

**VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS**

Magistro darbas

Finansinio kintamumo modeliavimas

Modelling financial volatility

Vaida Juozapėnaitė

VILNIUS 2008

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Darbo vadovas ...*Prof. R. Leipus*..... _____
(Vadovo pareigos, vardas, pavardė) (parašas)

Darbas apgintas 2008 m. birželio mėn. 5-6 d.

Gynimo posėdžio protokolo Nr. _____

Darbas įvertintas _____

Registravimo Nr. _____

2008-05-25 _____

TURINYS

ANOTACIJA/REZIUMĖ	4
ĮVADAS	5
1. GRAŽOS	7
2. KINTAMUMAS	9
3. KINTAMUMO APIBRĖŽIMO BŪDAI DISKREČIU LAIKU	11
3.1. GARCH(1,1) MODELIS	11
3.1.1. Standartinis normalusis triukšmo sekos pasiskirstymo atvejis	12
3.1.1.1. Momentai.....	12
3.1.1.2. Vidutinė kvadratinė paklaida.....	14
3.1.1.3. Autokoreliacinė funkcija	18
3.1.2. Standartinis Stjudento triukšmo sekos pasiskirstymo atvejis	21
3.1.2.1. Momentai.....	21
3.1.2.2. Vidutinė kvadratinė paklaida.....	23
3.1.2.3. Autokoreliacinė funkcija	26
3.2. STOCHASTINIO KINTAMUMO MODELIS	29
3.2.1. <i>Momentai</i>	29
3.2.2. <i>Standartinis normalusis triukšmo sekos pasiskirstymo atvejis</i>	29
3.2.2.1. Vidutinė kvadratinė paklaida.....	29
3.2.2.2. Autokoreliacinė funkcija	34
3.2.3. <i>Standartinio Stjudento triukšmo sekos atvejis</i>	37
3.2.3.1. Vidutinė kvadratinė paklaida.....	38
3.2.3.2. Autokoreliacinė funkcija	40
3.3. EGARCH MODELIS	43
3.3.1. <i>Momentai</i>	43
3.3.2. <i>Vidutinė kvadratinė paklaida</i>	43
3.3.3. <i>Autokoreliacinė funkcija</i>	44
3.4. APARCH(1,1) MODELIS	46
3.4.1. <i>Standartinis normalusis triukšmo sekos pasiskirstymo atvejis</i>	46
3.4.1.1. Momentai.....	46
3.4.1.2. Vidutinė kvadratinė paklaida.....	48
3.4.1.3. Autokoreliacinė funkcija	53
3.4.2. <i>Standartinio Stjudento triukšmo sekos pasiskirstymo atvejis</i>	54
3.4.2.1. Momentai.....	54
3.4.2.2. Vidutinė kvadratinė paklaida.....	56
3.4.2.3. Autokoreliacinė funkcija	57
IŠVADOS	59
LITERATŪRA	60
PRIEDAI	61

ANOTACIJA/REZIUMĖ

Šiame darbe nagrinėjamas pagalbinis kintamumo rodiklis (angl., proxy) $|r_t|^\delta$. Pagrindinė darbo užduotis buvo rasti δ , kuris geriausiai nusakytų kintamumą. Modeliuojant kintamumą buvo naudojami keturi diskretaus laiko kintamumo apibrėžimai: GARCH, stochastinis kintamumo modelis, EGARCH ir APARCH. Kiekvieno modelio atveju parodėme kai kurias statistines kintamumo rodiklio savybes. Pritaikę S&P 500 uždarymo kainų indeksui skirtingus kintamumo apibrėžimus, vidutinės kvadratinės paklaidos ir autokoreliacijos funkcijų pagalba nustatėme, kad δ , geriausiai nusakantis kintamumą, turėtų būti tarp 1 ir 3.

The most popular proxy variables, used to describe the financial volatility, are squared and absolute returns. These two proxy variables are widely discussed in recent studies. In this paper we proposed the extension of existing studies analysing volatility proxy variable $|r_t|^\delta$ with $\delta > 0$. Some statistical properties of $|r_t|^\delta$ were investigated using four main discrete volatility models as a basis for our investigation: Generalized ARCH, Stochastic Volatility, Exponential GARCH and Asymmetric Power ARCH. We applied these definitions to daily data of S&P 500 stock market closing prices ranging from 1928.01.01 till 2007.12.31.

In order to estimate the best δ , the modeled volatility was compared with the volatility proxy variable. We used $|r_t|^\delta$ as volatility estimate to find δ , which minimizes mean squared error (MSE). Our analysis extends the results obtained by D. E. Giles [4] who concluded that squared returns are better proxy variables than absolute returns. We have shown that the best δ for volatility proxy variable is ranging from 2 to 3. The second method we have used was analysis of the autocorrelation function. We have examined the result of Z. Ding, C. W. J. Granger, R. F. Engle [2] that autocorrelation function is strongest when absolute returns are used. We obtained that δ ranges from 1 to 1.5.

We have run into some difficulties in our studies. First of them was trying to find a general expression of δ , which minimizes MSE. Furthermore, in the case of GARCH(1,1) and APARCH(1,1) models we obtained the results which might need some deeper analysis. Moreover, in our studies we have used only simplest volatility definitions and further research is needed in the case of more sophisticated models.

IVADAS

Kintamumo sąvoka finansų matematikoje ir finansų ekonometrijoje yra viena iš svarbiausių ir sudėtingiausių. Viena iš pagrindinių to priežasčių yra ta, kad ji nėra vienareikšmiškai apibrėžiama. Kintamumas gali būti susietas su grąžų dispersija, atstumu nuo vidurkio, maksimalia laikotarpio grąža, uždarymo kaina ir panašiai. Kita priežastis yra ta, kad kintamumas praktikoje dažniausiai nėra stebimas. Be to, labai svarbus yra stebėjimų dažnis. Kintamumo sąvoka leidžia nustatyti finansinių instrumentų kainas, jų kitimo tendencijas, įvertinti riziką. Pirmoji šio darbo užduotis yra apžvelgti kai kuriuos kintamumo apibrėžimo būdus diskrečiu laiku.

Dažniausiai finansų rinkose naudojami pagalbiniai kintamumo rodikliai yra absoliučios ir kvadratinės grąžos. Šie du rodikliai yra plačiai nagrinėjami įvairiuose kintamumo tyrimuose. Šiame darbe mes juos praplėsime nagrinėdami pagalbinį kintamumo rodiklį $|r_t|^\delta$, kai $\delta > 0$. Tad pagrindinis šio darbo tikslas bus rasti „geriausią“ δ skirtingiems kintamumo modeliams. Mus labiausiai domins δ intervale (0;3). Taip pat bus nagrinėjamas jo poveikis dviem triukšmo sekos atvejais: normaliojo ir Stjudento.

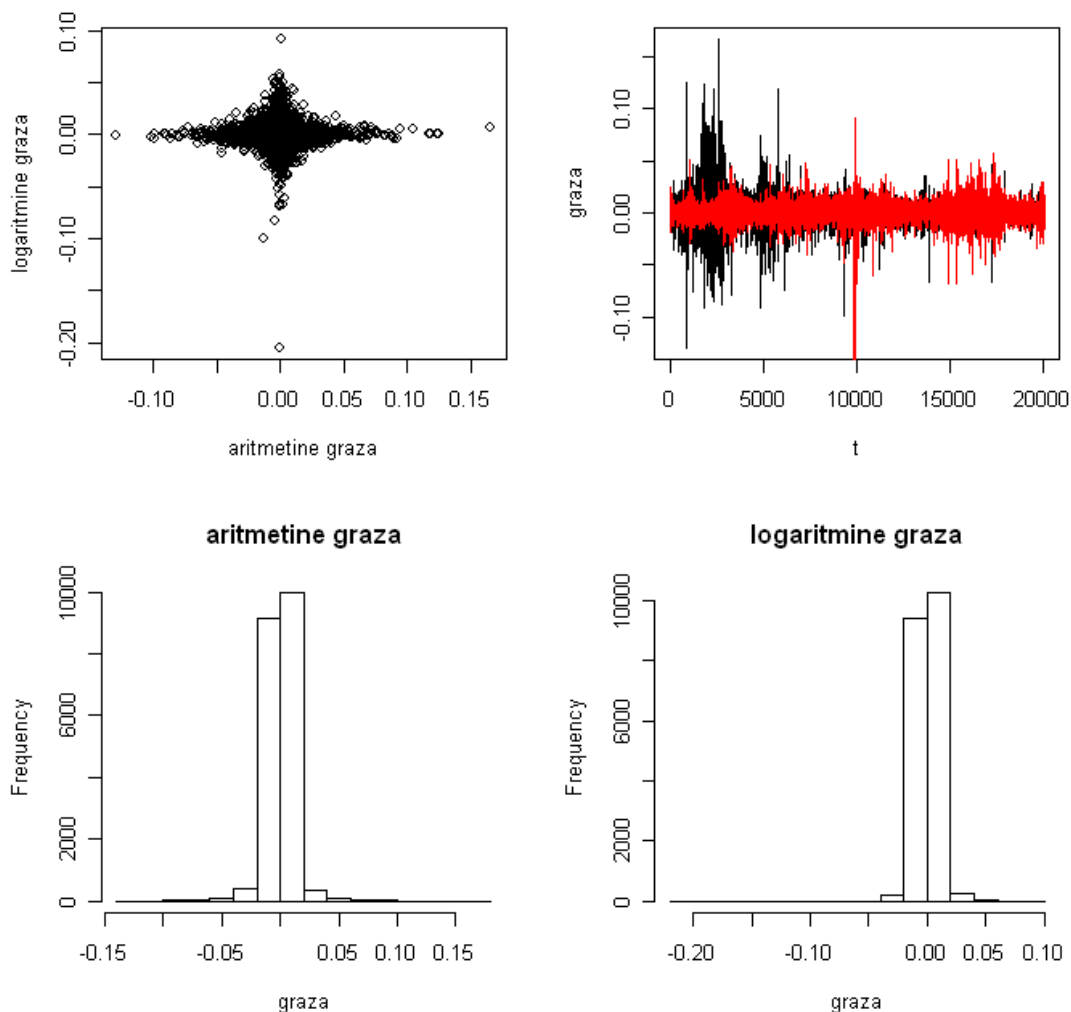
Pagalbinio kintamumo rodiklio statistinėms savybėms gauti, naudosime įvairius kintamumo modelius: apibendrintą autoregresinį sąlyginio heteroskedastiškumo modelį, stochastinio kintamumo modelį, eksponentinį apibendrintą autoregresinį sąlyginio heteroskedastiškumo modelį bei asimetrinį laipsninį autoregresinį sąlyginio heteroskedastiškumo modelį. Naudosime tik pačias paprasčiausias modelių išraiškas. Šiuos apibrėžimus mes pritaikysime S&P 500 uždarymo kainų indekso duomenims nuo 1928.01.01 iki 2007.12.31. Šis indeksas yra plačiai naudojamas literatūroje, taigi bus įmanoma palyginti gautus rezultatus. Taip pat jis turi labai ilgą istoriją, grąžų vidurkis artimas nuliui, jis pasižymi sunkesnėmis uodegomis nei Gauso pasiskirstymas.

Darbe modeliuosime kintamumą remiantis aukščiau minėtais modeliais ir tirsime kaip $|r_t|^\delta$ juos atitinka. Siekdami nustatyti geriausią δ , naudosime du metodus: vidutinę kvadratinę paklaidą ir autokoreliacinės funkcijos elgesį. Vidutinės kvadratinės paklaidos pagalba nagrinėsime $|r_t|^\delta$ kaip kintamumo įvertį ir ieškosime δ , minimizuojančio šią funkciją. Šis metodas praplės D. Giles [4] tyrimus, kuriuose, naudojant stochastinio kintamumo modelį, jis nustatė, kad kvadratinės grąžos geriau nusako kvadratinį kintamumą nei absoliučios. Šiame darbe gaunama, kad δ svyruoja apie 2-3. Taip pat ieškosime δ , kuri duos stipriausią papildomo kintamumo rodiklio koreliaciją. Patikrinsime Z. Ding, C. W. J. Granger, R. F. Engle [2] gautą

rezultata, kad autokoreliacinė funkcija yra stipriausia, kai $\delta=1$. Skirtingiems kintamumo apibrėžimams gausime, kad laipsnis δ , duodantis stipriausią autokoreliaciją svyruoja tarp 1 ir 1,5 skirtingiems kintamumo apibrėžimams.

1. GRAŽOS

Prieš pradėdant nagrinėti kintamumo modelius, priminsime finansinės gražos sąvoką. Žymėkime p_t vertybinio popieriaus kainą laiko momentu t . Vieno periodo gražą apibrėžkime $r_t = \ln(p_t) - \ln(p_{t-1})$, t.y. naudosime logaritminės gražos apibrėžimą. Logaritminės gražos yra pasirenkamos dėl geresnių savybių, kurių viena pagrindinių yra simetriškumas. Tarkim vieno vertybinio popieriaus kaina yra 100 Lt. Per pirmą laikotarpį vertė nukrenta 20%, o per antrąjį pakyla 20%. Aritmetinės gražos (graža lygi periodo kainos pokyčio ir pradinės kainos santykiui) atveju gautume, kad vertybinio popieriaus kaina antrojo laikotarpio pabaigoje yra lygi 96. Tuo tarpu logaritminės gražos atveju kaina lieka tokia pat, kaip ir periodo pradžioje – 100 Lt. Gražų skaičiavimo metodų skirtumas yra pastebimas, kai kainų pokyčiai yra dideli. Tuo tarpu, kai kainos mažai kinta, abejais metodais paskaičiuotos gražos duoda apytikriai vienodus rezultatus.



1 pav. Aritmetinės ir logaritminės (antrame grafike – raudona spalva) gražos palyginimas S&P500 indeksui. Abejais metodais gražos susitelkusios intervale $[-0,5;0,5]$. Aritmetinės gražos histogramos grafikas

atrodo gan simetriškas, tuo tarpu logaritminis gražos skaičiavimas duoda didesnių neigiamų ir mažesnių teigiamų gražų. Be to, logaritminių gražų vidurkis yra šiek tiek didesnis nei aritmetinių (atitinkamai 0,022% ir 0,016%).

Toliau nagrinėjamuose kintamumo modeliuose naudosime logaritmines gražas. Taip pat darysime prielaidą, kad gražų vidurkis yra lygus 0. Ši prielaida yra pagrįsta, kai nagrinėjamos trumpų laikotarpių gražos, pavyzdžiui, dienos, valandos gražos.

Panaudoję R funkciją `t.test()` patikrinkime hipotezę, kad indekso gražų vidurkis lygus 0.

One Sample t-test

data: p2

t = 4.1833, df = 20086, p-value = 2.885e-05

alternative hypothesis: true mean is not equal to 0

95 percent confidence interval:

0.0001178056 0.0003255282

sample estimates:

mean of x

0.0002216669

Taigi prielaida, kad gražų vidurkis lygus nuliui, neatmetama.

Gražų savybės:

- Sunkios uodegos. Finansinių instrumentų gražos pasižymi sunkesnėmis uodegomis nei normalusis pasiskirstymas, t.y. jų ketvirtas momentas yra didesnis nei 3.
- Gražų autokoreliacijos dažnai yra nereikšmingos, nebent nagrinėtume labai trumpus intervalus (<20 minučių).
- Didinant laiko intervalą gražų skaičiavimui, skirstinys tampa panašesnis į Gauso.

2. KINTAMUMAS

Kintamumas (angl. k. volatility) – tai statistinis rodiklis, nusakantis kainos tendenciją keistis. Trumpu laikotarpiu finansinių instrumentų su dideliu kintamumu kainos svyruoja dideliame intervale, ir atvirksčiai, finansinių instrumentų su žemu kintamumu kainos svyruoja mažesniame intervale.

Kintamumas yra labai svarbus finansų rinkose, nes jis naudojamas vertybinio popieriaus kainos kitimo rizikai bei finansinių instrumentų kainai nustatyti. Pavyzdžiui, kintamumas yra vienas iš žymiosios Black-Scholes formulės, skirtos pasirinkimo sandorių kainoms skaičiuoti, parametrų. Black-Scholes formulė pasirinkimo pirkti sandorio (Call) kainai yra:

$$C(S, T) = S\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2),$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Black-Scholes formulė pasirinkimo parduoti sandorio (Put) kainai yra:

$$P(S, T) = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1),$$

čia S – finansinio instrumento kaina, K – opciono vykdymo kaina, T – terminas iki pasirinkimo sandorio pabaigos, r – nerizikinga palūkanų norma, σ – kintamumas, Φ – standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija.

Praktikoje kintamumas gali būti nustatomas dviem būdais:

- Istorinis kintamumas (historical volatility). Kintamumas vertinamas remiantis istoriniais duomenimis. Dažniausiai kintamumas suvokiamas kaip finansinio instrumento kainos pokyčio standartinis nuokrypis.
- Išvestinis kintamumas (implied volatility). Kintamumas skaičiuojamas iš Black-Scholes formulės pagal faktinę pasirinkimo sandorio kainos vertę rinkoje, sandorio objekto rinkos kainą, įvykdymo kainą ir įvykdymo datą.

Kintamumo charakteristikos ([8], [6])

- **Kintamumas nėra vienareikšmiškai nusakomas dydis.** Pavyzdžiui, dienos kintamumas negali būti nustatytas tiesiogiai: praktikoje įprasta vertybinio popieriaus kaina laikyti tos dienos uždarymo kainą (kainą, už kurią buvo sudarytas paskutinis sandoris biržoje). Taigi kiekvieną dieną turima viena kaina. Tačiau dienos kintamumą

galima skaičiuoti remiantis dienos bėgyje besikeičiančiomis kainomis, pavyzdžiui stebint kainas kas 5 minutes, kas valandą ir pan. Ilgesniu nei dienos laikotarpiu kintamumas priklauso ne tik nuo kiekvienos dienos kintamumo, bet ir svyravimų tarp dienų. Taip nutinka dėl to, kad labai dažnai vienos dienos uždarymo kaina nebūna lygi kitos dienos atidarymo kainai. Šios kainos gali smarkiai skirtis. Kintamumu galime laikyti gražų dispersiją, aukščiausią laikotarpio gražą, gražos atstumą nuo vidurkio ir panašiai.

- **Kintamumas gali vienais laikotarpiais būti gana aukštas, o kitais – žemas.** Tai lemia situacija vertybinių popierių rinkose. Pavyzdžiui, S&P500 indekso mėnesinis kintamumas (gražų standartinis nuokrypis) 2007 metais svyravo 0,9-3,9% ribose, tuo tarpu 1929 metų lapkričio mėnesį kintamumas svyravo 13-16% ribose. Didesnį kintamumą nulėmė situacija JAV finansų rinkoje. Šis laikotarpis dar vadinamas Didžiosios Depresijos laikotarpiu: 1929 metų spalio pabaigoj investuotojai, supratę, kad akcijos yra smarkiai pervertintos, pradėjo paniškai jas pardavinėti. 1929 metų pabaigoje dėl šios krizės akcijų kapitalizacija sumažėjo 16 trilijonų JAV dolerių.

- **Kintamumo šuoliai yra reti, jis nediverguoja.** Šuoliai galimi tik esant labai dideliems vertybinių popierių kainų svyravimams. Be to, kintamumas kinta tik tam tikram intervale. Tarkim Vilniaus Vertybinių Popierių biržoje leidžiamas ne didesnis kaip 15% kainos pokytis per dieną. Didesnis kainos pokytis galimas tik labai išskirtiniais atvejais. Statistiškai šnekant, ši savybė reiškia, kad dažnai kintamumas yra stacionarus (jo vidurkis ir dispersija yra pastovūs).

- **Kintamumas skirtingai reaguoja į didelius kainų kritimus ir didelius augimus.** Tai galima paaiškinti faktu, jog vertybinio popieriaus kainai, kuri lygi 100 litų, nukritus 50% (iki 50 litų), reikia priaugti 100%, kad kaina vėl siektų 100 litų. Jei vertybinis popierius vieną dieną nukristų 50%, o kitą išaugtų 50%, tai jo kaina būtų lygi tik 75 litams.

Panagrinėkime skirtingus kintamumo apibrėžimo būdus. Kiekvienu iš jų atveju, šalia nagrinėsime pagalbinį kintamumo rodiklį $|r_t|^\delta$, kai $\delta > 0$, t.y. jį naudosime kaip alternatyvų kintamumo apibrėžimo būdą. Bandysime ieškoti „geriausios“ δ reikšmės.

3. KINTAMUMO APIBRĖŽIMO BŪDAI DISKREČIU LAIKU

Šiame darbe nagrinėsime kelis modelius kintamumui apibrėžti:

- GARCH(1,1) - apibendrintą autoregresijos sąlyginio heteroskedastiškumo (angl., Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) modelį
- Stochastinio kintamumo (angl., Stochastic Volatility model) modelį
- EGARCH – eksponentinį GARCH modelį (angl., Exponential GARCH)
- APARCH(1,1) – asimetrinį laipsninį ARCH modelį (angl., Asymmetric Power ARCH)

3.1. GARCH(1,1) MODELIS

Pradžioj apibrėžkime bendrą GARCH(p,q) modelį.

$$r_t = \mu + a_t, \text{ kur } a_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

$$\sigma_t^2 = \alpha + \sum_{i=1}^p \beta_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \gamma_j \sigma_{t-j}^2,$$

čia σ_t - kintamumas; $\{\varepsilon_t\}$ yra nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių dydžių seka su vidurkiu 0 ir dispersija 1; σ_t ir ε_t yra tarpusavyje nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai; $\alpha > 0$, $\beta_i, \gamma_j \geq 0$ ir

$\sum_{i=1}^p \beta_i + \sum_{j=1}^q \gamma_j < 1$. Pastaroji sąlyga būtina σ_t^2 stacionarumui užtikrinti. Kai $q=0$, modelis

vadinamas ARCH(p).

Prisiminkime, jog padarėme papildomą prielaidą, kad $\mu = 0$. Taigi GARCH(1,1) modelis užrašomas taip:

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$
$$\sigma_t^2 = \alpha + \beta r_{t-1}^2 + \gamma \sigma_{t-1}^2.$$

Kintamumo raida nusakoma paprasta parametrine funkcija. Iš modelio struktūros matome, kad didelė grąža r_{t-1} ir/arba didelis kintamumas σ_{t-1} , nulemia didelį kintamumą σ_t . Tai reiškia, kad po didelių kainų šuolių dažnai seka kiti dideli kainų šuoliai.

