VILNIAUS UNIVERSITETAS

Kristina Bružaitė

KAI KURIE TIESINIAI LAIKO EILUČIŲ MODELIAI SU NESTACIONARIA ILGĄJA ATMINTIMI

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01 P)

Vilnius, 2009

Disertacija parengta 2003–2008 metais Matematikos ir informatikos institute.

Disertacija ginama eksternu.

Mokslinis konsultantas:
Prof. habil. dr. Donatas Surgailis (Matematikos ir informatikos institutas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto Matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas:
Prof. habil. dr. Vygantas Paulauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)

Nariai:
Prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius (Matematikos ir informatikos institutas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P);
Prof. habil. dr. Alfredas Račkauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P);
Dr. Arvydas Astrauskas (Matematikos ir informatikos institutas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P);
Doc. dr. Vytautas Kazakevičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P).

Oponentai:
Prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P);
Prof. habil. dr. Liudas Giraitis (Queen Mary, University of London, fiziniai mokslai, matematika – 01 P).

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2009 m. vasario 6 d. 16 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto 101 aud.
Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2009 m. sausio 5 d.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

Kristina Bružaitė

SOME LINEAR MODELS OF TIME SERIES WITH NONSTATIONARY LONG MEMORY

Summary of Doctoral Dissertation
Physical sciences, Mathematics (01 P)

Vilnius, 2009

The dissertation was carried out in 2003–2008 at Institute of Mathematics and Informatics.

The dissertation is defended externally.

Scientific consultant:
Prof. Dr. Habil. Donatas Surgailis (Institute of Mathematics and Informatics, Physical sciences, Mathematics – 01 P)

The council:

Chairman:
Prof. Dr. Habil. Vygantas Paulauskas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01 P)

Members:
Prof. Dr. Habil. Kęstutis Kubilius (Institute of Mathematics and Informatics, Physical sciences, Mathematics – 01 P);
Prof. Dr. Habil. Alfredas Račkauskas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01 P);
Dr. Arvydas Astrauskas (Institute of Mathematics and Informatics, Physical sciences, Mathematics – 01 P);
Doz. Dr. Vytautas Kazakevičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01 P).

Opponents:
Prof. Dr. Habil. Remigijus Leipus (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01 P);
Prof. Dr. Habil. Liudas Giraitis (Queen Mary, University of London, Physical sciences, Mathematics – 01 P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the Council on February 6, 2009, in Department of Mathematics and Informatics of Vilnius University, aud. 101, at 16.00.
Address: Naugarduko 24, LT-03225, Vilnius, Lithuania.

The summary of the dissertation was distributed on January 5, 2009.
The thesis can be found at the Library of Vilnius University.

Disertacinio darbo aprašymas

Mokslinė problema ir tyrimo objektas

Pagrindinis disertacijos tyrimo objektas – tiesiniai laiko eilučių modeliai su nestacionaria ilgąja atmintimi ir statistikos, susijusios su šių modelių dalinių sumų procesais.

Tikslas ir uždaviniai

Pagrindinis darbo tikslas – ištirti trupmeniškai integruotų laiko eilučių modelių su nestacionaria ilgąja atmintimi dalinių sumų ribinius skirstinius ir tam tikras statistikas, susijusias su dalinių sumų procesais. Uždaviniai yra šie:

1. Philippe, Surgailis, Viano (2008), (2006) apibrėžė kintančius laike trupmeniškai integruotus filtrus su baigtine dispersija ir nagrinėjo jų dalinių sumų ribinius skirstinius. Mūsų uždavinys – ištirti tokių procesų dalinių sumų ribinius skirstinius, kai dispersija begalinė, o inovacijos priklauso α-stabiliojo dėsnio traukos sričiai ($1 < \alpha < 2$); įrodyti, kad dalinių sumų procesas konverguoja į tam tikrą α-stabilųjį savastingąjį procesą su nestacionariaisiais pokyčiais.

2. Surgailis, Teyssière, Vaičiulis (2008) įvedė pokyčių santykių, arba IR (= Increment Ratio), statistiką ir parodė, kad IR statistika gali būti naudojama tikrinti neparametrinėms hipotezėms apie stacionariosios laiko eilutės ilgąją atmintį bei ilgosios atminties parametrą d. Mūsų uždavinys – apibendrinti šių autorių gautus rezultatus (IR statistikos centrinę ribinę teoremą ir poslinkio įvertį), kai stebiniai aprašomi tiesiniu laiko eilutės modeliu su trendu; praplėsti laiko eilučių klasę, kuriai IR statistika yra pagrįsta (konverguoja į vidurkį).

Aktualumas

Ilgoji atmintis (*long memory*), arba tolimoji priklausomybė (*long-range dependence*), yra svarbi laiko eilučių analizės dalis, aktuali daugelyje mokslo ir taikymo sričių, pavyzdžiui, astronomijoje, chemijoje, hidrologijoje, finansuose, telekomunikacijose, statistinėje fizikoje ir kitur (žr. Beran, 1994, Doukhan, Oppenheim ir Taqqu, 2003, Palma, 2007, monografijas bei jose esančias nuorodas). Esant ilgajai atminčiai, daryti statistines išvadas yra žymiai sunkiau, nes čia stebiniai yra stipriai priklausomi ir jų ribiniai dėsniai gali skirtis nuo klasikinių nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių dėsnių. Daug ilgąją atmintį nagrinėjančių mokslinių darbų skirta stacionariajam atvejui analizuoti. Akivaizdu, kad esant ilgai (o kartais ir labai ilgai) imčiai, stacionarumo sąlyga gali būti netenkinama ar tiesiog netikroviška. Todėl natūralu, kad, esant ilgajai atminčiai nagrinėjamos nestacionarios laiko eilutės, ir tai yra svarbu ne tik teoriniu požiūriu, bet ir pačiuose taikymuose. Parametriniai ir pusiau parametriniai laiko eilučių modeliai su nestacionaria ilgąja atmintimi turi būti kuriami kartu su tokių eilučių analizės modeliais.

Natūraliausia ir daugiausia tyrinėjama laiko eilučių klasė – tai tiesiniai laiko eilučių modeliai. Parametrinė FARIMA(p, d, q) klasė yra viena svarbiausių stacionariųjų ilgosios atminties procesų klasė. Todėl šios klasės nestacionarūs ir kintantys laike apibendrinimai kelia didelį susidomėjimą.

Gerai žinoma, kad, sutinkamai su invariantiškumo principu, įvairių testų ir statistikų asimptotinės savybės priklauso nuo stebinių dalinių sumų proceso ribinio skirstinio. Taigi tiesinių modelių su nestacionaria ilgąja atmintimi dalinių sumų proceso ribinio skirstinio nagrinėjimas yra pagrindinis žingsnis į jų taikymus.

Naujumas ir praktinė vertė

Visi disertacijos rezultatai yra nauji. Disertacijoje gauti kintančių laike trupmeniškai integruotų filtrų su begaline dispersija dalinių sumų ribiniai skirstiniai ir ištirtas pokyčių santykių (IR) statistikos elgesys, kai stebiniai aprašomi stacionariuoju Gauso procesu su neatsitiktiniu trendu, anksčiau nebuvo nagrinėti.

