VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS METODIKOS KATEDRA

Inga Brasel

DARBO PAVADINIMAS

Bendroji pusiausvyra ekonominiuose modeliuose.

Vadovas
doc. dr. Antanas Apynis

Leidžiu ginti: ____________________
(Vadovo parašas)

VILNIUS 2009

TURINYS

ĮVADAS

Vienas iš svarbiausių ekonomikos uždavinių yra racionalus ūkio organizavimas. Dėl ribotų resursų, technologinių galimybių tenka pasirinkti vieną ar kitą jų panaudojimo variantą. Nagrinėjant šią problemą matematiškai, sudaromi įvairūs ekonomikos modeliai (matematiniai uždaviniai), o jiems spręsti dažniausiai taikomi optimizavimo metodai pirmajame darbo skyriuje.

Ekonominės veiklos dalyvių interesai paprastai apibūdinami tikslo funkcija. Pavyzdžiui, gamintojui rūpi gauti kuo didesnį pelną, vartotojui – pasiekti, kad parinktas prekių rinkinys būtų naudingiausias, pirkėjui – kuo pigiau nusipirkti rūpimą gėrybių rinkinį.

Bendrosios pusiausvyros idėja ekonomikos teorijoje gimė XIX a. Ji padėjo paaiškinti bendrą rinkos ekonomikos mechanizmą. Šiandien bendrosios pusiausvyros koncepcijos prasiskverbė beveik į visas ekonomikos teorijos sritis. Neatskiriamas bendrosios pusiausvyros idėjos bruožas buvo ir yra fundamentalus jos matematinis pagrindimas.

Baigiamajame darbe

Pirmame darbo skyriuje *Vartotojo elgsena* nagrinėjama preferencijos sąvoka, naudingumas ir jo reiškimas funkcija. Šios funkcijos atskiras atvejis – Kobo ir Daglaso naudingumo funkcija.

Antrajame skyriuje apibrėžiamos bendrosios pusiausvyros sąvokos. Vienas svarbiausių ekonomikos mokslo uždavinių yra ekonominės pusiausvyros sąlygų nustatymas ir taip pat rinkos pusiausvyros kainų nustatymas.

Trečiame darbo skyriuje išnagrinėtas mainų ekonomikos konkurencinės pusiausvyros radimo uždavinys taikant Edžvorto dėžę.

1. Vartotojo elgsena.

1.1. Preferencija ir naudingumas. Šiuolaikinėje ekonomikoje subjektyvios vartotojų preferencijos vartojamų gėrybių rinkinių $x = (x_1; x_2; ...; x_n)$ aibėje X. Šio rinkinio komponentės gali būti ir teigiamos, ir neigiamos. Kai $x_i > 0$ galima sakyti, kad vartotojas gavo tam tikrą kiekį vartojimui, o neigiamos komponentės reikšmę galima aiškinti, kaip vartotojo prekės atidavimą. Vartotojų preferencijos yra išreiškiamos binariaisiais preferencijos sąryšiais $\succeq$ aibėje $X \subset R_n$ tenkinančias sąlygas:

(1) *Refleksyvumo savybė*. Kiekvienas vartotojo rinkinys $x \succeq x$, kai $x \in X$.

(2) *Tranzityvumo savybė*. Jeigu $(x \succeq y,\ y \succeq z) \Rightarrow x \succeq z$, kai $x, y, z \in X$

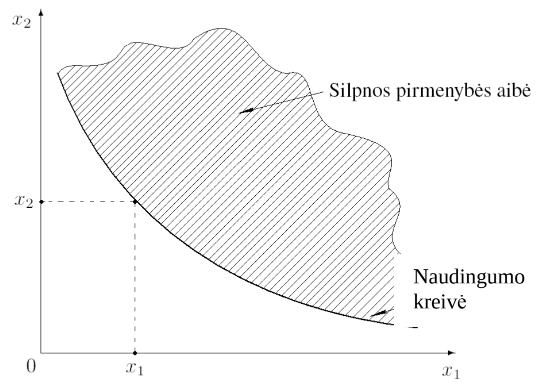
(3) *Apibrėžtumo savybė*. Esant bet kokiems rinkiniams $x, y \in X \Rightarrow x \succeq y$ arba $y \succeq x$ arba $x \succeq y$ ir $y \succeq x$, tada vartotojas yra abejingas.

1.1 Apibrėžimas. *Griežtos preferencijos sąryšiu* vadinama sąlygą (žymėsime $x \succ y$), jei $x \succeq y$ ir $y \succeq x$, kai $x, y \in X$.[1]

Jei vartotojas teikia griežtą preferenciją vienam iš rinkinių, tuomet laikoma, kad vartotojas apibrėžtas griežtos preferencijos sąryšiu $x \succ y$, o sąryšis $x \succeq y$, kai $x, y \in X$ vadinamas negriežtos (silpnos) preferencijos sąryšiu.

1.2 Apibrėžimas. Jei bet kokiems vartotojo rinkiniams $x, y \in X$ galioja sąlygos $x \succeq y$ ir $y \succeq x$, tai sąryšį (žymėsime $x \sim y$) vadinsime *ekvivalentumo (naudingumo funkcijos lygio) sąryšiu.* Sakoma, kad vartotojui abu rinkiniai yra lygiaverčiai.

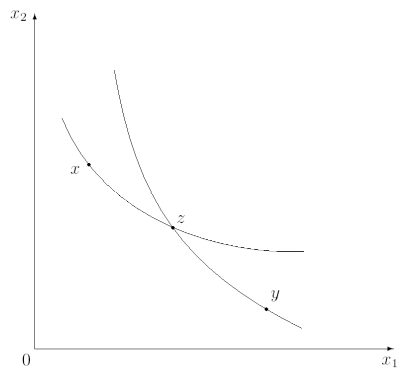
Vartotojo preferencijas yra patogu vaizduoti grafiškai. Pasirenkame kurį nors vartojimo rinkinį (x_1, x_2) ir užbrūkšniuojame visus silpnos preferencijos vartotojo rinkinius. Gauname silpnos preferencijos vartotojo rinkinių aibę. Rinkiniai, esantys jos krašte, kuriuos vartotojas mėgsta tiek pat kaip rinkinį (x_1, x_2) – sudaro naudingumo funkcijos lygio kreivę.



1.1 pav. Silpnos preferencijos aibė ir naudingumo kreivė.

Naudingumo kreivės rinkiniai vartotojui teikia vienodą pasitenkinimą, tačiau tie rinkiniai nebūtinai yra įperkami. Todėl galima teigti, jog naudingumo kreivės atspindi vartotojo preferencijas. Kadangi kreivėje yra rinkiniai, kurie teikia vienodą naudingumą, tai galime suprasti, kad žemiau kreivės esančių rinkinių naudingumas mažesnis, nes vartojama mažiau prekių, o rinkiniai esantys virš naudingumo kreivės bus teikiantys daugiau naudingumo, nes ten vartojimas didesnis, ir virš kreivės esantiems rinkiniams vartotojas teikia didesnę preferenciją. Taigi nestipriai dešiniau kreivės esantiems rinkiniams vartotojas teikia silpnas preferencijas ir todėl aibė virš kreivės vadinama silpnos preferencijos aibe.

Svarbi naudingumo kreivių savybė yra ta, kad skirtingus preferencijos lygius vaizduojančios naudingumo kreivės nesikerta. Tarkime, kad $x \succ y, x \sim z, z \sim y, \textit{tai } x \sim y$ tai prieštarauja 3 sąlygai.



1.2 pav. Naudingumo kreivių susikirtimų negalimumas.

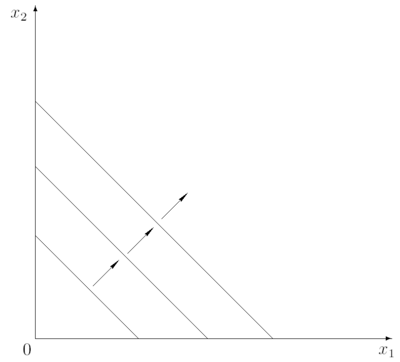
1.3 Apibrėžimas. Funkcija, $u(x)$ apibrėžta sutvarkytoje aibėje X, vadinama *naudingumo funkcija*, jei bet kuriems vartotojo gėrybių rinkiniams $x, y \in X$

$$x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y) .[2]$$

Matematikoje aibė visų porų (x_1, x_2), tokių, kad $U(x_1, x_2)$ reikšmė lygi konstantai, vadinama *lygio aibe*. Kiekvienai skirtingai konstantos reikšmei gausime skirtingą naudingumo funkcijos lygio kreivę. Lygio kreivių aibė vadinama *žemėlapiu*.

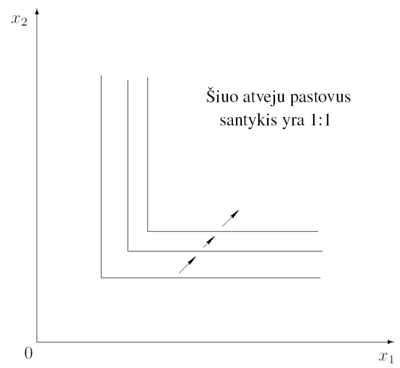
Naudingumo funkcijos $U(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ lygio kreivė apibrėžiama kaip aibė visų porų (x_1, x_2), kurių $x_1 \cdot x_2 = k$, kur k yra kokia nors konstanta. Iš to išplaukia, kad naudingumo funkcijos lygio kreivės lygtis yra $x_2 = \frac{k}{x_1}$.

Jei vartotojas vieną prekę norėtų keisti kita, tam tikru pastoviu santykiu. Tuomet funkcijos nuolydis yra $k = -1$ ir naudingumo funkcijos lygio kreivė įgaus tiesės pavidalą $x_2 = -x_1 + C$, $C = const$. Šiuo atveju preferencijos užrašomos tokiu naudingumo funkcijos pavidalu: $U(x_1, x_2) = a \cdot x_1 + b \cdot x_2$, čia a ir b yra teigiami skaičiai, kurie matuoja vienos ar kitos prekės naudingumą vartotojui ir nusako jų keitimo santykį. Kreivės nuolydis nusakomas santykiu $-\frac{a}{b}$.



1.3 pav. Naudingumo funkcijos lygio kreivės, kurių nuolydis -1.

Prekės, kurios visada vartojamos kartu ir vartojamos pastoviu santykiu. Tam tikra prasme, prekės papildo viena kitą. Didinant vienos prekės kiekį, kitos pasikeičia santykinai Bandydami tai pavaizduoti grafiškai, gausime L formos naudingumo funkcijos lygio kreives.

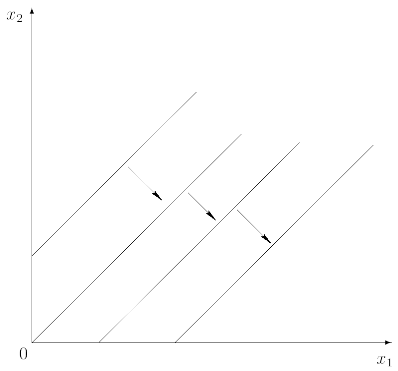


1.4 pav. Naudingumo funkcijos lygio L formos kreivės.

Preferencijas apibudinanti naudingumo funkcija turi tokį pavidalą

$$U(x_1, x_2) = \min\{a \cdot x_1; b \cdot x_2\}, \text{ čia } a, b > 0$$

rodantys prekių vartojimo santykį. Šiuo atveju kiekviena naudingumo funkcijos lygio kreivė gaunama lygiagrečiai pastumiant kitą naudingumo funkcijos lygio kreivę. Naudingumo funkcijos lygio kreivės pavidalas: $x_2 = k - f(x_1)$, čia k yra skirtinga konstanta kiekvienai naudingumo funkcijos lygio kreivei. Kuo didesnė k reikšmė, tuo aukštesnė naudingumo funkcijos lygio kreivė.



