VILNIAUS UNIVERSITETAS

NERINGA KLOVIENĖ

ANTROJO LAIPSNIO SKYSČIŲ TEKĖJIMO UŽDAVINIO NESTACIONARŪS PUAZEILIO TIPO SPRENDINIAI CILINDRINĖSE SRITYSE

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2013

Disertacija rengta 2006 – 2012 metais Vilniaus Universitete.

Mokslinis vadovas:
Prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika 01P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto Matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas:
Prof. dr. Artūras ŠTIKONAS (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika 01P)

Nariai:
Prof. habil. dr. Reinhard FARWIG (Darmštadto universitetas, Vokietija, fiziniai mokslai, matematika 01P)
Prof. habil. dr. Raimondas ČIEGIS (Vilniaus Gedimino Technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika 01P)
Prof. dr. Vytautas KLEIZA (Kauno Technologios universitetas, fiziniai mokslai, matematika 01P)
Prof. dr. Vladas SKAKAUSKAS (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika 01P)

Oponentai:
Prof. habil. dr. Michel CHIPOT (Ciuricho universitetas, Šveicarija, fiziniai mokslai, matematika 01P)
Prof. habil. dr. Mifodijus SAPAGOVAS (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika 01P)

Disertacija ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2013 m. sausio 18 d. 16 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir Informatikos fakultete.
Adresas:
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva

Disertacijos santrauka išplatinta 2013 m. gruodžio 18 d.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

NERINGA KLOVIENĖ

NON-STATIONARY POISEUILLE TYPE SOLUTIONS FOR THE SECOND GRADE FLUID FLOW PROBLEM IN CYLINDRICAL DOMAINS

Summary of Doctoral dissertation
Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2013

The scientific work was carried out in 2006–2012 at Vilnius University.

Scientific supervisor:
Prof. Habil. Dr. Konstantinas Pileckas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics 01P)

The thesis is defended in the council of Mathematics of Vilnius University:

Chairmann:
Prof. Dr. Artūras ŠTIKONAS (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics 01P)

Members:
Prof. Habil. Dr. Reinhard FARWIG (Darmstadt University, Germany, Physical sciences, Mathematics 01P)
Prof. Habil. Dr. Raimondas ČIEGIS (Vilnius Gediminas Technical University, Physical sciences, Mathematics 01P)
Prof. Dr. Vytautas KLEIZA (Kaunas Technical Universitety, Physical sciences, Mathematics 01P)
Prof. Habil. Dr. Vladas SKAKAUSKAS (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics 01P)

Opponents:
Prof. Habil. dr. Michel CHIPOT (Zurich University, Switzerland, Physical sciences, Mathematics 01P)
Prof. Habil. dr. Mifodijus SAPAGOVAS (Vilnius university, Physical sciences, Mathematics 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on January 18, 2013, in Vilnius University, Department of Mathematics and Informatics at 4 p.m.
Address:
Naugardukas str. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania

The summary of the dissertation was distributed on December 18, 2013.
The dissertation is available at the Library of Vilnius University.

DISERTACINIO DARBO APRAŠYMAS

Mokslinė problema ir tyrimo objektas. Siekiant aprašyti skysčių mechanines savybes naudojamos matematinės-fizikos lygtys. Nagrinėjant ne-Niutoninius skysčius ilgą laiką pakako Navjė-Stokso matematinio modelio, tačiau tobulėjant bioinžinerijai ir maisto pramonei buvo atrasti ir sukurti vis nauji skysčiai. Pavyzdžiui geliai, dažai, aliejai, geologiniai skysčiai ir pan. Šie skysčiai pasižymi itin stipriomis viskoelastinėmis savybėmis, kurias norint aprašti buvo būtina sukurti naujus ne-Niutoninių skysčių matematinius modelius. Vienas jų - antrojo laipsnio skysčių tekėjimo uždavinys. Jis priskiriamas Rivlin-Erikseno diferencialinio tipo skysčių uždaviniams (žr. [11], [21]) ir aprašo platų spektrą viskoelastinių skysčių su polimeriniais priedais.

Disertacijoje nagrinėjama antrojo laispnio skysčių tekėjimo problema, aprašyta vektorinių lygčių sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \alpha\Delta\mathbf{u}) - \nu\Delta\mathbf{u} + \mathrm{curl}(\mathbf{u} - \alpha\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla\widetilde{p} = \mathbf{f}, \\ \mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}|_{S^T} = 0, \quad \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

čia

$$\widetilde{p} = \alpha(\mathbf{u}\cdot\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{4}A : A) - \frac{1}{2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) + p,$$

$S^T = \partial\Pi \times (0,T)$, Π skysčio tekėjimo sritis, $\mathbf{u}$ ir p atitinkamai skysčio greitis ir slėgis, $\mathbf{f}$ - sritį veikiančios išorės jėgos, $\mathbf{u}_0$ pradinis greitis, ν, α žinomos teigiamos konstantos, A - matrica su komponentėmis

$$A_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

ir $A : A = \sum\limits_{i,j}(A_{ij})^2$.

Atskiri (1) uždavinio atvejai buvo nagrinėti daugelio autorių (pvz. [1], [3], [4], [7], [12], [13], [14] ir kt.). D. Cioranescu ir V. Quazar straipsniuose [5], [6] įrodė, kad šis uždavinys turi globalų sprendinį dvimatėje aprėžtoje srityje, o trimatėje srityje egzistuoja lokalus sprendinys.

Disertacijoje nagrinėjame antrojo laipsnio skysčių tekėjimo (1) uždavinį begaliniame vamzdyje $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : x' \in \sigma \times \mathbb{R}\}$ su papildomai užduota srauto sąlyga $F(t)$ per skerspjūvį σ[1]:

$$\int\limits_\sigma u_n(x', x_n, t)dx' = F(t). \tag{2}$$

Dvimatėje juostoje ir trimačiame sukimosi cilindre tariame, kad skysčio pradinio greičio ir išorės jėgų vektoriai nepriklauso nuo x_n koordinatės ir yra tokios formos

$$\mathbf{u}_0(x) = (0, ..., u_n(x')), \quad \mathbf{f}(x,t) = (0, ..., f_n(x', t)).$$

(1) uždavinio sprendinio ieškome pavidalu

$$\mathbf{u}(x,t) = (0, ..., u_n(x', t))$$

[1] $\sigma = (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$, jei $n = 2$ ir $\sigma = \{x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x'| < 1\}$, jei $n = 3$.

ir reikalaujame, kad jis tenkintų (2) srauto sąlygą. Tokį sprendinį vadiname Puazeilio tipo sprendiniu.