Iš kintamumo savybių intuityviai galime spręsti, kad parametras α yra artimas nuliui, t.y. kintamumą nusako gražos ir buvusios kintamumo reikšmės. Parametras γ turėtų būti artimas vienetui, nes kintamumo šuoliai mažai tikėtini.

Nesunku parodyti (žr. A priedą), kad šios lygčių sistemos neneigiamas sprendinys yra

$$\sigma_t = \sqrt{\alpha} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i (\gamma + \beta \varepsilon_{t-j}^2)}.$$

3.1.1. Standartinis normalusis triukšmo sekos pasiskirstymo atvejis

Tarkime, kad $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. Tirsime kintamumo savybes bei ieškosime papildomo kintamumo rodiklio $|r_t|^\delta$ „geriausio“ laipsnio.

3.1.1.1. Momentai

Patogumo dėlei, pateiksime kai kurias GARCH(1,1) modelio savybes.

- $Er_t = E(\varepsilon_t \sigma_t) = E\varepsilon_t E\sigma_t = 0$
- $E\sigma_t^2 = \alpha + \beta Er_{t-1}^2 + \gamma E\sigma_{t-1}^2 = \alpha + \beta E(\sigma_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2) + \gamma E\sigma_{t-1}^2 = \alpha + (\beta + \gamma) E\sigma_{t-1}^2$

Iš stacionarumo gauname, kad $E\sigma_t^2 = \frac{\alpha}{1 - \beta - \gamma}$, kai $\beta + \gamma < 1$.

- $E\sigma_t^4 = E(\alpha + (\beta \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma) \sigma_{t-1}^2)^2 = \alpha^2 + 2\alpha(\beta + \gamma) E\sigma_{t-1}^2 + (3\beta^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2) E\sigma_{t-1}^4$

$$E\sigma_t^4 = \frac{\alpha^2 + 2\alpha(\beta + \gamma) \frac{\alpha}{1 - \beta - \gamma}}{1 - (\beta + \gamma)^2 - 2\beta^2} = \frac{\alpha^2(1 + \beta + \gamma)}{(1 - \beta - \gamma)(1 - (\beta + \gamma)^2 - 2\beta^2)}, \text{ kai patenkinta antro}$$

momento egzistavimo sąlyga ir $(\beta + \gamma)^2 + 2\beta^2 < 1$.

- $\frac{E(\sigma_t^4)}{[E(\sigma_t^2)]^2} = \frac{\alpha^2(1 + \beta + \gamma)}{(1 - \beta - \gamma)(1 - (\beta + \gamma)^2 - 2\beta^2)} \frac{(1 - \beta - \gamma)^2}{\alpha^2} = \frac{1 - (\beta + \gamma)^2}{1 - (\beta + \gamma)^2 - 2\beta^2}$

$$\frac{E(r_t^4)}{[E(r_t^2)]^2} = \frac{3(1 - (\beta + \gamma)^2)}{1 - (\beta + \gamma)^2 - 2\beta^2} > 3, \text{ t.y. GARCH proceso uodegos yra sunkesnės nei}$$

normaliojo pasiskirstymo.

Analogiškai galima skaičiuoti lyginių laipsnių momentus, bet skaičiavimai darosi sudėtingi.

S. Ling ir M. McAleer [7] rado bendrą kintamumo momentų išraišką visiems lyginiams

laipsniams. C. He ir T. Terasvirta [4] gavo teigiamų sveikų kintamumo momentų išraišką. Ši išraiška gana sudėtinga. Perrašykime kintamumo momentus taip:

$$E\sigma_t^\delta = E\left(\alpha + \alpha \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i (\gamma + \beta \varepsilon_{t-j}^2)\right)^{\delta/2}, \delta > 0.$$

Kadangi bendrą išraišką visiems teigiamiems kintamumo momentams gauti sudėtinga, tolesnėje analizėje juos paskaičiuosime naudodami didžiųjų skaičių dėsnį (Monte-Carlo metodu).

Įvertinkime mūsų modelio parametrus S&P 500 indekso duomenims. R programoje funkcija `garch.fit()` įvertina GARCH(p,q) modelio parametrus esamiems duomenims.

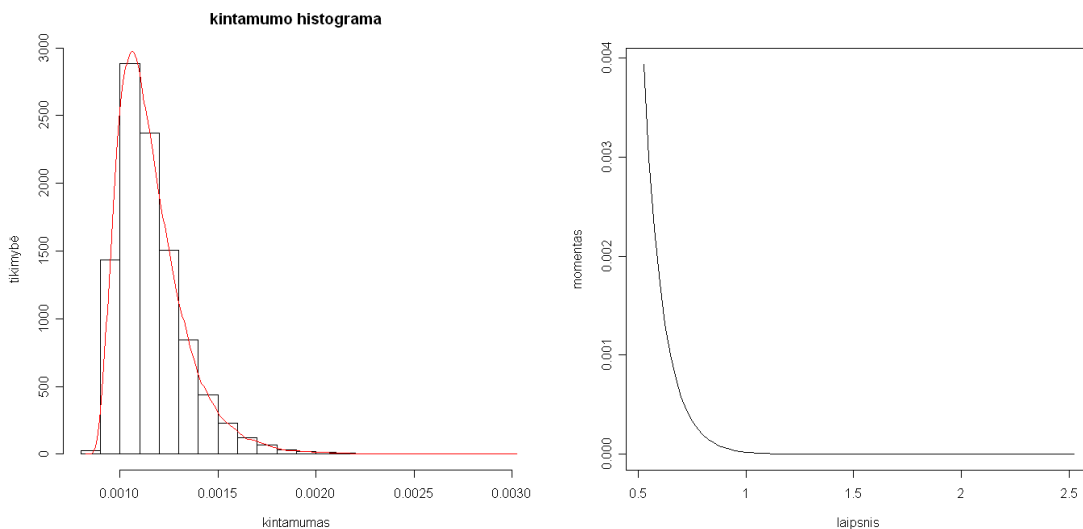
$a0$	$a1$	$b1$
$1.38254e-07$	$8.45194e-02$	$9.13166e-01$

Taigi, modelyje naudosime tokius koeficientus: $\alpha = 1,3825 \cdot 10^{-7}$, $\beta = 8,4519 \cdot 10^{-2}$, $\gamma = 9,1317 \cdot 10^{-1}$. Pastebėkime, kad $\beta + \gamma < 1$, t.y. sąlyga kintamumo stacionarumui yra patenkinta. Tačiau sąlyga ketvirto momento egzistavimui, nepatenkinta. Taip pat pastebėkime, kad didžiausią įtaką kintamumui turi buvusi kintamumo reikšmė, o buvusi grąža žymiai mažiau įtakoja kintamumo reikšmę. Parametras α arti nulio, t.y. kintamumą nusako buvęs kintamumas ir buvusi grąža. Taigi, kintamumo šuoliai yra mažai tikėtini.

Momentams paskaičiuoti, modeliuosime kintamumą pagal jo sprendinio išraišką.

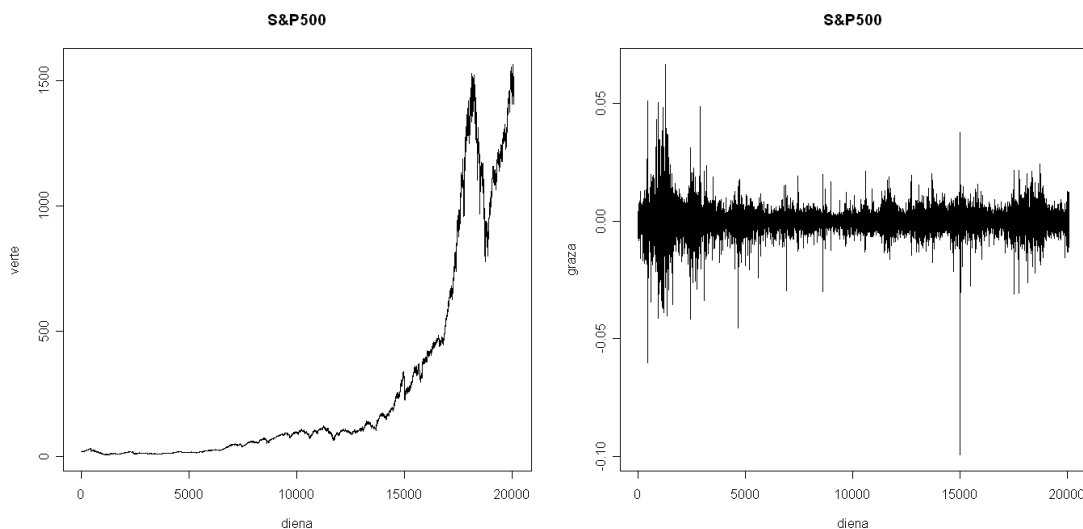
$$\sigma_t^2 = \alpha + \alpha \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i (\gamma + \beta \varepsilon_{t-j}^2)$$

Sugeneruosime 100000 σ_t^2 kintamumo reikšmių. Pabraižysime gautoms σ_t reikšmėms histogramą.



2 pav. Kintamumo histograma ir kintamumo momentai.

Didelės kintamumo reikšmės yra mažai tikėtinos. Iš tikrųjų, jei pažiūrėsime į indekso bei jo gražos grafikus matysime, kad vertė smarkiai svyravo trumpais periodais.



3 pav. S&P 500 indeksas bei jo logaritminės gražos

Taip pat paskaičiuokime kintamumo momentus, remdamiesi didžiuoju skaičių dėsnium. Matome, kad kintamumo momentai mažėja, didėjant laipsniui.

Dabar, kai turime visus reikalingus duomenis, bandysime ieškoti geriausiai kintamumą nusakančio $|r_t|^\delta$ laipsnio δ .

3.1.1.2. Vidutinė kvadratinė paklaida

Vidutinė kvadratinė paklaida (angl., Mean Squared Error), kurią toliau žymėsime MSE, yra vienas iš būdų patikrinti įvertinių gerumą. Jei θ yra ieškomas parametras, o $\hat{\theta}$ jo įvertinys, tai $MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$.

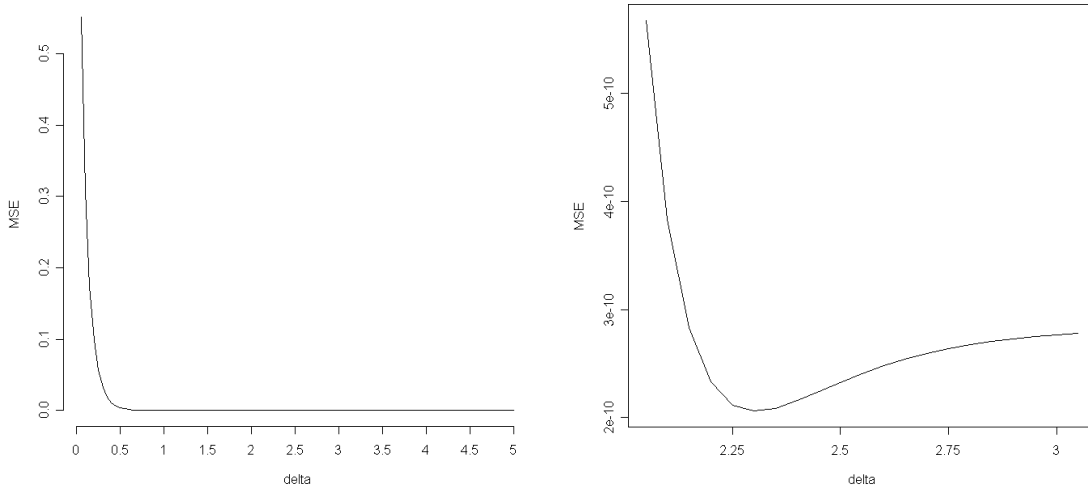
Bandykime paskaičiuoti MSE mūsų modeliui.

$$MSE(|r_t|^\delta) = E(|r_t|^\delta - \sigma_t^2)^2 = E(|\varepsilon_t|^\delta \sigma_t^\delta - \sigma_t^2)^2 = E|\varepsilon_t|^{2\delta} E\sigma_t^{2\delta} - 2E|\varepsilon_t|^\delta E\sigma_t^{\delta+2} + E\sigma_t^4.$$

Nesunkiai galime gauti, kad $E|\varepsilon_t|^\delta = \frac{2^{\delta/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right)$ (įrodymas pateiktas B priede). Taigi,

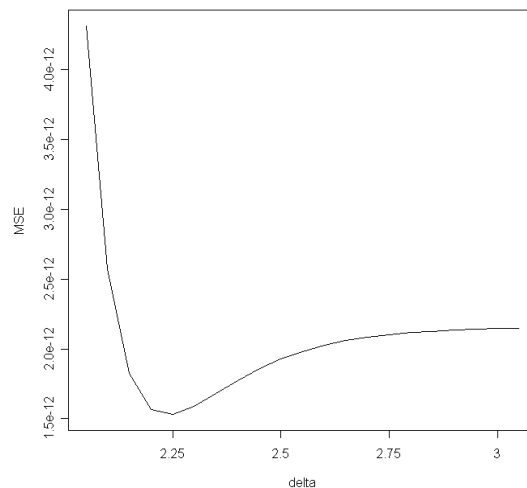
$$MSE(r_t | \delta) = \frac{2^\delta}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{2\delta+1}{2}\right) E\sigma_t^{2\delta} - 2 \frac{2^{\delta/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right) E\sigma_t^{\delta+2} + E\sigma_t^4. \text{ Pažymėkime } f(\delta) = MSE(r_t | \delta) \text{ ir}$$

pabraižykime grafiką sugeneruotiems duomenims, t.y. pasinaudoję didžiųjų skaičių dėsnium, rasime kintamumo momentus ir įsistatysime juos į MSE formulę.



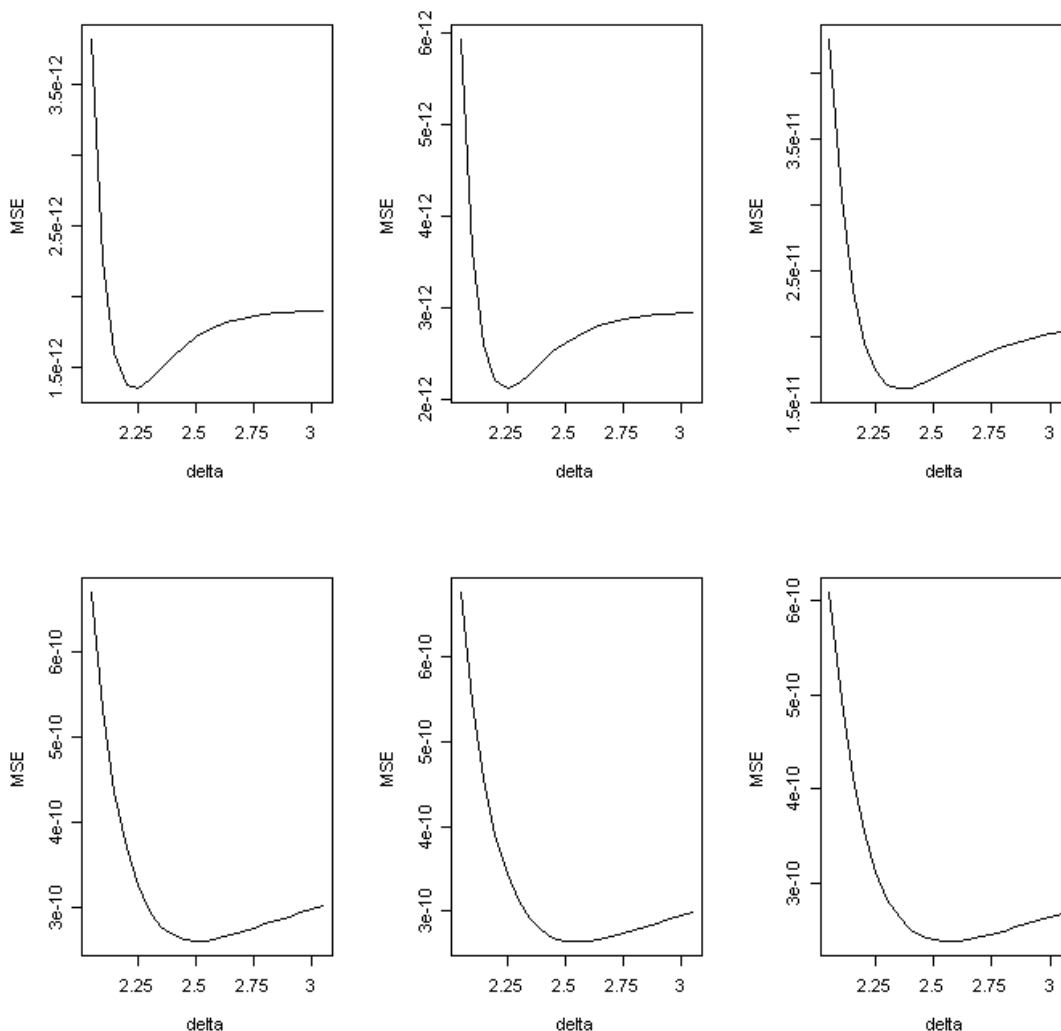
4 pav. Vidutinė kvadratinė paklaida.

Pastebėkime, kad MSE formulėje mums reikia kintamumo ketvirto momento, kuris pagal modelio prielaidas ir įvertintus parametrus, neegzistuoja. Pakeiskime koeficientus į $\beta = 0,1$, $\gamma = 0,8$. Nesunku patikrinti, kad dabar ne tik ketvirto, bet ir šešto momento sąlyga yra patenkinta. Sugeneruokime 100000 kintamumo reikšmių ir paskaičiuokime MSE.



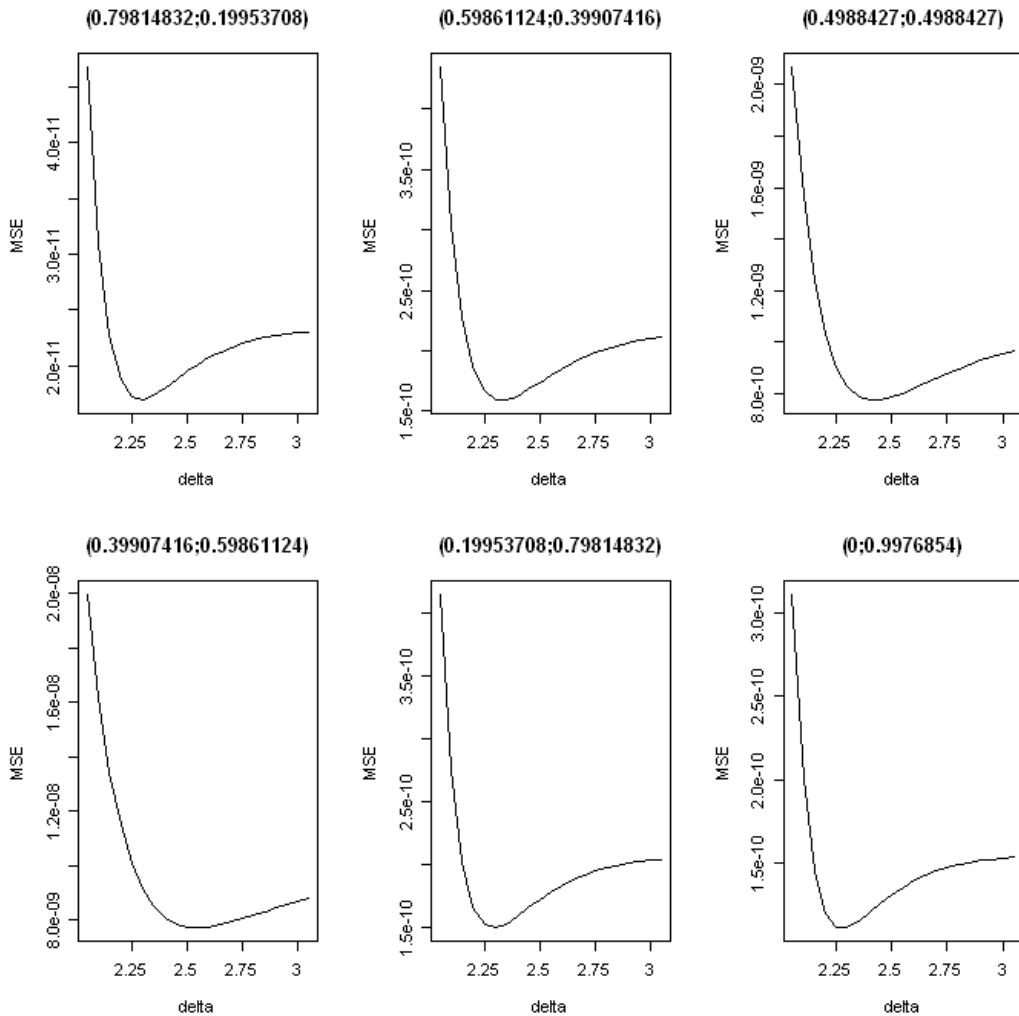
5 pav. MSE naujam modeliui

Taigi pagal MSE geriausias δ yra apie 2,25. Palyginus šį δ su prieš tai apskaičiuotu, matome, kad jis šiek tiek mažesnis. Pažiūrėkime, kaip šis δ kis, jei keisime parametrų β ir γ reikšmes, nekeisdami jų sumos reikšmės.