1.5 pav. Naudingumo funkcijos lygio kreivės su teigiamu nuolydžiu.

Iš naudingumo funkcijos lygio kreivės išplaukia, kad naudingumo funkcija yra:

$$U(x_1, x_2) = k = f(x_1) + x_2.$$

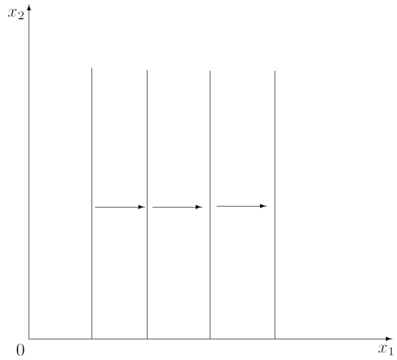
Ši naudingumo funkcija yra tiesinė antrosios prekės atžvilgiu ir, galimas dalykas, netiesinė pirmosios prekės atžvilgiu. Iš lotynų kalbos kilęs *kvazitiesinio* naudingumo pavadinimas, reiškiantis "iš dalies" tiesinį naudingumą. Kvazitiesinio naudingumo funkcijos:

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2;$$

$$U(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2; \text{ ir pan.}$$

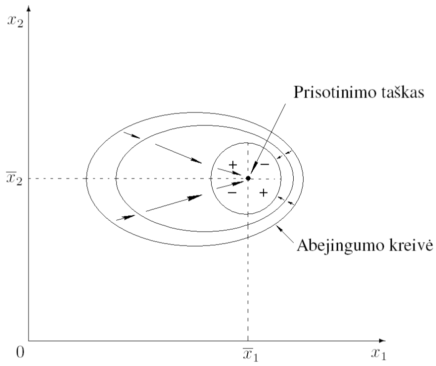
Išnagrinėkime atvejį, kai prekės, kurios vartojamos kartu, tačiau vartotojas vieną iš jų laiko vertingesne už kitą. Jis pakeistų mažiau vertingos prekės didesnį kiekį į mažesnį vertingesnės prekės kiekį tam tikru pastoviu santykiu. Tuomet didėjant vienos prekės vartojimui reiktų didinti kitos prekės vartojimą. Šiuo atveju padidėjus abiejų prekių vartojimui, bendras vartotojo pasitenkinimas išlieka tame pačiame lygyje. Naudingumo funkcijos lygio kreivės įgauna tiesės kylančios iš kairės į dešinę formą. O didesnį naudingumą atspindinti didesnių preferencijų aibė būtų dešiniau ir žemiau tokios naudingumo funkcijos kreivės, kai kreivės nuolydis $k > 0$.

Dar apžvelgiamos prekės, kurias vartotojas vartoja, kartu, tačiau jam visai nesvarbus antrosios prekės kiekis. Grafiškai tokių prekių naudingumo funkcijos lygio kreivių žemėlapis atrodo kaip vertikaliųjų tiesių aibė, t.y. $x_1 = C$, $C = const$.



1.6 pav. Naudingumo funkcijos lygio kreivės su nuliniu nuolydžiu.

1.4 Apibrėžimas. Preferencijų sąryšio, tenkinančio visas (1) – (3) sąlygas, aibėje X maksimalus (vertingiausias) elementas yra vadinamas *prisotinimo tašku.* Jei aibė neturi prisotinimo taško, tai sakoma, kad aibė X turi neprisotinimo savybę.



1.7 pav. Prisotinimo taškas ir naudingumo funkcijos lygio kreivės.

Tai yra tokia situacija, kai vartotojui geriausias yra vienas konkretus rinkinys, tačiau sudaryti rinkiniai gali būti įvairiai nutolę nuo geriausiojo rinkinio, o vienodo naudingumo rinkiniai išsidėsto aplink tą geriausiąjį rinkinį. Šiuo atveju negalioja naudingumo funkcijos lygio kreivių savybė, kad toliau nuo koordinačių pradžios esančios naudingumo funkcijos lygio kreivės yra didesnio naudingumo – tiksliau, ši savybė galioja tik naudingumo funkcijos lygio kreivių atskiriems segmentams (nukreiptiems link koordinačių pradžios). Tokios naudingumo funkcijos lygio kreivės yra uždarų apkritimų arba elipsių formos kurių spindulys mažėja artėjant link geriausiojo rinkinio taško.

1.2 Bendrasis ir ribinis naudingumas.

1.5 Apibrėžimas. Preferencijų sąryšiai $\langle \succ, \succeq, \sim \rangle$ aibėje $X \subset R^n$ yra tolydūs, jei bet kokiems rinkiniams $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ($x_n, y_n \in X$) galioja sąlyga $x_n \succeq y_n$, su bet kokiais n ir egzistuoja ribų $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ ir $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ preferencijos sąryšis $x \succ y$ ($x, y \in X$).[]

Labai svarbi preferencijų sąryšio charakteristika yra jo tolydumas. Pagal prasmę tolydumas interpretuojamas taip: jeigu vartotojo gėrybių rinkinys x^0 yra vertingesnis už rinkinį y^0 (žymima $x^0 \succ y^0$), tai $x \succ y$, jeigu tik $x \sim x^0$ ir $y \sim y^0$. Kitaip tariant kai pora (x, y) priklauso tam tikrai taško (x^0, y^0) aplinkai u^0.

1.1 Teorema. Jei aibėje $X \subset R^n$ preferencijos sąryšiai yra tolydūs, tai egzistuoja juos atvaizduojanti naudingumo funkcijos lygio kreivė.[9]

Ekonomistas G. Debreu įrodė, kad naudingumo funkcijos lygio kreivės egzistuoja, jei preferencijų sąryšis yra tolydus.

1.6 Apibrėžimas. Preferencijų sąryšiai aibėje X yra *monotoniai*, jei $\forall x, y \in X : x \geq y \;\Rightarrow x \succeq y$.

1.7 Apibrėžimas. Preferencijų sąryšiai aibėje X yra *griežtai monotoniai*, jei

$$x \geq y \text{ ir } x \neq y \Rightarrow x \succ y.[4]$$

1.2 Teorema. Bet kokiems tolydiems ir monotoniniams preferencijų sąryšiams aibėje $X = R^n_+$ egzistuoja juos atvaizduojanti tolydi monotoninė naudingumo funkcijos lygio kreivė.[9]

Imame atvejus, kada prisotinimo taškas dar nėra pasiektas. Dėl preferencijų monotoniškumo naudingumo funkcijos lygio kreivių nuolydis yra neigiamas. Jeigu iš taško (x_1, x_2) einame bet kur aukštyn ir į dešinę, tai einame į geresnė padėtį. Iš geresnės padėties norėdami grįžti į naudingumo funkcijos lygio kreivės padėtį, privalome eiti arba aukštyn ir į kairę, arba žemyn ir į dešinę (vadinasi, naudingumo funkcijos lygio kreivės nuolydis privalo būti neigiamas).

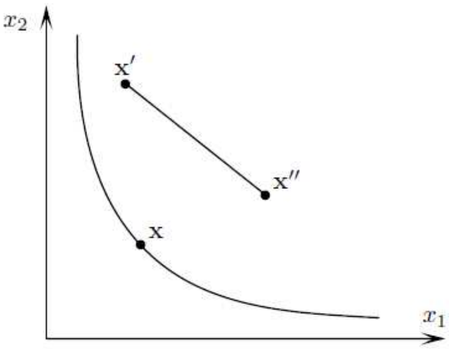
Tegul du rinkiniai vartotojui yra vienodai priimtini, t.y. $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$. Pabandysime tuos abu rinkinius „suvidurkinti“ pasirinkę svorį t, $t \in [0, 1]$. Gausime rinkinį: $(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot y_1, t \cdot x_2 + (1-t) \cdot y_2) \succeq (x_1, x_2)$. Darome prielaidą, kad „suvidurkintas“ rinkinys bus neblogesnis arba jam bus teikiama griežta preferencija abiejų kraštutinių rinkinių atžvilgiu. Geometriškai ši prielaida reiškia, kad rinkiniai, kuriems suteikiama silpna preferencija rinkinio (x_1, x_2) atžvilgiu, sudaro iškiląją aibę.

1.8 Apibrėžimas. Preferencijų sąryšiai vadinami *iškilaisiais,* jei $\forall x, y \in X$: $x \succeq y$ ir $0 \leq \alpha \leq 1$ galioja sąlyga

$$\alpha \cdot x + (1-\alpha) y \succeq y.$$

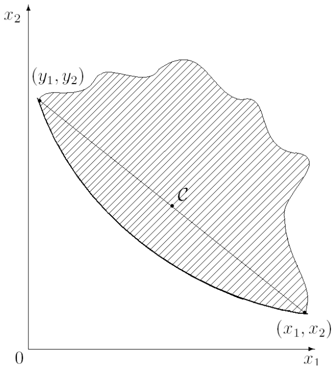
Preferencijų sąryšiai vadinami *griežtai iškilaisiais*, jei $\forall x, y \in X$: $x \succeq y$, $x \neq y$ ir $0 < \alpha < 1$ galioja sąlyga

$$\alpha \cdot x + (1-\alpha) y \succ y \,.$$

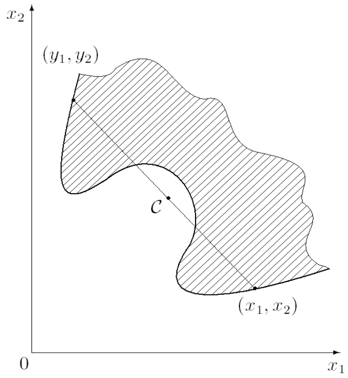


1.8 pav. Iškiloji aibė.

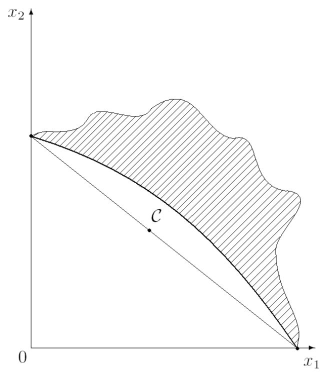
Jei iškiloje aibėje pasirinksime bet kokius du taškus ir juos sujungsime tiesės atkarpa, tai toje aibėje bus visa atkarpa. [2]



1.9 pav. Iškiloji preferencija.



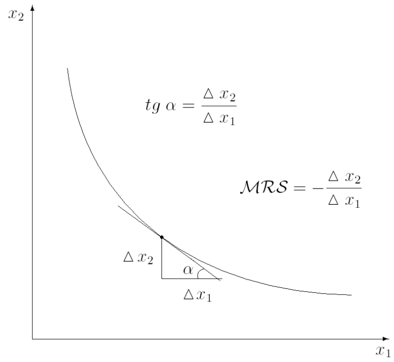
1.10 pav. Neiškiloji preferencija.



1.11 pav. Įgaubtoji preferencija.

Antrojo ir trečiojo paveikslo preferencijos rodo, kad vartotojas yra linkęs vartoti vieną iš prekių. Griežto iškilumo prielaida reiškia, kad iš dviejų rinkinių, kuriems vartotojas yra abejingas, sudarytam svertiniam vidurkiui teikiama griežta preferencija kraštinių rinkinių atžvilgiu. Iškilųjų preferencijų naudingumo funkcijos lygio kreivės gali turėti tiesias vietas, o griežtai iškilųjų preferencijų kreivės − ne. Naudingumo funkcijos lygio kreivės, kurios atspindi iškiląsias ir monotoniškas, yra vadinamos "*geros elgsenos*" naudingumo funkcijos lygio kreivėmis. Naudingumo funkcijos lygio kreivės nuolydį konkrečiame taške išreiškia santykis $-\left|\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right|$. Tai yra norma, kuria vartotojas antrą prekę nori keisti į pirmą. Todėl naudingumo funkcijos lygio kreivės nuolydis arba jo algebrinė išraiška vadinamas *ribine pakeitimo norma*

$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ dydis tuo artimesnis naudingumo funkcijos lygio kreivės nuolydžiui, kuo Δx_1 yra mažesnis.