Kai $\alpha = 0$, tai (1) uždavinys sutampa su Navjė-Stokso uždaviniu. Nestacionaraus Navjė-Stokso uždavinio Puazeilio tipo sprendiniai buvo nagrinėti straipsniuose [8], [9], [15]-[18]. Periodinis pagal laiką Navjė-Stokso uždavinys buvo analizuotas [2] ir [9] darbuose.

Pagrindinis skirtumas tarp antrojo laipsnio skysčių tekėjimo ir Navjė-Stokso lygčių yra tas, kad Navjė-Stokso lygtyse netiesinio nario eilė yra žemesnė už tiesinio nario, tuo tarpu antrojo laipsnio skysčių tekėjimo lygtyse - atvirkščiai. Trimačiame vamzdyje neįmanoma rasti kryptinio (kurio tik paskutinė komponentė nelygi nuliui) Puazeilio tipo sprendinio, kaip tai daroma Navjė-Stokso lygtims. Todėl disertacijoje ieškome Puazeilio tipo sprendinio, turinčio visas tris komponentes. Rezultatai, analogiški mūsų gautiems, stacionarios sistemos atveju buvo gauti straipsniuose [19] ir [20].

Spręsdami uždavinį trimačiame vamzdyje remiamės D. Cioranescu, V. Girault ir E. H. Quazar idėjomis [4]-[6]. Kaip ir [4]-[6] darbuose, mes naudojame Galiorkino metodą ir specialias bazes, tačiau skirtingai nei [4]-[6], siekiant užtikrinti srauto sąlygą, mes sprendžiame atvirkštinį uždavinį su nežinoma dešniaja puse, susieta su slėgio gradientu.

Tikslas ir uždaviniai. Disertacijos tikslas yra išanalizuoti antrojo laipsnio skysčių tekėjimo problemos sprendinio egzistavimą ir vienatį su užduota srauto sąlyga šiais atvejais:

- pradinis ir kraštinis uždavinys dvimatėje juostoje,
- pradinis ir kraštinis uždavinys trimačiame sukimosi cilindre,
- periodinis pagal laiką uždavinys dvimatėje juostoje,
- pradinis ir kraštinis uždavinys trimačiame vamzdyje.

Tyrimo metodai. Disertacijoje taikome funkcinės analizės metodus ir Sobolevo erdvių savybes. Konstruojant aproksimuojančius sprendinius naudojame Galiorkino metodą su specialiomis bazėmis.

Naujumas. Visi disertacijoje pateikti rezultatai yra nauji. Puazeilio tipo sprendiniai nestacionariam antrojo laipsnio skysčių tekėjimo uždaviniui su papildomai užduota srauto sąlyga anksčiau nebuvo nagrinėti. Egzistavimo rezultatai ir sprendinių įverčiai yra nauji.

Darbo struktūra. Disertacija parašyta anglų kalba. Ją sudaro įvadas, 5 skyriai, išvados ir mokslinių publikacijų disertacijos tema sąrašas. Bendra darbo apimtis 102 puslapiai.

PROBLEMOS APŽVALGA IR PAGRINDINIAI REZULTATAI

Pirmajame skyriuje pateikiami pagrindiniai žymėjimai ir naudojamos teoremos.

Antrajame skyriuje nagrinėjamas antrojo laipsnios skysčio tekėjimo (1) uždavinys su papildomai užduota srauto (2) sąlyga, dvimatėje begalinėje juostoje $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \in \sigma \times \mathbb{R}\}$, kur $\sigma = (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$. Tarkime, kad pradinė sąlyga $\mathbf{u}_0(x)$ ir išorės jėgos $\mathbf{f}(x,t)$ nepriklauso nuo x_2 koordinatės ir yra tokios formos

$$\mathbf{u}_0(x) = (0, u_0(x_1)), \qquad \mathbf{f}(x,t) = (0, f(x_1,t)).$$

Sakykime, kad yra patenkinta būtinoje suderinamumo sąlyga

$$\int\limits_{-d/2}^{d/2} u_0(x_1)dx_1 = F(0).$$

Apibrėžimas. *(1), (2) uždavinio sprendinys $(\boldsymbol{u}(x,t), \widetilde{p}(x,t))$ turintis pavidalą*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}(x,t) = (0, U(x_1,t)),\\ &\widetilde{p}(x,t) = -q(t)x_2 - \int\limits_{-d/2}^{x_1} U(y,t)\frac{\partial}{\partial y}\Big(U(y,t) - \alpha\frac{\partial^2 U(y,t)}{\partial y^2}\Big)dy + p_0(t), \end{aligned} \tag{3}$$

vadinamas Puazeilio tipo sprendiniu. Čia $p_0(t)$ bet kokia funkcija.

Įrašius (3) išraiškas į (1), (2) sistemą gauname atvirkštinį uždavinį srityje $\sigma^T = \sigma \times (0,T)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(U - \alpha\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}) - \nu\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = q(t) + f,\\ U(-\dfrac{d}{2}, t) = U(\dfrac{d}{2}, t) = 0, \quad U(x_1, 0) = u_0(x_1),\\ \int\limits_{-d/2}^{d/2} U(x_1,t)dx_1 = F(t), \end{cases} \tag{4}$$

čia funkcijos $u_0(x_1)$, $f(x_1,t)$ ir $F(t)$ yra žinomos, o $U(x_1,t)$ ir $q(t)$ ieškomos.

Naudosime funkcijų ervę $\mathcal{M}(\sigma^T) = \{u:\ u \in \mathring{W}_2^{1,1}(\sigma^T),\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t} \in L_2(\sigma^T)\}$.