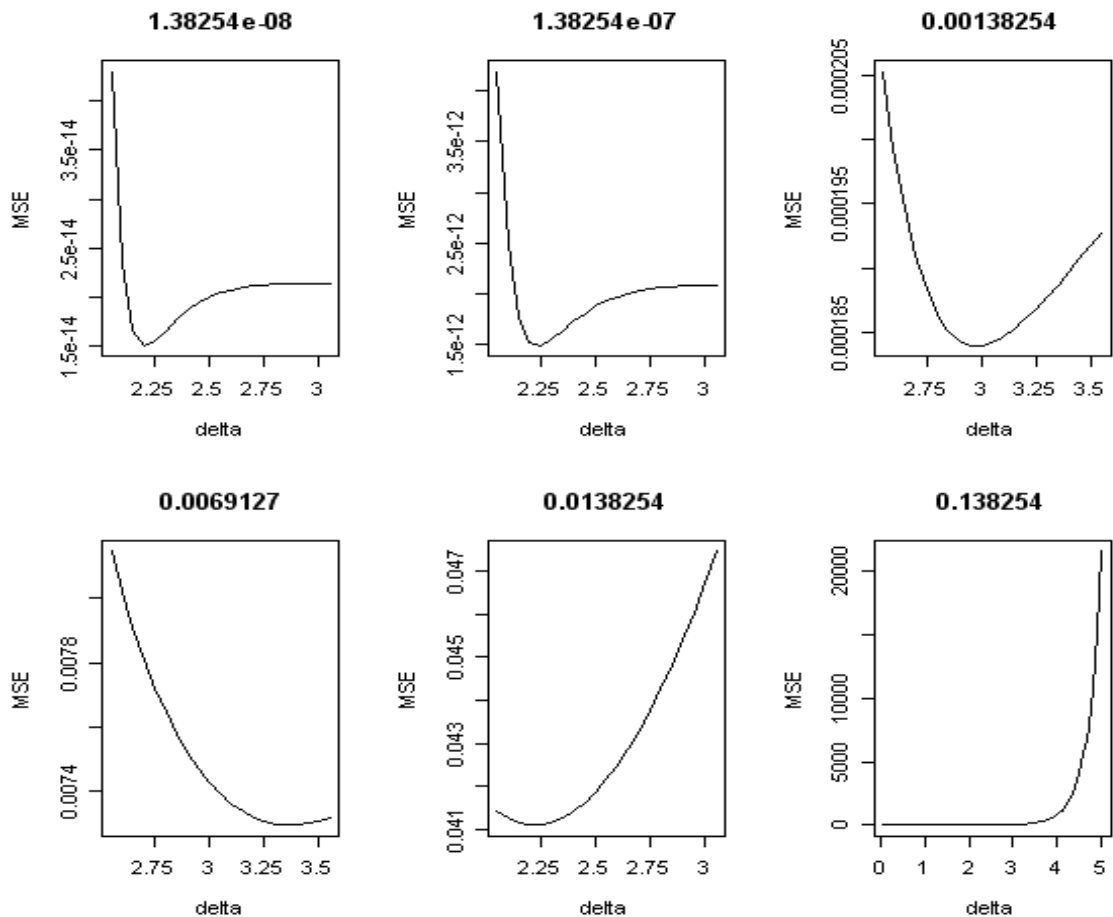
6 pav. MSE skirtingiems (β, γ) rinkiniams: $(0;0,9)$, $(0,18;0,72)$, $(0,36;0,54)$, $(0,54;0,36)$, $(0,72;0,18)$, $(0,9;0)$.

Taigi, matome, kad δ , minimizuojantis MSE, svyruoja nuo 2,25 iki 2,6 ir jis didėja, didėjant β . Dabar pažiūrėkime, kaip atrodo šie grafikai, nubraižius pagal senus koeficientus. Kaip matome, parametrų reikšmių keitimas duoda visiškai kitokius rezultatus. Nebelieka tendencijos, kad δ didėja, didėjant β . Kaip jau pastebėjom, modelis išsikraipo, nes nepatenkintos momentų egzistavimo sąlygos.



7 pav. MSE skirtingiems (β, γ) rinkiniams. Matome, kad δ , minimizuojantis MSE, didėja pirmuose keturiuose grafikuose. ir mažėja likusiuose dviejuose grafikuose. δ , minimizuojantis MSE, svyruoja nuo 2,25 iki 2,6.

Pažiūrėkime kaip kinta δ , kai keičiame α , o $\beta + \gamma = 0,9$ (žr. 8 pav.). Matome, kad α didėjant iki tam tikros reikšmės, nemažesnės nei 0,0069, δ didėja. Kai α „pakankamai“ didelis ir didėja, tai δ mažėja. Tačiau reikia pastebėti, kad didelis α yra mažai tikėtinas, nes tai reikštų, kad kintamumas mažai priklauso nuo grąžų ir buvusio kintamumo reikšmių.



8 pav. MSE skirtingoms α reikšmėms.

3.1.1.3. Autokoreliacinė funkcija

Atsitiktinio proceso $|r_t|^\delta$ t atsilikimo (angl., lag) autokoreliacinė funkcija nusako koreliacijos koeficientą tarp $|r_t|^\delta$ ir $|r_0|^\delta$. Apibrėžkime autokoreliacinę funkciją:

$$ACF(\delta, t) = \frac{Cov(|r_t|^\delta, |r_0|^\delta)}{D|r_t|^\delta}.$$

Ši funkcija yra gerai apibrėžta, kai jos reikšmės yra intervale $[-1, 1]$. Z. Ding, C. W. J. Granger, R. F. Engle [1] parodė, kad autokoreliacinė funkcija yra stipriausia, kai $\delta=1$. Pabandykime patikrinti šį faktą.

Panagrinėkime autokoreliacinės funkcijos elgesį. Pradžioje išsireikškime ACF per σ_t ir $|\varepsilon_t|$. Pasinaudoję stacionarumu ir nepriklausomumu, gausime, kad

$$\begin{aligned} Cov(|r_t|^\delta, |r_0|^\delta) &= Cov(|\varepsilon_t|^\delta \sigma_t^\delta, |\varepsilon_0|^\delta \sigma_0^\delta) = E(|\varepsilon_t|^\delta \sigma_t^\delta | \varepsilon_0 |^\delta \sigma_0^\delta) - E(|\varepsilon_t|^\delta \sigma_t^\delta) E(|\varepsilon_0|^\delta \sigma_0^\delta) = \\ &= \left(E|\varepsilon_t|^\delta \right)^2 \left[E(\sigma_t^\delta \sigma_0^\delta) - (E\sigma_t^\delta)^2 \right]. \end{aligned}$$

Mums reikia $E(\sigma_t^\delta \sigma_0^\delta)$ išraiškos. Išsireikškime σ_t^2 per σ_0^2 .

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha + \beta r_{t-1}^2 + \gamma \sigma_{t-1}^2 = \alpha + (\beta \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma) \sigma_{t-1}^2 = \alpha + (\beta \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma) (\alpha + (\beta \varepsilon_{t-2}^2 + \gamma) \sigma_{t-2}^2) = \dots = \\ &= \alpha \left(1 + \sum_{j=1}^{t-1} \prod_{i=1}^j (\beta \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma) \right) + \sigma_0^2 \prod_{i=1}^t (\beta \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma), \text{ kai } t > 1. \end{aligned}$$

$$\sigma_t^2 \sigma_0^2 = \sigma_0^2 \alpha \left(1 + \sum_{j=1}^{t-1} \prod_{i=1}^j (\beta \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma) \right) + \sigma_0^4 \prod_{i=1}^t (\beta \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma), \text{ kai } t > 1 \text{ ir}$$

$$\sigma_t^2 \sigma_0^2 = \alpha \sigma_0^2 + (\beta \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma) \sigma_0^4, \text{ kai } t=1.$$

$$\text{Tai } E(\sigma_t^\delta \sigma_0^\delta) = E \left[\sigma_0^2 \alpha \left(1 + \sum_{j=1}^{t-1} \prod_{i=1}^j (\beta \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma) \right) + \sigma_0^4 \prod_{i=1}^t (\beta \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma) \right]^{\delta/2}, \text{ kai } t > 1 \text{ ir}$$

$$E(\sigma_t^\delta \sigma_0^\delta) = E(\alpha \sigma_0^2 + (\beta \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma) \sigma_0^4)^{\delta/2}, \text{ kai } t=1.$$

Pastebėkime, kad egzistuoūtų $\sigma_t \sigma_0$ antras momentas, reikia, kad egzistuoūtų ketvirtas σ_t momentas, kad egzistuoūtų $\sigma_t^\delta \sigma_0^\delta$, reikia, kad egzistuoūtų $\sigma_t^{2\delta}$ momentas. Kai δ nėra lyginis skaičius, momentus paskaičiuoti darosi labai sudėtinga, todėl sunku rasti sąlygas, kurios turi būti tenkinamos, kad šie momentai egzistuoūtų.

$$Cov(|r_1|^\delta, |r_0|^\delta) = \frac{2^\delta}{\pi} \Gamma^2 \left(\frac{\delta+1}{2} \right) \left[E(\alpha \sigma_0^2 + (\beta \varepsilon_0^2 + \gamma) \sigma_0^4)^{\delta/2} - (E\sigma_1^\delta)^2 \right]$$

$$Cov(|r_t|^\delta, |r_0|^\delta) = \frac{2^\delta}{\pi} \Gamma^2 \left(\frac{\delta+1}{2} \right) \left[E \left[\sigma_0^2 \alpha \left(1 + \sum_{j=1}^{t-1} \prod_{i=1}^j (\beta \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma) \right) + \sigma_0^4 \prod_{i=1}^t (\beta \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma) \right]^{\delta/2} - (E\sigma_t^\delta)^2 \right],$$

kai $t > 1$.

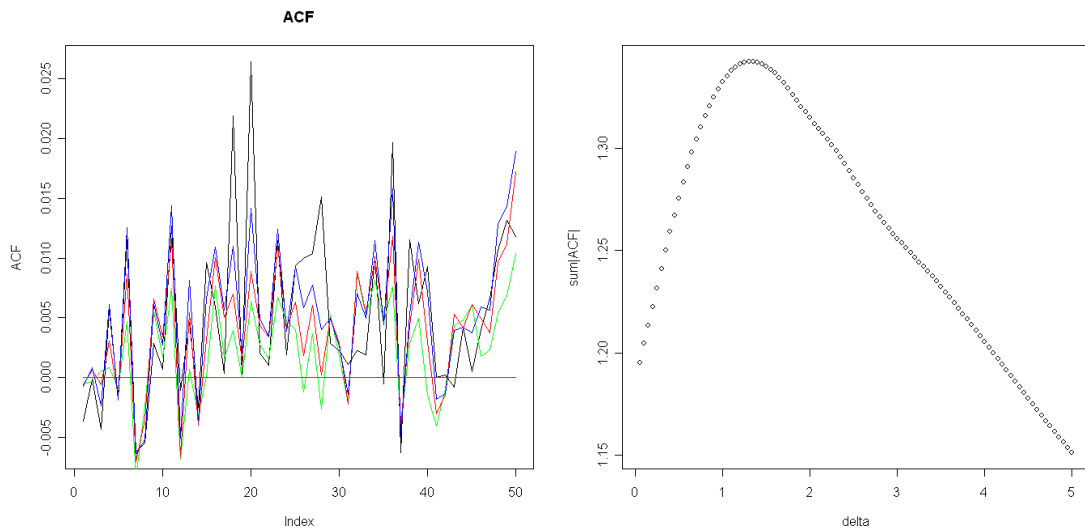
Taigi, turint kovariacijos išraišką, belieka rasti $|r_t|^\delta$ dispersiją.

$$D|r_t|^\delta = E|\varepsilon_t|^{2\delta} E\sigma_t^{2\delta} - \left(E|\varepsilon_t|^\delta \right)^2 (E\sigma_t^\delta)^2$$

Pažiūrėkime, kaip tokiu atveju atrodys funkcija

$$f(\delta) = \sum_k |ACF(\delta, k)|.$$

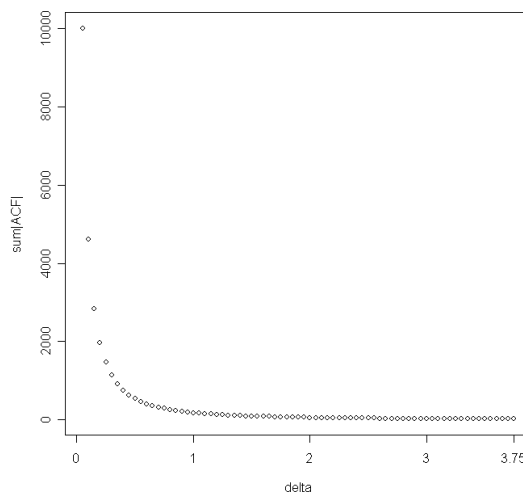
Sumodeliuotoms gražoms pagal GARCH(1,1) modelį su parametrais, gautais iš S&P 500 duomenų, ši funkcija pasiekia maksimumą, kai $\delta = 1$.



9 pav. Modelio pagal S&P 500 duomenis ACF. Pirmame paveikslėlyje juodos spalvos linija nupiešta ACF, kai $\delta = 2$, mėlynos - 1, raudonos - 0,5, žalios - 0,05.

Matome, kad duomenims, sugeneruotiems pagal modelio parametrus, paskaičiuotus remiantis S&P 500 duomenimis, autokoreliacija stipriausia, kai $\delta \leq 1,2$.

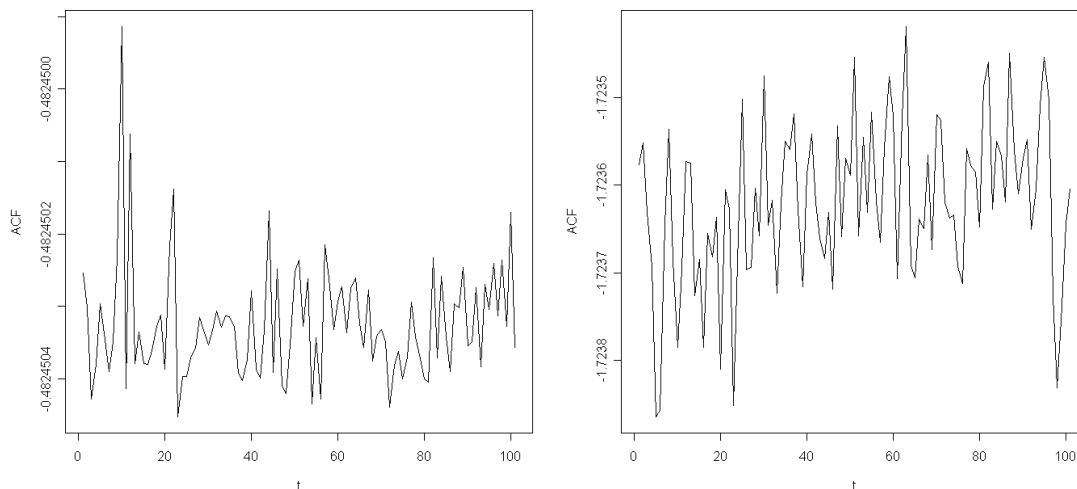
Pabandykime paskaičiuoti šią funkciją, taikydami didžiųjų skaičių dėsnį 100000 sumodeliuotų kintamumo reikšmių pagal naujai pasiūlytus parametrus.



10 pav. Absoliučią autokoreliacijos funkcijos reikšmių sumas

Kaip matome, kai $\delta \rightarrow 0, f(\delta) \rightarrow \infty$. Tai gali reikšti, jog momentai neegzistuoja, t.y. $E|r_t|^\delta = \infty$. Kadangi neturime bendros kintamumo momentų išraiškos, negalime patikrinti visų momentų egzistavimo sąlygų. Net jeigu $\beta = 0,01, \gamma = 0,08$, gauname tuos pačius rezultatus. Pabraižę ACF, kai $\delta = 2$, matome, kad jos reikšmės patenka į intervalą nuo -1 ir 1 . Tačiau

pabraižę ACF, kai $\delta = 1$, pamatysime, kad reikšmės nepatenka į intervalą nuo -1 iki 1. Tai irgi gali reikšti, kad momentų egzistavimo sąlyga nėra patenkinta.



11 pav. Autokoreliacinės funkcijos. Pirmame grafike – kvadratinų gražų autokoreliacija, antrame - absoliučių.

3.1.2. Standartinis Stjudento triukšmo sekos pasiskirstymo atvejis

Panagrinėkime atvejį, kai ε_t pasiskirstęs pagal standartizuotą Stjudento-t pasiskirstymą, t.y.

$$\varepsilon_t = \sqrt{\frac{v-2}{v}} \eta_t, \text{ kur } \eta_t \sim Stj(v).$$

3.1.2.1. Momentai

Pažiūrėkime kaip pasikeičia momentai, pakeitus triukšmo sekos pasiskirstymą.

- $E r_t = E(\varepsilon_t \sigma_t) = E \varepsilon_t E \sigma_t = 0$
- $E \sigma_t^2 = \alpha + \beta E r_{t-1}^2 + \gamma E \sigma_{t-1}^2 = \alpha + \beta E(\sigma_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2) + \gamma E \sigma_{t-1}^2 = \alpha + (\beta + \gamma) E \sigma_{t-1}^2$

Iš stacionarumo gauname, kad $E \sigma_t^2 = \frac{\alpha}{1 - \beta - \gamma}$, kai $\beta + \gamma < 1$.

- $E \sigma_t^4 = E(\alpha + (\beta \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma) \sigma_{t-1}^2)^2 = \alpha^2 + 2\alpha(\beta + \gamma) E \sigma_{t-1}^2 +$

$$+ \left(\left(2 + \frac{6}{v-4} \right) \beta^2 + (\beta + \gamma)^2 \right) E\sigma_{t-1}^4$$

$$E\sigma_t^4 = \frac{\alpha^2 + 2\alpha(\beta + \gamma) \frac{\alpha}{1-\beta-\gamma}}{1 - (\beta + \gamma)^2 - \left(2 + \frac{6}{v-4} \right) \beta^2} = \frac{\alpha^2(1 + \beta + \gamma)}{(1 - \beta - \gamma) \left(1 - (\beta + \gamma)^2 - \left(2 + \frac{6}{v-4} \right) \beta^2 \right)}, \text{ kai}$$

patenkinta antro momento egzistavimo sąlyga ir $(\beta + \gamma)^2 + \left(2 + \frac{6}{v-4} \right) \beta^2 < 1$.

$$\bullet \frac{E(\sigma_t^4)}{[E(\sigma_t^2)]^2} = \frac{\alpha^2(1 + \beta + \gamma)}{(1 - \beta - \gamma) \left(1 - (\beta + \gamma)^2 - \left(2 + \frac{6}{v-4} \right) \beta^2 \right)} \frac{(1 - \beta - \gamma)^2}{\alpha^2} =$$

$$= \frac{1 - (\beta + \gamma)^2}{1 - (\beta + \gamma)^2 - \left(2 + \frac{6}{v-4} \right) \beta^2}$$

$$\frac{E(r_t^4)}{[E(r_t^2)]^2} = \frac{3(1 - (\beta + \gamma)^2)}{1 - (\beta + \gamma)^2 - \left(2 + \frac{6}{v-4} \right) \beta^2} > 3, \text{ jei } v > 4, \text{ t.y. GARCH proceso uodegos yra}$$

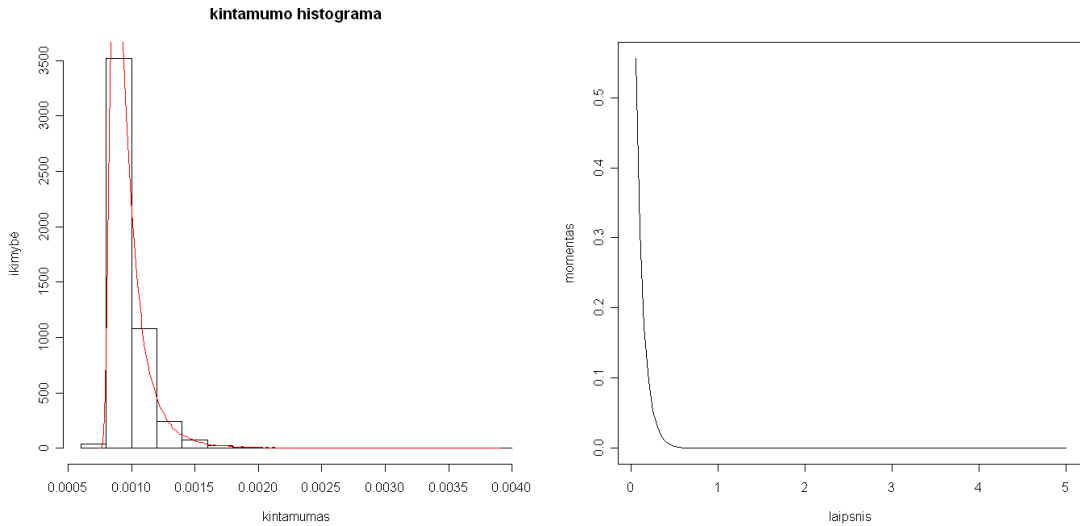
sunkesnės nei normaliojo pasiskirstymo.

Panaudokime R funkciją `garchFit()`, kuri įvertina GARCH modelio parametrus. Įvertinkime modelio parametrus S&P 500 indekso duomenims.

<i>omega</i>	<i>alpha1</i>	<i>beta1</i>	<i>shape</i>
1.16224e-07	7.23438e-02	9.24427e-01	6.12163e+00

Taigi, modelyje naudosime tokius koeficientus: $\alpha = 1,1622 * 10^{-7}$, $\beta = 7,2344 * 10^{-2}$, $\gamma = 9,2443 * 10^{-1}$ ir $v = 6,1216$ (čia v yra Stjudento pasiskirstymo laisvės laipsniai). Pastebėkime, kad $\beta + \gamma < 1$, t.y. sąlyga kintamumo stacionarumui yra patenkinta. Tačiau kaip ir ankstesniu atveju, ketvirto momento egzistavimo sąlyga nėra patenkinta. Todėl papildomai nagrinėsime modelį su patenkinta ketvirto ir šešto momento sąlygomis ($\beta = 0,1$, $\gamma = 0,8$).

Vėl sugeneruokime kintamumą ir paskaičiuokime, jo momentus.



12 pav. Kintamumo histograma ir momentai.

Kaip ir standartinio normaliojo triukšmo sekos pasiskirstymo atveju, didelės kintamumo reikšmės yra mažai tikėtinos.

3.1.2.2. Vidutinė kvadratinė paklaida

Pažiūrėkime kaip pasikeičia δ , minimizuojantis MSE, kai triukšmo seka pasiskirsčiusi pagal standartinį Stjudento pasiskirstymą..