Tyrimų metodika

Dalinių sumų ribinio elgesio įrodymai pagrįsti vadinamąja "diskrečiųjų stochastinių integralų schema" (kuri įvesta Surgailio (1981) darbe) ir tikimybinių matų silpnojo konvergavimo savybėmis. IR statistikos asimptotinis elgesys pagrįstas Hermito skleidinių metodu ir vadinamosiomis Arcone nelygybėmis (žr. Arcone, 1994).

Darbo struktūra

Disertaciją, parašytą anglų kalba, sudaro įvadas, trys skyriai, išvados, literatūros ir mokslinių publikacijų disertacijos tema sąrašai, bei žymenys. Bendra darbo apimtis – 75 puslapiai.

Problemos apžvalga ir svarbiausi rezultatai

1 apibrėžimas. Stacionarioji antrųjų momentų prasme (*covariance-stationary*) laiko eilutė $(X_t) = (X_t,\ t \in \mathbb{Z})$ turi ilgąją atmintį antrųjų momentų prasme (*covariance long memory*) (arba *covariance long–range dependent*), jeigu jos kovariacijų suma absoliučiai diverguoja:

$$\sum_{t\in\mathbb{Z}} |\mathrm{cov}(X_0, X_t)| \;=\; \infty; \tag{1}$$

priešingu atveju procesas (X_t) turi trumpąją atmintį antrųjų momentų prasme (*covariance short memory*).

Beran (1994, p. 42) darbe duotas giminingas ilgosios atminties apibrėžimas spektrinio tankio $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, terminais. Šie apibrėžimai yra pakankamai paprasti ir intuityvūs, todėl čia pakanka reikalauti, kad stacionarieji procesai turėtų baigtinį antrąjį momentą. Be to, (1) sąlyga nėra labai konstruktyvi, todėl, norint analizuoti stebinių $(X_t, 1 \le t \le N)$ netiesinių statistikų ribinius skirstinius (net jeigu (X_t) yra Gauso procesas), būtina reikalauti, kad kovariacijų gesimas tenkinų papildomas sąlygas.

Visiškai kitoks ilgosios atminties apibrėžimas (vadinamas skirstinių ilgąja atmintimi (*distributional long memory*)) pateiktas Cox (1984), Dehling ir Philipp (2002) bei kituose darbuose.

2 apibrėžimas. Griežtai stacionari laiko eilutė (X_t) turi skirstinių ilgąją atmintį (*distributional long memory*), jeigu jos atitinkamai normuotas dalinių sumų procesas silpnai konverguoja į kokį nors atsitiktinį procesą su stacionariaisiais priklausomais pokyčiais. Tai reiškia, kad egzistuoja tokios konstantos $A_N \to \infty$ $(N \to \infty)$ ir B_N ir toks stochastinis stacionarusis procesas $(J(\tau), \tau \geq 0) \not\equiv 0$ su priklausomais pokyčiais, kad

$$A_N^{-1} \sum_{t=1}^{[N\tau]} (X_t - B_N) \ \to_{\mathrm{FDD}} \ J(\tau), \tag{2}$$

kai $N \to \infty$; čia $[a]$ reiškia realiojo skaičiaus a sveikąją dalį, o $\to_{\mathrm{FDD}}$ žymi baigtiniamačių skirstinių silpnąjį konvergavimą.

Lamperti (1962) parodė, kad su tam tikromis papildomomis prielaidomis normuotos konstantos (2) auga kaip N^H (su kokiu nors $H > 0$), t. y.

$$A_N = L(N)N^H; \tag{3}$$

čia $L(N))$ yra begalybėje lėtai kintanti funkcija, o ribinis procesas $(J(\tau), \tau \geq 0)$ vadinamas savastinguoju su indeksu H (*self-similar with index* H). Paskutinė savybė reiškia, kad bet kokiam $a > 0$ procesų $(J(\tau), \tau \geq 0)$ ir $(a^{-H} J(a\tau), \tau \geq 0)$ baigtiniamačiai skirstiniai sutampa:

$$(J(\tau), \tau \geq 0) \ =_{\mathrm{FDD}} \ (a^{-H} J(a\tau), \tau \geq 0),$$

čia $=_{\mathrm{FDD}}$ žymi baigtiniamačių skirstinių lygybę. Laipsnio rodiklis H formulėje (3) vadinamas laiko eilutės (X_t) Hursto indeksu. Kai dispersija baigtinė $EX_t^2 < \infty$, $A_N^2 = N^2 \mathrm{var}(\bar{X}) = E\left(\sum_{t=1}^N (X_t - EX_t)\right)^2$, o empirinio vidurkio dispersija $\mathrm{var}(\bar{X})$ vadinama Aleno dispersija (*Allen variance*) (žr. Heyde ir Yang, 1997).

3 apibrėžimas. (Heyde ir Yang, 1997) Laiko eilutė (X_t) su baigtine dispersija yra tolimai priklausoma Aleno dispersijos prasme (*Long-Range Dependence (Allen Variance), LRD(AV)*), jeigu

$$\lim_{N\to\infty} N \mathrm{var}(\bar{X}) \ = \ \lim_{N\to\infty} N^{-1} E\left(\sum_{t=1}^N (X_t - EX_t)\right)^2 \ = \ \infty, \tag{4}$$

priešingu atveju (X_t) yra trumpai priklausoma Aleno dispersijos prasme (*Short-Range Dependence (Allen Variance), SRD(AV)*).

Heyde ir Yang (1997) pateiktas LRD(AV) apibrėžimas nereikalauja, kad procesas būtų stacionarusis. Nestacionariojo proceso su baigtine dispersija Hursto indeksas apibrėžiamas taip:

$$H \; = \; \inf \left\{ \limsup_{N\to\infty} N^{-2h} \mathrm{var}\left(\sum_{t=1}^{N} X_t \right) = 0 \right\} \tag{5}$$

(žr. Philippe, Surgailis, Viano, 2006). Heyde ir Yang (1997) išplėtė (4) savybę begalinės dispersijos (nestacionariesiems) procesams. Taigi (X_t) yra tolimai priklausoma empirinės Aleno dispersijos prasme (*Long-Range Dependence (Sample Allen Variance), LRD(SAV)*), jeigu

$$\frac{\left(\sum_{t=1}^{N} X_t\right)^2}{\sum_{t=1}^{N} X_t^2} \; \to_P \; \infty. \tag{6}$$

Jei (X_t) yra stacionarusis procesas, tada (6) iš esmės sutampa su stebiniais, kai centrinė ribinė teorema nebegalioja (X_t) proceso dalinėms sumoms (žr. Heyde ir Yang (1997), p. 883).

Aukščiau paminėti (4)–(6) apibrėžimai reikšmingi tik teoriškai, bet jie nėra labai naudingi laiko eilučių su nestacionaria ilgąja atmintimi modeliavimui ir statistinei analizei. Pavyzdžiui, literatūroje yra paminėti keli "tikrai nestacionarių" laiko eilučių su ilgąja atmintimi modeliai. Philippe, Surgailis, Viano (2006) aptarė kelias beveik periodiškai koreliuotų procesų klases, kurios gautos iš gerai žinomos FARIMA (trupmeniškai integruotas autoregresijos ir slenkamojo vidurkio procesas, *Fractional Autoregressive Moving Average*) klasės, taikant amplitudinę (AM), fazės (FM), atminties (MM) ir koeficientų (CM) moduliacijas. Įdomiausia iš šių klasių – (CM) klasė, dar vadinama kintančia laike FARIMA (*tv-FARIMA*) klase. Šis modelis buvo pasiūlytas Philippe, Surgailis, Viano (2006) ir (2008) darbuose ir yra pagrindinis disertacijos pirmojo skyriaus tyrimo objektas.