Apibrėžimas. *(4) uždavinio silpnuoju sprendiniu vadiname funkcijų porą $(U,q) \in \mathcal{M}(\sigma^T) \times L_2(0,T)$, tenkinančią integralinę tapatybę*

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^t\int\limits_\sigma \frac{\partial U(x_1,\tau)}{\partial \tau}\eta(x_1,\tau)dx_1d\tau + \alpha\int\limits_0^t\int\limits_\sigma \frac{\partial^2 U(x_1,\tau)}{\partial\tau\partial x_1}\frac{\partial \eta(x_1,\tau)}{\partial x_1}dx_1d\tau\\ &+\nu\int\limits_0^t\int\limits_\sigma \frac{\partial U(x_1,\tau)}{\partial x_1}\frac{\partial\eta(x_1,\tau)}{\partial x_1}dx_1d\tau = \int\limits_0^t q(\tau)\int\limits_\sigma \eta(x_1,\tau)dx_1d\tau\\ &+\int\limits_0^t\int\limits_\sigma f(x_1,\tau)\eta(x_1,\tau)dx_1d\tau \quad \forall\eta \in \mathring{W}_2^{1,0}(\sigma^T), \forall t \in [0,T], \end{aligned}$$

pradinę $U(x_1,0) = u_0(x_1)$ ir srauto (4_3) sąlygas.

Skyriaus pagrindiniai rezultatai suformuluoti žemiau pateiktose teoremose.

1 teorema. *Tarkime $f \in L_2(\sigma^T), u_0 \in \mathring{W}_2^1(\sigma), F \in W_2^1(0,T)$. Tada egzistuoja vienintelis (4) uždavinio silpnasis sprendinys $\big(U,q\big) \in \mathcal{M}(\sigma^T) \times L_2(0,T)$ ir teisingas įvertis*

$$\begin{aligned} &\max_{t\in[0,T]} \|U(\cdot,t)\|^2_{W_2^1(\sigma)} + \|U\|^2_{W_2^{1,1}(\sigma^T)} + \Big\|\frac{\partial U}{\partial t}\Big\|^2_{W_2^1(\sigma^T)} + \|q\|_{L_2(0,T)}\\ &\le c\big(\|F\|^2_{W_2^1(0,T)} + \|f\|^2_{L_2(\sigma^T)} + \|u_0\|^2_{W_2^1(\sigma)}\big). \end{aligned}$$

Jei $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\sigma) \cap W_2^2(\sigma)$, *tai* $U \in W_2^{2,1}(\sigma^T)$, $\dfrac{\partial U}{\partial t} \in W_2^2(\sigma^T)$, (4) *lygtys yra patenkintos beveik visur srityje* σ^T *ir*

$$\begin{aligned}&\max_{t\in[0,T]} \|U(\cdot,t)\|^2_{W_2^2(\sigma)} + \|U\|^2_{W_2^{2,1}(\sigma^T)} + \|\frac{\partial U}{\partial t}\|^2_{W_2^2(\sigma^T)} + \|q\|_{L_2(0,T)}\\ &\leq c\big(\|F\|^2_{W_2^1(0,T)} + \|f\|^2_{L_2(\sigma^T)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\sigma)}\big).\end{aligned}$$

Tegul $\mathcal{W}^l_{2,\mu}(0,\infty)$, $\mu > 0$, yra eksponentiškai nykstančių funkcijų erdvė su baigtine norma

$$\|F\|_{\mathcal{W}^l_{2,\mu}(0,\infty)} = \|\exp(\mu t)F(t)\|_{W_2^l(0,\infty)}.$$

2 teorema. *Tarkime, kad* $f(x_1,t) = 0$, $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\sigma)$ *ir* $F \in \mathcal{W}^1_{2,\mu}(0,\infty)$, *kur* $\mu > 0$. *Tada* (4) *uždavinio sprendiniui* $\big(U,q\big)$ *galioja įvertis*

$$\begin{aligned}&\exp(\gamma^* t)\int\limits_{-d/2}^{d/2}\big(|U(x_1,t)|^2 + |\frac{\partial U(x_1,t)}{\partial x_1}|^2\big)dx_1\\ &+\int\limits_0^t\int\limits_{-d/2}^{d/2}\exp(\gamma^* t)\big(|\frac{\partial U(x_1,\tau)}{\partial \tau}|^2 + |\frac{\partial^2 U(x_1,\tau)}{\partial x_1\partial\tau}|^2\big)dx_1 d\tau\\ &+\int\limits_0^t \exp(\gamma^*\tau)|q^{(N)}(\tau)|^2 d\tau \leq c\big(\|F\|^2_{\mathcal{W}^l_{2,\mu}(0,\infty)} + \|u_0\|^2_{W_2^1(\sigma)}\big).\end{aligned}$$

Čia

$$\gamma_* = \begin{cases} \min\big(1,2\mu\big), & \textit{jei}\ \min\big(1,2\mu\big) < \dfrac{\nu\pi^2}{d^2},\\ \dfrac{\nu\pi^2}{d^2} - \delta, & \textit{jei}\ \min\big(1,2\mu\big) \geq \dfrac{\nu\pi^2}{d^2},\end{cases}$$

o $\delta > 0$ *pakankamai mažas dydis.*

Įrodoma, kad skysčio tekėjimo srautas $F(t)$ ir slėgio gradientas $q(t)$ yra susieti Voltero integraline lygtimi ir galioja įvertis:

$$\|q\|_{L_2(0,T)} \leq c\big(\|F'\|_{L_2(0,T)} + \|f\|_{L_2(\sigma^T)} + \|u_0\|_{L_2(\sigma)}\big).$$

Trečiajame skyriuje (1), (2) uždavinys nagrinėjamas begaliniame sukimosi cilindre $\Pi = \{x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x', x_3) \in \sigma \times \mathbb{R}\}$.