1.12 pav. Ribinė pakeitimo norma.

MRS rodo, kokiu antros prekės kiekiu vartotojas nori sumokėti, kad papildomai galėtų suvartoti ribinį pirmos prekės kiekį. Pinigų kiekis, kuri iš tikrųjų reikia sumokėti, gali skirtis nuo to, kuri vartotojas nori mokėti. Griežtai iškilųjų naudingumo funkcijos lygio kreivių *MRS* absoliutinė reikšmė mažėja, jei padidėja x_1. Vadinasi, naudingumo funkcijos lygio kreivės pasižymi mažėjančia ribine pakeitimo norma.

Žmonės labai skirtingai elgiasi pasirinkdami prekes ir paslaugas vartoti. Jų norai ir siekiai tiek kiekio, tiek kokybės prasme labai skirtingi. Vartodami prekes ir paslaugas žmonės tenkina vienokius ar kitokius savo poreikius. Poreikio patenkinimas − tai žmogaus pasitenkinimo ar nepasitenkinimo būsena, kuria jis nori pratęsti arba nutraukti. Prekes ar paslaugos vartojimo teikiamas pasitenkinimas vadinamas *naudingumu*. Bendras prekių ar paslaugų vartojimo teikiamas pasitenkinimas vadinamas *bendruoju naudingumu*. Bendrasis naudingumas yra tam tikro prekių kiekio teikiamas pasitenkinimas. Ribinis naudingumas reiškia pasitenkinimo pasikeitimą vartojant vienu prekės vienetu mažiau ar daugiau. Jis, išmatuotas pinigais, yra maksimalus pinigų kiekis, kurį asmuo nori mokėti už papildomą prekės vienetą. Reikia aiškiai suvokti skirtumą tarp bendrojo ir ribinio naudingumo. Kalbėdami apie bendrąjį naudingumą, turime galvoje pasitenkinimą, kuris gaunamas suvartojus visą produktą. Ribinio naudingumo atveju kalbama apie pasitenkinimą, kuri suteikia paskutinio (t.y. ribinio) produkto vieneto suvartojimas. Ribinis naudingumas lygus bendrojo naudingumo ir kiekio pokyčių santykiui

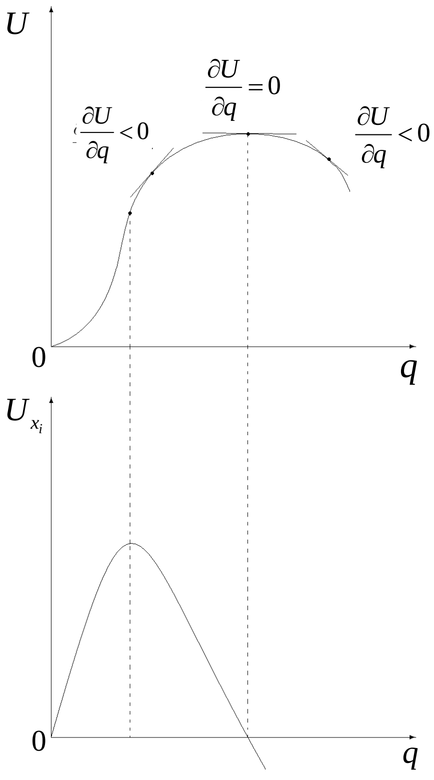
$$U_{x_i} = \frac{U_n - U_{n-1}}{q_n - q_{n-1}},$$

čia U − bendrasis naudingumas, U_{x_i} − ribinis naudingumas, q − suvartotų prekių vienetų skaičius; n − prekės vienetų seka.

Kitaip tariant ribinis naudingumas tai bendrojo naudingumo dalinė išvestinė, o bendrasis naudingumas ribinio naudingumo integralas

$$U = \int_0^n U_{x_i}\, dq \; .$$

Tam tikru periodu esant, nekintančiam vartotojo skoniui, kiekvienas vartojamo produkto vienetas teikia mažėjantį ribinį naudingumą. Šis dėsnis vadinamas *mažėjančio ribinio naudingumo dėsniu* ir jis yra teisingas, esant prielaidai, kad kitų produktų vartojimas nesikeičia. Tačiau reikia atsargiai taikyti šį dėsnį, nes gali būti eilė išimčių.[8]



1.13 pav. Bendrojo bei ribinio naudingumo kreivės.

1.3 Kobo ir Daglaso naudingumo funkcija. Ekonominėje analizėje plačiai taikoma Kobo ir Daglaso (*Charles Cobb; Paul Douglas*) naudingumo funkcija

$$U(x_1, x_2) = x_1^c \cdot x_2^d,$$

čia c ir d yra teigiami skaičiai, apibūdinantys vartotojo preferencijas.

Kiekvienos naudingumo funkcijos didėjanti monotoninė transformacija yra naudingumo funkcija, kuri vaizduoja tas pačias preferencijas kaip ir pradinė naudingumo funkcija. Viena iš galimų Kobo ir Daglaso naudingumo funkcijos monotoninių transformacijų yra

$$\ln U(x_1, x_2) = \ln(x_1^c \cdot x_2^d) = c \cdot \ln x_1 + d \cdot \ln x_2 .$$

(Natūrinis logaritmas yra monotoninė transformacija). Kita monotoninė transformacija yra

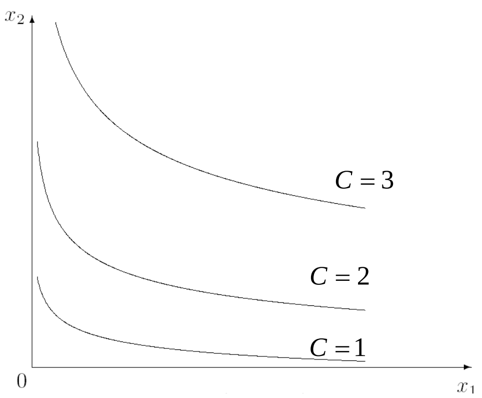
$$(U(x_1, x_2))^{\frac{1}{c+d}} = x_1^{\frac{c}{c+d}} \cdot x_2^{\frac{d}{c+d}}, \text{ čia } c > 0, d > 0 .$$

Matome, kad laipsnių rodiklių suma lygi vienetui. Tegu $a = \dfrac{c}{c+d}$; tuomet $\dfrac{d}{c+d} = 1 - a$. Nesiaurindami bendrumo galime nagrinėti Kobo ir Daglaso naudingumo funkcija, kai $c + d = 1$; tada $$U(x_1, x_2) = x_1^a \cdot x_2^{1-a},\ a \in (0;1).$$

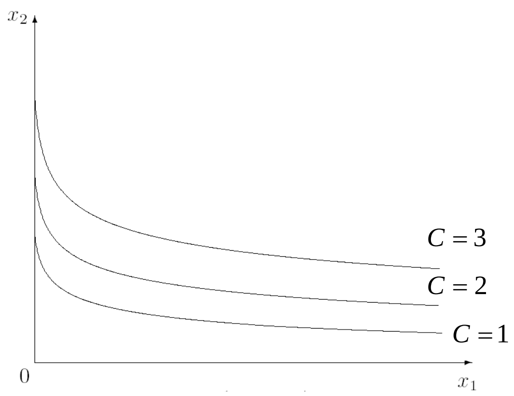
Matematikoje aibė visų porų (x_1, x_2), tokių, kad $U(x_1, x_2)$ reikšmė lygi konstantai, vadinama lygio aibe. Kiekvienai skirtingai konstantos reikšmei gaunama skirtingą lygio kreivė. Kobo ir Daglaso naudingumo funkcijos lygio kreivės lygtis yra $x_1^a \cdot x_2^{1-a} = C$, $C = const$.

Iš jos gauname $x_2 = C^{\frac{1}{1-a}} \cdot x_1^{\frac{a}{a-1}}$. Pagal uždavinio prasmę $x_1 > 0$ ir $C > 0$.

Aišku, kad funkcija $f(x_1) = C^{\frac{1}{1-a}} \cdot x_1^{\frac{a}{a-1}}$ yra teigiama ($x_1 > 0$, $C > 0$), mažėjanti (nes $\dfrac{a}{a-1} < 0$, kai $a \in (0;1)$) ir įgaubta (nes $f''(x_1) < 0$, kai $x_1 > 0$).



1.14 pav. Kobo ir Daglaso naudingumo funkcijos lygio kreivės, kai $a = \dfrac{1}{2}$.

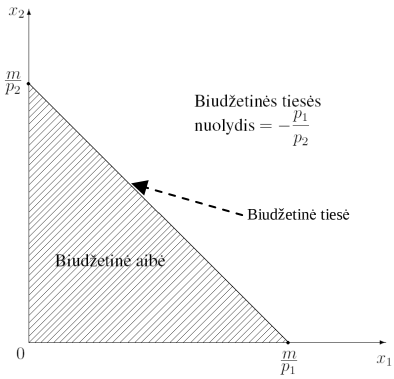


1.15 pav. Kobo ir Daglaso naudingumo funkcijos lygio kreivės, kai $a = \dfrac{1}{5}$.

Ekonomikoje vartotojas visada pasirenka geriausią gėrybių rinkinį iš jam prieinamų (įperkamų). Tokia įperkamų vartojimo rinkinių aibė, esant tam tikroms kainoms ir pajamoms vadinama *vartotojo biudžetine aibe,* ji apibrėžiama nelygybe

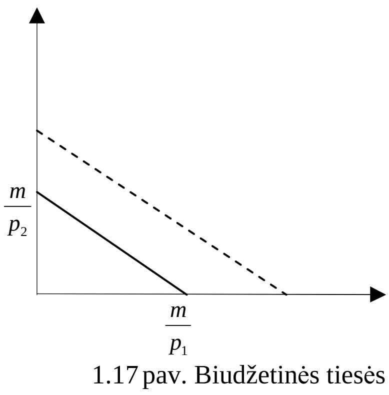
$$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \leq b\,,$$

čia x_1 – pirmos prekės kiekis, x_2 – antros prekės kiekis, $(p_1; p_2)$ – prekių vieneto kainos, b – pajamos ; be to sandaugos $p_1 \cdot x_1$ ir $p_2 \cdot x_2$ tai išleistos pinigų sumos. Pertvarkome biudžetinės aibės nelygybę ir gauname $x_2 \leq -\frac{p_1}{p_2} \cdot x_1 + \frac{b}{p_2}$. Galime pabandyti pavaizduoti grafiškai šią nelygybę laikydami, kad x_1 ir x_2 – kintamieji, o p_1, p_2, b – pastovūs dydžiai. Grafike nubrėšime biudžeto tiesę $x_2 = -\frac{p_1}{p_2} \cdot x_1 + \frac{b}{p_2}$, kurios nuolydis (krypties koeficientas) yra $-\frac{p_1}{p_2}$. Ekonomine prasme, ši tiesė yra aibė rinkinių, kurie kainuoja lygiai b . (žr. 1.16 pav.)

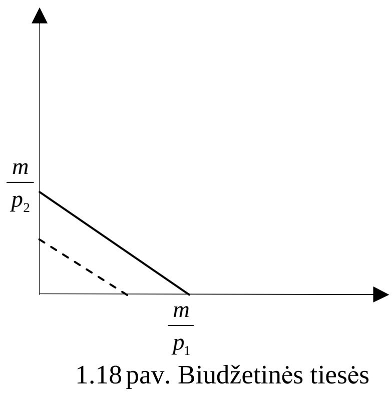


1.16 pav.