Iš pradžių pastebėkime, kad standartinio Stjudento triukšmo sekos pasiskirstymo atveju

$$E|\varepsilon_t|^\delta = \frac{(v-2)^{\delta/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v-\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}, \text{ kai } v > \delta \text{ (įrodymas pateiktas D priede).}$$

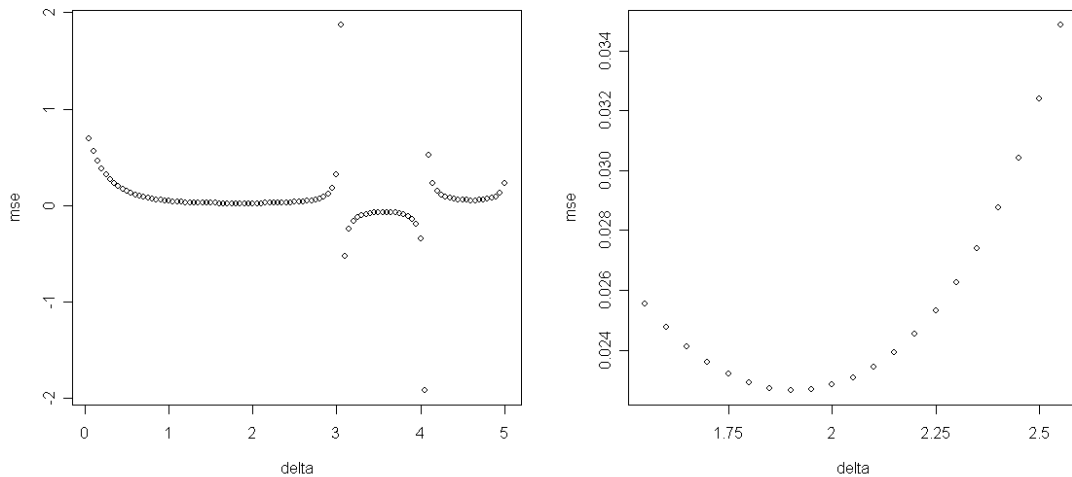
Taigi,

$$MSE(r_t|^\delta) = \frac{(v-2)^\delta}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{2\delta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v-2\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} E\sigma_t^{2\delta} - 2 \frac{(v-2)^{\delta/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v-\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} E\sigma_t^{\delta+2} + E\sigma_t^4, \text{ kai}$$

$v > 2\delta$.

Pabraižykime šią funkciją, panaudoję didžiųjų skaičių dėsnį ir įvertintus modelio parametrus.

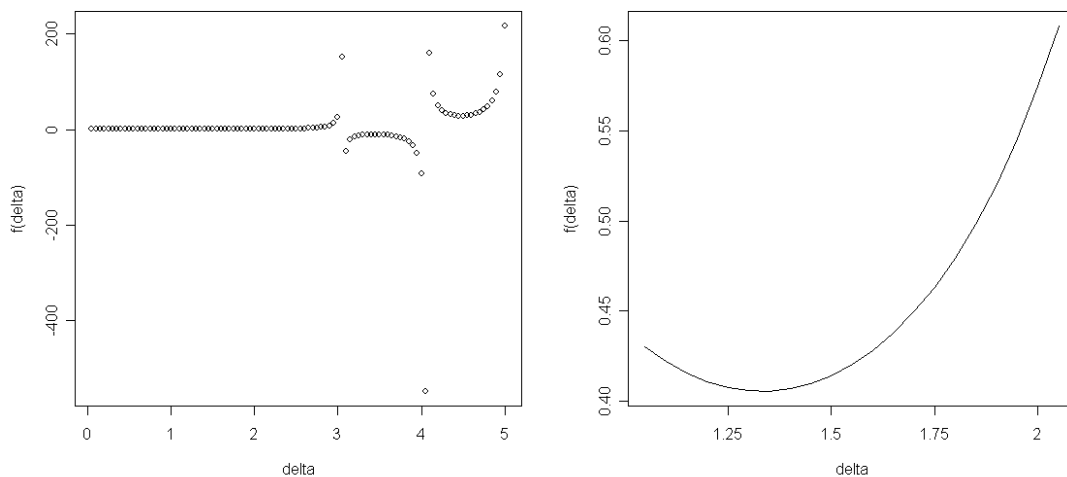
13 pav. matome kad ši funkcija turi du trūkio taškus.



13 pav. Vidutinė kvadratinė paklaida. MSE turi trūkio taškų.

Iš MSE išraiškos galime numanyti, jog šie trūkio taškai atsiranda dėl Gamma funkcijos. Kad

tuo įsitikintume, panagrinėkime funkciją $g(\delta) = \frac{\Gamma\left(\delta + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu - 2\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$.

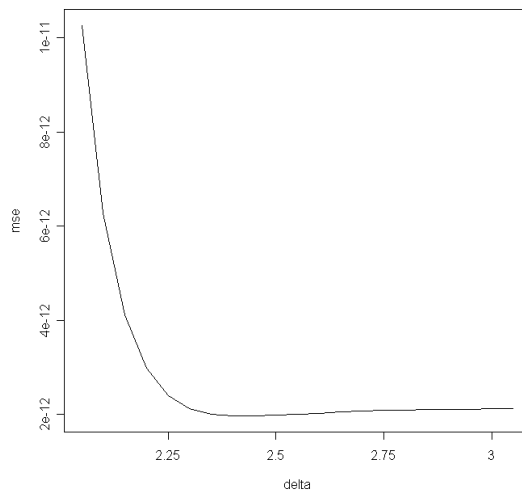


14 pav. Funkcijos $g(\delta)$ grafikas.

Matome, kad ši funkcija turi tuos pačius trūkio taškus, kaip ir MSE. Tačiau svarbu nepamiršti sąlygos, kad $\nu > 2\delta$. Iš jos išplaukia, kad $\delta < \frac{\nu}{2} \approx 3$. Taigi, δ , minimizuojantis MSE yra apie

1.9. Norėdami palyginti gautus rezultatus su δ standartinio normaliojo triukšmo sekos pasiskirstymo atveju, prisiminkime, jog darėme prielaidą, kad kintamumas yra stacionarus.

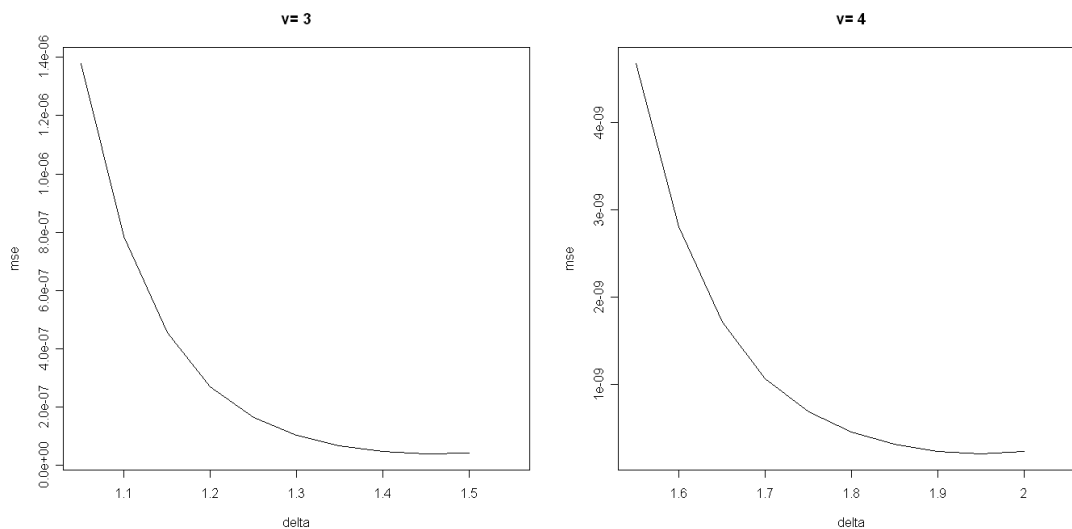
Todėl panaudokime šioje formulėje tas pačias momentų reikšmes, kurias naudojome buvusiuose MSE skaičiavimuose.

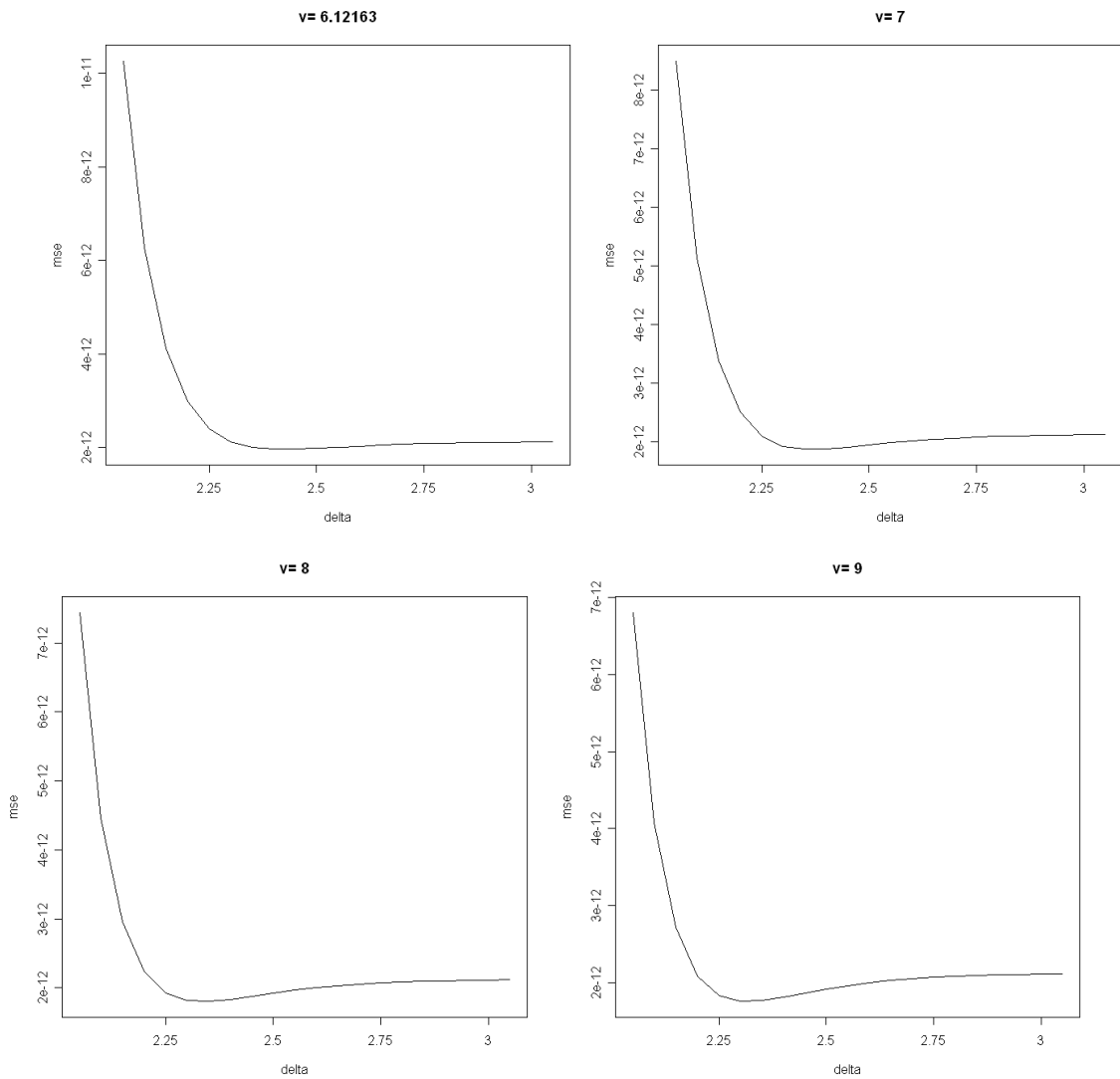


15 pav. Vidutinė kvadratinė paklaida

Matome, kad δ šiek tiek didesnis, apie 2,4.

Panagrinėkime kas nutinka, kai mes keičiame Stjudento laisvės laipsnių skaičių.



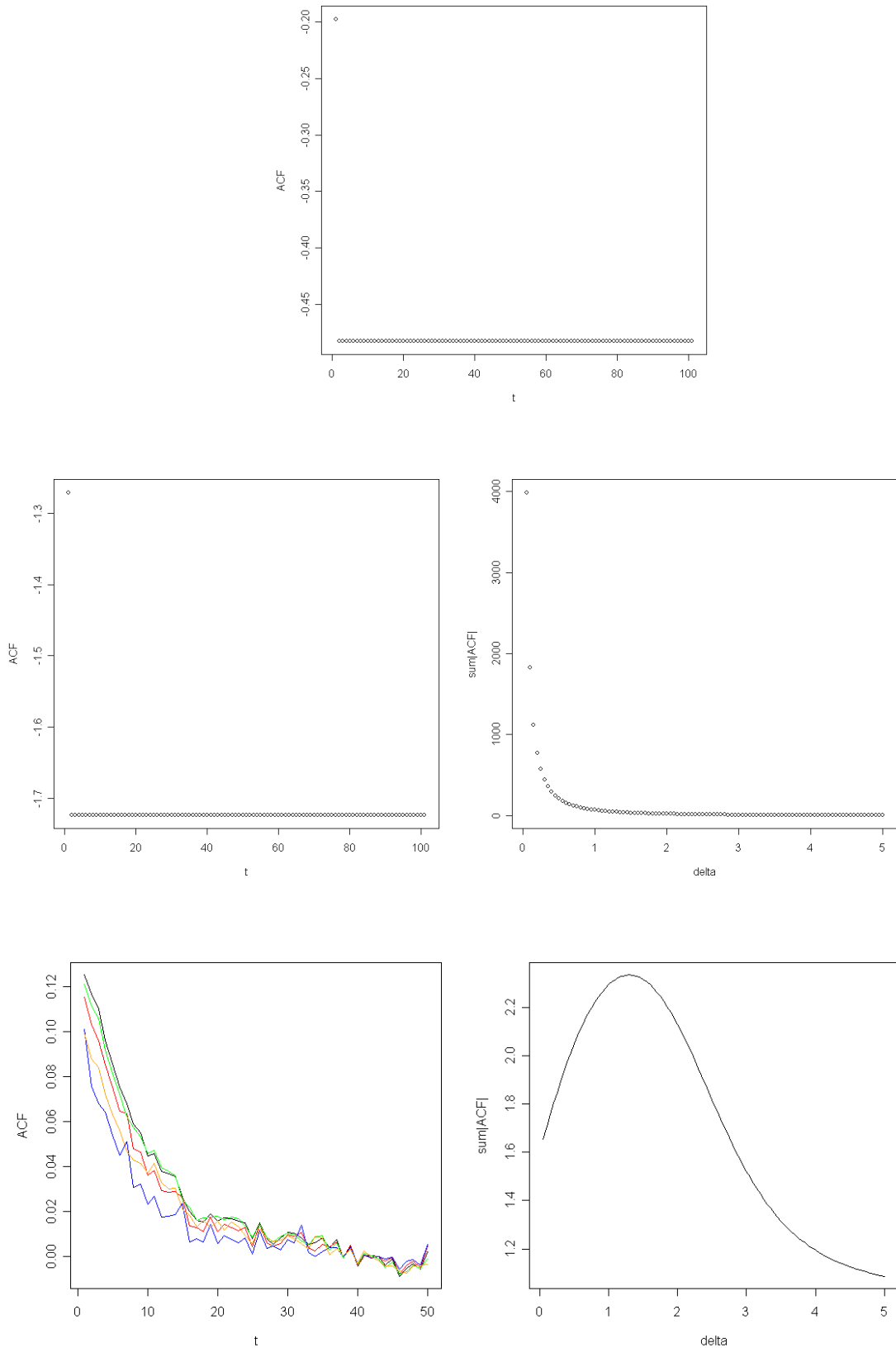


16 pav. Vidutinė kvadratinė paklaida

Kaip matome, kol Stjudento laisvės laipsniai maži, δ didėja. Kai jie didesni nei 7, δ pradeda mažėti.

3.1.2.3. Autokoreliacinė funkcija

Kaip ir anksčiau, naudodamiesi sugeneruotais duomenimis ir didžiųjų skaičių dėsnium, pažiūrėsime kaip atrodo funkcija $f(\delta)$. Kaip matome, rezultatai tokie patys, kaip ir buvusiu atveju. Tuo tarpu sumodeliuotoms gražoms ši funkcija mažiausia, kai $\delta \approx 1,2$.



17 pav. Pirmame grafike parametras $\delta=2$, antrame $\delta=1$. Ketvirtame grafike juodos spalvos linija nupiešta ACF, kai $\delta=1,5$, raudonos – 2, mėlynos – 2,5, žalios – 1, oranžinės – 0,5.

Taigi, remdamiesi GARCH(1,1) kintamumo modeliu, gavome tokius rezultatus:

- S&P 500 indeksui geriausias pagalbinis kintamumo rodiklis $|r_t|^\delta$, remiantis MSE, yra su laipsniu $\delta \in 2,3-2,4$
- Betirdami autokoreliacinės funkcijos elgesį gavome, kad $\delta \in 1,2$ sumodeliuotiems duomenims.

Du skirtingi metodai, davė du skirtingus rezultatus. Tačiau reikia neužmiršti, kad MSE pagalba mes ieškojome δ , kuris būtų geriausias σ_t^2 - kvadratinio kintamumo - įvertis.

3.2. STOCHASTINIO KINTAMUMO MODELIS

Stochastinio kintamumo modelis, kitaip nei GARCH, naudoja logaritminį kintamumą.

$$\begin{aligned}r_t &= \mu + \sigma_t \varepsilon_t \\ \ln \sigma_t^2 &= \gamma_0 + \gamma_1 \ln \sigma_{t-1}^2 + u_t\end{aligned}$$

čia ε_t yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su vidurkiu 0 ir dispersija 1, $u_t \stackrel{n.v.p.}{\sim} N(0, \sigma^2)$, $|\gamma_1| < 1$. Be to, σ_t , u_t , ε_t yra tarpusavyje nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. σ_t^2 yra stacionarus atsitiktinis dydis.

Šios lygties teigiamas sprendinys yra (įrodymas pateiktas A priede)

$$\sigma_t = \exp\left(\frac{\gamma_0}{2(1-\gamma_1)}\right) \prod_{k=0}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2} \gamma_1^k u_{t-k}\right).$$

3.2.1. Momentai

Vėlgi patogumo dėlei, pateiksime kai kurias modelio savybes.

Stochastinio kintamumo momentus galima nesunkiai gauti, panaudojus tokią savybę:

Jei a. d. $Y \sim N(m, \nu)$, tai atsitiktinis dydis $X = \exp(Y)$ yra log-normalusis su centriniais momentais, nusakomais $E(X^k) = \exp(km + k^2\nu/2)$ (įrodymas pateiktas C priede).

Pradžioje pastebėkime, kad dėl stacionarumo savybės $\ln \sigma_t^2 \sim N\left(\frac{\gamma_0}{1-\gamma_1}, \frac{\sigma^2}{1-\gamma_1^2}\right)$. Be to,

$\sigma_t^2 = \exp(\ln \sigma_t^2)$. Pasinaudoję anksčiau minėta savybe, gauname, kad

$$E(\sigma_t^2)^k = \exp\left(\frac{k\gamma_0}{1-\gamma_1} + \frac{k^2\sigma^2}{2(1-\gamma_1^2)}\right), \text{ su } \forall k \geq 0. \text{ Taip pat pastebėkime, kad nėra jokių}$$

papildomų prielaidų momentų egzistavimui.

3.2.2. Standartinis normalusis triukšmo sekos pasiskirstymo atvejis

3.2.2.1. Vidutinė kvadratinė paklaida

Tarkime, kad $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. Prisiminkime iš ankstesnio skyrelio, kad vidutinės kvadratinės paklaidos išraiška yra:

$$MSE\left(|r_t|^\delta\right) = E\left(|r_t|^\delta - \sigma_t^2\right)^2 = E\varepsilon_t^{2\delta} E\sigma_t^{2\delta} - 2E|\varepsilon_t|^\delta E\sigma_t^{\delta+2} + E\sigma_t^4$$

Taip pat, prisiminkime, kad $E|\varepsilon_t|^\delta = \frac{2^{\delta/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right)$.

Taigi šiuo atveju žinodami tiksliai kintamumo momentų išraiškas, galime jas įsistatyti į MSE formulę.

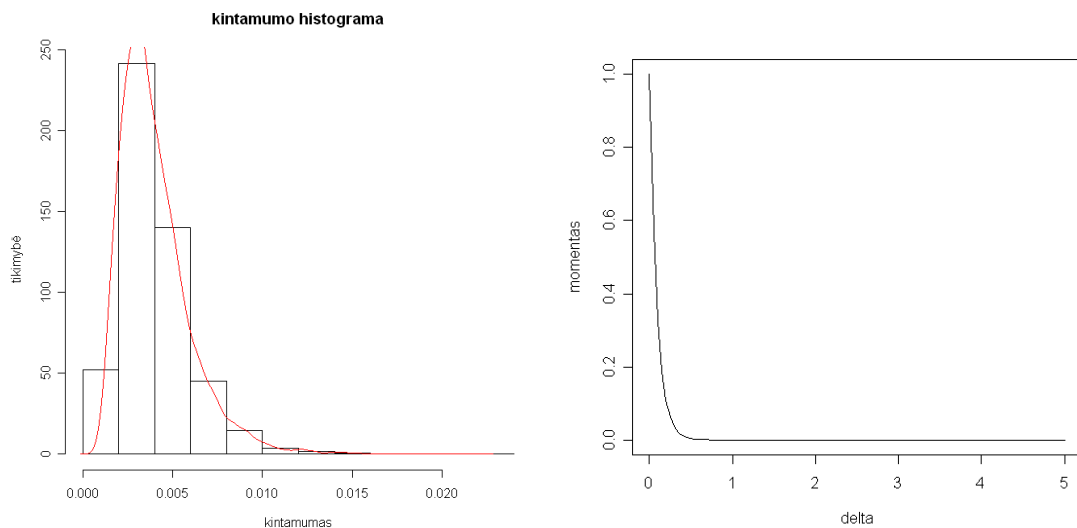
$$MSE\left(|r_t|^\delta\right) = \frac{2^\delta}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\delta + \frac{1}{2}\right) \exp\left(\frac{\delta\gamma_0}{1-\gamma_1} + \frac{\delta^2\sigma^2}{2(1-\gamma_1^2)}\right) - 2\frac{2^{\frac{\delta}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right) \cdot \exp\left(\frac{\frac{\delta+2}{2}\gamma_0 + \left(\frac{\delta+2}{2}\right)^2\sigma^2}{1-\gamma_1} + \frac{\left(\frac{\delta+2}{2}\right)^2\sigma^2}{2(1-\gamma_1^2)}\right) + \exp\left(\frac{2\gamma_0}{1-\gamma_1} + \frac{4\sigma^2}{2(1-\gamma_1^2)}\right)$$

Norėdami įvertinti parametrus stochastinio kintamumo modeliui, įvertinsime dienos kintamumo reikšmes kaip mėnesio gražų standartinius nuokrypius. Apskaičiavę kintamumo kvadrato logaritmus, parametrą rasti naudosime tiesinę regresiją. Įvertinkime modelio parametrus mūsų duomenims. Tam R programoje naudosime funkciją `lm()`, kuri ieško tiesinės regresijos parametrų.