Tarkime $\mathbf{u}_0(x)$ ir $\mathbf{f}(x,t)$ išreikšti tokiu pavidalu:

$$\mathbf{u}_0(x) = (0,0,u_{z0}(r)), \quad \mathbf{f}(x,t) = (0,0,f_z(r,t)),$$

čia (r,φ,z) yra cilindrinės koordinatės $\mathbb{R}^3$ erdvėje. Be to, tarkime, kad yra patenkinta būtinoji suderinamumo sąlyga:

$$\int\limits_\sigma u_{z0}dx' = F(0).$$

(1), (2) uždavinio sprendinio ieškome Puazeilio tipo pavidalu:

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}(r,\varphi,z,t) = (0,0,U(r,t)),\\ &\widetilde{p}(r,z,t) = \alpha\int\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\Big(\frac{\partial U(r,t)}{\partial r}\Big)^2\Big)dr - q(t)z + p_0(t).\end{aligned}$$

Įrašius šias išraiškas į (1), (2) sistemą gauname atvirkštinį uždavinį srityje σ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(U-\alpha(\dfrac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r}))-\nu(\dfrac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r})=q(t)+f_z, \\ U(0,t)=U(R,t)=0, \quad U(r,0)=u_{z0}(r), \\ 2\pi\int\limits_0^R rU(r,t)dr=F(t). \end{cases} \tag{5}$$

Apibrėžimas. *Funkcijų porą $\big(U,q\big)\in\mathcal{M}(\sigma^T)\times L_2(0,T)$ vadiname silpnuoju (5) uždavinio sprendiniu, jei ji tenkina integralinę tapatybę*

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^t\int\limits_0^R \frac{\partial U(r,\tau)}{\partial\tau}\eta(r,\tau)drd\tau+\alpha\int\limits_0^t\int\limits_0^R\frac{\partial^2 U(r,\tau)}{\partial\tau\partial r}\big(\frac{\partial\eta(r,\tau)}{\partial r}-\frac{1}{r}\eta(r,\tau)\big)drd\tau\\ &+\nu\int\limits_0^t\int\limits_0^R\frac{\partial U(r,\tau)}{\partial r}\big(\frac{\partial\eta(r,\tau)}{\partial r}-\frac{1}{r}\eta(r,\tau)\big)drd\tau=\int\limits_0^t q(\tau)\int\limits_0^R\eta(r,\tau)drd\tau\\ &+\int\limits_0^t\int\limits_0^R f_z(r,\tau)\eta(r,\tau)drd\tau \quad \forall\eta\in\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(\sigma^T),\end{aligned}$$

pradinę $U(r,0)=u_{z0}(r)$ ir srauto (5_3) sąlygas.

(5) uždavinio sprendiniui gauname analogiškus rezultatus kaip ir dvimačiu atveju.

3 teorema. *Tarkime $f_z\in L_2(\sigma^T), u_{z0}\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\sigma), F\in W_2^1(0,T)$. Tada (5) uždaviniui egzistuoja vienintelis silpnasis sprendinys $\big(U,q\big)\in\mathcal{M}(\sigma^T)\times L_2(0,T)$ ir galioja įvertis*

$$\begin{aligned}&\max_{t\in[0,T]}\|U(\cdot,t)\|^2_{W_2^1(\sigma)}+\|U\|^2_{W_2^{1,1}(\sigma^T)}+\|\frac{\partial U}{\partial t}\|^2_{W_2^1(\sigma^T)}+\|q\|_{L_2(0,T)}\\ &\le c\big(\|F\|^2_{W_2^1(0,T)}+\|f_z\|^2_{L_2(\sigma^T)}+\|u_{z0}\|^2_{W_2^1(\sigma)}\big).\end{aligned}$$

Jei $u_{z0}\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\sigma)\cap W_2^2(\sigma)$, tai $U\in W_2^{2,1}(\sigma^T)$, $\dfrac{\partial U}{\partial t}\in W_2^2(\sigma^T)$ ir (5) lygtys yra patenkintos beveik visur srityje σ^T. Be to

$$\begin{aligned}&\max_{t\in[0,T]}\|U(\cdot,t)\|^2_{W_2^2(\sigma)}+\|U\|^2_{W_2^{2,1}(\sigma^T)}+\|\frac{\partial U}{\partial t}\|^2_{W_2^2(\sigma^T)}+\|q\|_{L_2(0,T)}\\ &\le c\big(\|F\|^2_{W_2^1(0,T)}+\|f_z\|^2_{L_2(\sigma^T)}+\|u_{z0}\|^2_{W_2^2(\sigma)}\big).\end{aligned}$$

4 teorema. *Tarkime $f_z(r,t)=0$, $u_{z0}\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\sigma)$ ir $F\in\mathcal{W}^1_{2,\mu}(0,\infty)$, $\mu>0$. Tada (5) uždavinio sprendiniui $\big(U,q\big)$ galioja įvertis*

$$\begin{aligned}&\exp(\gamma^*t)\int\limits_0^R\big(|U(r,t)|^2+|\frac{\partial U(r,t)}{\partial r}|^2\big)\,rdr\\ &+\int\limits_0^t\int\limits_0^R\exp(\gamma^*\tau)\big(|\frac{\partial U(r,\tau)}{\partial\tau}|^2+|\frac{\partial^2 U(r,\tau)}{\partial r\partial\tau}|^2\big)\,rdrd\tau+\int\limits_0^t\exp(\gamma^*\tau)|q^{(N)}(\tau)|^2d\tau\\ &\le c\big(\|F\|^2_{\mathcal{W}^l_{2,\mu}(0,\infty)}+\|u_{z0}\|^2_{W_2^1(\sigma)}\big).\end{aligned}$$

Čia

$$\gamma_*=\begin{cases}\min\big(1,2\mu\big), & jei\ \min\big(1,2\mu\big)<\mu_1^2,\\ \mu_1^2-\delta, & jei\ \min\big(1,2\mu\big)\ge\mu_1^2,\end{cases}$$

μ_1 yra pirmoji teigiama lygties $J_0(\mu) = 0$ Beselio funkcijai šaknis, $\delta > 0$ pakankamai mažas skaičius.