Panagrinėkime, kaip pasikeis biudžetinė aibė, kai padidinsime arba sumažinsime pajamas b . Aišku, kad didinant pajamas biudžetinė tiesė lygiagrečiai pasistumia į dešinę; analogiškai mažinant – į kairę.(žr. 1.17 pav., 1.18 pav.)

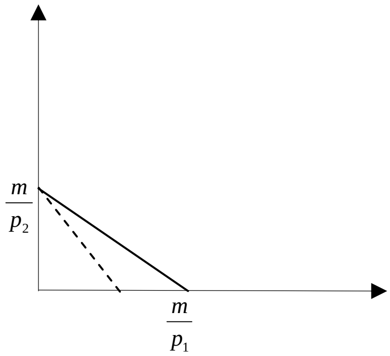


1.17 pav. Biudžetinės tiesės padėtis padidinus pajamas.

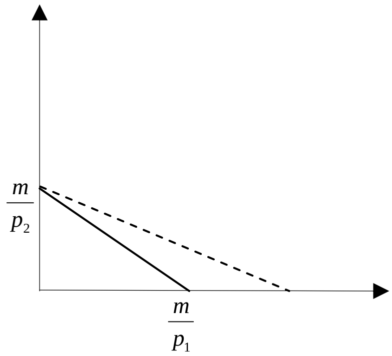


1.18 pav. Biudžetinės tiesės padėtis sumažinus pajamas.

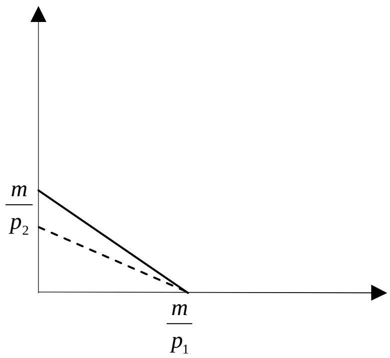
Didinant vienos vartojamos gėrybės kainą biudžetinės tiesės nuolydis pasikeičia. Ekonomine prasme tiesės nuolydis nusako prekių kiekių santykį, t.y. kiek vienos prekės vienetų reikia atiduoti už kitos prekės vienetą. (žr. 1.19 pav. – 1.24 pav.)



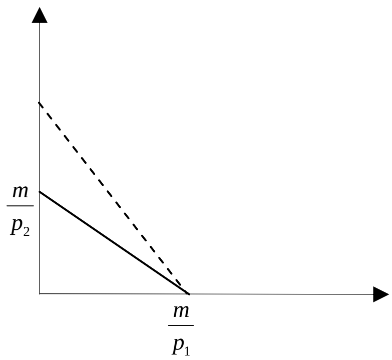
1.19 pav. Biudžetinės tiesės padėtis padidinus kainą p_1 .



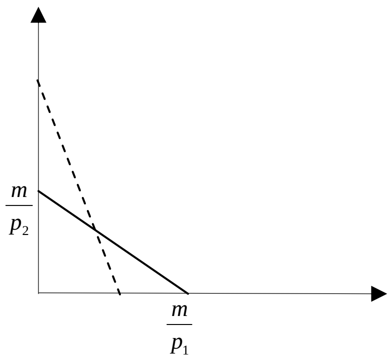
1.20 pav. Biudžetinės tiesės padėtis sumažinus kainą p_1 .



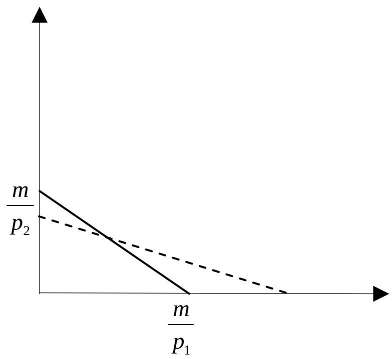
1.21 pav. Biudžetinės tiesės padėtis padidinus kainą p_2 .



1.22 pav. Biudžetinės tiesės padėtis sumažinus kainą p_2 .

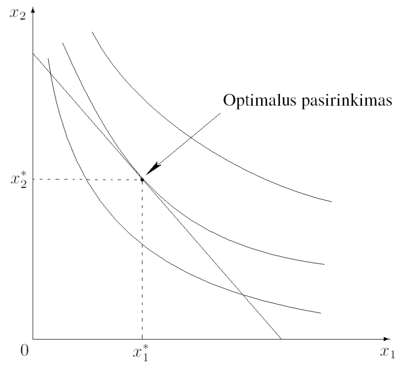


1.23 pav. Biudžetinės tiesės padėtis padidinus kainą p_1 ir sumažinus kainą p_2 ..



1.24 pav. Biudžetinės tiesės padėtis sumažinus kainą p_1 ir padidinus kainą p_2 ..

1.4 Optimalaus pasirinkimo uždavinys ir optimalumo sąlygos. Vartotojo elgseną sąlygoja jo norai ir galimybės. Norus išreiškia naudingumo funkcijos lygio kreivių žemėlapis, o galimybes – biudžetinė tiesė. Todėl pavaizduokime abu grafikus vienoje koordinačių sistemoje. Kiekvienas biudžetinės tiesės taškas rodo kokiam prekių rinkiniui vartotojas turi pakankamai pinigų. Siekdamas maksimizuoti pasitenkinimą savo pirkiniu, vartotojas pirks tokį prekių rinkinį, kuris teikia jam didžiausią naudą ir kuriam pirkti pakanka pinigų. Akivaizdu, jog tas rinkinys išreikštas naudingumo funkcijos lygio kreivės ir biudžetinės tiesės lietimosi taško koordinatėmis.



1.25 pav. Optimalus pasirinkimas.

Griežtai iškilųjų naudingumo funkcijos lygio kreivių atveju, būtina ir pakankama optimalumo sąlyga: ribinė pakeitimo norma yra lygi prekių ribinių naudingumų santykiui arba biudžetinės tiesės nuolydžiui.

$MRS_{x_1,x_2} = -\dfrac{U_1}{U_2} = -\dfrac{p_1}{p_2}$, čia U_1 –pirmos prekės ribinis naudingumas, U_2 – antros prekės ribinis naudingumas, p_1 – pirmos prekės kaina, p_2 – antros prekės kaina, $-\dfrac{p_1}{p_2}$ – biudžetinės tiesės nuolydis.

Paretą optimalumo aksioma. Sprendinys $x^* = (x_1^*; x_2^*)$ turi būti Paretą optimalus, t.y. neturi būti tokio $x = (x_1, x_2)$, $x \in X$; kad $x_i \geq x_i^*$ visiems $i \in N$ ir $x \neq x^*$.

Aksioma reiškia, kad sprendinys turi būti toks, jog jo nebūtų įmanoma pagerinti nei vienam vartotojui, kol nepabloginama kuriam nors kitam.

Panagrinėkime kaip kis Kobo ir Daglaso naudingumo funkcija. Bendrasis naudingumas užrašomas naudingumo funkcijos lygtimi: $U(x_1, x_2) = x_1^a \cdot x_2^{1-a}$; o ribiniai naudingumai skaičiuojami dalinių išvestinių pagalba $U_1 = \dfrac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} = U(x_1, x_2)_{x_1} = a x_1^{a-1} x_2^{1-a}$ ir $U_2 = \dfrac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} = U(x_1, x_2)_{x_2} = d x_1^c x_2^{d-1}$. Apskaičiuojame ribinę pakeitimo normą

$MRS_{x_1,x_2} = -\dfrac{U_1}{U_2} = -\dfrac{a x_1^{a-1} x_2^{1-a}}{(1-a)x_1^{a} x_2^{-a}} = -\dfrac{a}{1-a} \cdot \dfrac{x_2}{x_1}$, o ji savo ruožtu turi tenkinti optimalumo sąlygą $MRS_{x_1,x_2} = -\dfrac{U_1}{U_2} = -\dfrac{p_1}{p_2}$ t.y. $-\dfrac{a \cdot x_2}{(1-a) \cdot x_1} = -\dfrac{p_1}{p_2}$. Vartotojo biudžetinės tiesės lygtis $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = b$. Ieškant sprendinio (lietimosi tašką) turime išspręsti lygčių sistemą:

$$\begin{cases} -\dfrac{a \cdot x_2}{(1-a) \cdot x_1} = -\dfrac{p_1}{p_2} \\ p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = b \end{cases} \Rightarrow\ x_2 = \frac{b}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1 \ \Rightarrow\ \frac{a \cdot \left(\dfrac{b}{p_2} - \dfrac{p_1}{p_2} x_1 \right)}{(1-a) \cdot x_1} = \frac{p_1}{p_2} \ \Rightarrow\ x_1 = a \cdot \frac{b}{p_1} \ \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{b}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} \cdot a \cdot \frac{b}{p_1} = \frac{b}{p_2}(1-a) \ \Rightarrow\ \begin{cases} x_1 = a \cdot \dfrac{b}{p_1} \\ x_2 = (1-a) \cdot \dfrac{b}{p_2} \end{cases}.$$

Jeigu vartotojas vartoja x_1 pirmos prekės vienetų, tai jam kainuoja $p_1 \cdot x_1$ ir tai sudaro $\dfrac{p_1 \cdot x_1}{b}$ visų jo pajamų t.y. $\dfrac{p_1 \cdot x_1}{b} = \dfrac{p_1 \cdot a \cdot \dfrac{b}{p_1}}{b} = a$. Antrajai prekei jis išleis $1-a$ pajamų dalį. Vadinasi esant Kobo ir Daglaso naudingumo funkcijai, vartotojas kiekvienai prekei išleis pastovią savo pajamų dalį, kuri priklauso nuo šios funkcijos laipsnių rodiklių.

Panagrinėkime dabar pusiausvyra bendru atveju, kai vartotojas pasirinkdamas rinkinį $x^* = (x_1^*; x_2^*)$ maksimizuoja naudingumą, t.y. atsiduria pusiausvyros būklėje. Paimkime bendrą atvejį, kada vartotojo rinkinį sudaro n prekių ir paslaugų, kurių kainos $p_1, p_2, ..., p_n$. Vartotojas turi b pajamų. Formaliai turime maksimizuoti naudingumo funkciją $U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ esant biudžeto apribojimui $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + ... + p_n \cdot x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i = b$.

Spręsdami šį uždavinį pasinaudosime Lagranžo daugikliais, kurių pagalba gausime Lagranžo funkciją (ši funkcija apjungia tikslo funkciją i apribojimą). Tam tikslui pertvarkome apribojimą

$$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + ... + p_n \cdot x_n - b = 0$$

Sudarome Lagranžo funkciją: $L = U - \lambda(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + ... + p_n \cdot x_n - b)$

Lagranžo teorema teigia, kad optimalus pasirinkimas turi tenkinti sąlygas:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \dfrac{\partial U}{\partial x_1} - \lambda \cdot p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = \dfrac{\partial U}{\partial x_2} - \lambda \cdot p_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n} = \dfrac{\partial U}{\partial x_n} - \lambda \cdot p_n = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -(p_1 \cdot x_1 + \ldots + p_n \cdot x_n - b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = U_1 - \lambda \cdot p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = U_2 - \lambda \cdot p_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n} = U_n - \lambda \cdot p_n = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -(p_1 \cdot x_1 + \ldots + p_n \cdot x_n - b) = 0 \end{cases}$$

Išspendę pirmąsias n lygčių λ atžvilgiu gauname Lagranžo daugiklį

$$\lambda = \frac{U_1}{p_1} = \frac{U_2}{p_2} = \ldots = \frac{U_n}{p_n} .$$

Gavome vartotojo būtiną ir pakankamą sąlygas, kada vartotojo preferencijos griežtai iškilios.