<i>a1</i>	<i>a2</i>	<i>Dispersion</i>
-0.0866	0.9923	0.01665873

Kaip matome iš įvertinių, kintamumą nulemia buvusi kintamumo reikšmė, kitų parametrų įtaka labai nedidelė.

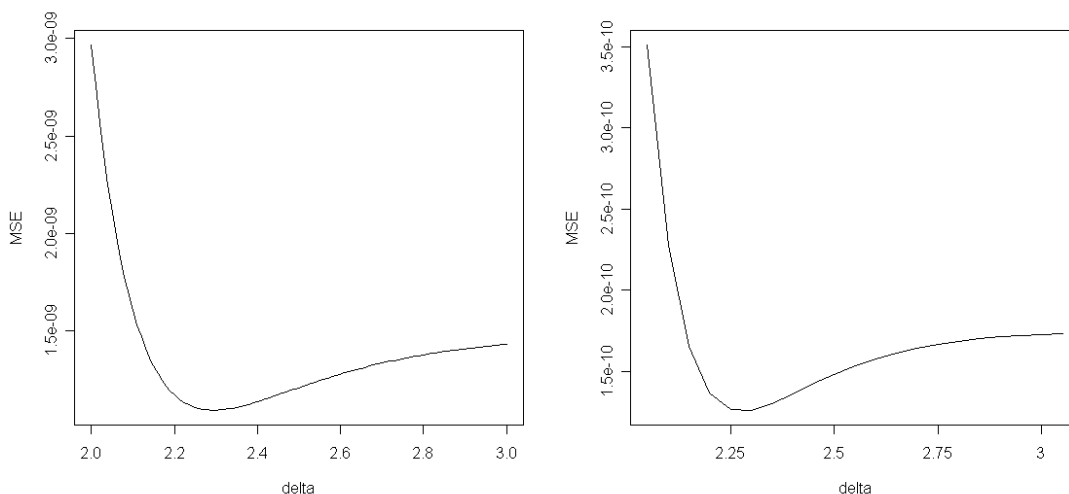
Sugeneruokime 10000 kintamumo reikšmių, pasinaudodami sprendinio išraiška. Kintamumo modelio parametrų įvertinius įsistatę į momentų formulę, gausime visus kintamumo momentus.



18 pav. Kintamumo histograma ir momentai.

Taigi modelyje paėmę $\gamma_0 = -0,0866$, $\gamma_1 = 0,9923$ ir $\sigma^2 = 0,0166$, gauname, kad MSE yra mažiausias kai $\delta \approx 2,3$. Tą patį gauname, jei vertiname kintamumo momentus iš sugeneruotų duomenų.

D. Giles [3], naudodamas stochastinio kintamumo modelį, nustatė, kad kvadratinės gražos geriau nusako kvadratinį kintamumą nei absoliučios. Tuo tarpu L. Forsberg ir E. Ghysels [2] gavo priešingą rezultatą: jie parodė, kad kvadratinį kintamumą geriau nusako absoliučios gražos. Mūsų gauti rezultatai neprieštaruoja D. Giles rezultatams. Jie rodo, kad geriausiai kintamumą nusako $|r_t|^{2,3}$.



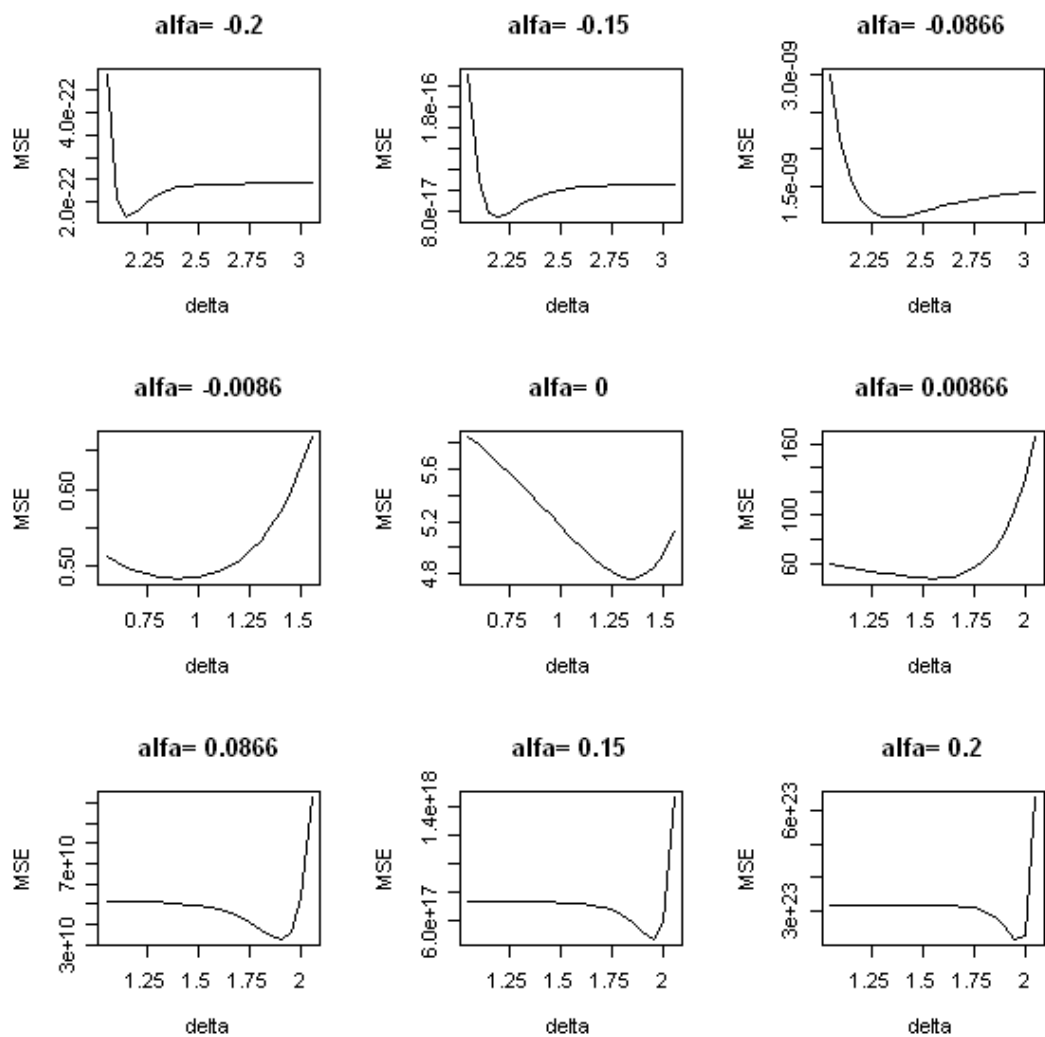
19 pav. Vidutinė kvadratinė paklaida.

Kadangi MSE yra gana sudėtinga funkcija, sunku rasti sprendinio δ , minimizuojančio MSE, išraišką. Pagrindinė problema yra Gamma funkcijos išvestinės skaičiavimas:

$$\frac{\partial \Gamma(x)}{\partial x} = \Gamma(x)\psi(x), \text{ kur } \psi(x) = -C - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n(x+n)} \right).$$

Digamma funkcijoje eilutė neturi bendros išraiškos, todėl sunku paskaičiuoti MSE išvestinę ir, prilyginus ją nuliui, surasti δ išraišką. Todėl toliau δ priklausomybę nuo modelio parametrų tirsime grafiškai. Be to, kaip ir GARCH(1,1) modelio atveju, tirsime, tik vieno parametro kitimo įtaką δ , minimizuojančiam MSE.

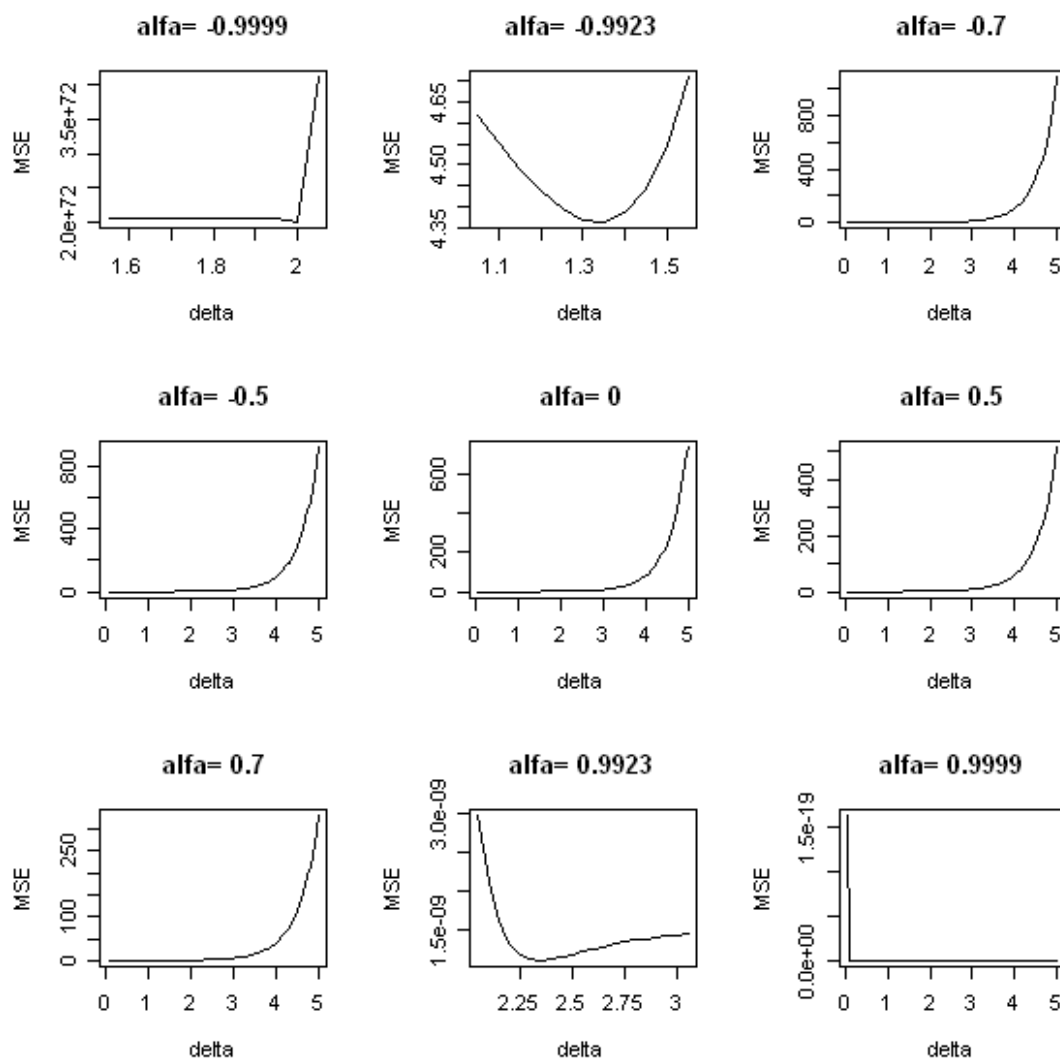
Pažiūrėkime kaip kinta MSE, kai keičiame parametą γ_0 .



20 pav. Vidutinė kvadratinė paklaida. Grafikuose $\alpha = \gamma_0$.

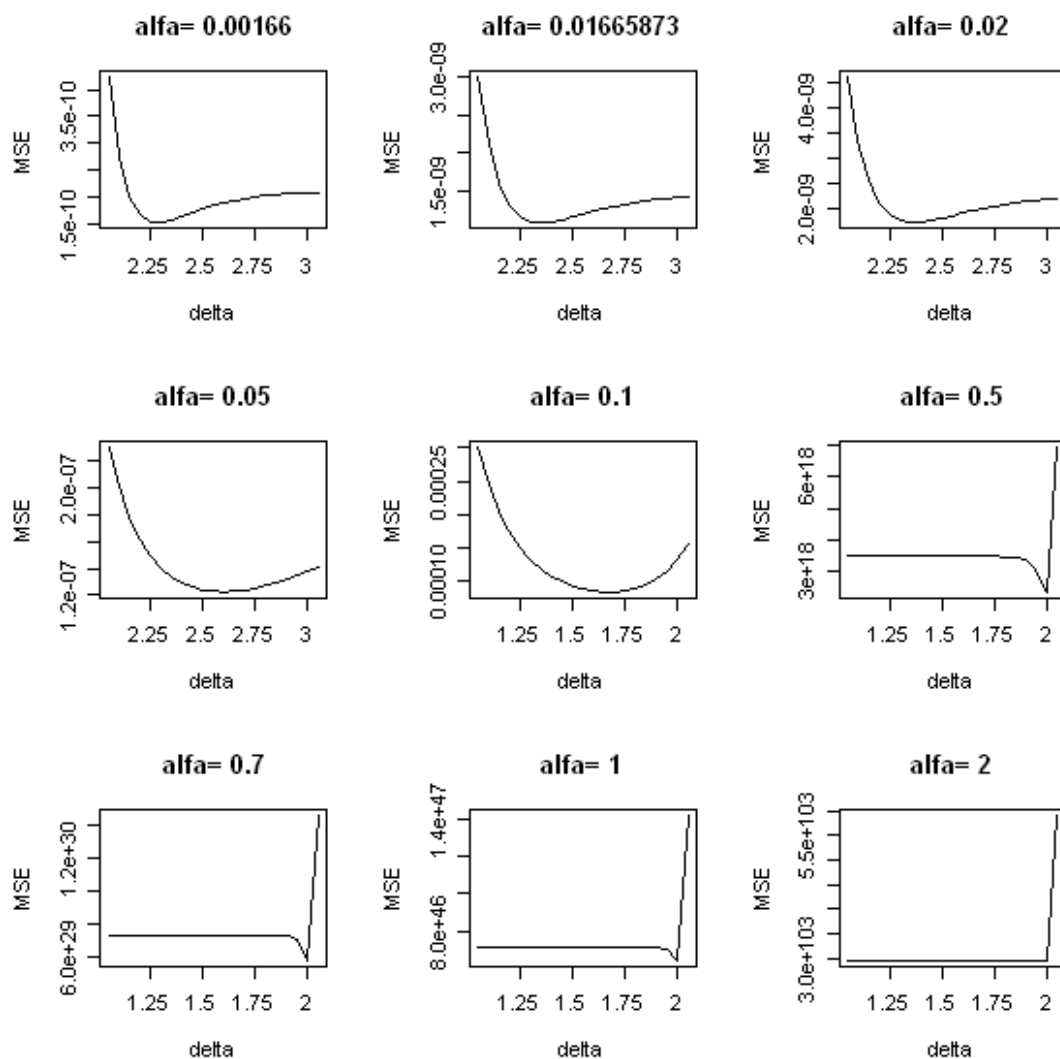
20 pav. matome, kaip MSE elgesys priklauso nuo γ_0 . Kai šis parametras teigiamas ir didėja, tai „geriausias“ δ irgi didėja. δ priklausomybė nuo neigiamų reikšmių yra sudėtingesnė. Taip pat pastebėkime, kad teigiamos ir nedidelės neigiamos γ_0 reikšmės yra mažai tikėtinos.

Dabar pažiūrėkime, kaip kinta MSE keičiantis parametru γ_1 .



21 pav. Vidutinė kvadratinė paklaida. Grafikuose $\text{alfa} = \gamma_1$.

Taigi $|\gamma_1|$ turi būti arti vieneto, kad δ , minimizuojantis MSE, būtų didesnis nei nulis. Be to, iš modelio apibrėžimo intuityviai matome, kad γ_1 turėtų būti teigiamas. Liko pasižiūrėti kaip σ^2 keičia δ , minimizuojantį MSE.



22 pav. Vidutinė kvadratinė paklaida. Grafikuose $\alpha = \sigma$.

Matome, kad δ , minimizuojančio MSE, reikšmė priklauso nuo σ^2 . δ priklausomybė nuo σ^2 yra sudėtinga. Galima paminėti, kad kai $\sigma^2 > 0,1$ ir didėja, tai δ artėja prie 2. Kai $\sigma^2 < 0,05$ ir didėja, tai δ artėja prie 2,75. Taip pat intuityviai iš modelio išraiškos galiam spręsti, jog σ^2 turi būti artimas nuliui.

3.2.2.2. Autokoreliacinė funkcija

Visų pirma panagrinėkime grąžų kovarijacias.

$$\text{Cov}\left(|r_t|^\delta, |r_0|^\delta\right) = \text{Cov}\left(|\varepsilon_t|^\delta \sigma_t^\delta, |\varepsilon_0|^\delta \sigma_0^\delta\right) = \left(E|\varepsilon_t|^\delta\right)^2 \left(E\left(\sigma_t^\delta \sigma_0^\delta\right) - \left(E\left(\sigma_t^\delta\right)\right)^2\right)$$

Prisiminkime, kad $E|\varepsilon_t|^\delta = \frac{2^{\delta/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right)$. Pasinaudoję σ_t^2 momentų formule gausime, kad

$$E\sigma_t^\delta = \exp\left(\frac{\delta\gamma_0}{2(1-\gamma_1)} + \frac{\delta^2\sigma^2}{8(1-\gamma_1^2)}\right).$$

Belieka suskaičiuoti $E(\sigma_t^\delta \sigma_0^\delta)$.

$$\sigma_t^2 = \exp(\gamma_0 + u_t) \sigma_{t-1}^{2\gamma_1} = \exp(\gamma_0 + u_t) \exp(\gamma_1(\gamma_0 + u_{t-1})) \sigma_{t-2}^{2\gamma_1^2} = \dots = \exp\left(\gamma_0(1 + \gamma_1 + \gamma_1^2 + \dots + \gamma_1^{t-1})\right) \cdot \exp(u_t + \gamma_1 u_{t-1} + \dots + \gamma_1^{t-1} u_1) \sigma_0^{2\gamma_1^t}.$$

Taigi

$$\sigma_t^2 \sigma_0^2 = \exp\left(\frac{\gamma_0}{1-\gamma_1}(1-\gamma_1^t)\right) \exp(u_t + \gamma_1 u_{t-1} + \dots + \gamma_1^{t-1} u_1) \sigma_0^{2(\gamma_1^t+1)}. \text{ Tuomet}$$

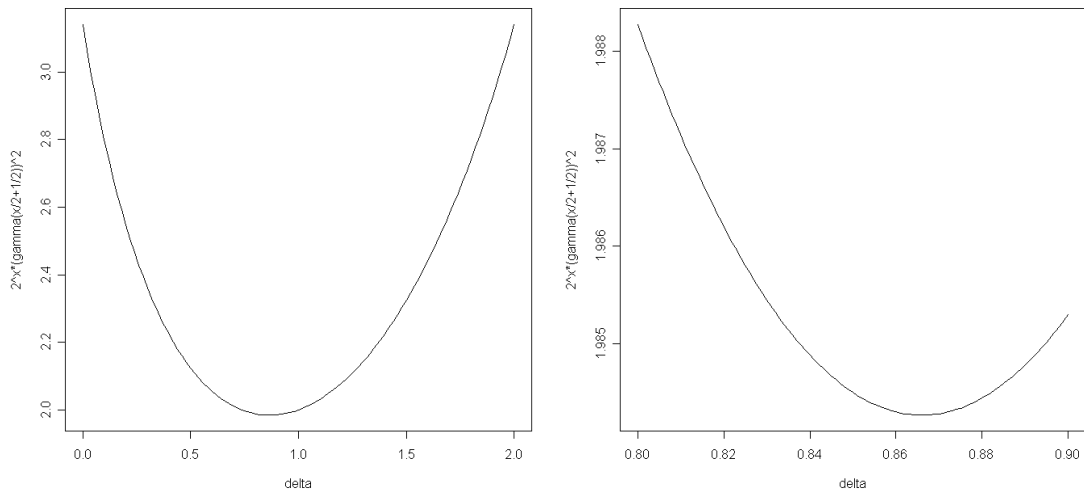
$$E(\sigma_t^2 \sigma_0^2)^\frac{\delta}{2} = E\left[\exp\left(\frac{\delta\gamma_0}{2(1-\gamma_1)}(1-\gamma_1^t)\right) \exp\left(\frac{\delta}{2}(u_t + \gamma_1 u_{t-1} + \dots + \gamma_1^{t-1} u_1)\right) \sigma_0^{\delta(\gamma_1^t+1)}\right] = \\ = \exp\left(\frac{\delta\gamma_0}{2(1-\gamma_1)}(1-\gamma_1^t)\right) \prod_{k=0}^{t-1} E \exp\left(\frac{\delta}{2} \gamma_1^k u_{t-k}\right) E \sigma_0^{\delta(\gamma_1^t+1)}.$$

Dar kartą pasinaudokime σ_t^2 momentų formule bei savybe, kad kai $X \sim N(\mu, \sigma)$, tai

$$E \exp(Xt) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right). \text{ Gausime, kad } E(\sigma_t^2 \sigma_0^2)^\frac{\delta}{2} = \exp\left(\frac{\delta\gamma_0}{1-\gamma_1} + \frac{\delta^2\sigma^2(1+\gamma_1^t)}{4(1-\gamma_1^2)}\right).$$

$$\text{Cov}(|r_t|^\delta, |r_0|^\delta) = \frac{2^\delta}{\pi} \Gamma^2\left(\frac{\delta+1}{2}\right) \left[\exp\left(\frac{\delta\gamma_0}{1-\gamma_1} + \frac{\delta^2\sigma^2(1+\gamma_1^t)}{4(1-\gamma_1^2)}\right) - \exp\left(\frac{\delta\gamma_0}{(1-\gamma_1)} + \frac{\delta^2\sigma^2}{4(1-\gamma_1^2)}\right) \right] = \\ = \frac{2^\delta}{\pi} \Gamma^2\left(\frac{\delta+1}{2}\right) \exp\left(\frac{\delta\gamma_0}{(1-\gamma_1)} + \frac{\delta^2\sigma^2}{4(1-\gamma_1^2)}\right) \left(\exp\left(\frac{\delta^2\sigma^2\gamma_1^t}{4(1-\gamma_1^2)}\right) - 1 \right)$$

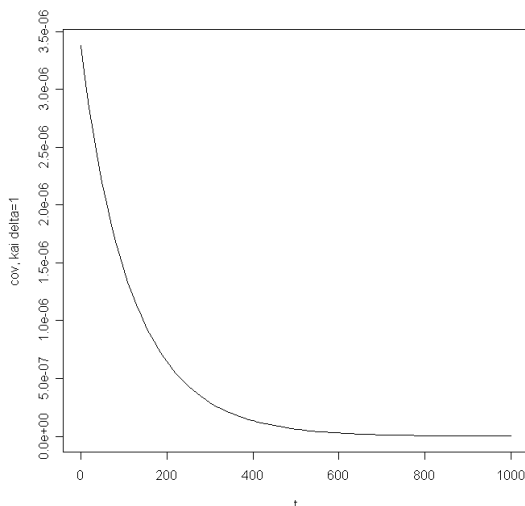
Panagrinėkime funkciją $2^\delta \Gamma^2\left(\frac{\delta+1}{2}\right)$. Ši funkcija didėja, kai $\delta \geq 0,87$.