Nagrinėkime trupmeniškai integruotą autoregresinį procesą FARIMA(p, d, q), kuris apibrėžiamas skirtumine lygtimi:

$$\varphi(L)(I - L)^d X_t = \vartheta(L)\varepsilon_t; \tag{7}$$

čia $\varphi(L), \vartheta(L)$ atitinkamai yra p ir q laipsnio polinomai, L – postūmio atgal operatorius, o operatorius $(I-L)^d$ užrašomas binomine išraiška:

$$(I - L)^d \; := \; \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(d) L^j;$$

čia $\psi_0(d) := 1$ ir

$$\psi_j(d) := \frac{\Gamma(-d+j)}{j!\Gamma(-d)} \ (j \geq 1),$$

(žr. Brockwell ir Davis, 1991). Paprasčiausiu atveju, kai $p = q = 0$, turime procesą FARIMA$(0, d, 0)$:

$$(I - L)^d X_t = \varepsilon_t. \tag{8}$$

Egzistuoja vienintelis (8) lygties stacionarusis sprendinys, kai $|d| < 1/2$,

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(d) \varepsilon_{t-j}, \tag{9}$$

čia $(\varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z})$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai (n.v.p. a.d.).

Sakysime, kad procesas FARIMA(p, d, q) turi *ilgąją atmintį*, jei $0 < d < 1/2$. Žinoma, kad jei $0 < d < 1/2$, polinomai $\psi(\cdot)$ tenkina tam tikras sąlygas ir $(\varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z})$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę a.d., tai FARIMA(p, d, q) proceso X_t autokovariacinė funkcija gesta kaip t^{2d-1}, be to, dalinių sumų procesas $N^{-d-1/2} \sum_{t=1}^{[N\tau]} X_t$ pagal pasiskirstymą konverguoja į trupmeninį Brauno judesį $W_H(\tau)$ su Hursto indeksu $H = d + (1/2)$. Šis rezultatas yra gautas Davydovo (1970). Astrauskas (1983), Kasahara ir Maejima (1986), Avram ir Taqqu (1992), Vaičiulis (2004) nagrinėjo tiesinių procesų su begaline dispersija dalinių sumų konvergavimą, t. y. įrodė, kad FARIMA(p, d, q) proceso stacionarusis sprendinys priklauso α-stabiliojo $(1 < \alpha < 2)$ dėsnio traukos sričiai. Pastaruoju atveju lygties (7) stacionarusis sprendinys egzistuoja, kai $0 < d < 1 - 1/\alpha$, o dalinių sumų proceso $N^{-d-1/\alpha} \sum_{t=1}^{[N\tau]} X_t$ ribinis procesas vadinamas trupmeniškai stabiliu judesiu.

Philippe, Surgailis ir Viano (PSV) (2006) apibrėžė kintančius laike tiesinius filtrus

$$A(\mathbf{d})x_t := \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t) x_{t-j}, \qquad B(\mathbf{d})x_t := \sum_{j=0}^{\infty} b_j(t) x_{t-j}, \tag{10}$$

čia $\mathbf{d} = (d_t, t \in \mathbb{Z})$ priklauso nuo $t \in \mathbb{Z}$,

$$a_j(t) := \Big(\frac{d_{t-1}}{1}\Big)\Big(\frac{d_{t-2}+1}{2}\Big) \cdots \Big(\frac{d_{t-j}+j-1}{j}\Big), \tag{11}$$

$$b_j(t) := \Big(\frac{d_{t-1}}{1}\Big)\Big(\frac{d_{t-j}+1}{2}\Big) \cdots \Big(\frac{d_{t-2}+j-1}{j}\Big), j \geq 1, \tag{12}$$

$a_0(t) = b_0(t) := 1$. Jeigu $d_t = d$ yra konstanta, tai akivaizdu, kad

$$a_j(t) \;=\; b_j(t) \;=\; \Big(\frac{d}{1}\Big)\Big(\frac{d+1}{2}\Big)\cdots\Big(\frac{d+j-1}{j}\Big) \;=\; \psi_j(-d),$$

ir (10) sutampa su FARIMA filtru $(I-L)^{-d}$. Filtrai $A(\mathbf{d}), B(\mathbf{d})$ tenkina apverčiamumo sąryšį $B(-\mathbf{d})A(\mathbf{d}) = A(-\mathbf{d})B(\mathbf{d}) = I$, čia $-\mathbf{d} := (-d_t, t \in \mathbb{Z})$ (įrodymą galima rasti Philippe, Surgailio ir Viano, 2006, darbe).

Tame pačiame Philippe, Surgailio ir Viano (2006) darbe nagrinėjamos kintančių laike trupmeniškai integruojamų procesų

$$X_t \;=\; A(-\mathbf{d})^{-1}G\varepsilon_t \;=\; B(\mathbf{d})G\varepsilon_t \;=\; \sum_{j=0}^{\infty}(b\star g)_j(t)\varepsilon_{t-j}, \quad (13)$$

$$Y_t \;=\; B(-\mathbf{d})^{-1}G\varepsilon_t \;=\; A(\mathbf{d})G\varepsilon_t \;=\; \sum_{j=0}^{\infty}(a\star g)_j(t)\varepsilon_{t-j}, \quad (14)$$

dalinės sumos. (13) ir (14) $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ yra nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių a.d. (arba martingalinių skirtumų) seka su nuliniu vidurkiu ir vienetine dispersija, o filtrai

$$(b\star g)_j(t) := \sum_{i=0}^{j} b_i(t)g_{j-i}, \qquad (a\star g)_j(t) := \sum_{i=0}^{j} a_i(t)g_{j-i}$$

atitinkamai gauti, naudojant sandaugos operatorius $B(\mathbf{d})G$, $A(\mathbf{d})G$. G yra trumposios atminties filtras su absoliučiai sumuojamais koeficientais:

$$Gx_t = \sum_{j=0}^{\infty} g_j x_{t-j}, \qquad \text{čia} \quad \sum_{j=0}^{\infty}|g_j| < \infty \text{ ir } \sum_{j=0}^{\infty} g_j \neq 0.$$

Philippe, Surgailis, Viano nagrinėjo du sekos $\mathbf{d}$ atvejus: (I) kai beveik periodinės sekos $\mathbf{d}$ turi vidurkį $\bar{d} \in (0, 1/2)$; (II) kai $\mathbf{d} = (d_t, t \in \mathbb{Z})$ yra (asimptotinės) sekos, turinčios ribas $d_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} d_t \in (0, 1/2)$. Įrodyta, kad (I) atveju procesų X_t ir Y_t dalinės sumos konverguoja į trupmeninį Brauno judesį (*fBm*) su Hursto parametru $H = \bar{d} + (1/2)$; (II) atveju procesų X_t ir Y_t dalinės sumos konverguoja į du skirtingus savastinguosius Gauso procesus, priklausančius tik nuo asimptotinių parametrų $d_\pm$ ir turinčius asimptotiškai stacionarius arba asimptotiškai nykstančius pokyčius (žr. 1 skyrių, 1.3 apibrėžimą).