2. Bendroji pusiausvyra

Ekonomikoje kiekvienas žmogus ieško naudos tik sau. Konkurencija – padėtis rinkoje, kai nė vienas iš rinkos dalyvių negali taikyti monopolinių kainų.

Nagrinėkime bendros konkurencinės pusiausvyros uždavinį, t. y. aptarkime sąlygas, kurioms esant galimai tam tikrą harmoniją rinkos ekonomikoje. Tarkime, kad rinkos dalyviai yra namų ūkiai ir firmos. Namų ūkių naudingumo funkcijas pažymėkime U^h, $h=1,...,m$, o firmos technologijas apibrėžkime gamybos funkcijomis Φ^f, $f=1,...,l$. Vartojamų prekių išteklius pažymėkime R_i, čia $i=1,...,n$.

Tarkime, kad visi dalyviai yra informuojami apie kiekvieną ekonomikos pokytį. Taip pat tarsime, kad kiekvienas rinkos dalyvis nustato kainą pats.

Kiti žymėjimai:

Ekonominiai elementai	
Namų ūkiai	**Firmos**
x_i^h, čia h namų ūkio i gėrybių vartojimo kiekis	q_i^f, čia firmos f gėrybių i galutinės produkcijos kiekis jei >0, tai i egzistuoja, jei <0, tai i irgi egzistuoja.
$x^h=(x_1^h, x_2^h,...,x_n^h)$ – vartojimo vektorius	$q^f=(q_1^f, q_2^f,...,q_n^f)$ – vartojimo vektorius
$[x]=[x^1, x^2, x^3,..., x^m]$ – vartojimo vektorių matrica	$[q]=[q^1, q^2, q^3,..., q^l]$ – vartojimo vektorių matrica

Tarkime $p_1,...,p_n$ yra prekių kainos rinkoje, o h namų ūkių pajamos y^h, $h=1,...,m$. Firmos f pajamos apibrėžiamos formule

$$\Pi^f=\sum_{i=1}^{n} p_i q_i^f \;,\; f=1,...,l .$$

Konkurencinis paskirstymas suprantamas kaip rinkos būsena apibrėžta vektoriumi $a=([x],[q],p)$, kuriame vektorius matricos $[x]$ kiekvienas stulpelis x^h, $h=1,...,m$ yra uždavinio

$$\max_{(x^h)} U^h(x^h), \text{ kai } \begin{cases} x^h \in X \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^h \le y^h \end{cases}, \; h=1,...,m$$

sprendinys; o vektorius matricos $[q]$ kiekvienas stulpelis q^f, $f=1,...,l$ yra uždavinio

$$\max_{(q^f)} \sum_{i=1}^{n} p_i q_i^f \text{ , kai } \Phi^f(q^f) \le 0 \text{, } f = 1,...,l$$

sprendinys.

Ekonominės sistemos suprastinimui vartosime uždarumo sąvoką, kuri remiasi paklausos ir pasiūlos balanso sąlyga $x_i \le q_i + R_i$. Sumuojant namų ūkių vartojimą ir grynąją firmų produkciją gaunama prekių pilnoji pasiūla.

Taigi paklausos ir pasiūlos balanso sąlyga yra tokia:

$$\sum_{h=1}^{m_h} x_i^h \le \sum_{f=1}^{l} q_i^f + \sum_{h=1}^{m} R_i^h$$

o vektorinė forma –

$$x \le q + R.$$

2.1 Apibrėžimas. *Konkurencinė pusiausvyra* (*Valraso pusiausvyra)* vadinamas neneigiamų vektorių x^{h*}, $h = 1,...,m$; q^{f*}, $f = 1,...,l$; p^* bei p rinkinys $a^* = ([x^*],[q^*], p^*)$, tenkinantis sąlygas:

- x^{h*} yra uždavinio $\max\limits_{(x^h)} U^h(x^h)$, kai $\begin{cases} x^{h*} \in X \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i^h \le y^h \end{cases}$, $h = 1,...,m$ sprendinys;
- q^{f*} yra uždavinio $\max\limits_{(q^f)} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i q_i^f$, kai $\Phi^f(q^f) \le 0$, $f = 1,...,l$ sprendinys;
- $\sum\limits_{h=1}^{m} x_i^{*h} \le \sum\limits_{f=1}^{l} q_i^{*f} + \sum\limits_{h=1}^{m} R_i^h$;
- $\left\langle p^*, \sum q_i^{*f} + \sum R_i^h \right\rangle = (p^*, \sum x_i^{*h})$.

Kainų vektorius p^* šiuo atveju vadinamas *pusiausvyros kainų vektoriumi.[5]*

2.1 Perteklinė paklausa. Du pagrindiniai bendrosios pusiausvyros elementai:

- Rinkos ir medžiagų paskirstymų kombinacija subalansuotos pajamos – konkurencinė pusiausvyra.
- Kainų nustatymas – apribojantis dalyvių elgesį „pagrindinės“ pusiausvyros ekonomikoje.

Pasinaudojus šiomis sąlygomis apibrėžiame perteklinės paklausos funkciją prekei.

$$E_i(p) = x_i(p) - q_i(p) - R_i$$

Perteklinės paklausos atveju turėtų būti patenkintos pusiausvyros sąlygos:

$$\begin{cases} E_i(p^*) \le 0, \\ p_i^* \ge 0, \\ p_i E_i(p^*) = 0 \end{cases}, \text{ čia } i = 1,...,n,\ p^* \text{ – pusiausvyros kaina}$$

2.1 Teorema *(Valraso dėsnis)* Turint bet kokią kainą p ir informuotus racionalius, bei ištroškusius dalyvius n, perteklinės paklausos funkcija turi tenkinti tokią sąlygą:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i E_i(p) = 0\ .[11]$$

2.2 Teorema *(Konkurencinės pusiausvyros egzistavimas)* Jei $\forall E_i(\cdot)$ – tolydžios funkcijos priklausančios nuo $J = \left\{ p : p \ge 0; \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$ (normuotų kainų aibė), be to aprėžtos iš apačios, tai $\exists p^* \in J$, kuris yra kainų pusiausvyros vektorius.[3]

2.3 Teorema *(Konkurencinės pusiausvyros vienatis)* Jei p^* – normuotų kainų pusiausvyros vektorius privataus turto ekonomikoje ir bendroji paklausa tenkina silpną Atskleistos Preferencijos Aksiomą () p^* atžvilgiu, tai tokia pusiausvyros kaina turėtų būti vienintelė.[3]

3. Konkurencinė pusiausvyra.

3.1 Konkurencinė pusiausvyra mainų ekonomikoje.

Šiame skyriuje aptarkime rinką, kurioje yra vartotojai ir nėra gamintojų. Tokia rinka vadinama *mainų rinka.* Mainų rinkoje yra ribotas kiekis gėrybių, kurias reikia optimaliai paskirstyti tarp vartotojų. Gamyba mainų ekonomikoje nevyksta, ir todėl naujų gėrybių nesukuriama. Gėrybių skirstymo mechanizmas mainų rinkoje grindžiamas gėrybių kainą. Šioje rinkoje egzistuoja tokia gėrybių kaina, kuriai esant visos gėrybės taip paskirstomos tarp visų mainų rinkos subjektų, kad maksimizuotu jų naudingumo funkcijas.

Bendroji pusiausvyra apima kelias rinkas. Analizuojant tokią pusiausvyrą išsiaiškinama, kaip kelių rinkų paklausa ir pasiūla nulemia įvairių prekių kainas. Tai labai sudėtinga analizė. Jos suprastinimui galima padaryti kelias prielaidas:

a) analizuojama tik konkurencinių rinkų elgseną;

b) analizuojamas kiek galima mažas prekių ir vartotojų skaičius (dvi prekės, du vartotojai);

c) analizuojami vadinamieji grynieji mainai, kada žmonės turi pradinius rinkinius ir juos maino, ir niekas nieko negamina.

Tarkime mainų ekonomikoje dalyvauja du vartotojai, kurie turi po du pradinius gėrybių rinkinius. Apibrėžkime pirmos firmos biudžetinį apribojimą

$$p_1 x_1^a + p_2 x_2^a \le p_1 R_1^a + p_2 R_2^a$$

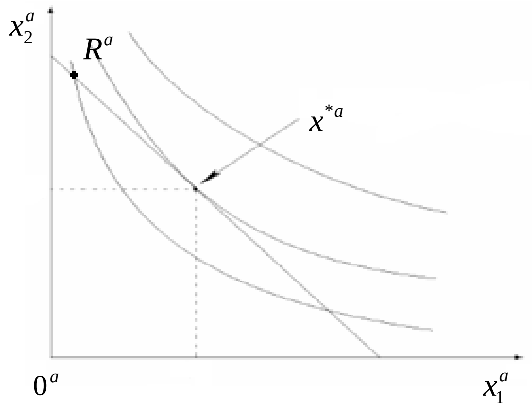
$$\frac{p_1}{p_2} \le \frac{R_2^a - x_2^a}{x_1^a - R_1^a}$$

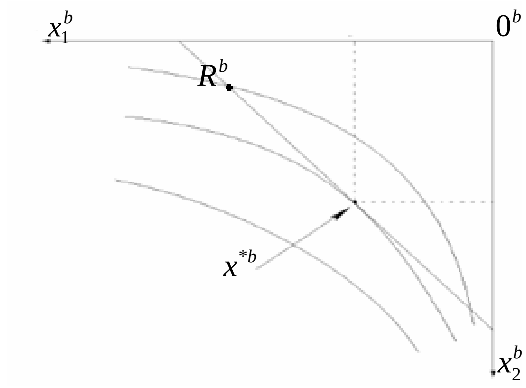
$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{U_1^a(x^a)}{U_2^a(x^a)}$$

Analogiškai antros firmos biudžetinis apribojimas būtų užrašytas

$$p_1 x_1^b + p_2 x_2^b \le p_1 R_1^b + p_2 R_2^b,$$

be to biudžetinės tiesės nuolydis būtų: $-\frac{p_1}{p_2} = -\frac{U_1^b(x^b)}{U_2^b(x^b)}$. Galime pavaizduoti grafiškai šiuos apribojimus bei naudingumo lygio kreives, bei surasti optimalius sprendimus.





3.1 pav. Firmos A optimalus pasirinkimas. 3.2 pav. Firmos B optimalus pasirinkimas.
Naudingumo maksimizavimas.

Kadangi ir vienas ir kitas vartotojai susiduria su tomis pačiomis kainomis, tai galime pavaizduoti šiuos grafikus vienoje koordinačių sistemoje. Anglų ekonomistas *Edžvortas* (Francis Isidro *Edgewortho*, 1845-1926) pasiūlė patogu grafinį modelį nagrinėti dviejų prekių mainus tarp dviejų asmenų. Šiam modeliui prigijo *Edžvorto* dėžės pavadinimas.

