. 2007. ISBN-10: 9780444529657.
- [23] Ross S., Stochastic Processes. Wiley, 1996. 1996. ISBN 0-471-12062-6.
- [24] Kirman A. P. Ants, rationality and recruitment. Quarterly Journal of Economics. 108, 1993. p. 137-156. 199. DOI: 10.2307/2118498.
- [25] Alfarano S., Lux T., Wagner F. Estimation of agent-based models: The case of an asymmetric herding model. Computational Economics. 26, 19–49 (2005). 2005. DOI: 10.1007/s10614-005-6415-1.
- [26] Alfarano S., Milakovic M. Network structure and N-dependence in agent-based herding models. Journal of Economic Dynamics and Control. 33, 78–92 (2009). 2009. DOI: 10.1016/j.jedc.2008.05.003.
- [27] Gontis V., Havlinac S., Kononovičius A., Podobnik B., Stanley H. E. Stochastic model of financial markets reproducing scaling and memory in volatility return intervals. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. Volume 462. 2016. p. 1091-1102. DOI: 10.1016/j.physa.2016.06.143.
- [28] Beran J., Feng Y., Ghosh S., Kulik R. Long–Memory Processes probabilistic Properties and Statistical Methods. Springer–Verlag Berlin Heidelberg. 2013. DOI: 10.1007/978-3-642-35512-7.
- [29] Mackevičius, Vigirdas. Stochastinė analizė: stochastiniai integralai ir stochastinės diferencialinės lygtys / Vigirdas Mackevičius. Vilnius: Vilniaus universiteto leidykla. 2005. 197 p. ISBN 9986198046.
- [30] Kloeden P. E., Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer. Berlin. 1999. DOI 10.1007/978-3-662-12616-5.
- [31] Kononovičius A., Gontis V. Approximation of the First Passage Time Distribution for the Birth–Death Processes. Pateikta 2019 m. vasario 3 d., arXiv:1902.00924 [q-fin.ST].

[32] Kazakevičius I., Apgaulinga atmintis imitaciniuose agentų modeliuose, Aplinkos ir cheminės fizikos studijų programos magistrantūros studijų mokslo tiriamasis darbas. Vad. Vygintas Gontis. Vilnius: Vilniaus universitetas, Fizikos fakultetas, 2019.

[33] Kazakevičius I., Pirmo kirtimo laikų skirstiniai ir ilga atmintis vienmačiuose stochastiniuose procesuose, Aplinkos ir cheminės fizikos studijų programos magistrantūros studijų mokslo tiriamasis darbas. Vad. Vygintas Gontis. Vilnius: Vilniaus universitetas, Fizikos fakultetas, 2019.

7. Summary

Kazakevicius, Ignas. First Passage Time of Birth-Death Processes. Indicator of long-range memory is considered to be a power-law power spectral density in the low frequency field, but many different stochastic processes may have this characteristic. On this work in order to solve later mentioned problem we are focusing on the analysis of the burst and inter-burst duration, (a specific case of the first passage time) probability density functions (PDF) which can be used to determine whether a particular complex process of changing the threshold limit retains the characteristics of a long-range memory. The numerical calculation of burst and inter-burst duration PDF by changing the threshold value of the process and using the stochastic differential equation (SDE) asymptotically describing the Kirman Birth-Death process agent-based model has shown that such PDFs and respective SDE in general case cannot be approximated by approximation derived from Bessel process. However, it was shown that approximation used in this work can be used to approximate power-law range of the bursts PDF and in specific cases could be used to approximate more complex processes than Bessel process.

8. Rašto darbo bibliografinis aprašas

KAZAKEVIČIUS, Ignas. Gyvybės ir mirties procesų pirmo kirtimo laikai: Aplinkos ir cheminės fizikos studijų programos magistrantūros studijų baigiamasis darbas. Vad. Vygintas Gontis. Vilnius: Vilniaus universitetas, Fizikos fakultetas, 2019, 39 p.

9. Anotacija

Ilgos atminties požymiu laikomas laipsninio pobūdžio spektrinis tankis žemų dažnių srityje, tačiau daugelis skirtingų stochastinių procesų gali pasižymėti tokia ypatybe. Šiai problemai spręsti šiame rašto darbe yra naudojamas pikų (angl. *burst*) ir duobių (angl. *inter burst*) trukmių, kurios yra specialusis pirmo kirtimo laikų atvejis, skirstinių tyrimas, kurį atliekant galima nustatyti ar tam tikras procesas keičiant ribinę slenkstinę vertę išlaiko ilgos atminties ypatybes ar ne. Skaitmeniškai suskaičiavus pikų ir duobių trukmių skirstinius keičiant proceso ribinę slenkstinę vertę, naudojant SDL, asimptotiškai aprašančias Kirmano gyvybės ir mirties proceso agentų modelį, parodyta, kad rašto darbo metu naudota aproksimacija gauta iš Beselio proceso bendru atveju tiksliai neaprašo nagrinėto Kirmano modelio ir jį atitinkančios SDL. Taip pat parodyta, kad darbo metu naudota aproksimacija gerai aprašo laipsninę pikų trukmių skirstinio dalį, specifiniais atvejais gali būti naudojama ir sudėtingesniems procesams nei Beselio aproksimuoti.