Pirmasis darbo tikslas yra praplėsti Philippe, Surgailio, Viano (2006) rezultatus. Sakykime, kad procesai X_t ir Y_t turi begalines dispersijas, o $\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}$, yra n.v.p. a.d. ir priklauso α-stabiliojo dėsnio traukos sričiai ($1 < \alpha < 2$). Šiuo atveju parodysime, kad X_t ir Y_t dalinės sumos konverguoja į α-stabilųjį savastingąjį procesą, kuris yra Philippe, Surgailio, Viano (2006) darbe nagrinėto Gauso proceso analogas. Antra, sudarysime tokias beveik periodines ir asimptotines sekas $\mathbf{d} = (d_t, t \in \mathbb{Z})$ (jos atskirai aptartos PSV darbe), reikalaudami, kad egzistuotų tokios ribos $\bar{d}_\pm \in (0, 1 - 1/\alpha)$, kai $\pm\infty$:

$$\bar{d}_+ := \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} d_i, \qquad \bar{d}_- := \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} d_{-i}, \tag{15}$$

tenkinančios papildomas sąlygas (žr. 1 skyrių, 1.1 ir 1.2 apibrėžimus). Aišku, $d_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} d_t$ egzistavimas daro įtaką ribų (15) egzistavimui, kai $\bar{d}_\pm = d_\pm$. Kita vertus, jeigu seka $(d_t, t \in \mathbb{Z})$ yra beveik periodinė su vidurkiu $\bar{d}$, tai egzistuoja (15), kai $\bar{d}_+ = \bar{d}_- = \bar{d}$.

Apibendrinsime pagrindinius rezultatus.

Sudarykime naują kintančių laike trupmeniškai integruotų filtrų klasę su vaidinamuoju "atminties šuoliu" (*"change-point in memory"*), t. y.

$$d_t = \begin{cases} d_+, & \text{jei } t \geq t_0; \\ d_-, & \text{jei } t < t_0, \end{cases} \tag{16}$$

čia $t_0 \in \mathbb{Z}$ yra fiksuotas sveikasis skaičius ir $d_\pm \in (0, 1/2)$. Pastebėsime, kad (16) tenkina (15), kai $\bar{d}_\pm = d_\pm$. Remiantis šiuo apibrėžimu, (11)–(12) koeficientus galima užrašyti taip:

$$a_{t-s}(t) = \begin{cases} \prod\limits_{s\leq k<t} \frac{t-k-1+d_-}{t-k}, & \text{jei } s < t \leq t_0; \\ \prod\limits_{s\leq k<t_0} \frac{t-k-1+d_-}{t-k} \prod\limits_{t_0\leq k<t} \frac{t-k-1+d_+}{t-k}, & \text{jei } s < t_0 < t; \\ \prod\limits_{s\leq k<t} \frac{t-k-1+d_+}{t-k}, & \text{jei } t_0 \leq s < t \end{cases}$$

ir

$$b_{t-s}(t) = \begin{cases} d_- \prod\limits_{s-1<k\leq t-2} \frac{k-s+1+d_-}{k-s+2}, & \text{jei } s < t \leq t_0; \\ d_+ \prod\limits_{s-1<k<t_0} \frac{k-s+1+d_-}{k-s+2} \prod\limits_{t_0\leq k\leq t-2} \frac{k-s+1+d_+}{k-s+2}, & \text{jei } s < t_0 < t; \\ d_+ \prod\limits_{s-1<k\leq t-2} \frac{k-s+1+d_+}{k-s+2}, & \text{jei } t_0 \leq s < t. \end{cases}$$

Iš čia išplaukia tokios asimptotikos:

$$a_{t-s}(t) \quad \sim \quad \begin{cases} \psi_{t-s}(-d_+) \ \sim \ \frac{(t-s)^{d_+-1}}{\Gamma(d_+)}, & s \geq 0; \\ \psi_{t-s}(-d_-)\frac{\psi_t(-d_+)}{\psi_t(-d_-)} \ \sim \ \frac{(t-s)^{d_--1}t^{d_+-d_-}}{\Gamma(d_+)}, & s \leq 0, \end{cases}$$

ir

$$b_{t-s}(t) \quad \sim \quad \begin{cases} \psi_{t-s}(-d_+) \ \sim \ \frac{(t-s)^{d_+-1}}{\Gamma(d_+)}, & s \geq 0; \\ \psi_{t-s}(-d_+)\frac{-d_+\psi_t(-d_-)}{-d_-\psi_t(-d_+)} \ \sim \ \frac{-d_+(t-s)^{d_+-1}t^{d_--d_+}}{-d_-\Gamma(d_-)}, & s \leq 0, \end{cases}$$

kai $t \to \infty$.

1 teorema. *Tarkime, kad*

$$\begin{aligned} Y_t &= A(\mathbf{d})\varepsilon_t = \sum_{s\leq t} a_{t-s}(t)\varepsilon_s, \\ X_t &= B(\mathbf{d})\varepsilon_t = \sum_{s\leq t} b_{t-s}(t)\varepsilon_s \end{aligned}$$

yra kintantys laike trupmeniškai integruoti filtrai kaip (13)–(14) su seka $\mathbf{d}$ *(16) ir simetrinėmis* α*-stabiliomis inovacijomis* (ε_t). *Tegul*

$$1 < \alpha \leq 2, \qquad d_\pm \in (0, 1-(1/\alpha)).$$

Tuomet

$$N^{-d_+-(1/\alpha)}\sum_{t=1}^{[N\tau]} Y_t \quad \to_{\mathrm{FDD}} \quad c_A(J(\tau)+U(\tau)), \tag{17}$$

$$N^{-d_+-(1/\alpha)}\sum_{t=1}^{[N\tau]} X_t \quad \to_{\mathrm{FDD}} \quad c_B^+ J(\tau), \qquad \textit{jei} \quad d_+ > d_-, \tag{18}$$

$$N^{-d_--(1/\alpha)}\sum_{t=1}^{[N\tau]} X_t \quad \to_{\mathrm{FDD}} \quad c_B^- V(\tau), \qquad \textit{jei} \quad d_+ < d_-, \tag{19}$$

$$N^{-d-(1/\alpha)}\sum_{t=1}^{[N\tau]} X_t \quad \to_{\mathrm{FDD}} \quad c_B(J(\tau)+V(\tau)), \ \textit{jei}\ d_+ = d_- = d. \tag{20}$$