Ketvirtajame skyriuje dvimatėje begalinėje juostoje $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \in (-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}) \times \mathbb{R}\}$ analizuojamas periodinis pagal laiką antrojo laipsnio skysčių tekėjimo uždavinys

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \alpha\Delta\mathbf{u}) - \nu\Delta\mathbf{u} + \operatorname{curl}(\mathbf{u} - \alpha\Delta\mathbf{u}) + \nabla \mathrm{p} = \mathbf{f}, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Pi\times(0,2\pi)} = 0, \quad \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}(x,2\pi), \end{cases} \tag{6}$$

su periodine srauto sąlyga

$$\int\limits_{-d/2}^{d/2} u_2(x,t) = F(t), \qquad F(0) = F(2\pi). \tag{7}$$

(6), (7) uždavinio sprendinio $(\mathbf{u}(x,t), \widetilde{p}(x,t))$ ieškome Puazeilio tipo pavidalu

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}(x,t) = (0, U(x_1,t)), \\ &\widetilde{p}(x,t) = -q(t)x_2 - \int\limits_{-d/2}^{x_1} U(y,t)\frac{\partial}{\partial y}\Big(U(y,t) - \alpha\frac{\partial^2 U(y,t)}{\partial y^2}\Big)dy + p_0(t), \end{aligned}$$

čia $U(x_1,t)$ ir $q(t)$ yra periodinės pagal laiką funkcijos:

$$U(x_1,0) = U(x_1,2\pi), \qquad q(0) = q(2\pi),$$

o $p_0(t)$ - bet kokia funkcija.

Įrašius sprendinio išraišką į (6), (7) sistemą gauname atvirkštinį uždavinį intervale $(-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(U - \alpha\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}) - \nu\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = q(t), \\ U(-\frac{d}{2},t) = U(\frac{d}{2},t) = 0, \quad U(x_1,0) = U(x_1,2\pi), \\ \int\limits_{-d/2}^{d/2} U(x_1,t)dx_1 = F(t). \end{cases} \tag{8}$$

Pagrindinis šio skyriaus rezultatas:

5 teorema. *Tarkime $F \in W_2^1(0,2\pi)$ yra 2π periodinė funkcija. Tada egzistuoja vienintelis (8) uždavinio 2π-periodinis sprendinys $(U(x_1,t), q(t)) \in W_2^{2,1}((-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}) \times (0,2\pi)) \times L_2(0,2\pi)$, kuriam galioja įvertis*

$$||U||_{W_2^{2,1}((-\frac{d}{2},\frac{d}{2})\times(0,2\pi))} + ||\frac{\partial U}{\partial x_1}||_{W_2^{1,1}((-\frac{d}{2},\frac{d}{2})\times(0,2\pi))} + ||\frac{\partial^2 U_t}{\partial x_1^2}||_{L_2((-\frac{d}{2},\frac{d}{2})\times(0,2\pi))} \leq c||F||_{W_2^1(0,2\pi)}.$$

(8) uždavinio sprendinys gali būti išreikštas Furjė eilutėmis

$$\begin{aligned} U(x_1,t) &= \frac{q_0^{(c)}}{2}\varphi_0(x_1) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\big(q_n^{(c)}\varphi_n(x_1) + q_n^{(s)}\psi_n(x_1)\big)\cos(nt) + (\big(q_n^{(s)}\varphi_n(x_1) - q_n^{(c)}\psi_n(x_1)\big)\sin(nt)\Big), \end{aligned}$$

$$q(t) = \frac{q_0^{(c)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(q_n^{(c)}\cos(nt) + q_n^{(s)}\sin(nt)\big),$$

čia $\varphi_n(x_1)$, $\psi_n(x_1)$, $n = 0, 1, 2, ...$ yra šių uždavinių sprendiniai

$$\begin{cases} -n\psi_n - \alpha n\psi_n'' - \nu\varphi_n'' = 1 \\ -n\varphi_n + \alpha n\varphi_n'' + \nu\psi_n'' = 0 \\ \varphi_n(-\frac{d}{2}) = \varphi_n(\frac{d}{2}) = 0 \\ \psi_n(-\frac{d}{2}) = \psi_n(\frac{d}{2}) = 0, \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{F_0^{(c)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(F_n^{(c)}\cos(nt) + F_n^{(s)}\sin(nt)\big),$$

o koeficientai $q_n^{(c)}$, $q_n^{(s)}$ išreikšti formulėmis

$$q_n^{(c)} = \frac{a_nF_n^{(c)} + b_nn^{(s)}}{a_n^2 + b_n^2}, \quad q_n^{(s)} = \frac{a_nF_n^{(s)} - b_nF_n^{(c)}}{a_n^2 + b_n^2}.$$

Penktajame syriuje nagrinėjanas (1), (2) uždavinys begaliniame vamzdyje $\Pi = \{x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : x' \in \sigma \subset \mathbb{R}^2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, kurio skerspjūvio σ kraštas $\partial\sigma$ yra C^4 klasės.

Šioje srityje neįmanoma rasti kryptinio (1), (2) uždavinio Puazeilio tipo sprendinio, net jei pradinio greičio ir išorės jėgų vektoriai yra kryptiniai, todėl nagrinėjamas bendresnis atvejis, kai $\mathbf{u}_0$ ir $\mathbf{f}$ nepriklauso nuo koordinatės x_3:

$$\mathbf{u}_0(x) = (u_{01}(x'), u_{02}(x'), v_0(x')), \quad \mathbf{f}(x,t) = (f_1(x',t), f_2(x',t), f_3(x',t)).$$

ir (1), (2) uždavinio *Puazeilio* typo sprendinys $(\mathbf{u}(x,t), p(x,t))$ turi visas tris komponentes:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}(x,t) = (U_1(x',t), U_2(x',t), U_3(x',t)), \\ &p(x,t) = \widetilde{p}(x',t) - q(t)x_3 + p_0(t). \end{aligned} \tag{9}$$

Tariame, kad yra patenkinta būtinoji suderinamumo sąlyga

$$\int\limits_\sigma v_0(x')dx' = F(0).$$

Įrašius (9) išraiškas į (1), (2) lygtis gauname atvirkštinį uždavinį srityje $\sigma^T = \sigma \times (0,T)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\mathbf{U}' - \alpha\triangle\mathbf{U}') - \nu\triangle\mathbf{U}' + \mathrm{curl}(\mathbf{U}' - \alpha\triangle\mathbf{U}') \times \mathbf{U}' \\ \quad -U_3(\nabla(U_3 - \alpha\triangle U_3)) + \nabla\widetilde{p} = \mathbf{f}', \\ \mathrm{div}\,\mathbf{U}' = 0, \\ \mathbf{U}'|_{\partial\sigma} = 0, \quad \mathbf{U}'(x',0) = \mathbf{u}_0'(x'), \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(U_3 - \alpha\triangle U_3) - \nu\triangle U_3 + (\mathbf{U}'\cdot\nabla)(U_3 - \alpha\triangle U_3) = f_3 + q(t), \\ U_3|_{\partial\sigma} = 0, \quad U_3(x',0) = v_0(x'), \\ \int\limits_\sigma U_3(x',t)dx' = F(t), \end{cases} \tag{10}$$

čia $\mathbf{f}'(x',t) = (f_1(x',t), f_2(x',t)), \mathbf{U}'(x',t) = (U_1(x',t), U_2(x',t))$. (10) sistemoje funkcijos $\mathbf{u}_0(x')$, $\mathbf{f}(x',t)$ ir $F(t)$ yra žinomos, o $\mathbf{U}(x',t)$, $\widetilde{p}(x',t)$ ir $q(t)$ ieškomos.