23 pav. Funkcijos grafikas.

Kovariacijų savybės:

- Pastebėkime, kad $Cov(|a_t|^\delta, |a_0|^\delta) \geq Cov(|a_t|, |a_0|)$, kai $\delta \geq 1$.
- Kovariacija mažėja, kai t didėja, nes $\exp\left(\frac{\delta^2 \sigma^2 \gamma_1^t}{4(1-\gamma_1^2)}\right) - 1$ mažėja, kai t didėja;



24 pav. Absoliučios gražos kovariacijos funkcija.

Dabar, kai turime kovariacijų išraišką, ieškosime papildomo kintamumo rodiklio dispersijos. Nesunku įsitikinti, kad

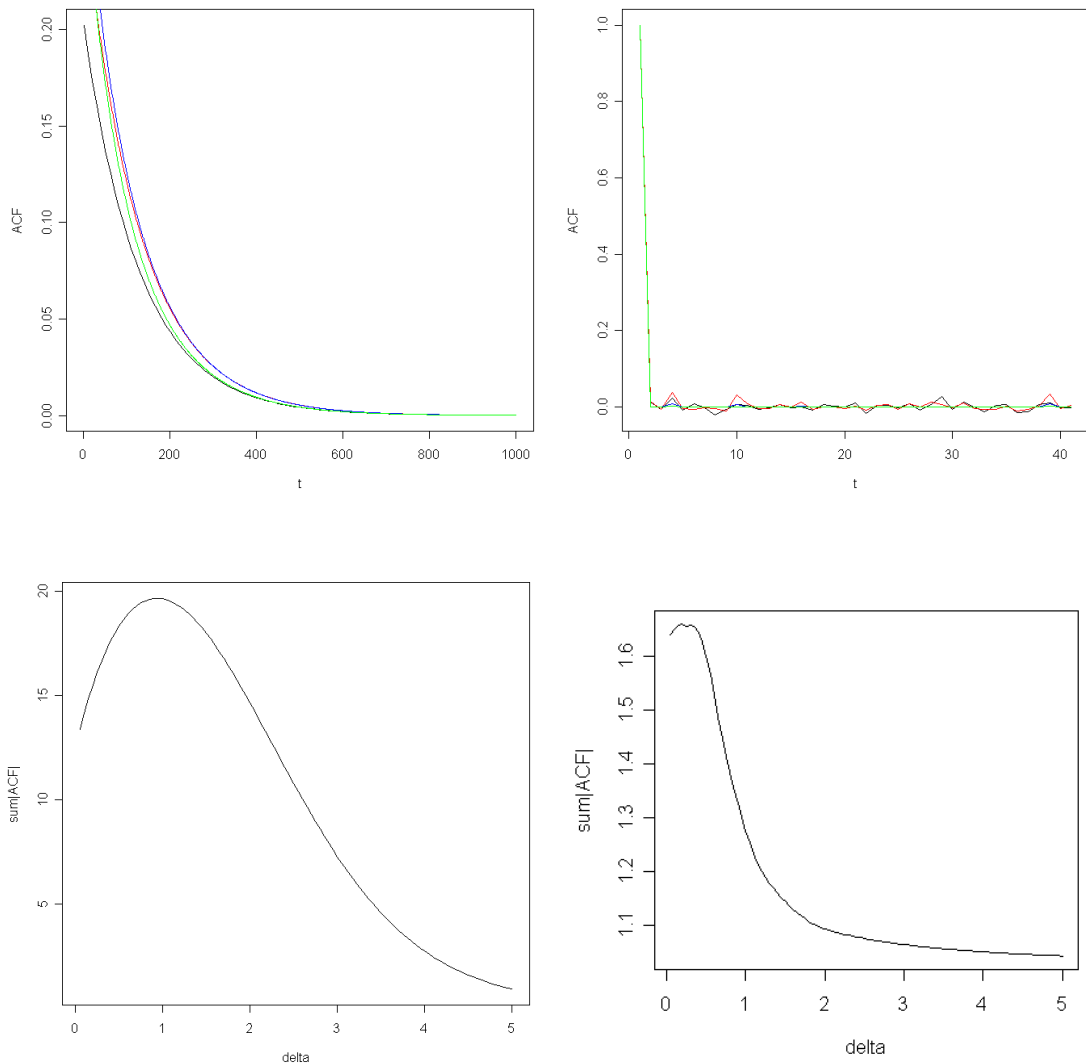
$$D|r_t|^\delta = \frac{2^\delta}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\delta + \frac{1}{2}\right) \exp\left(\frac{\delta \gamma_0}{1-\gamma_1} + \frac{\delta^2 \sigma^2}{2(1-\gamma_1^2)}\right) - \frac{2^\delta}{\pi} \Gamma^2\left(\frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}\right) \exp\left(\frac{\delta \gamma_0}{1-\gamma_1} + \frac{\delta^2 \sigma^2}{4(1-\gamma_1^2)}\right).$$

Įsistatę kovariacijų ir dispersijos išraiškas gausime:

$$ACF(\delta, t) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{\delta+1}{2}\right) \left(\exp\left(\frac{\delta^2 \sigma^2 \gamma_1^t}{4(1-\gamma_1^2)}\right) - 1\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\delta + \frac{1}{2}\right) \exp\left(\frac{\delta^2 \sigma^2}{4(1-\gamma_1^2)}\right) - \Gamma^2\left(\frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}\right)}$$

Panaudoję S&P 500 indekso duomenims gautas parametrų reikšmes, pažiūrėkime kaip tokiu atveju atrodys funkcija

$$f(\delta) = \sum_{k=1}^{10000} |ACF(\delta, k)|.$$



25 pav. Viršutiniuose paveikslėliuose juoda spalva reiškia $\delta=0,1$, raudona 0,5, mėlyna 1, žalia 1,5. Absoliučių autokorelacijų sumos funkcijos grafikas. Grafikuose kairėje pusėje pavaizduoti teoriniai rezultatai, dešinėje – rezultatai sumodeliuotiems duomenims.

Taigi geriausias δ šiuo atveju yra apie 1. Sumodeliuotiems duomenims δ yra apie 0,5.

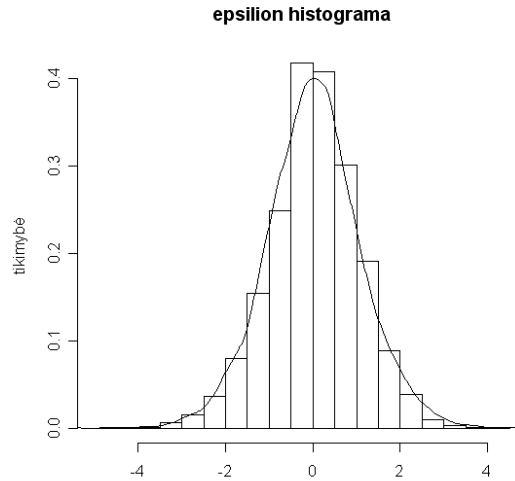
3.2.3. Standartinio Stjudento triukšmo sekos atvejis

Takime, kad $\varepsilon_t = \frac{\sqrt{v-2}}{\sqrt{v}} z_t$, kai $z_t \sim Stj(v)$.

Įsivertinkime mūsų duomenims Stjudento laisvės laipsnių skaičių. Tam naudosime paprastą būdą: turėdami gražas ir kintamumo įvertinius, pasiskaičiuosime jų santykį, kad gautume triukšmo seką. R programoje `fitdistr()` funkcija įvertins Stjudento pasiskirstymo laisvės laipsnių skaičių.

df
14.60616090

Taigi naudosime 14,6 laisvės laipsnius.



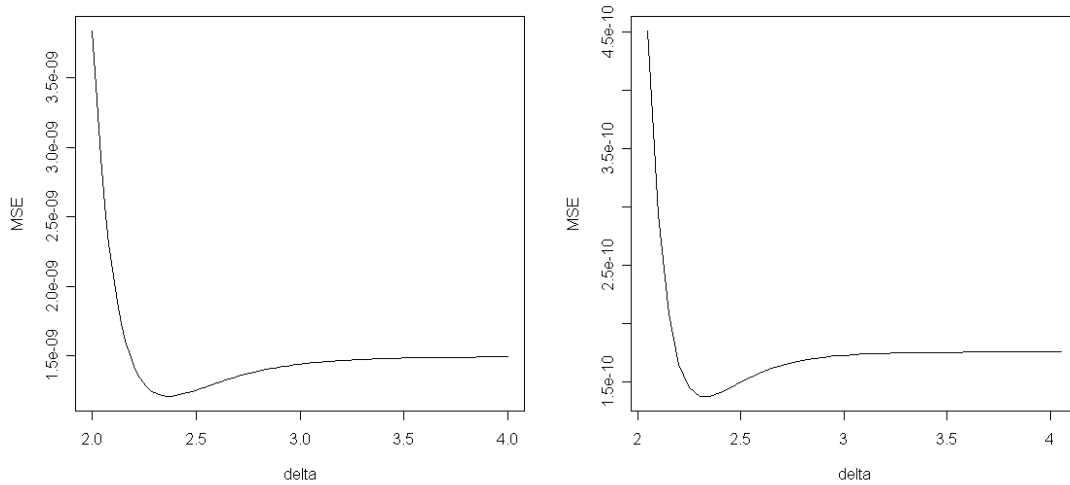
26 pav. Triukšmo sekos histograma ir Stjudento pasiskirstymo su 14,6 laisvės laipsniais grafikas.

3.2.3.1. Vidutinė kvadratinė paklaida

Standartinio Stjudento triukšmo sekos pasiskirstymo atveju vidutinės kvadratinės paklaidos išraiška yra tokia:

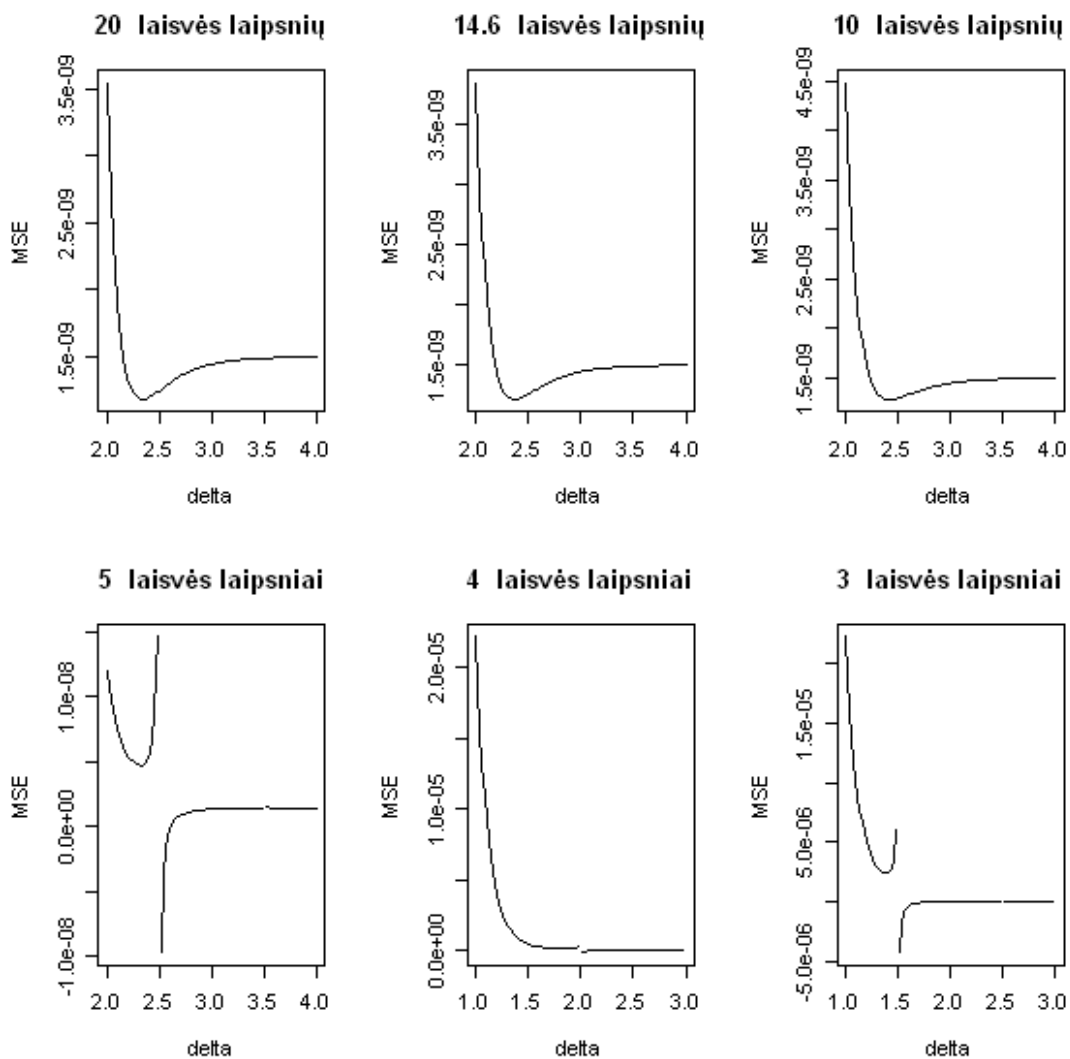
$$MSE(r_i | \delta) = \frac{(v-2)^\delta \Gamma\left(\frac{2\delta+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v-2\delta}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \exp\left(\frac{\delta\gamma_0}{1-\gamma_1} + \frac{\delta^2\sigma^2}{2(1-\gamma_1^2)}\right) - 2 \frac{(v-2)^{\frac{\delta}{2}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v-\delta}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \cdot \exp\left(\frac{\frac{\delta+2}{2}\gamma_0 + \frac{\left(\frac{\delta+2}{2}\right)^2\sigma^2}{2(1-\gamma_1^2)}}{1-\gamma_1} + \exp\left(\frac{2\gamma_0}{1-\gamma_1} + \frac{4\sigma^2}{2(1-\gamma_1^2)}\right)\right), \text{ kai } v > 2\delta.$$

Pagal įvertintus modelio parametrus, MSE yra mažiausias, kai $\delta \approx 2,4$. Panaudojus sumodeliuotus duomenis momentams rasti, gausime, kad δ yra šiek tiek mažesnis.



27 pav. Vidutinė kvadratinė paklaida.

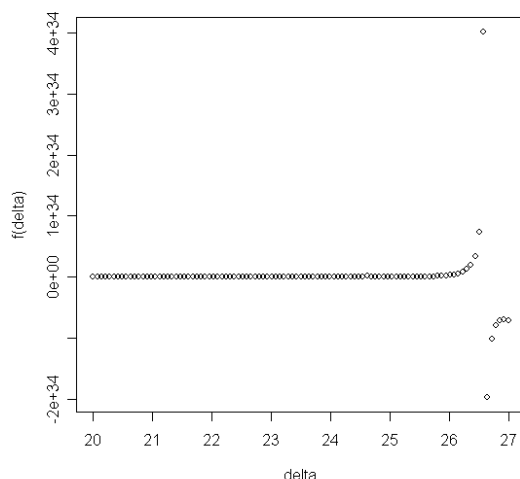
Taigi, panagrinėkime kaip Stjudento pasiskirstymo laisvės laipsniai įtakoja δ .



28 pav. Vidutinė kvadratinė paklaida skirtingiems laisvės laipsniams.

Dėl Gamma funkcijų dalybos, MSE atsiranda trūkio taškų. Kai Stjudento pasiskirstymo laisvės laipsniai dideli, trūkio taškai atsiranda dideliems δ . Pažiūrėkime kaip atrodo funkcija

$$f(\delta) = \frac{(v-2)^\delta \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v-\delta}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}$$



29 pav. Funkcija nuo δ .

Matome, kad trūkio taškai atsiranda prie didelių δ , tačiau turime atsižvelgti į sąlygą $\delta < \frac{v}{2}$.

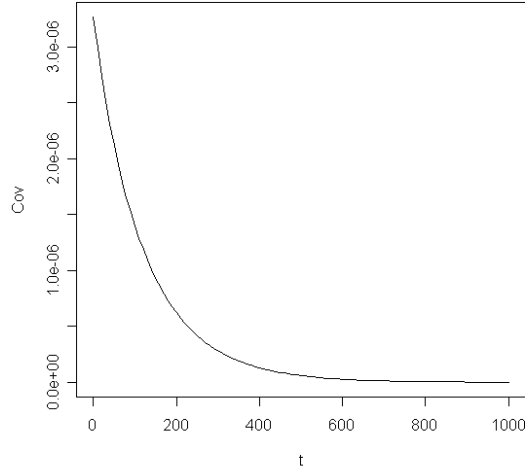
Visais atvejais ši sąlyga užtikrins, kad egzistuotų tik vienas δ , minimizuojantis MSE.

3.2.3.2. Autokoreliacinė funkcija

Kaip ir standartinio normaliojo triukšmo sekos pasiskirstymo atveju, pradžioje panagrinėkime gražų kovarijacias.

$$\text{Cov}\left(\left|r_t\right|^\delta, \left|r_0\right|^\delta\right) = \frac{(v-2)^\delta \Gamma^2\left(\frac{\delta+1}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{v-\delta}{2}\right)}{\pi \Gamma^2\left(\frac{v}{2}\right)} \exp\left(\frac{\delta \gamma_0}{(1-\gamma_1)} + \frac{\delta^2 \sigma^2}{4(1-\gamma_1^2)}\right) \left(\exp\left(\frac{\delta^2 \sigma^2 \gamma_1'}{4(1-\gamma_1^2)}\right) - 1\right).$$

Pastebėkime, kad kovariacija mažėja, kai t didėja. Tačiau šiuo atveju, skirtingai nei standartinio normaliojo, nebelieka sąlygos, kad papildomo kintamumo rodiklio su laipsniu didesniu nei 1 kovariacijos yra didesnės, nei absoliučios gražos kovariacijos.



30 pav. Absoliučių gražų kovariacijos funkcija

Pažiūrėkime kaip šiuo atveju keičiasi δ , kuris nusako stipriausią autokoreliaciją

$$ACF(\delta, t) = \frac{Cov(r_t |^\delta, |r_0 |^\delta)}{D|r_t |^\delta}.$$

Nesunku įsitikinti, kad

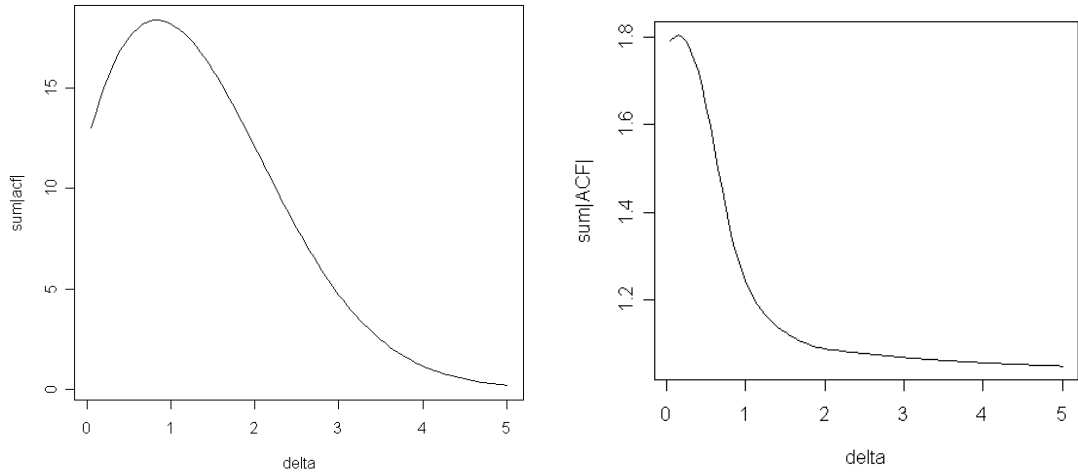
$$D|r_t |^\delta = \frac{(v-2)^\delta \Gamma\left(\frac{2\delta+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v-2\delta}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \exp\left(\frac{\delta\gamma_0}{1-\gamma_1} + \frac{\delta^2\sigma^2}{2(1-\gamma_1^2)}\right) - \frac{(v-2)^\delta \Gamma^2\left(\frac{\delta+1}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{v-\delta}{2}\right)}{\pi \Gamma^2\left(\frac{v}{2}\right)} \cdot \exp\left(\frac{\delta\gamma_0}{1-\gamma_1} + \frac{\delta^2\sigma^2}{4(1-\gamma_1^2)}\right)$$

Įsistatę kovariacijos ir dispersijos išraiškas gausime:

$$ACF(\delta, t) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{\delta+1}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{v-\delta}{2}\right) \left(\exp\left(\frac{\delta^2\sigma^2\gamma_1^2}{4(1-\gamma_1^2)}\right) - 1\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2\delta+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v-2\delta}{2}\right) \exp\left(\frac{\delta^2\sigma^2}{4(1-\gamma_1^2)}\right) - \Gamma^2\left(\frac{\delta+1}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{v-\delta}{2}\right)}$$

Prisiminkime ankstesnį pavyzdį ir pažiūrėkime kaip tokiu atveju atrodys funkcija

$$f(\delta) = \sum_{k=1}^{10000} |ACF(\delta, k)|.$$



31 pav. Absoliučių autokorelacių sumų funkcijos. Pirmame grafike teoriniai duomenys, antrame – sumodeliuoti.