Čia $c_A, c_B^\pm$ *yra konstantos, ribiniai procesai* J, U, V *apibrėžti žemiau kaip stochastiniai integralai pagal simetrinį* α*-stabilųjį Lévy procesą* Z *realiųjų* *skaičių tiesėje:*

$$\begin{aligned}
J(\tau) &= \int_0^\tau Z(\mathrm{d}x) \int_x^\tau (y-x)^{d_+ - 1} \mathrm{d}y, \\
U(\tau) &= \int_{-\infty}^0 Z(\mathrm{d}x) \int_0^\tau (y-x)^{d_- - 1} y^{d_+ - d_-} \mathrm{d}y, \\
V(\tau) &= \int_{-\infty}^0 (-x)^{d_- - d_+} Z(\mathrm{d}x) \int_0^\tau (y-x)^{d_+ - 1} \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Procesai (X_t) ir (Y_t) yra klasikiniai FARIMA$(0,d,0)$ procesai, kai nėra "atminties šuolio" (t. y. $d_+ = d_- = d$), ir šiuo atveju 1 teorema yra gerai žinoma. Šį rezultatą galima rasti Astrausko (1983), Kasahara ir Maejima (1986), Avram ir Taqqu (1992), Vaičiulio (2004) ir kitų autorių, nagrinėjusių stacionariųjų procesų su begaline dispersija dalinių sumų silpnąjį konvergavimą, darbuose. Pabrėšime, kad šiuo atveju ribiniai procesai (17) ir (20) yra *trupmeniškai stabilūs judesiai* (žr. Samorodnitsky and Taqqu (1994)). Kita vertus, gautas rezultatas atskleidžia gerokai paprastesnę parametrinę laiko eilučių modelių su *nestacionaria* skirstinių ilgąja atmintimi (žr. 2 apibrėžimą) klasę: nestacionarūs yra ne tik procesai (X_t) ir (Y_t), bet ir visi trys ribiniai procesai $J+U, J$ ir V turi nestacionarius (ir priklausomus) pokyčius, kai $d_+ \neq d_-$. Nelauktas ir stebinantis rezultatas – tai, kad ribinis procesas V (19) be galo diferencijuojamas tiesėje $(0,\infty)$ ir yra labai neįprastas dalinių sumų procesų ribinių teoremų atžvilgiu. Kitos šių ribinių procesų savybės pateiktos 1 skyriuje.

Surgailis, Teyssière, Vaičiulis (*J. Multiv. Anal.* **99** (2008), 510–541) (toliau STV) pasiūlė pokyčių santykių statistiką (IR):

$$IR := \frac{1}{N-3m} \sum_{k=0}^{N-3m-1} \frac{\left| \sum_{t=k+1}^{k+m} (X_{t+m} - X_t) + \sum_{t=k+m+1}^{k+2m} (X_{t+m} - X_t) \right|}{\left| \sum_{t=k+1}^{k+m} (X_{t+m} - X_t) \right| + \left| \sum_{t=k+m+1}^{k+2m} (X_{t+m} - X_t) \right|} \tag{21}$$

čia $X_1, X_2, \ldots, X_N$ yra stebiniai $0/0 = 1$, $m = 1, 2, \ldots$ – lango parametras (žr. Bružaitė ir Vaičiulis, 2005). IR statistika gali būti naudojama hipotezėms apie parametrą d tikrinti: trumposios atminties ($d = 0$), (stacionarios) ilgosios atminties ($0 < d < 1/2$) ir vienetinės šaknies ($d = 1$). Jeigu proceso X_t dalinės sumos asimptotiškai elgiasi kaip (integruotas) trupmeninis Brauno judesys su parametru $H = d + 1/2$, tai IR statistika konverguoja (kai

$N, m, N/m \to \infty$) į vidurkį

$$\Lambda(d) := \mathrm{E}\left[\frac{|Z_1 + Z_2|}{|Z_1| + |Z_2|}\right]; \tag{22}$$

čia vektorius (Z_1, Z_2) pasiskirstęs pagal Gauso skirstinį, su nuliniais vidurkiais, vienetinėmis dispersijomis ir kovariacijos koeficientu

$$\varrho(d) := \mathrm{cov}(Z_1, Z_2) \ = \ \frac{-9^{d+.5} + 4^{d+1.5} - 7}{2(4 - 4^{d+.5})}.$$

Funkcija $\Lambda(d)$ iš (22) griežtai monotoniškai didėja intervale $(-1/2, 3/2)$. Tikslią $\Lambda(d)$ išraišką galima rasti STV darbe. Esant tam tikroms papildomoms salygoms procesui $\{X_t\}$, STV gavo IR statistikos poslinkio (bias) $\mathrm{E}IR - \Lambda(d)$ gesimo greitį ir įrodė centrinę ribinę teoremą srityje $-1/2 < d < 5/4$. Asimptotinės dispersijos $\sigma(d)$ skaitinės reikšmės ir grafikas duoti Stoncelio ir Vaičiulio (2008) darbe. STV parodė, kad IR statistiką galima taikyti, norint patikrinti neparametrinę hipotezę apie ilgosios atminties parametrą

$$\mathrm{H}_0 : d = d_0$$

su alternatyva $\mathrm{H}_1 : d \neq d_0$. Atitinkamo IR testo kritinė sritis yra

$$|IR - \Lambda(d_0)| \ > \ z_{\alpha/2}\sigma(d_0)\sqrt{\frac{m}{N - 3m}}, \tag{23}$$

čia z_α – standartinio normaliojo skirstinio kvantilis.

Disertacijos 2 skyriuje nagrinėjamas atvejis, kai stebiniai aprašomi modeliu su trendu

$$X_t \ = \ g_{N,t} + X_t^0 \qquad (1 \le t \le N), \tag{24}$$

čia $g_{N,t}$ yra lėtai kintantis deterministinis trendas, o $\{X_t^0\}$ – Gauso procesas (stacionarus arba su stacionariais pokyčiais) su ilgąja atmintimi. Mūsų uždavinys – rasti sąlygas, kurias turi tenkinti trendas ir procesas $\{X_t^0\}$, kad IR statistika modeliui (24) tenkintų tokią pat centrinę ribinę teoremą kaip ir STV darbe (procesui be trendo), ir kartu IR testui galiotų tie patys asimptotiniai pasikliautinieji intervalai (23).

Suformuluosime pagrindinį STV rezultatą.

A sąlyga. $\{X_t^0\}$ yra stacionarusis Gauso procesas su nuliniu vidurkiu ir spektriniu tankiu $f(x), x \in [-\pi, \pi]$, turinčiu pavidalą

$$f(x) \;=\; |x|^{-2d}\left(c_0 + O(|x|^{\beta})\right) \qquad (x \to 0);$$

čia $c_0 > 0,\ 0 < \beta < 2d+1,\ d \in (-1/2, 1/2)$ – tam tikri skaičiai. Be to, $f(x)$ yra diferencijuojama intervale $(0, \pi)$, ir $|f'(x)| \le C|x|^{-1-2d}$ $(\exists C > 0)$.

B sąlyga. Pokyčiai $\{X_t^0 - X_{t-1}^0\}$ aprašomi stacionariuoju Gauso procesu su nuliniu vidurkiu ir spektriniu tankiu

$$f(x) \;=\; |x|^{2-2d}\left(c_0 + O(|x|^{\beta})\right) \qquad (x \to 0),$$

čia $c_0 > 0,\ 0 < \beta < 2d-1,\ d \in (1/2, 5/4)$ – tam tikri skaičiai. Be to, $f(x)$ yra diferencijuojama intervale $(0, \pi)$, ir $|f'(x)| \le C|x|^{1-2d}$ $(\exists C > 0)$.

Žymėsime IR^0 statistiką be trendo, t. y. $X_t = X_t^0,\ t = 1, \ldots, N$.