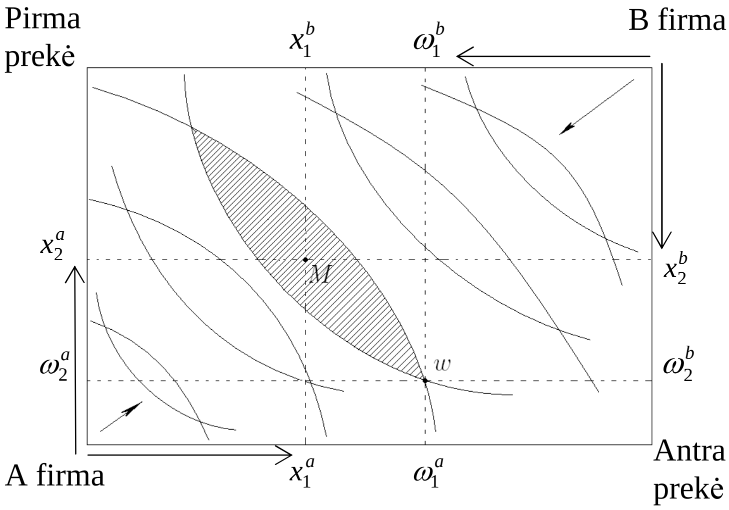
Sakykim, jog A ir B žmonės maino pirmą ir antrą prekes. A vartojamą rinkinį pažymėkime $X_A = (x_1^a, x_2^a)$, čia x_1^a yra pirmos prekės kiekis, kurį vartoja A, o x_2^a - antros prekės kiekis, kurį vartoja A. Tada B vartojamą rinkinį žymėsime $X_B = (x_1^b, x_2^b)$. Vartojimo rinkinių porą X_A ir X_B vadinsime **paskirstymu**.[8] Paskirstymą vadinsime įmanomu paskirstymu, jei visas suvartotas kiekvienos prekės kiekis yra lygus visam esamam kiekiui:

$$\begin{cases} x_1^a + x_1^b = \omega_1^a + \omega_1^b \\ x_2^a + x_2^b = \omega_2^a + \omega_2^b \end{cases}$$

Vartotojai į mainus ateina su pradiniu paskirstymu (ω_1^a, ω_2^a) ir (ω_1^b, ω_2^b), kuri po tam tikro mainų skaičiaus užbaigia galutiniu paskirstymu.

Edžvorto dėžės plotas rodo bendrą pirmos prekės kiekį ekonomikoje, aukštis − bendrą antros prekės kiekį ekonomikoje A asmens vartojimo. A asmens pasirinkimas yra vaizduojamas apatinio kairiojo kampo atžvilgiu, B asmens pasirinkimas − viršutinio dešiniojo kampo atžvilgiu.

Brėžinyje naudingumo funkcijos lygio kreivėmis pavaizduojame abiejų vartotojų preferencijas. A turimą prekės kiekį rodo horizontalus atstumas nuo atskaitos taško apatiniame kairiajame dėžės kampe, B turimas pirmos prekės kiekis − horizontalusis atstumas nuo atskaitos taško viršutiniame dešiniajame kampe. Panašūs vertikalūs atstumai rodo A ir B turimus antros prekės kiekius.



3.3 pav. *Edžvorto* dėžė.

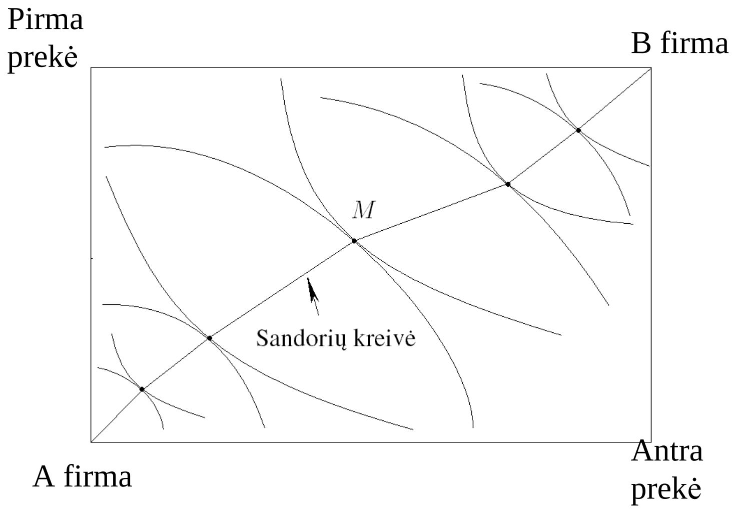
Edžvorto dėžės taškai rodo visus įmanomus paskirstymus grynųjų mainų ekonomikoje. Judėdami nuo A atskaitos taško apatiniame kairiajame kampe aukštyn ir dešinėn, judėtume link paskirstymu, kuriems didesnę preferenciją teikia A vartotojai. Judėdami nuo *B* atskaitos taško žemyn ir kairėn, pasiektume paskirstymus, kuriems didesnę preferenciją teikia *B*. *Edžvorto* dėžė parodo dvi ekonomiškai svarbias vartotojo preferencijas (abiejų vartotojų įmanomus rinkinius ir abiejų vartotojų preferencijas).

Visi rinkiniai, esantys virš *A* naudingumo funkcijos lygio kreivės, einančios per ω (pradinis rinkinys), sudaro sritį, kuri A yra geresnė už pradinį rinkinį. *B* geresnė sritis yra virš jo naudingumo funkcijos lygio kreivės, einančios per ω, esantys taškai. Abiem vartotojams geresnė sritis yra lęšio pavidalo sritis viduje (tarkime taškas M). Poslinkyje iš ω į M įvyksta pasikeitimai:

(1) *A* vartotojas atiduoda $\left|x_1^a - \omega_1^a\right|$ vienetų pirmos prekės ir gauna $|\, x_2^a - \omega_2^a \,|$ vienetų antros prekės;

(2) *B* vartotojas atiduoda $\left|x_1^b - \omega_1^b\right|$ vienetų pirmos prekės ir gauna $|\, x_2^b - \omega_2^b \,|$ vienetų antros prekės.

3.1 Apibrėžimas. Jei $\hat{g} = (\hat{x}_1,...,\hat{x}_i)$ gėrybių rinkinys yra vertingesnis už $g = (x_1,...,x_i)$ gėrybių rinkinį (žymima $\hat{g} \succ g$), jeigu $\hat{x}_i \succeq x_i,\ \forall i \in \{1,...,n\}$ ir $\exists i \in \{1,...,n\} : \hat{x}_i \succ x_i$. Taigi gėrybių rinkinys $\hat{g}$ vadinamas *optimaliu pagal Paretą.*



3.4 pav. Optimalus pagal Paretą paskirstymas.

Taigi *M* taške geresne sritis A nesikerta su B vartotojui geresne sritimi. Vadinasi, bet koks poslinkis, pagerinantis vienos šalies padėtį, būtinai pablogins kitos šalies padėtį. Tokiame paskirstyme nėra abiejų šalių padėtį gerinančių mainų. Todėl toks pasiskirstymas yra vadinamas *optimaliu pagal Paretą pasiskirstymu.*

Gali būti daug optimaliu pagal Paretą pasiskirstymų apibudinimų:

- neįmanoma padaryti geriau kokiam nors asmeniui, nepabloginant padėties kitiems asmenims;
- visa mainų nauda jau pasiekta ir pan.

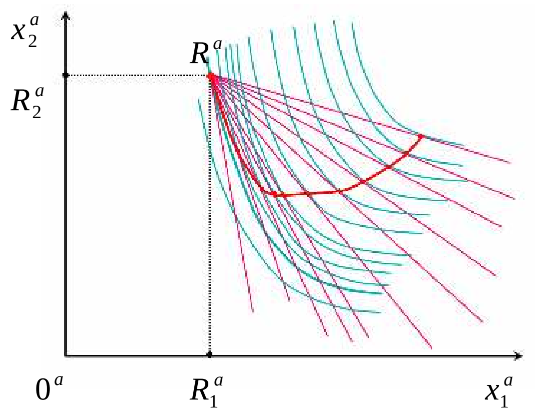
Jei paskirstymas yra optimalus pagal Paretą, tai kiekvienas asmuo pasiekia savo naudingumo funkcijos lygio kreivę esant tam tikrai kito asmens naudingumo funkcijos lygio kreivei. Bet kuriame efektyviame pagal Paretą paskirstyme, esančiame *Edžvorto* dėžės viduje, dviejų mainų dalyvių naudingumo funkcijos lygio kreivės turi liestis. Jeigu naudingumo funkcijos lygio kreivės kirstųsi, tuomet dar galėtų būti kokie nors abipusiškai naudingi mainai. Tai būtų neoptimalu pagal Paretą. Iš lietimosi sąlygos matyti, jog *Edžvorto* dėžėje yra daugybė pagal Paretą optimaliu paskirstymu. Visų pagal Paretą optimalių taškų *Edžvorto* dėžėje aibė yra vadinama Paretą aibe arba sandorių aibe (todėl, kad visi galutiniai sandoriai turi būti Paretą aibėje).

Sandorių aibė eis nuo A atskaitos taško dešinėn ir į viršų *Edžvorto* dėže. Paretą aibė vaizduoja visas galimas abipusiškai naudingų mainų baigmes, kurios prasideda *Edžvorto* dėžėje.

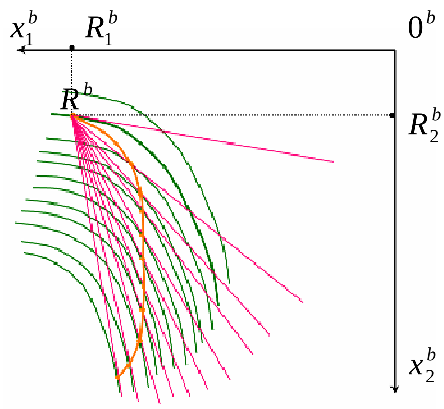
Norint tiksliau apibūdinti optimalius pasiskirstymus, reikia įvesti kainas. Darome prielaidą, kad *Edžvorto* dėžė vaizduoja vidutines paklausas ekonomikoje, kurioje yra du vartotojų tipai, bet kuriam vartotojų tipui priklauso daug asmenų.

Tegul p_2 ir pajamos yra pastovios, o keičiasi pirmos prekės kaina p_1. Geometriškai tai reikš biudžeto tiesės pasisukimą. Antros prekės kainai ir pajamoms esant pastovioms, pirmos prekės kainos p_1 sumažėjimas leidžia daugiau įsigyti pirmos prekės. Prekės kainai pakilus paklausa paprastai sumažėja. Todėl prekės kiekis ir kaina juda priešingomis kryptimis t.y. $\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} < 0$. Pirmos firmos pradiniai ištekliai yra $R^a = (R_1^a; R_2^a)$, tada per duotą tašką galime nubrėžti naudingumo kreivę, taip pat galime peržvelgti visų pirmos firmos naudingumo kreivių žemėlapį. Panagrinėjus matome, kad kuo judame dešiniau ir viršun tuo naudingesni pirmos firmos gėrybių rinkiniai. Jei kaina labai aukšta, tai nėra jokios prekybos, vartotojai nenori pirkti prekę aukštomis kainomis. Ekonomine prasme tai reiškia, kad negali būti jokios prekybos. Analogiškai nagrinėjant antros firmos naudingumo kreivių žemėlapį su pradiniais ištekliais $R^b = (R_1^b; R_2^b)$, gauname kad negali būti jokios prekybos mažinant prekės kainą p_1. Iš čia išplaukia, kad jokios prekybos būti negali.

3.2 Pusiausvyros paieška Edžvorto dėžėje. Brėžiant liestines, kurios išeina iš duotojo išteklių taško ir liečiančios kiekvieną naudingumo kreivę gauname optimalius taškus t.y. geriausius rinkinius, kuriuos norėtų įsigyti vartotojas. Kiekvieno vartotojo geriausių rinkinių taškų aibė sudaro paklausos funkciją. Paklausa – prekės kiekio, kurį pirkėjas nori ir gali pirkti, ryšys su kaina, už kurią ši prekė perkama. Gauname pirmos ir antros firmų paklausos kreives, kurios eina per išteklių taškus. (žr. 3.5 pav., 3.6 pav.)

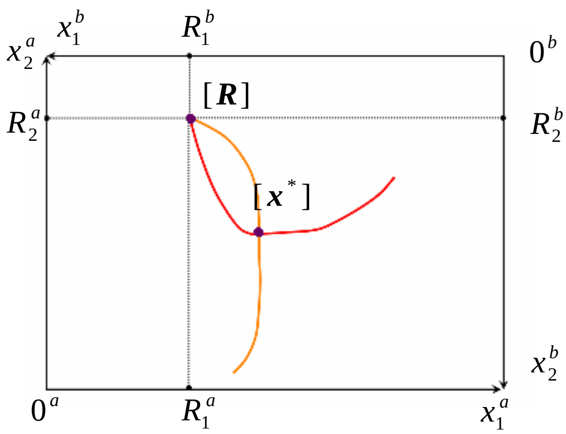


3.5 pav. Firmos A optimalių pasirinkimų paklausos kreivė.