Taigi δ teoriškai turėtų būti apie 1. Tuo tarpu sumodeliuoti duomenys išsikraipo ir didžiausias δ gaunasi arti nulio.

Taigi, stochastinio kintamumo modelyje:

1. Vidutinės kvadratinės paklaidos metodu gavome, kad $\delta \approx 2,3 - 2,4$
2. Betirdami autokoreliacinės funkcijos elgesį gavome, kad $\delta \approx 1$

3.3. EGARCH MODELIS

EGARCH modelis, panašiai kaip ir stochastinio kintamumo modelis, nagrinėja kintamumo kvadrato logaritmus. EGARCH modelis:

$$r_t = \mu + \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\log \sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \log \sigma_{t-1}^2 + w \varepsilon_{t-1}$$

$\varepsilon_t \square N(0,1)$, $|\gamma_1| < 1$. Be to, σ_t ir ε_t yra tarpusavyje nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. σ_t^2 yra stacionarus atsitiktinis dydis.

Pastebėkime, kad vienintelis skirtumas tarp EGARCH ir stochastinio kintamumo modelių yra triukšmo seka. EGARCH modelyje kintamumui apibrėžti naudojamas ta pati triukšmo seka ε_t . Stochastinio kintamumo modelyje naudojama nauja triukšmo seka u_t .

EGARCH(1,1) lygties teigiamas sprendinys yra (žr. A priedą)

$$\sigma_t = \exp\left(\frac{\gamma_0}{2(1-\gamma_1)}\right) \prod_{k=0}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2} \gamma_1^k w \varepsilon_{t-k-1}\right)$$

3.3.1. Momentai

Tarkim, kad $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. Pastebėkime, kad $\log \sigma_t^2 \sim N\left(\frac{\gamma_0}{1-\gamma_1}; \frac{w^2}{1-\gamma_1^2}\right)$.

Tada

$$E\sigma_t^\delta = \exp\left(\frac{\delta\gamma_0}{2(1-\gamma_1)} + \frac{\delta^2 w^2}{8(1-\gamma_1^2)}\right), \quad \forall \delta > 0.$$

Taigi, gauname bendrą išraišką visiems kintamumo momentams. Be to, nėra jokių papildomų reikalavimų momentų egzistavimui. Pastebėkime, kad momentų išraiška yra tokia pati kaip ir stochastinio kintamumo atveju.

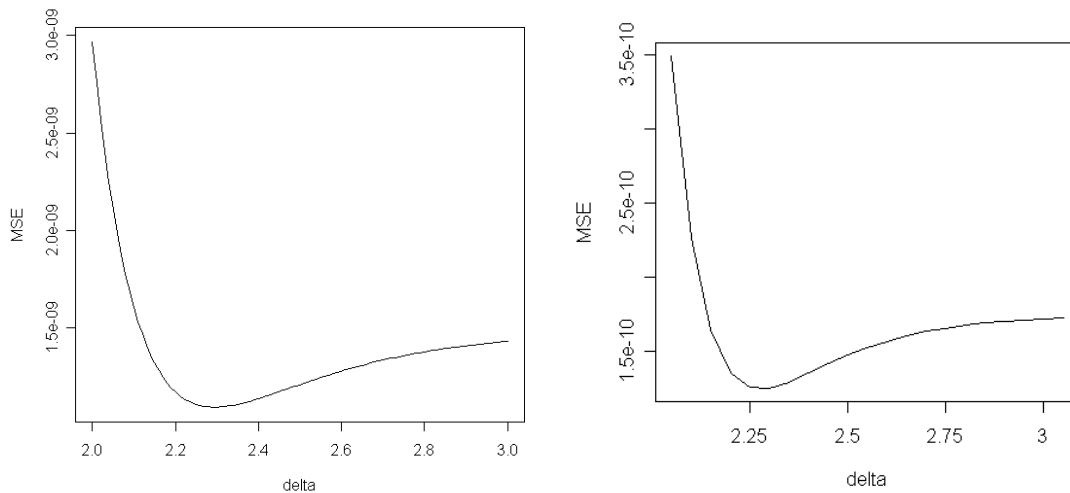
Modelio parametrus S&P 500 indeksui imsime tokius pat kaip ir stochastinio kintamumo atveju, nes ieškosime tokios pačios tiesinės regresijos koeficientų. Taigi momentai sutaps su stochastinio kintamumo momentais.

3.3.2. Vidutinė kvadratinė paklaida

EGARCH modelio atveju vidutinė kvadratinė paklaida atrodo taip:

$$MSE\left(|r_t|^\delta\right) = \frac{2^\delta}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\delta + \frac{1}{2}\right) \exp\left(\frac{\delta\gamma_0}{(1-\gamma_1)} + \frac{\delta^2 w^2}{2(1-\gamma_1^2)}\right) - 2 \frac{2^{\frac{\delta}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right) \cdot \exp\left(\frac{(\delta+2)\gamma_0}{2(1-\gamma_1)} + \frac{(\delta+2)^2 w^2}{8(1-\gamma_1^2)}\right) + \exp\left(\frac{2\gamma_0}{(1-\gamma_1)} + \frac{2w^2}{(1-\gamma_1^2)}\right)$$

EGARCH atveju teorinė vidutinė kvadratinė paklaida sutaps su stochastinio kintamumo paklaida, nes sutaps kintamumo momentai.

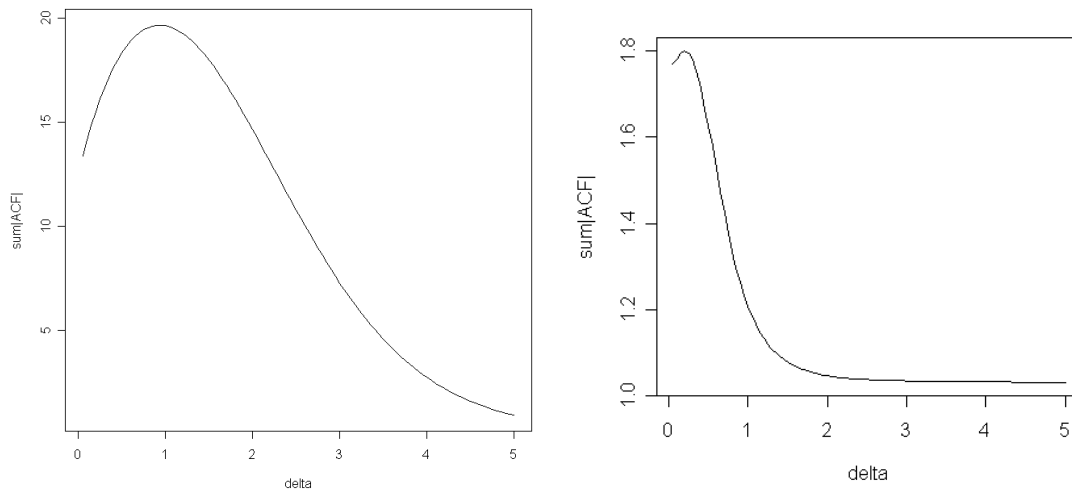


32 pav. Vidutinė kvadratinė paklaida: teorinė ir sumodeliuotų duomenų.

Kaip matome, δ minimizuojantis vidutinę kvadratinę paklaidą yra apie 2,3. Parametrų kitimo poveikis δ išliks toks pat, kaip ir stochastinio kintamumo atveju.

3.3.3. Autokoreliacinė funkcija

Pastebėkime, kad EGARCH modelyje autokoreliacinės funkcijos irgi sutaps su stochastinio kintamumo funkcijomis, nes kintamumas ir triukšmo seka yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.



33 pav. Absoliučių autokoreliacijų sumų funkcijos. Pirmame grafike teoriniai duomenys, antrame – sumodeliuoti.

Iš funkcijos grafikų matome, kad geriausias pagalbinis kintamumo rodiklis yra, kai $\delta \approx 1$.

Taigi, EGARCH(1,1) modelio panašumas į stochastinio kintamumo modelį, davė tuos pačius rezultatus:

- Vidutinės kvadratinės paklaidos metodu gavome, kad $\delta \approx 2,3 - 2,4$
- Betirdami autokoreliacinės funkcijos elgesį gavome, kad $\delta \approx 1$

3.4. APARCH(1,1) Modelis

Pradžioj apibrėžkime bendrą APARCH(p, q) modelį [5].

$$r_t = \mu + a_t, \text{ kur } a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^k = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sigma_{t-i}^k f_i(\varepsilon_{t-i}) + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^k, \text{ kur } f_l(\varepsilon_{t-l}) = \left[|\varepsilon_{t-l}| - \gamma_l \varepsilon_{t-l} \right]^k$$

čia σ_t - kintamumas; $\{\varepsilon_t\}$ yra nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių dydžių seka su vidurkiu 0 ir dispersija 1; σ_t ir ε_t yra tarpusavyje nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai; $|\gamma| < 1$, $k > 0$, $\alpha_0 > 0$, $\beta_i, \alpha_j \geq 0$, kur $\sum_{i=1}^p \beta_i + \sum_{j=1}^q \alpha_j < 1$. Pastaroji sąlyga būtina σ_t stacionarumui užtikrinti.

Pastebėkime, kad šis modelis, kitaip nei prieš tai buvę, atsižvelgia į kintamumo skirtingą reagavimą į dideles teigiamas ir dideles neigiamas gražas.

Prisiminkime, jog padarėme papildomą prielaidą, kad $\mu = 0$. Taigi PARCH(1,1) modelis užrašomas taip:

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^k = \alpha_0 + \alpha_1 \left[|r_{t-1}| - \gamma r_{t-1} \right]^k + \beta \sigma_{t-1}^k$$

Vėlgi, intuityviai galime spręsti, kad α_0 bus artimas nuliui, β arti vieneto.

Nesunku parodyti (žr. A priede), kad šios lygčių sistemos teigimas sprendinys yra

$$\sigma_t = \alpha_0^{\frac{1}{k}} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i \left(\beta + \alpha_1 \left(|\varepsilon_{t-j}| - \gamma \varepsilon_{t-j} \right)^k \right) \right)^{\frac{1}{k}}.$$

3.4.1. Standartinis normalusis triukšmo sekos pasiskirstymo atvejis

3.4.1.1. Momentai

Pasinaudodami kintamumo sprendinio išraiška ieškosime bendros kintamumo momentų išraiškos.

Tarkim, kad $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. Nesunkiai galime gauti, kad

$$E(|\varepsilon_t| - \gamma \varepsilon_t)^k = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{k-2}{2}} \left[(1+\gamma)^k + (1-\gamma)^k \right].$$

Taigi,

$$E\sigma_t^k = \frac{\alpha_0}{1 - \beta - \alpha_1 \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{k-2}{2}} \left[(1+\gamma)^k + (1-\gamma)^k \right]}, \text{ o}$$

$$E\sigma_t^{2k} = \frac{\alpha^2 \left(1 + \beta + \alpha_1 \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{k-2}{2}} \left[(1+\gamma)^k + (1-\gamma)^k \right] \right)}{\left(1 - \beta - \alpha_1 \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{k-2}{2}} \left[(1+\gamma)^k + (1-\gamma)^k \right] \right)} \times$$

$$\times \frac{1}{\left(1 - \alpha_1^2 \frac{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} 2^{k-1} \left[(1+\gamma)^{2k} + (1-\gamma)^{2k} \right] - \beta \alpha_1 \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} 2^{\frac{k}{2}} \left[(1+\gamma)^k + (1-\gamma)^k \right] - \beta^2 \right)}$$

Atkreipkime dėmesį, kad momentų egzistavimui būtini teigiami vardikliai. Kaip ir GARCH(1,1) atveju, iškyla momentų egzistavimo klausimas, kai momento laipsnis nėra k kartotinis.

Su R funkcija `garchOxFit()` įvertinkime mūsų modelio parametrus.

Maximum Likelihood Estimation

	<i>Coefficient</i>
<i>Cst(V)</i>	0.003406
<i>ARCH(Alpha1)</i>	0.079498
<i>GARCH(Beta1)</i>	0.924907
<i>APARCH(Gamma1)</i>	0.392206
<i>APARCH(Delta)</i>	1.322134

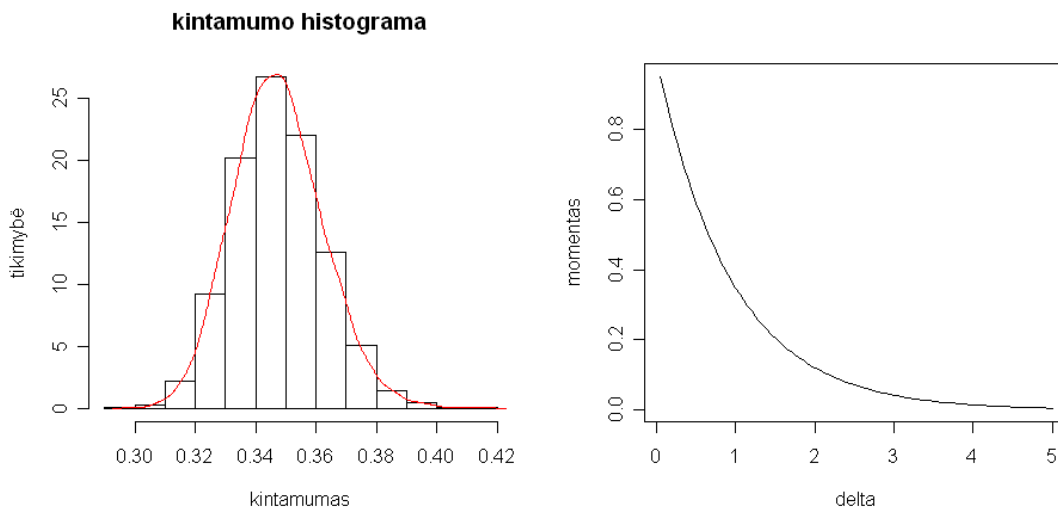
Taigi mūsų modelyje $\alpha_0 = 0,003406$, $\alpha_1 = 0,079498$, $\beta = 0,924907$, $\gamma = 0,392206$ ir $k = 1,322134$. Patikrinę k ir $2k$ momentų egzistavimo sąlygas, gauname, kad jos yra tenkinamos.

3.4.1.2. Vidutinė kvadratinė paklaida

$$MSE\left(|r_t|^\delta\right) = \frac{2^\delta}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\delta + \frac{1}{2}\right) E\sigma_t^{2\delta} \cdot -2 \frac{2^{\frac{\delta}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right) \cdot E\sigma_t^{\delta+2} + E\sigma_t^4$$

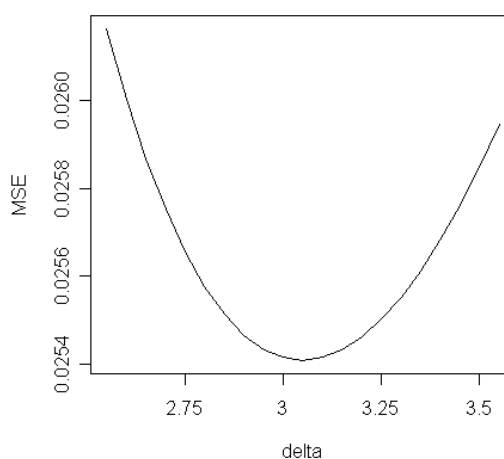
Kadangi mes nežinome bendros momentų išraiškos, kaip ir GARCH(1,1) modelyje, skaičiuodami momentus remsimės didžiųjų skaičių dėsnium.

Sugeneruokime 10000 APARCH(1,1) modelio kintamumo reikšmių.



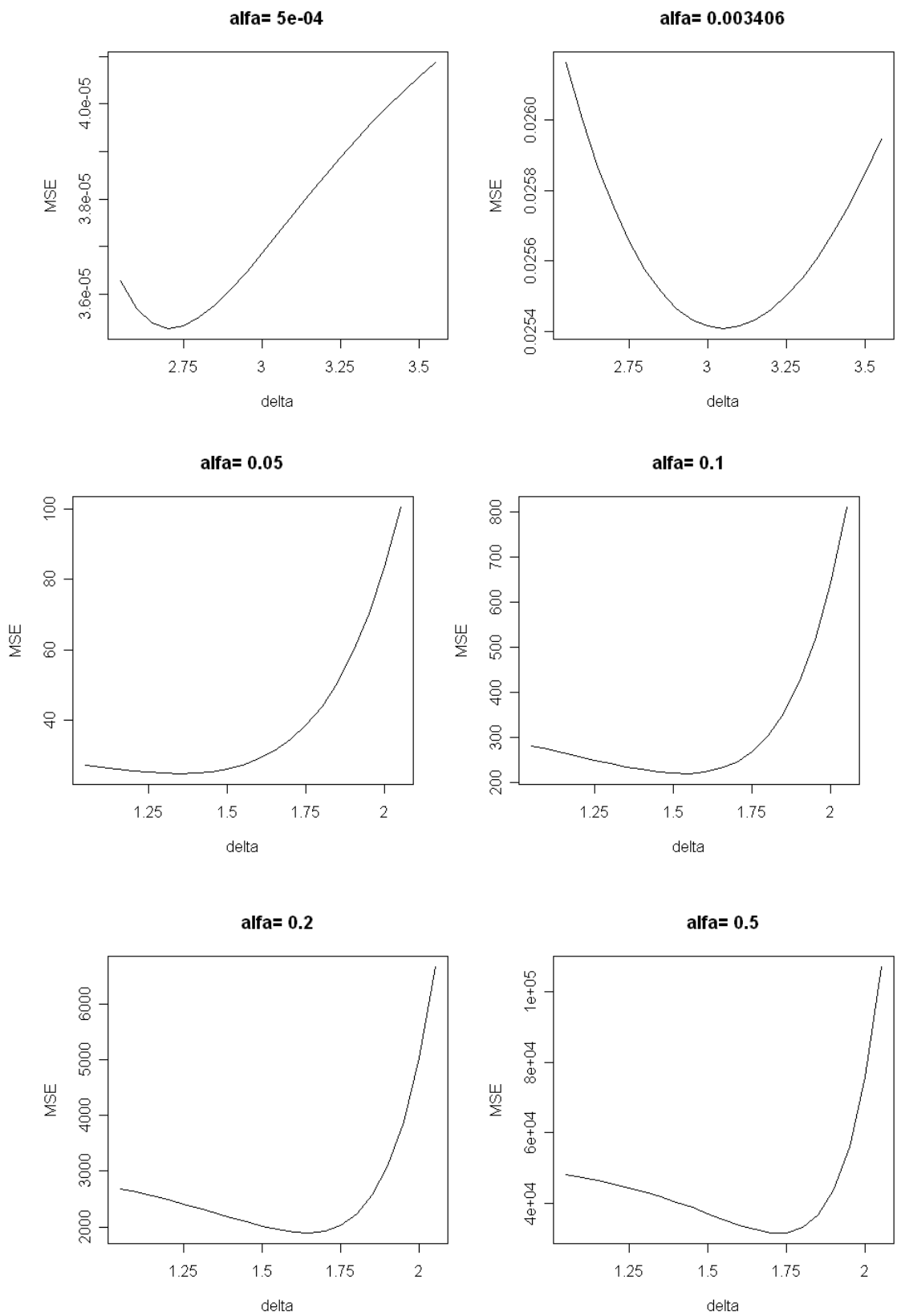
34 pav. Kintamumo histograma ir momentų grafikas.

Naudodamiesi gautais momentais pabraižysime MSE.



35 pav. Funkcijos grafikas.