2 teorema. (žr. STV, 2008)) *Tarkime, kad procesas $\{X_t^0\}$ tenkina A arba B sąlygas. Jei $N, m,\ N/m \to \infty$, tai*

$$\mathrm{E}IR^0 - \Lambda(d) \;=\; O(m^{-\beta}), \tag{25}$$

$$\mathrm{E}\left(IR^0 - \Lambda(d)\right)^2 \;=\; o(1), \tag{26}$$

$$(N/m)^{1/2}(IR^0 - \mathrm{E}IR^0) \;\Rightarrow\; \mathcal{N}(0, \sigma^2(d)), \tag{27}$$

kur $\sigma(d) > 0$, $\Rightarrow$ žymi skirstinių konvergavimą.

Apibrėžkime

$$G_m(k) := V_m^{-1}\Big|\sum_{t=k+1}^{k+m}(g_N(t+m) - g_N(t))\Big|,$$

$$\overline{G_m^i} := \frac{1}{N-2m}\sum_{k=0}^{N-2m-1} G_m^i(k) \qquad (i = 1, 2),$$

$$V_m^2 := \mathrm{E}\Big(\sum_{t=1}^{m}(X_{t+m}^0 - X_t^0)\Big)^2.$$

Jei tenkinamos A ir B sąlygos, tai bet kokiems $d \in (-1/2, 5/4)$, $d \ne 1/2$,

$$V_m^2 \;\sim\; c(d)m^{1+2d} \qquad (m \to \infty);$$

čia $c(d) > 0$ yra konstanta (tiksli šios konstantos išraiška duota STV, (2.20), (2.22)).

Žemiau suformuluota teorema yra disertacinio darbo antrojo skyriaus pagrindinis rezultatas.

3 teorema. *Tarkime, kad stebiniai* $X_t,\ t = 1, \dots, N,$ *apibrėžiami modeliu (24) su trendu. Tegul* N *ir* $m = m(N)$ *kartu neaprėžtai didėja taip, kad* $m = o(N)$.
(i) *Tegul* $\{X_t^0\}$ *tenkina A arba B sąlygą. Tada*

$$\mathrm{E}IR - \Lambda(d) \;=\; O\left(\max\left(m^{-\beta}, \overline{G_m^2}\right)\right).$$

Be to, jei $\overline{G_m^1} \to 0$, *tuomet*

$$\mathrm{E}\left(IR - \Lambda(d)\right)^2 \to 0.$$

(ii) *Tegul* $\{X_t^0\}$ *tenkina A arba B sąlygą. Jei*

$$\overline{G_m^i} \;=\; o\left((m/N)^{1/2}\right) \qquad (i = 1, 2), \tag{28}$$

tai

$$(N/m)^{1/2}\left(IR \;- \mathrm{E}IR\right) \;\Rightarrow\; \mathcal{N}\left(0, \sigma^2(d)\right),$$

kur $\sigma(d)$ *– ta pati, kaip ir 2 teoremoje.*

Išvada. *Tegul* $\{X_t^0\}$ *tenkina 2 teoremos sąlygas,* $m^{-\beta} = o((m/N)^{1/2})$, *o trendas* $g_N(t)$ *– sąlygą (28). Tada IR testui* $H_0 : d = d_0,\ \ d_0 \in (-1/2, 5/4),\ d_0 \neq 1/2,$ *modeliui su trendu galioja tie patys asimptotiniai pasikliautinieji intervalai (23), kaip ir modeliui be trendo.*

Literatūroje žinoma nemažai testų ir grafinių metodų, kurie neatskiria trendo nuo ilgosios atminties. Šis fenomenas žinomas "melagingos ilgosios atminties" (*"spurious long memory"*) pavadinimu (žr. Lobato ir Savin (1998)). Todėl kyla du natūralūs klausimai: (I) "kiek mažas turi būti trendas, kad duotas testas jo neaptiktų?" ir (II) "kiek didelis turi būti trendas, kad jis žymiai skirtųsi nuo stacionariųjų stebinių?".

Bhattacharya, Gupta, Waimire (1983) nagrinėjo šiuos klausimus R/S statistikai ir silpnai priklausomiems stebiniams. Shimotsu (2006) apibrėžė testą, leidžiantį atskirti tikrąjį ir melagingąjį FARIMA(0,d,0) procesus; taip pat žr. Künsch (1986), Teverovsky ir Taqqu (1997), Diebold ir Inoue (2001), Giraitis, Kokoszka, Leipus (2001), Leipus ir Viano (2003), Giraitis, Kokoszka, Leipus, Teyssière (2003) ir tų straipsnių nuorodas. Giraitis, Kokoszka, Leipus (2001) nagrinėjo (I) ir (II) problemas V/S statistikai, gimininga R/S-tipo statistikai ir (bendram) silpnai priklausomam stacionariajam procesui $\{X^0\}$ (kai $d = 0$). Jie parodė, kad "maži trendai" (žr. (I) problemą) turi tenkinti sąlygą

$$\|g_N\|_2 := \left(\sum_{t=1}^{N} g_N^2(t) \right)^{1/2} = O(1). \tag{29}$$

Kita vertus, jeigu trendas g_N tenkina sąlygą $\|g_N\|_2 \to \infty$ ir dar kai kurias papildomas sąlygas, tai V/S statistika konverguoja į kitą ribą, nei atveju be trendo. Taigi trendas šią statistiką apgauna. Hiperboliniam trendui

$$g_N(t) = c_1 |t + c_2 N|^{\gamma}, \tag{30}$$

parametras γ turi tenkinti atitinkamas sąlygas, t. y. (I) $\gamma < -1/2$, (II) $\gamma > -1/2$ (žr. Giraitis, Kokoszka, Leipus, 2001). Kitas svarbus pavyzdys – tai vadinamasis "vidurkio šuolis" (*"change point in mean"*):

$$g_N(t) = \begin{cases} 0, & 1 \le t \le [\tau N], \\ \mu_N, & [\tau N] < t \le N, \end{cases} \tag{31}$$

bet kokiam $0 < \tau < 1$. Akivaizdu, kad (29) sąlyga duotam g_N (31) ekvivalenti sąlygai $|\mu_N| = O(N^{-1/2})$. Kita vertus, jeigu $|\mu_N| N^{1/2} \to \infty$, tai tenkinama Giraitis, Kokoszka, Leipus (2001) 2.3 sąlyga, o V/S testas neatskiria trumposios atminties nuo trendo.

1 pavyzdys. Nagrinėkime regresijos tipo trendą $g_N(t) = g(t/N)$; čia g yra tolygiai diferencijuojama intervale $[0, 1]$ funkcija. Vadinasi, kai $\|g_N\|_2 \sim N^{1/2} \int_0^1 g^2(\tau) \mathrm{d}\tau \to \infty$, tai (29) sąlyga nėra tenkinama. Kita vertus, $\overline{G_m^1} \le \sup_{\tau \in [0,1]} |g'(\tau)| (m^2/NV_m) = O(m^2/NV_m) = O(m^{3/2}/N)$, kai $d = 0$ (žr. (19)). Tuomet (28) sąlyga, kai $i = 1$, keičiasi į $m = o(N^{1/2})$. Analogiškai (28) sąlyga, kai $i = 2$, išplaukia iš $m = o(N^{3/5})$. Kadangi $m^{-\beta}(N/m)^{1/2} = o(1)$ sąlygos reikalauja (23) be trendo (žr. 2 teoremą, (25), (27), arba išvadą), teigiame, kad, tikrinant hipotezę apie trumpąją atmintį $\mathrm{H}_0 : d = 0$, IR testo neveikia regresinio tipo trendas su parametrais $m \sim N^{\lambda}$, $1/(1 + 2\beta) < \lambda < 1/2$.