Tarkime $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ yra aprėžta sritis. Apibrėšime funkcijų erdvę

$$\mathring{\mathcal{X}}(\sigma) = \{u : u \in \mathring{W}_2^1(\sigma), \nabla(u - \alpha\Delta u) \in L_2(\sigma)\},$$

su norma $\|u\|^2_{\mathring{\mathcal{X}}(\sigma)} = \|u\|^2_{W_2^1(\sigma)} + \|\nabla(u - \alpha\Delta u)\|^2_{L_2(\sigma)}$.

Analogiškai dvimačiams vektoriams naudojama erdvė

$$\mathring{\mathcal{Y}}(\sigma) = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathring{W}_2^1(\sigma), \operatorname{curl}(\mathbf{u} - \alpha\Delta\mathbf{u}) \in L_2(\sigma), \operatorname{div}\mathbf{u} = 0\},$$

su norma $\|\mathbf{u}\|^2_{\mathring{\mathcal{Y}}(\sigma)} = \|\mathbf{u}\|^2_{W_2^1(\sigma)} + \|\operatorname{curl}(\mathbf{u} - \alpha\Delta\mathbf{u})\|^2_{L_2(\sigma)}$.

Tuo atveju, kai srities σ kraštas $\partial\sigma \in C^3$, erdvės $\mathring{\mathcal{X}}(\sigma)$ ir $\mathring{\mathcal{Y}}(\sigma)$ yra ekvivalenčios erdvei $W_2^3(\sigma) \cap \mathring{W}_2^1(\sigma)$.

Įvedame erdves srityje $\sigma \times (0, T)$:

$$\mathring{\mathcal{W}}(\sigma^T) = \{u : D_x^\alpha u \in L_2(\sigma^T), |\alpha| \leq 3, \frac{\partial}{\partial t}u \in L_2(\sigma^T), \nabla\frac{\partial}{\partial t}u \in L_2(\sigma^T), u|_{\partial\sigma} = 0\},$$

su norma $\|u\|^2_{\mathring{\mathcal{W}}(\sigma^T)} = \sum\limits_{|\alpha|\leq 3} \|D_x^\alpha u\|^2_{L_2(\sigma^T)} + \|\frac{\partial}{\partial t}u\|^2_{L_2(\sigma^T)} + \|\nabla\frac{\partial}{\partial t}u\|^2_{L_2(\sigma^T)}$ ir

$$\mathring{\mathcal{V}}(\sigma^T) = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathring{\mathcal{W}}(\sigma^T),\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0\}.$$

Disertacijoje sukonstruojamos specialios bazės erdvėse $\mathring{\mathcal{X}}(\sigma)$ ir $\mathring{\mathcal{Y}}(\sigma)$. Uždavinys sprendžiamas Galiorkino aproksimacijų metodu.

Apibrėžimas.(10) *uždavinio silpnuoju sprendiniu vadiname porą* $(\mathbf{U}, q) = (\mathbf{U}', U_3, q) \in \mathring{\mathcal{V}}(\sigma^T) \times \mathring{\mathcal{W}}(\sigma^T) \times L_2(0, T)$, *tenkinančią pradinę sąlygą* $\mathbf{U}(x', 0) = \mathbf{u}_0(x')$, *srauto sąlygą*

$$\int\limits_\sigma U_3(x', t)dx' = F(t)$$

ir integralinę tapatybę

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^t\int\limits_\sigma (\frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\eta} + \alpha\nabla\frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{U}\cdot\nabla\boldsymbol{\eta})dx'd\tau + \nu\int\limits_0^t\int\limits_\sigma \nabla\mathbf{U}\cdot\nabla\boldsymbol{\eta}dx'd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_\sigma (\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\eta}dx'd\tau \\
&+\alpha\int\limits_0^t\int\limits_\sigma (\mathbf{U}\cdot\nabla)\boldsymbol{\eta}\cdot\triangle\mathbf{U}dx'd\tau - \alpha\int\limits_0^t\int\limits_\sigma (\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla)\mathbf{U}\cdot\triangle\mathbf{U}dx'd\tau = \int\limits_0^t\int\limits_\sigma q\eta_3 dx'd\tau \\
&+\int\limits_0^t\int\limits_\sigma \mathbf{f}\cdot\boldsymbol{\eta}dx'd\tau \quad \forall\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta}', \eta_3) \in \mathring{W}_2^{1,0}(\sigma^T) \text{ kai } \operatorname{div}\boldsymbol{\eta}' = 0,\ \forall \mathrm{t} \in [0, \mathrm{T}].
\end{aligned}$$

Skyriaus rezultatai apibendrinti teoremoje.