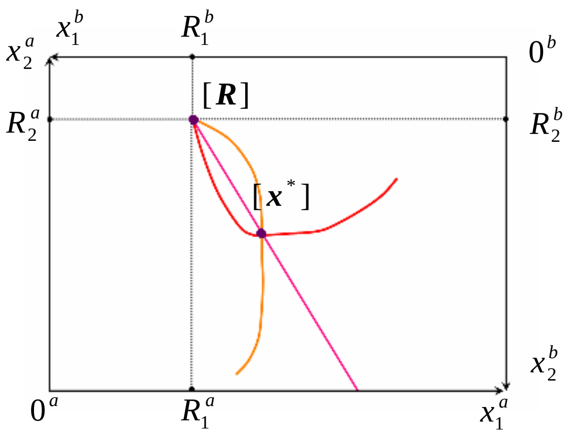


3.6 pav. Firmos B optimalių pasirinkimų paklausos kreivė..

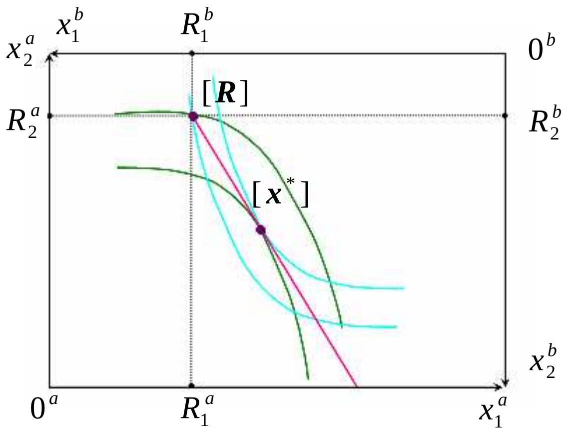
Šie du vartotojai perka tomis pačiomis kainomis prekių rinkinius. Taigi galime šias dvi kreives pavaizduoti *Edžvorto* dėžėje. Nubrėžus šias dvi kreives *Edžvorto* dėžėje, gausime, kad duotos paklausos eina per išteklių tašką bei susikerta taške, kuriame pirmos firmos ir antros firmos paklausos sutampa. (žr. 3.7 pav. – 3.12 pav.)



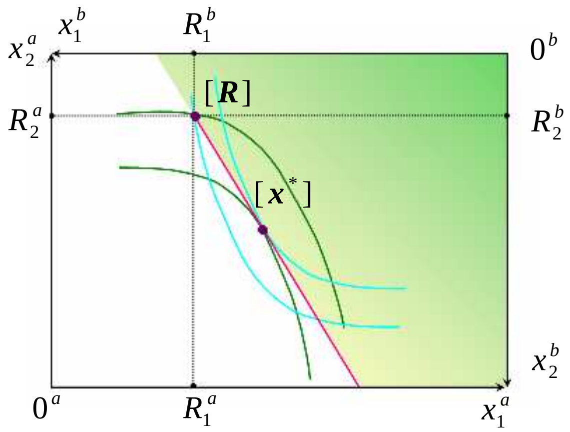
3.7 pav. Optimaliu paklausų susikirtimas.



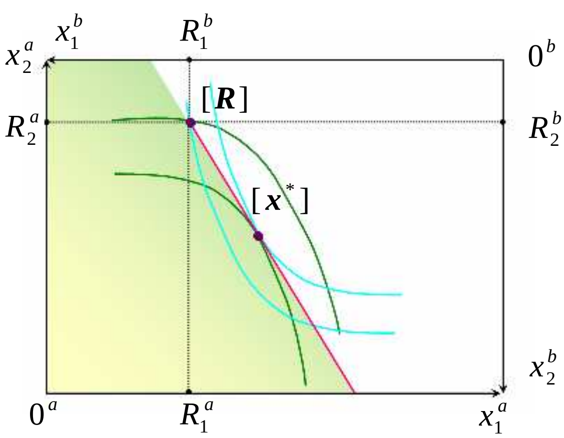
3.8 pav. Biudžetinė tiesė.



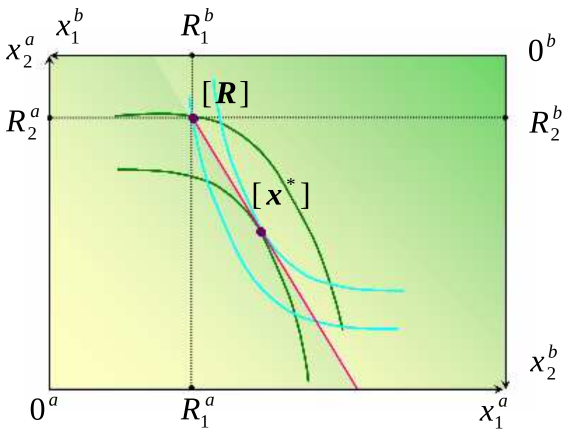
3.9 pav. Naudingumo funkcijos lygio kreivės.



3.10pav. Firmos A naudingumo maksimizavimas.



3.11pav. Firmos B naudingumo maksimizavimas.



3.12pav. Optimalus pasirinkimas.

Jei kiekvienas mainų dalyvis renkasi geriausią įperkamą rinkinį, tai šių dviejų prekių ribinė pakeitimo norma lygi biudžetinės tiesės nuolydžiui t.y. $MRS = -\dfrac{p_1}{p_2}$. Tačiau jei visi vartotojai susiduria su tomis pačiomis kainomis, visų prekių ribinės pakeitimo normos turi būti tos pačios

$$MRS_{x_1^a, x_2^a} = MRS_{x_1^b, x_2^b} = MRS$$

čia $MRS_{x_1^a, x_2^a}$ – A firmos prekių ribinė pakeitimo norma, $MRS_{x_1^b, x_2^b}$ – B firmos prekių ribinė pakeitimo norma. Iš to seka, kad dviejų dalyvių naudingumo kreivės privalo liestis tarpusavyje ir liesti biudžeto tiesę. Šis taškas yra konkurencinės pusiausvyros taškas.

3.3 Konkurencinė pusiausvyra ir šerdis. Apžvelkime uždarą mainų ekonomikos pavyzdį, kuriame aptarsime kalinių stovyklą, kurioje kiekvienas kalinys gauna tam tikra gėrybių rinkinį, su kuriuo jis gali elgtis, taip kaip jam atrodo geriausia (naudingiausia), t.y. mainyti prekes arba nemainyti, turi teisę jungtis į grupes kitaip koalicijas, gali blokuoti jas. Vartotojas daro viską kas jam yra naudingiausia. Jeigu ekonominėje sistemoje siūlomas netinkamas gėrybių rinkinys, ji galime užblokuoti.

3.1 Apibrėžimas. Namų ūkių $\{1,...,m\}$ netuščias poaibis vadinamas *koalicija* K.

3.2 Apibrėžimas. Koalicija K uždraudžia būseną $[x]$, jei egzistuoja vartojimo vektorių aibė $\{x^h : h \in K\}$, tenkinanti sąlygas:

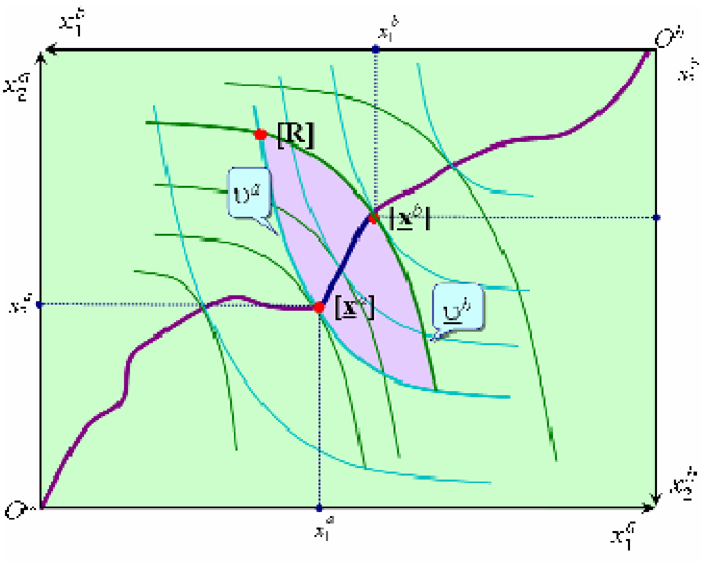
(1) $U^h(x^h) \geq U^h(\hat{x}^h)$, kai $h \in K$;

(2) $\sum_{h \in K} x^h \leq \sum_{h \in K} R^h$ kuriam nors $h \in K$.

Tarkime, turime išteklių tašką $[R]$ ir per jį einančias naudingumo kreives: pirmos firmos naudingumo kreivė $\underline{\upsilon^a}$ ir antros firmos naudingumo kreivė $\underline{\upsilon^b}$. Koalicija {A} uždraudžia visus jam nenaudingus rinkinius (į kairę ir žemyn nuo $\underline{\upsilon^a}$), analogiškai ir koalicija {B} uždraudžia visus jam nenaudingus rinkinius (į dešinę ir aukštyn nuo $\underline{\upsilon^b}$). Koalicija{A, B} uždraudžia plotą nuo kreivės $\underline{\upsilon^b}$ iki $\underline{\upsilon^a}$, kuris vadinamas šerdimi.

3.3 Apibrėžimas. Tarkime, mainų ekonomikoje aibė $K \subseteq \{1,...,m\}$ yra koalicija. Ši koalicija gali uždrausti arba pakeisti rinkinį x vertingesniu rinkiniu $\hat{x}$, jei $\sum_{h \in K} x^h \leq \sum_{h \in K} R^h$ ir $\forall h \in K, \hat{x}^h \succ x^h$.

Šerdis – aibė rinkinių, kurių netikslinga uždrausti arba pakeisti vertingesniu rinkiniu.[7]



3.13pav. Šerdis *Edžvorto* dėžėje.

Šerdis įgauna svarbumo tiktai tada, kai kartu yra nagrinėjama konkurencinės pusiausvyros sąvoka.

3.1 Teorema. Mainų ekonomikoje šerdis yra optimali pagal Paretą. [8]

3.2 Teorema (*Šerdis ir konkurencinė pusiausvyra*) Jei nė vienas iš vartotojų neturi prisotinimo taško, tai konkurencinės pusiausvyros taškas yra šerdyje.[3]

Įrodymas.