2 pavyzdys. Nagrinėkime hiperbolinį trendą, priklausantį nuo N ir apibrėžtą (30). Tarkime, kad $-1/2 < \gamma < 1/2$ ir $c_i > 0$ $(i = 1, 2)$. Tada

$$\begin{aligned} |g_N(t+m) - g_N(t)| &= c_1 |t+m+c_2N|^\gamma \left| \left| 1 + \frac{m}{t+c_2N} \right|^\beta - 1 \right| \\ &= O\left(m|t+c_2N|^{\gamma-1}\right) = O(mN^{\gamma-1}), \end{aligned}$$

taigi $\overline{G_m^1} = O(m^2N^{\gamma-1}/V_m) = O(m^{3/2}N^{\gamma-1})$. Panašiai ir $\overline{G_m^2} = O(m^3N^{2\gamma-2})$, kai $V_m \sim \text{const.}m^{1/2}$. Vadinasi, galima daryti analogišką išvadą kaip ir 1 pavyzdyje, kad toks trendas asimptotiškai ignoruojamas (23) IR testo $(d_0 = 0)$ su parametrais $m \sim N^\lambda$, $1/(1+2\beta) < \lambda < (1/2) - \gamma$.

3 pavyzdys. Nagrinėkime "šuolio" trendą, apibrėžtą (31), su pasirinktu μ_N. Iš IR statistikos apibrėžimo (21) išplaukia, kad

$$|IR - IR^0| \le 4m/N. \tag{32}$$

Iš čia ir iš 2 teoremos (25), (27) išplaukia, kad IR testas asimptotiškai nėra jautrus tokiems "šuoliams" (o kartu ir bet kuriam baigtiniam tokių "šuolių" skaičiui). Paskutinę pastabą galima taikyti keletui svarbių trendų. Vienas iš jų – tai vadinamasis lokalusis trendas, kuris apibrėžiamas taip:

$$g_N(t) = L(t) \begin{cases} 1, & \tau \in [\tau', \tau''], \\ 0, & \tau \notin [\tau', \tau''], \end{cases}$$

čia $L(t)$ yra begalybėje lėtai kintanti funkcija, o skirtumas $\tau'' - \tau'$ nepriklauso nuo N. Tuomet

$$|IR - IR^0| \le \frac{4m + (\tau'' - \tau')}{N},$$

vadinasi, ir lokalusis trendas yra asimptotiškai ignoruojamas IR testo. Kitas svarbus trendas – tai vadinamasis "šuolio" trendas skalės (kintamumo) modelyje. Reminatis IR statistikos invariantiškumo savybę, (32) galioja ir šiam modeliui.

Mes nenagrinėjome (II) problemos "kiek didelis turi būti trendas, kad IR statistika jį aptiktų?", nes empirinis modeliavimas ir ankstesnis aptarimas patvirtina, jog IR statistika nėra jautri trendams ir prastokai juos aptinkanti. Žinoma, yra statistikų (pvz., V/S statistika) geriau tinkančių šios problemos sprendimui.

Disertacijos trečiajame skyriuje nagrinėjamas proceso $(U_n^{(1)}(\tau), U_n^{(2)}(\tau))$, $\tau \in [0,1]$, silpnasis (baigtiniamačių skirstinių ir funkcinis) konvergavimas. Čia $U_n^{(1)}(\tau) := A_n^{-1} \sum_{t=1}^{[n\tau]} X_t$, $U_n^{(2)}(\tau) := A_n^{-1} \sum_{t=1}^{[n\tau]} X_{t+m}$ yra normuotų dalinių sumų, nutolusių viena nuo kitos atstumu m taip, kad m, $m/n \to \infty$, procesas, o $(X_t,\ t \in \mathbb{Z})$ yra slenkančiojo vidurkio procesas su nepriklausomomis ir vienodai pasiskirsčiusiomis (arba martingalinių skirtumų) inovacijomis su baigtine dispersija. Skyriuje aptarti slenkančiojo vidurkio (X_t) ilgosios atminties, trumposios atminties ir neigiamosios atminties atvejai. Įrodyta, kad dvimatis dalinių sumų procesas $(U_n^{(1)}(\tau), U_n^{(2)}(\tau))$ konverguoja į dvimatį trupmeninį Brauno judesį su nepriklausomomis komponentėmis. Šio skyriaus rezultatas leidžia įrodyti IR-tipo statistikos pagrįstumą.

Išvados

Dauguma darbų, nagrinėjančių ilgąją atmintį, analizuoja stacionariuosius stebinius arba stebinius su stacionariaisiais pokyčiais. Jei imtys yra ilgos, tai tokie stebiniai dažnai nėra realūs. Todėl tiek teorijoje, tiek taikymuose daug svarbesnis nestacionarios ilgosios atminties arba tiesinių laiko eilučių modelių su netacionaria ilgąja atmintimi nagrinėjimas. Disertacijoje analizuojami tokių modelių dalinių sumų ribiniai skirstiniai bei statistikų su ilgosios atminties stebiniais ir trendu ribiniai skirstiniai.

Philippe, Surgailis, Viano (2008), (2006) apibrėžė kintančius laike trupmeniškai integruotus filtrus su baigtine dispersija ir nagrinėjo jų dalinių sumų ribinius skirstinius. Disertacijoje ištirti tokių procesų dalinių sumų ribiniai skirstiniai, kai dispersija begalinė, teigiant, kad inovacijos priklauso α-stabiliojo dėsnio traukos sričiai ($1 < \alpha < 2$); įrodyta, kad dalinių sumų procesas konverguoja į tam tikrą α-stabilųjį savastingą procesą su nestacionariaisiais pokyčiais.

Surgailis, Teyssière, Vaičiulis (2008) įvedė pokyčių santykių, arba IR (= Increment Ratio), statistiką ir parodė, kad IR statistika gali būti naudojama tikrinti neparametrinėms hipotezėms apie stacionariosios laiko eilutės ilgąją atmintį bei ilgosios atminties parametrą d. Disertacijoje ištirtas pokyčių santykių (IR) statistikos elgesys, kai stebiniai aprašomi stacionariuoju Gauso procesu su lėtai kintančiu trendu. IR statistikai su trendu įrodyta centrinė ribinė teorema, gautas poslinkio įvertis ir rastos sąlygos deterministiniam trendui, kada IR statistikai galioja tie patys pasikliautinieji intervalai, kaip ir IR statistikai be trendo. Be to, įrodytas IR-tipo statistikos pagrįstumas tiesiniams procesams su ilgąja, trumpąja ir neigiamąja atmintimi. Šio fakto įrodymas pagrįstas nutolusių dalinių sumų asimptotine nepriklausomybe.