6 teorema. *Tarkime* $\partial\sigma \in C^4$, $\mathbf{u}_0', v_0 \in W_2^3(\sigma) \cap \mathring{W}_2^1(\sigma)$, $F \in W_2^1(0, T)$, $\mathbf{f}' \in L_2(\sigma^T)$, $\operatorname{curl}\mathbf{f}' \in L_2(\sigma^T)$, $f_3 \in W_2^{1,0}(\sigma^T)$ *ir patenkinta būtinoji suderinamumo sąlyga*

$$F(0) = \int\limits_\sigma v_0(x')dx'.$$

Tarkime duomenys tenkina sąlygas

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{f}'\|^2_{L_2(\sigma^T)} + \|\operatorname{curl}\mathbf{f}'\|^2_{L_2(\sigma^T)} + \|\mathbf{u}_0'\|^2_{\mathring{\mathcal{Y}}(\sigma)} \leq \mu_0\delta_0^2, \\
\|F\|^2_{W_2^1(0,T)} + \|f_3\|^2_{W_2^{1,0}(\sigma^T)} + \|v_0\|^2_{\mathring{\mathcal{X}}(\sigma)} \leq \mu_0\delta_0^2,
\end{aligned}$$

μ_0 *konstanta (žr. disertacijoje),* δ_0 *pakankamai mažas:*

$$C_3\delta_0 \leq 1.$$

Tuomet egzistuoja vienintelis (10) *uždavinio silpnasis sprendinys* $(\mathbf{U}', U_3, q) \in \mathring{\mathcal{V}}(\sigma^T) \times \mathring{\mathcal{W}}(\sigma^T) \times L_2(0,T)$, *kuriam galioja įvertis*

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]} \big(\|\mathbf{U}'\|^2_{\mathring{\mathcal{Y}}(\sigma)} + \|U_3\|^2_{\mathring{\mathcal{X}}(\sigma)}\big) + \|\mathbf{U}'\|^2_{\mathring{\mathcal{V}}(\sigma^T)} + \|U_3\|^2_{\mathring{\mathcal{W}}(\sigma^T)} + \|q\|^2_{L_2(0,T)} \\
&\leq c\big(\|\mathbf{f}'\|^2_{L_2(\sigma^T)} + \|\mathrm{curl}\,\mathbf{f}'\|^2_{L_2(\sigma^T)} + \|\mathbf{u}_0'\|^2_{\mathring{\mathcal{Y}}(\sigma)} \\
&+\big(\|f_3\|^2_{W_2^{1,0}(\sigma^T)} + \|v_0\|^2_{\mathring{\mathcal{X}}(\sigma)} + \|F\|^2_{W_2^1(0,T)}\big)\times \\
&\times\big(1 + \|f_3\|^2_{W_2^{1,0}(\sigma^T)} + \|v_0\|^2_{\mathring{\mathcal{X}}(\sigma)} + \|F\|^2_{W_2^1(0,T)}\big)\big).
\end{aligned}$$

Ieškant aproksimuojančių sprendinio įverčių įrodoma, kad greičio vektoriaus komponentė $\mathbf{U}'$ yra antrinė lyginant su U_3 komponente.

IŠVADOS

Antrojo laipsnio skysčių tekėjimo uždavinys su papildomai užduota srauto sąlyga išnagrinėtas trijose skirtingose srityse:

- dvimatėje begalinėje juostoje,
- trimačiame begaliniame sukimosi cilindre,
- trimačiame begaliniame vamzdyje su bet kokiu skerspjūviu.

Pirmais dviem atvejais įrodytas kryptinio Puazeilio tipo sprendinio egzistavimas ir rastas sąryšis tarp srauto ir slėgio gradiento.

Analogiški rezultatai gauti periodinėje pagal laiką begalinėje juostoje.

Parodyta, kad begaliniame trimačiame vamzdyje, su bet kokiu skrspjūviu, kryptinis Puazeilio tipo sprendinys neegzistuoja net jei pradiniai duomenys yra kryptiniai. Darbe įrodyta, kad esant mažiems pradiniams duomenims egzistuoja vienintelis uždavinio sprendinys, priklausantis nuo visų trijų komponenčių $\big(u_1(x_1,x_2,t),\, u_2(x_1,x_2,t), u_3(x_1,x_2,t)\big)$.

APROBACIJA

Disertacijoje gauti rezultatai buvo pristatyti šiuose renginiuose:

- tarptautinėje konferencijoje "Parabolic and Navier-Stokes Equations" (Będlewo, Lenkija, 2012, Rugsėjo 2 - 8),
- tarptautinėje konferencijoje "Regularity Aspects of Partial differential equations" (Będlewo, Lenkija, 2010, rugsėjo 5 - 11),
- Lietuvos matematikų draugijos 51-ojoje konferencijoje (Šiauliai, 2010, birželio 17 - 18),
- doktorantų ir magistrantų 15-oje konferencijoje IVUS 2010 (Kaunas, 2010, gegužės 13),
- tarptautinėje konferencijoje "Differential equations and their applications" (Panevėžys, 2009, rugsėjo 10 - 12),
- Lietuvos matematikų draugijos 50-ojoje konferencijoje (Vilnius, 2009, birželio 18 - 19),
- Vilniaus universiteto, Matematikos ir Informatikos fakulteto seminaruose "Diferencialinės lygtys" (Vilnius, 2009 - 2012),
- Matematikos ir Informatikos instituto seminaruose "Diferencialinės lygtys ir jų taikymai" (Vilnius, 2007 - 2009).

PUBLIKACIJOS DISERTACIJOS TEMA

1. Klovienė N., Pileckas K., The second grade fluid flow problem in an infinite pipe, *Asymptotic analysis*, (2012) (priimtas spaudai).
2. Klovienė N., Pileckas K., Nonstationary Poiseuille type solutions for the second grade fluid flow, *Lithuanian Mathematical Journal*, **52** (2), 155-171 (2012).
3. Klovienė N., On a third order initial boundary value problem in a plane domain, *Nonlinear Analysis: Modeling and Control*, **17** (3), 312-326 (2012).
4. Klovienė N., Poiseuille type solution of second grade fluid, *15-tos doktorantų ir magistrantų konferencijos IVUS 2010 darbai*, 69-73 (2010).
5. Klovienė N., Periodinis pagal laiką antrojo laipsnio skysčių tekėjimas begalinėje juostoje, *Lietuvos Matematikos Rinkinys, LMD darbai*, **50**, 30-35 (2009).