► Turint rinkinį a ir uždrausta rinkinį a^*, randama dalyvių koaliciją K, kurioje turimos pajamos tenkina sąlygą:

$$\forall i : \sum_{h \in K} \hat{x}_i^h \leq \sum_{h \in K} R^h \ ,$$

kuria pertvarkome

$$\sum_{h \in K} \sum_{i=1}^{n} p_i \hat{x}_i^h \leq \sum_{h \in K} \sum_{i=1}^{n} p_i R_i^h \ .$$

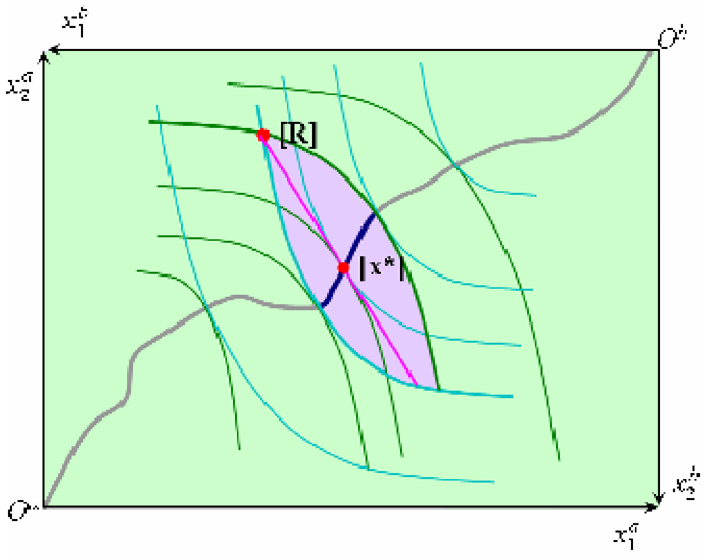
Kadangi a^* – konkurencinės pusiausvyros rinkinys su kaina p^*. Naudingumo maksimizavimas apibrėžia kainą p^* būsenoje a^*. Jei naudingumo funkcija apibrėžta nelygybėmis $U^h(\hat{x}^h) \geq U^h(x^{*h})$, tai $\hat{x}^h$ turėtų apytiksliai kainuoti tiek pat kaip x^{*h} (kuris aišku kainuoja $\sum_{i=1}^{n} p_i R_i^h$); jei $U^h(\hat{x}^h) > U^h(x^{*h})$, tai $\hat{x}^h$ turėtų būti griežtai brangesnė už x^{*h}. Kadangi a^* – konkurencinės pusiausvyros būsena ir $\hat{a}$ blokuoja a^*, tai galėtume rasti:

$$\sum_{h \in K} \sum_{i=1}^{n} p_i \hat{x}_i^h > \sum_{h \in K} \sum_{i=1}^{n} p_i R_i^h \ ,$$

kuri yra visiška prieštara šiai nelygybei

$$\sum_{h \in K} \sum_{i=1}^{n} p_i \hat{x}_i^h \le \sum_{h \in K} \sum_{i=1}^{n} p_i R_i^h .$$

Taigi konkurencinė pusiausvyra turi būti šerdyje. ◄[3]



3.14pav. Šerdis ir konkurencinė pusiausvyra.

Ši teorema gana tiksliai apibrėžia atvejį, kai yra daugiau nei viena pusiausvyra, ji teigia kad jos visos turėtų būti šerdyje.

Jei norėtume prie esamų dalyvių prijungiame daugiau dalyvių, tai galėtume nagrinėti kraštutinį atvejį, kai $N \to \infty$. Pasirodo, kad kuo didesnis dalyvių skaičius, tuo labiau šerdis artėja prie konkurencinės pusiausvyros. Ribiniu atveju šerdis sutampa su konkurencine pusiausvyra.

4. Taikymo pavyzdys.

Nagrinėkime pavyzdį, kuriame yra du vartotojai, kurie žino vienas kito preferencijas. Tarkime turime pirmą vartotoją, kuris turi CD kompaktus su muzika ir DVD kompaktus su filmais, o kito vartotojo gėrybių rinkiniai

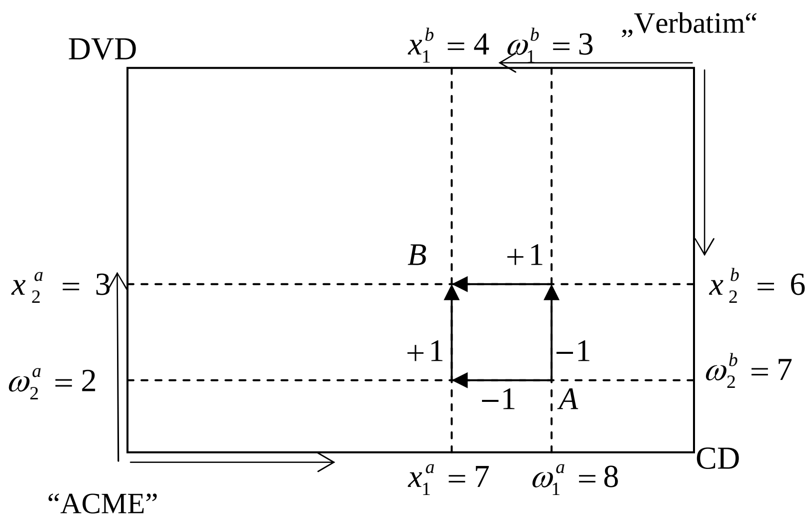
	Pradinis paskirstymas	Sandoris	Galutinis paskirstymas
„Verbatim“ „ACME“	8 CD, 2 DVD 3 CD, 7 DVD	-1 CD + 1 DVD +1 CD - 1 DVD	7 CD, 3 DVD 4 CD, 6 DVD
Iš viso:	11 CD, 9 DVD	0; 0	11CD , 9 DVD

Kadangi „Verbatim“ firma turi daugiau CD kompaktų ji didesnę preferenciją teikia DVD kompaktams, t.y. jos ribinė pakeitimo norma yra $MRS_{VERBATIM} = \frac{1}{3}$. Tai galime interpretuoti taip, kad „Verbatim“ firma pasiruošusi už 1 DVD vienetą atiduoti 3 CD vienetus. Analogiškai „ACME“ ribinė pakeitimo norma $MRS_{ACME} = 3$, jis pasiruošęs už 1 CD atiduoti 3 DVD diskus. Tokių skirtingų preferencijų aibėje įmanoma surasti abiems pusėms naudingus sandorius. Gavome dvi ribines pakeitimo normas skirtingoms firmoms

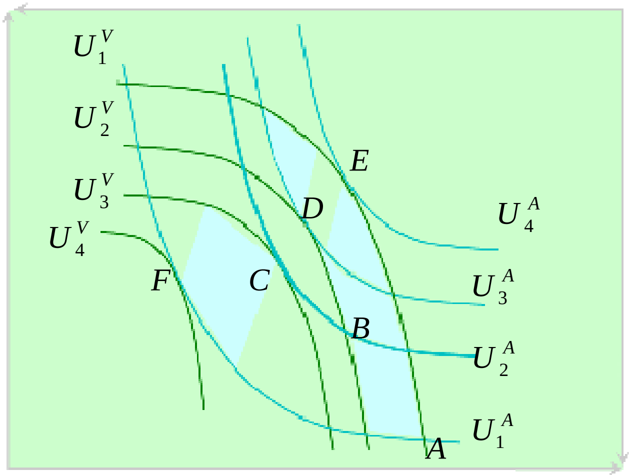
$$MRS_{VERBATIM} = \frac{1}{3} < 1 \text{ ir } MRS_{ACME} = 3 > 1.$$

Turint tokias ribines pakeitimo normas galime pabandyti pasiekti optimaliausia rinkinį gėrybių. Jeigu 1 DVD kompaktą mainoma į 1 CD kompaktą, tai šis sandoris yra naudingas abiems firmoms. Jei sudarius sandorį gauname lygias ribinio pakeitimo normas, tai reiškia kad mainai vykti negali, nes jau pasiektas optimaliausias atvejis.

Pabandykime ši uždavinį išspręsti Edžvorto dėžės pagalba.



3.15pav. Firmų „ACME“ ir „Verbatim“ mainai *Edžvorto* dėžėje.



3.16pav. Naudingumo funkcijos lygio kreivės.

Panagrinėkime kaip pasikeis naudingumas judant iš taško A į tašką B. Galime pastebėti, kad firmos „ACME“ naudingumo funkcijos lygio kreivė pasikeitė didesnio naudingumo lygio kreive $U_1^A \Rightarrow U_2^A$. Analogiškai pasikeitė ir firmos „Verbatim“ naudingumo funkcijos lygio kreivė $U_1^V \Rightarrow U_2^V$. Naujai gautos naudingumo funkcijų lygio kreivės teikia didesnį naudingumą kiekvienam iš dalyvių, taigi tai abipusiai naudingi mainai.

Kita spalva paveikslėlyje pažymėta visų naudingumo funkcijos vertingų rinkinių aibės. Analizuojant pavyzdį reikia atsiminti, kad optimalaus sprendimo uždavinys susijęs su optimizavimo metodais, t.y. ieškoma naudingumo funkcijos lygio kreivių lietimosi taškų. Gavę optimalius taškus jungiame juos *sandorių kreive*. Taigi sudaryta sandorių kreivė, kuri apibrėžia vertingiausius mainus. Taigi toliau mainyti nėra tikslinga. Pradinis paskirstymas A nėra sandorių kreivėje, tai judant sandorių kreivės link didinamas dalyvių naudingumo lygis. Dar kartą patikslinama, kad taškai K, F, D, E priklausantys sandorių kreivei nepagerina naudingumo, tiesiog joje jau pasiektas didžiausias naudingumas, t.y. tiesiog joje paskirstyti optimalūs pagal Paretą gėrybių rinkiniai. Tai reiškia, kad sandorių kreivėje ribinės pakeitimo normos yra lygios $MRS = MRS_v = MRS_A$.

IŠVADOS

Baigiamajame darbe išnagrinėtos ekonominių vartotojų elgsenos ypatybės. Vartotojo elgseną nulemia preferencijos. Grafiškai jos vaizduojamos kaip naudingumo funkcijos lygio kreivėmis. Pusiausvyros modeliuose vartotojų preferencijos nagrinėjamos tik biudžetinėse aibėse.

Darbe išanalizuotas optimalaus pasirinkimo uždavinys atskiru atveju, kai vartotojų preferencijos modeliuojamos Kobo ir Daglaso naudingumo funkcijomis.

Išnagrinėtas mainų ekonomikos konkurencinės pusiausvyros radimo uždavinys taikant Edžvorto dėžę.

SUMMARY

General Equilibrium in Models of economics.

The classical general equilibrium model aims to describe the economy by aggregating the behavior of individuals and firms. In the model, the individual is assumed to be the basic unit of analysis and these individuals, both workers and employers, will make choices that reflect their unique tastes, objectives, and preferences. Consumer behavior describes his utility function.

The work analyzed the optimal choice of the task on a case where the user preferences designed Cobb-Douglas utility functions.

Then we describe the Edgeworth box at exchange economy. It is used in general equilibrium theory, and can aid in finding the competitive equilibrium of a simple system.

LITERATŪROS SĄRAŠAS

1. A. Apynis, *Lošimo teorija*, Vilnius: Vilniaus universiteto leidykla, 2007, p. 107.
2. A. Apynis, *Optimizavimo metodai*, Vilnius: Vilniaus universiteto leidykla, 2005, p. 200.
3. F. Cowell, General equilibrium, *Microeconomics: Principles and Analysis*, Oxford: Oxford University, 2004, p. 145 – 177.
4. E. Misevičius, *Matematinė analizė*, Vilnius: TEV, 1998, p. 356.
5. R. Norvaiša, *Statistinės bendrosios pusiausvyros matematiniai pagrindai*, Vilnius: Matematikos ir informatikos institutas, 2007, p. 238.
6. R. Vainienė, *Ekonomikos terminų žodynas*, Vilnius: „Tyto alba", 2005, p. 326.
7. Elektroninis ekonomikos žodynas, http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/332544, prisijungimo laikas 2009-04-30*
8. Mikroekonomikos ir makroekonomikos paskaitų konspektai: http://neris.mii.lt/~ekonomika/
9. Konspektai, www.comlabgames.com/strategicplay/23_chapter/ppt/23_Competitive_Equilibrium.ppt, prisijungimo laikas 2009-04-30*
10. В. П. Бусыгин, Е. В. Желободько, А. А. Цыплаков**,** *Микроэкономика – третий уровень*, Новосибирск: Издательство СО РАН, 2005. - 702 с. (http://www.allmath.ru/appliedmath/micro/micro3/micro.htm, 2009-05-17*)
11. Р. М. Нуреева, *Сборник задач по микроэкономике. К «Курсу микроэкономики»*, Москва: Норма, 2005, р. 432.