Publikacijų sąrašas

1. K. Bružaitė, M. Vaičiulis, Asymptotic independence of distant partial sums of a linear process, *Liet. Matem. Rink.*, **45**(4), 479–500 (2005) (rusų kalba) = *Lith. Math. J.*, **45**(4), 387–404 (2005).

2. K. Bružaitė, D. Surgailis, M. Vaičiulis, Time-varying fractionally integrated processes with finite or infinite variance and nonstationary long memory, *Acta Appl. Math.*, **96**, 99–118 (2007).

3. K. Bružaitė, M. Vaičiulis, The increment ratio statistic under deterministic trends, *Lith. Math. J.*, **48**(3), 1–15 (2008).

Aprobacija

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti Lietuvos matematikų draugijos konferencijose (2005, 2006, 2007, 2008 m.), devintojoje tarptautinėje Vilniaus tikimybių teorijos ir matematinės statistikos konferencijoje (Vilnius, Lietuva, 2006 m. birželio 26–30 d.).

Disertacijos tema skaityti pranešimai Matematikos ir informatikos instituto Tikimybių teorijos ir matematinės statistikos seminare, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Ekonometrijos seminare ir Šiaulių universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto seminare.

Nuoširdžiai dėkoju moksliniam vadovui prof. habil. dr. D. Surgailiui už nuoširdų bendravimą, palaikymą, pakantumą, mokslinio savarankiškumo ugdymą, dr. M. Vaičiuliui už nuolatinį rūpestį, prof. habil. dr. V. Paulauskui už pagalbą ruošiantis disertacijos gynimui. Dėkoju Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto tarybai, visiems Šiaulių universiteto Matematikos ir Informatikos katedrų bendradarbiams. Esu dėkinga savo vyrui, tėvams, artimiesiems ir draugams už visokeriopą paramą doktorantūros studijų metu. Taip pat nuoširdžiai dėkoju Šiaulių universitetui, Matematikos ir informatikos institutui už finansinę paramą.

Summary

Philippe, Surgailis and Viano (*C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I* **342**, 269-274, 2006; *Theory Probab. Appl.*, 2008, to appear) introduced a new class of time-varying fractionally integrated filters $A(\mathbf{d})x_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t)x_{t-j}$, $B(\mathbf{d})x_t = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(t)x_{t-j}$ depending on arbitrary given sequence $\mathbf{d} = (d_t,\ t \in \mathbb{Z})$ of real numbers, such that $A(\mathbf{d})^{-1} = B(-\mathbf{d})$, $B(\mathbf{d})^{-1} = A(-\mathbf{d})$ and such that when $d_t \equiv d$ is a constant, $A(\mathbf{d}) = B(\mathbf{d}) = (1-L)^d$ is the usual fractional differencing operator. Philippe et al. studied partial sums limits of (nonstationary) filtered white noise processes $X_t = B(\mathbf{d})\varepsilon_t$ and $Y_t = A(\mathbf{d})\varepsilon_t$ in the case when (1) $\mathbf{d}$ is almost periodic having a mean value $\bar{d} \in (0, 1/2)$, or (2) $\mathbf{d}$ admits limits $d_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} d_t \in (0, 1/2)$ at $t = \pm\infty$. Chapter 1 is devoted to extend the above mentioned results of Philippe et al. into two directions. Firstly, we consider the class of time-varying processes with infinite variance, assuming that $\varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z}$ are iid rv's in the domain of attraction of α-stable law ($1 < \alpha < 2$). Secondly, we combine the classes (1) and (2) of sequences $\mathbf{d} = (d_t,\ t \in \mathbb{Z})$ into a single class of sequences $\mathbf{d} = (d_t,\ t \in \mathbb{Z})$ admitting possibly different Cesaro limits $\bar{d}_\pm \in (0, 1-(1/\alpha))$ at $\pm\infty$. We show that partial sums of X_t and Y_t converge to some α-stable self-similar processes depending on the asymptotic parameters $\bar{d}_\pm$ and having asymptotically stationary or asymptotically vanishing increments.

Chapter 2 carries on an investigation into the Increment Ratio statistic introduced by Surgailis, Vaičiulis, Teyssière (2008). We here concentrate on conditions for the trend $g_{N,t}$ and the stationary Gaussian component X_t^0 guaranteeing that the limit distribution of the Increment Ratio statistic under the model $X_t = X_t^0 + g_{N,t}$ follows the same central limit theorem as in the absence of trend. Proposed statistical test for testing nonparametric hypotheses for d-integrated ($-1/2 < d < 5/4$) behavior of time series X_t which is perturbed by deterministic trend. A short discussion on a models with structural changes in parameters is included.

In Chapter 3 we discuss the joint weak convergence (f.d.d. and functional) of the vector-valued process $(U_n^{(1)}(\tau), U_n^{(2)}(\tau)),\ \tau \in [0,1]$, where $U_n^{(1)}(\tau) := A_n^{-1}\sum_{t=1}^{[n\tau]} X_t$, $U_n^{(2)}(\tau) := A_n^{-1}\sum_{t=1}^{[n\tau]} X_{t+m}$ are the normalized partial sums processes separated by a large lag ($m,\ m/n \to \infty$) and $(X_t,\ t \in \mathbb{Z})$ is stationary moving average process

in iid (or martingale difference) innovations with finite variance. The cases of long memory, short memory and negative memory moving average (X_t) are discussed. We show that in each cases the bivariate partial sums process $(U_n^{(1)}(\tau), U_n^{(2)}(\tau))$ tends to bivariate fractional Brownian motion with mutually independent components. The result is not closely related to the topic of the thesis, but it is applied to prove consistency of certain increment type statistics in moving averages observations.

Trumpos žinios apie autorę

Gimimo data ir vieta

1976 m. sausio 12 d., Šiauliai.

Išsilavinimas ir kvalifikacija

1994 m. baigta Šiaulių 9-oji vidurinė mokykla.

1998 m. Šiaulių universiteto Fizikos ir matematikos fakultete įgytas socialinių mokslų bakalauro kvalifikacinis laipsnis ir matematikos ir informatikos mokytojo kvalifikacija.

2000 m. Šiaulių universiteto Fizikos ir matematikos fakultete įgytas socialinių mokslų magistro kvalifikacinis laipsnis ir gimnazijos matematikos mokytojo kvalifikacija.

2003–2007 m. Matematikos ir informatikos institute baigta matematikos krypties doktorantūra.

Darbo patirtis

1998–2001 m. Šiaulių universiteto Edukologijos fakulteto inžinierė-programuotoja.

2001–2006 m. Šiaulių universiteto Matematikos katedros asistentė.

Nuo 2006 m. Šiaulių universiteto Informatikos katedros lektorė.

Kvalifikacijos kėlimas

2002 m. rugpjūčio 12–30 d. Jyvaskyla universitetas (Suomija), 12-oji vasaros mokykla.

2006 m. spalio 30 d.-lapkričio 6 d. Lilio mokslo ir technologijų universitetas (Prancūzija), doktorantūros stažuotė pagal Lietuvos ir Prancūzijos mokslo mainų programą "Gillibert".

Kristina Bružaitė

KAI KURIE TIESINIAI LAIKO EILUČIŲ MODELIAI SU NESTACIONARIA ILGĄJA ATMINTIMI

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01 P)