CITUOTA LITERATŪRA

1. Bandell R., Rajagopal K.R., Galdi G.P., On some unsteady motions of fluids of second grade, *Arch. Mech.*, **47**, 661-676 (1995).
2. Beirao da Veiga H., On time-periodic solutions of the Navier-Stokes equations in an unbounded cylindrical domains. Lerays problem for periodic flows, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **178** (3), 301-325 (2005).
3. Buisuioc A.V., Ratiu T.S., The second grade fluid and average Euler equations with Navier-slip boundary conditions, *Nonlinearity*, **16**, 1119-1149 (2003).
4. Cioranescu D., Girault V., Weak and classical solution of family of second grade fluids, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **32** (2), 317-335 (1997).
5. Cioranescu D., Quazar E.H., Existence and uniqueness for fluids of second grade, *Note CRAS*, **298** (1), 285-287 (1984).
6. Cioranescu D., Quazar E.H., Existence and uniqueness for fluids of second grade, *Nonlinear Partiel Differential Equations, College de France Seminar*, Pitman, **109**, 178-197 (1984).
7. Dunn J.E., Fosdick R.L., Thermodynamics, stability and boundedness of fluids of complexity two and fluids of second grade, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **56**, 191-252 (1974).
8. Galdi G.P., Pileckas K., Silvestre A., On the unsteady Poiseuille flow in a pipe, *Zeitschrift fur angew. Mathematik und Physik*, **58** (6), 994-1007 (2007).
9. Galdi G.P., Robertson A.M., The relation between flow rate and axial pressure gradient for time-periodic Poiseuille flow in a pipe, *J. Math. Fluid Mech.*, **7** (2), 215-223 (2005).
10. Galdi G.P., Sequeira A., Further existence results for classical solution of the equation of a second grade fluid, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **128**, 297-312 (1994).
11. Galdi G.P., Grobbelaar-Van Dalsen M., Sauer N., Existence and uniqueness of classical solution of the equation of motion for second grade fluids, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **124**, 221-237 (1993).
12. Oskolkov A.P., On the solvability in the large of the first boundary value problem for a third order quasilinear system encountered in the investigation of the motion of a viscous fluid, *J. Soviet Math.*, **3**, 508-521 (1975).
13. Oskolkov A.P., On some model nonstationary systems in the theory of non-Newtonian fluids, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **127**, 37-66 (1975).
14. Oskolkov A.P., The uniqueness and global solvability of boundary value problems for the equations of motion for aqueous solutions of polymers, *Zap. Nauch. Sem. Leningrad Otdel. Math. Inst. Steklov (LOMI)*, **38**, 98-136 (1973).
15. Pileckas K., Navier-Stokes system in domains with cylindrical outlets to infinity. Leray's problem, *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, **4** (8), 445-647 (2007).

16. Pileckas K., Existence of solutions with the prescribed flux of the Navier-Stokes system in an infinite pipe, *J. Math. Fluid Mech.*, **8** (4), 542-563 (2006).

17. Pileckas K., On behavior of nonstationary Poiseuille solutions as $t \to \infty$, *Siberian Math. J.*, **46** (4), 890-900 (2005).

18. Pileckas K., Keblikas V., On the existence of nonstationary Poiseulle solution, *Siberian Math. J.*, **46** (3), 514-526 (2005).

19. Pileckas K., Sequeira A., Videman J.H., Steady flows of viscoelastic fluids in domains with outlets to infinity, *Journal of Mathematical fluid Mechanics*, **2** (3), 185-218 (2000).

20. Pileckas K., Sequeira A., Videman J.H., A note on steady flows of non-newtonian fluids in channels and pipes, *EQUADIFF-95 World Scientific*, 458-467 (1998).

21. Truesdell C., Noll W., *The nonlinear field theories of mechanics*, Handbuch der Physik, **3** (3), (1965).

SUMMARY

The second grade fluid flow problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \alpha\Delta\mathbf{u}) - \nu\Delta\mathbf{u} + \operatorname{curl}(\mathbf{u} - \alpha\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla\widetilde{p} = \mathbf{f}, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}|_{S^T} = 0, \quad \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x), \\ \int\limits_\sigma u_n dx' = F(t) \end{cases}$$

was studied in three different unbounded domains:

- the two-dimensional channel,
- the three-dimensional axially symmetric pipe,
- the three-dimensional pipe with an arbitrary cross section.

In the first two cases the existence of a unique unidirectional Poiseuille type solution is proved and the relation between the flux of the velocity field and the pressure drop (the gradient of the pressure) is found.

The analogous results were obtained for the time periodic problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \alpha\Delta\mathbf{u}) - \nu\Delta\mathbf{u} + \operatorname{curl}(\mathbf{u} - \alpha\Delta\mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla\widetilde{p} = \mathbf{f}, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}|_{S^T} = 0, \quad \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}(x,2\pi) \\ \int\limits_\sigma u_n dx' = F(t), \quad F(0) = F(2\pi) \end{cases}$$

in the two-dimensional channel.

It is shown that in the three-dimensional pipe with an arbitrary cross section the unidirectional solution does not exists even if data are unidirectional. However, for sufficiently small data in this case exists a unique solution having all three components $\big(u_1(x_1,x_2,t), u_2(x_1,x_2,t), u_3(x_1,x_2,t)\big)$ of the velocity field $\mathbf{u}$ and the velocity components $\big(u_1,u_2\big)$ perpendicular to the x_3-axis of the cylinder are secondary comparing with u_3.

INFORMACIJA APIE AUTORĘ

Gimimo data ir vieta:

1982 m. balandžio 5 d., Šiauliai

Išsilavinimas:
- Doktorantūros studijos (Vilniaus universitetas, 2012)
- Matematikos magistras, mokytojas (Šiaulių universitetas, 2006)
- Matematikos bakalauras (Šiaulių universitetas, 2004)

Darbo patirtis:
nuo 2005 m. - dėstytoja asistentė, Matematikos katedroje, Šiaulių universitete
2004 - 2005 m. - matematikos mokytoja, Šiaulių Juliaus Janonio gimnazijoje
2004 - 2005 m. - matematikos mokytoja, Šiaulių Romuvos vidurinėje mokykloje

Nuoširdžiai dėkoju savo moksliniam vadovui profesoriui Konstantinui Pileckui už jo rūpestį ir laiką doktorantūros studijų metais. Esu be galo dėkinga už jūsų neišsenkančią kantrybę dirbant su manimi.

Savo dėkingumą reiškiu visiems Vilniaus universiteto, Matematikos ir Informatikos fakulteto darbuotojams už bendradarbiavimą.

Ačiū tariu savo kolegoms iš Šiaulių universiteto, Matematikos ir Informatikos fakulteto už palaikymą ir įkvėpiančias diskusijas.