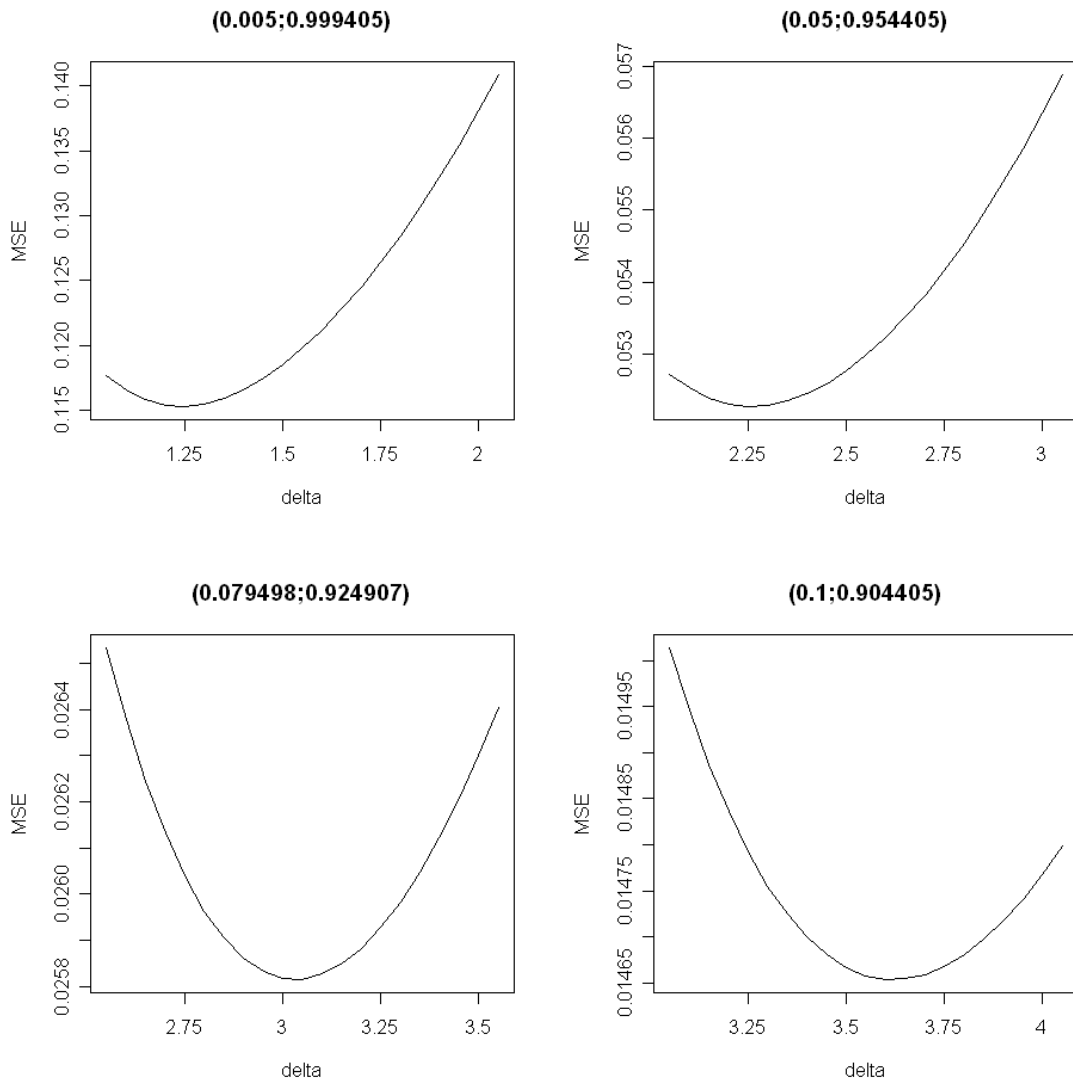
Matome, kad δ minimizuojantis MSE yra apie 3,1. Pažiūrėkime, kaip jis keisis, keičiant parametrų reikšmes.

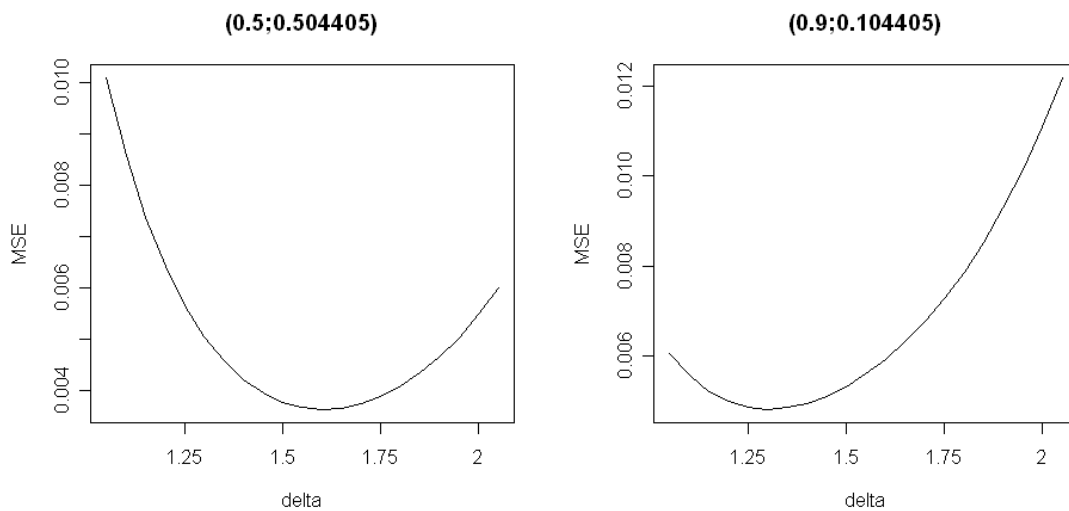


36 pav. Vidutinė kvadratinė paklaida skirtingiems α_0 .

Kai α_0 artimas nuliui ir didėja, tai ir δ , minimizuojantis MSE, didėja. Prisiminkime, kad didelės α_0 reikšmės yra mažai tikėtinos, nes tai reikštų, kad kintamumą mažai įtakoja buvusios kintamumo reikšmės ir buvusios grąžos.

Pabandykime keisti parametrų α_1 ir β reikšmes, nekeisdami jų sumos.

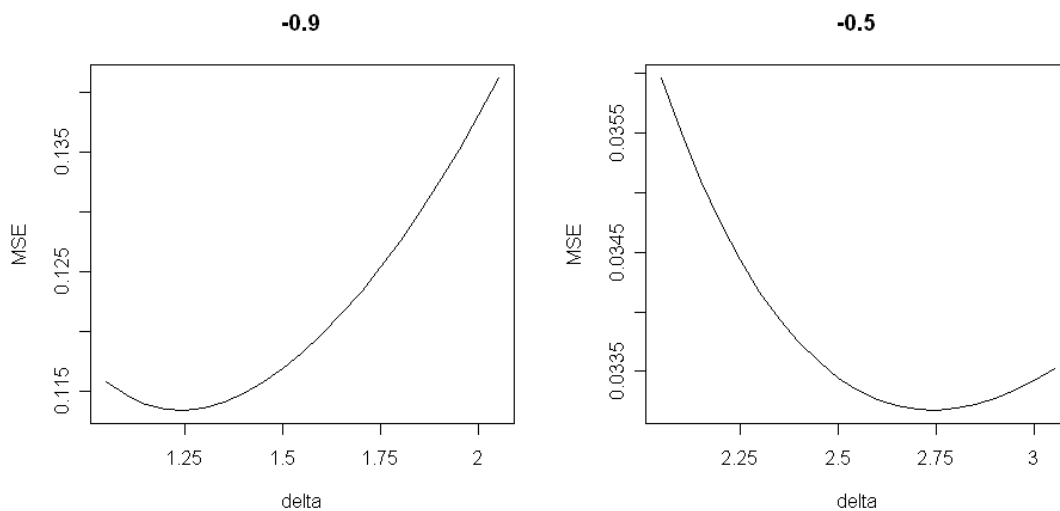


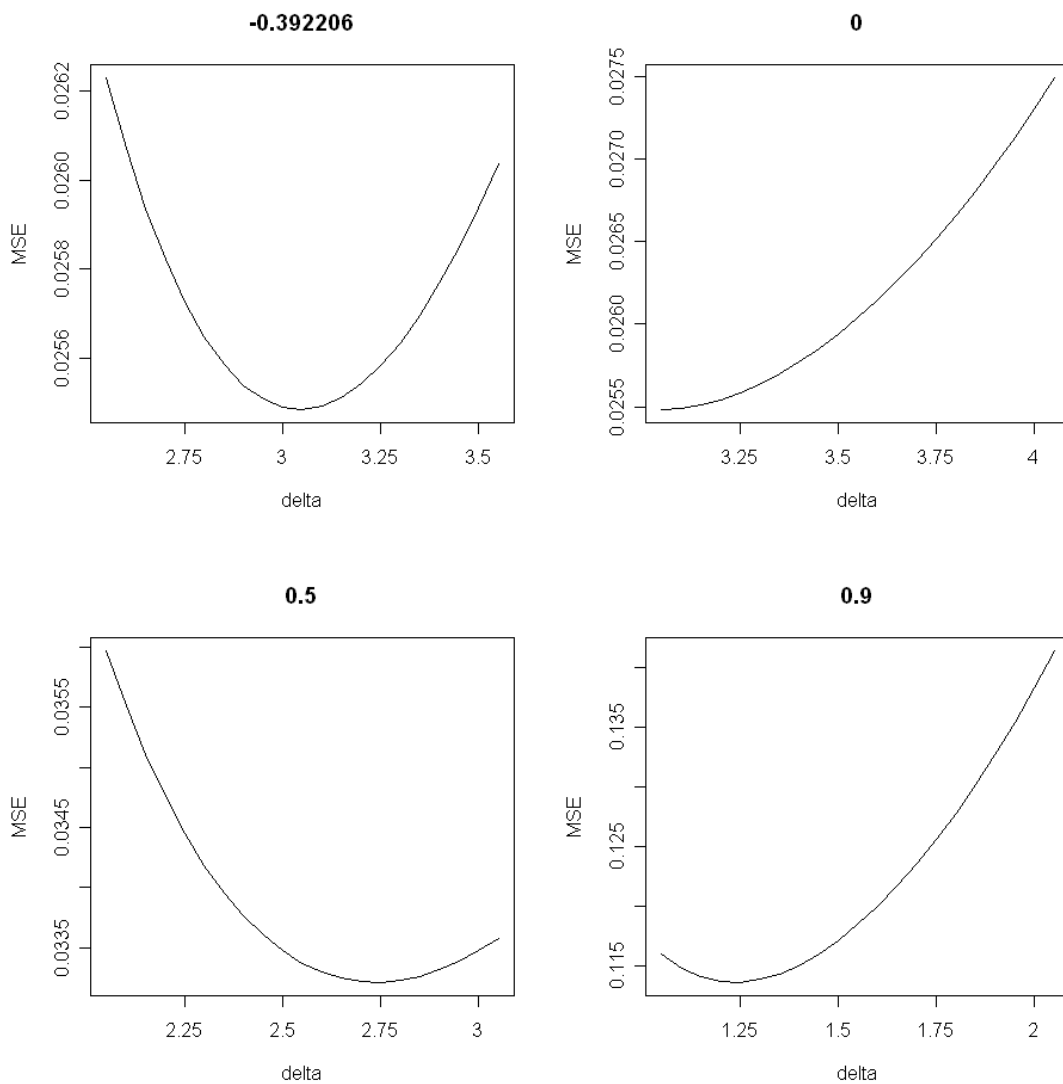


37 pav. Vidutinė kvadratinė paklaida, skirtingoms α_1 ir β poroms .

Kaip matome, kai α_1 didėja iki 0,1, δ , minimizuojantis MSE, didėja. Vėliau ši tendencija tampa priešinga.

Pasižiūrėkime kaip δ įtakoja asimetriškumo parametras γ .

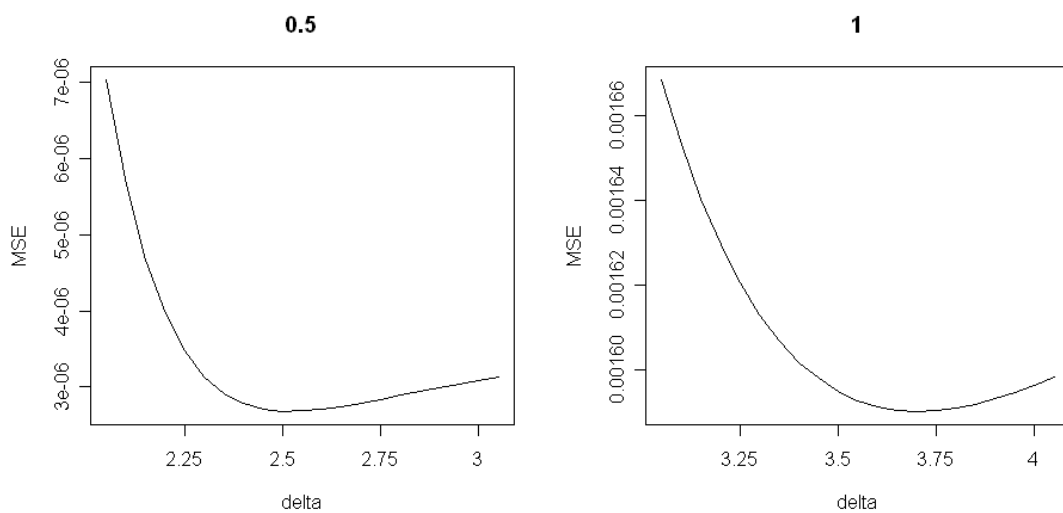


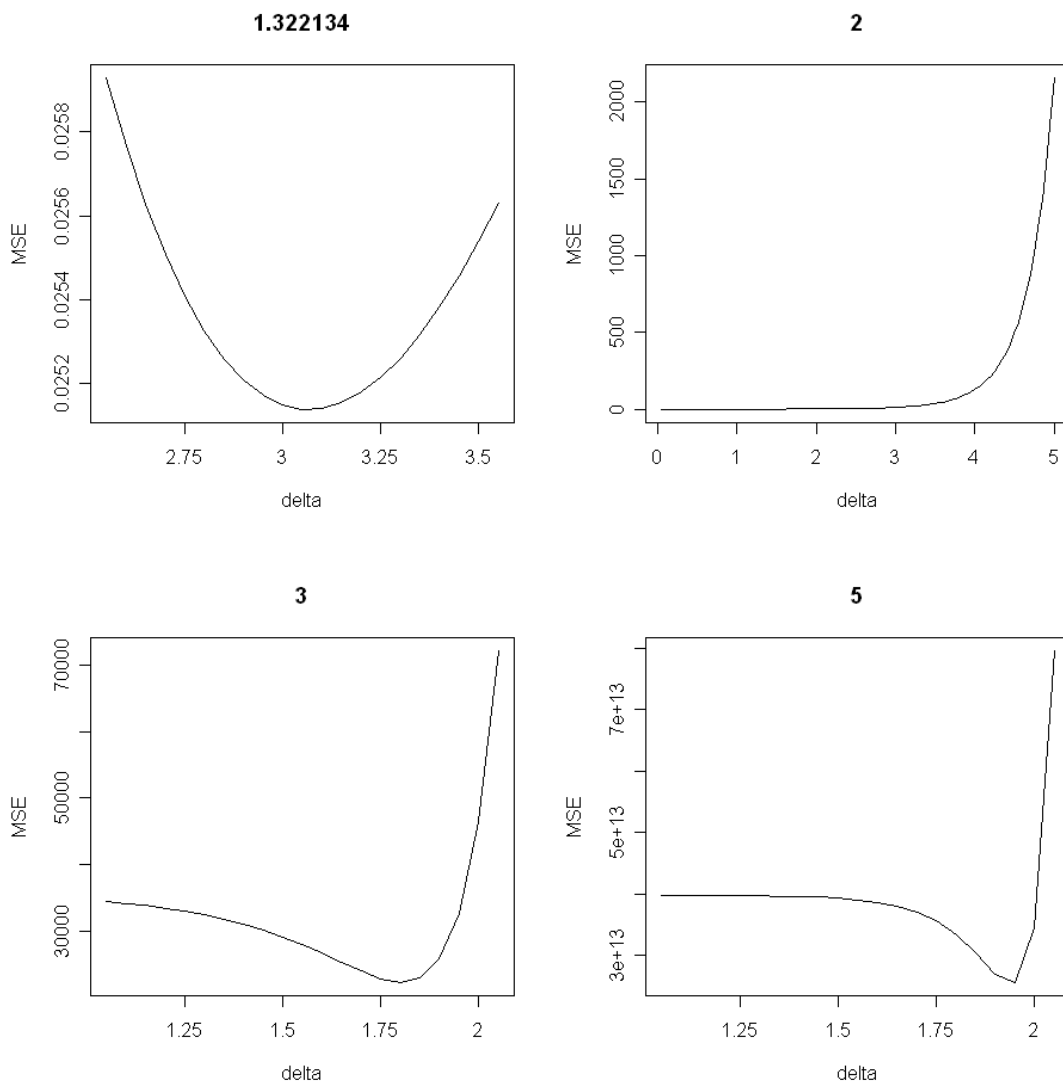


38 pav. Vidutinė kvadratinė paklaida, skirtingiems simetriškumo parametrms .

Matome, kad $|\gamma|$ keičia δ , minimizuojančios MSE, reikšmę. Be to, δ didėja, kai $|\gamma|$ mažėja.

Beliko pasižiūrėti, kaip keičiasi δ , keičiant APARCH laipsnio parametą.





39 pav. Vidutinė kvadratinė paklaida, skirtingoms laipsnio parametro reikšmėms .

Matome, kad kol laipsnis yra mažesnis nei 2, δ didėja. Kai laipsnis daugiau nei 3, δ artėja prie 2.

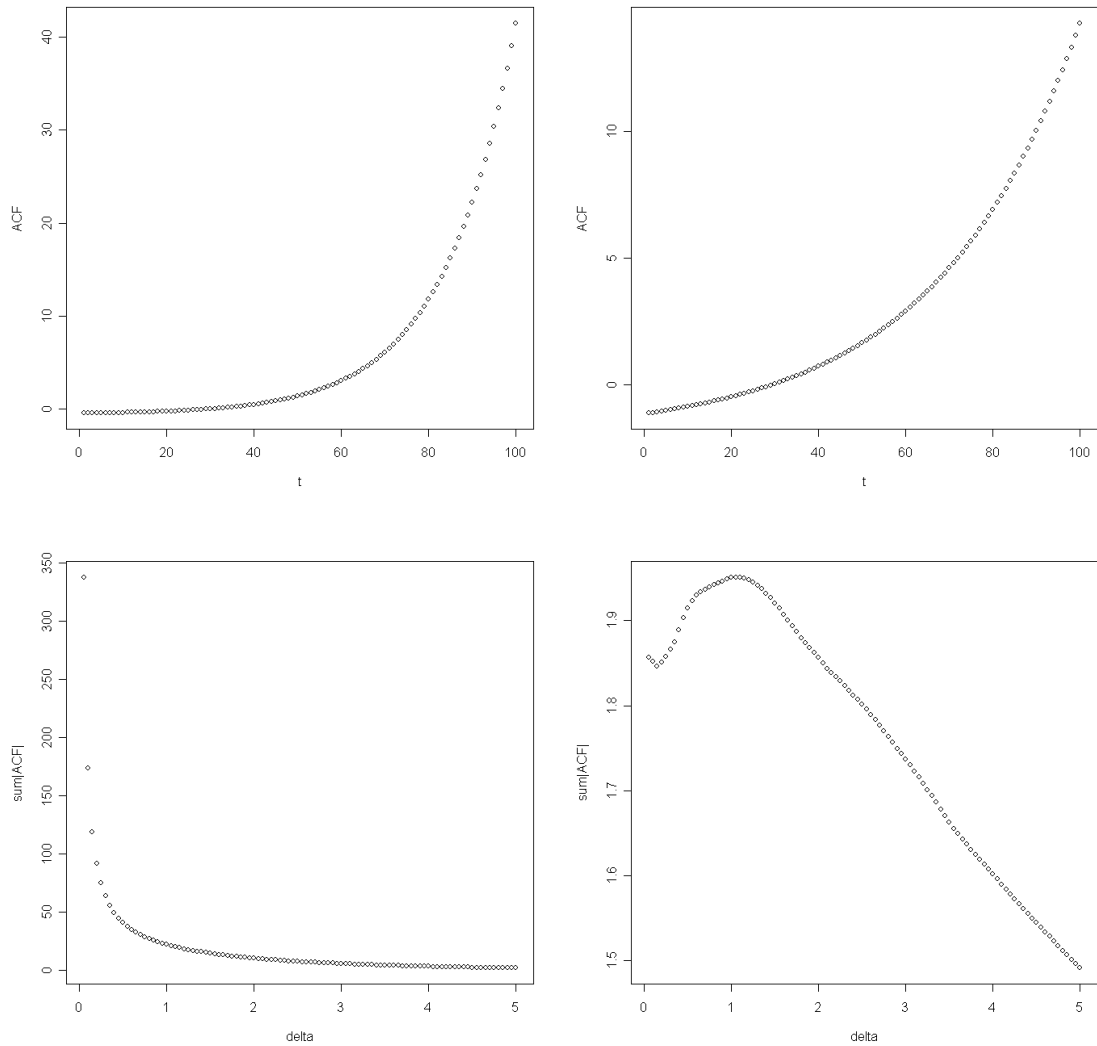
3.4.1.3. Autokoreliacinė funkcija

Norėdami paskaičiuoti autokoreliacinės funkcijos reikšmes turėsime, paskaičiuoti atsitiktinio dydžio $\sigma_t^\delta \sigma_0^\delta$ momentus. Sugeneruokime 1000 tokių atsitiktinio dydžio reikšmių, naudodamiesi išraiška:

$$E(\sigma_t^\delta \sigma_0^\delta) = E \left[\sigma_0^k \alpha_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{t-1} \prod_{i=1}^j (\alpha_1 f_i(\varepsilon_{t-i}) + \beta) \right) + \sigma_0^{2k} \prod_{i=1}^t (\alpha_1 f_i(\varepsilon_{t-i}) + \beta) \right]^{\delta/k}, \text{ kai } t > 1 \text{ ir}$$

$$E(\sigma_t^\delta \sigma_0^\delta) = E(\alpha_0 \sigma_0^k + (\alpha_1 f_0(\varepsilon_0) + \beta) \sigma_0^{2k})^{\delta/k}, \text{ kai } t=1.$$

Pasižiūrėkime kaip atrodo autokoreliacinė funkcija.



40 pav. Autokoreliacinių funkcijų grafikai . Pirmame grafike ACF, kai delta=2, antrame kai lygu 1. Ketvirtame grafike – sumodeliuoti duomenys.

Kaip ir GARCH(1,1) atveju autokoreliacinės funkcijos elgesys kelia įtarimų, kad nėra patenkintos momentų egzistavimo sąlygos. Sumodeliuotiems duomenims geriausias δ yra apie 1.

3.4.2. Standartinio Stjudento triukšmo sekos pasiskirstymo atvejis

3.4.2.1. Momentai

Pažiūrėkime kaip keičiasi momentų formulės, kai triukšmo sekos pasiskirstymas yra standartinis Stjudento. Tokiu atveju

$$E(|\varepsilon_t| - \gamma \varepsilon_t)^k = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-k}{2}\right)(\nu-2)^{\frac{k}{2}}}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left[(1+\gamma)^k + (1-\gamma)^k \right].$$

Taigi,

$$E\sigma_i^k = \frac{\alpha_0}{1 - \beta - \alpha_1 \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v-k}{2}\right)(v-2)^{\frac{k}{2}}}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left[(1+\gamma)^k + (1-\gamma)^k \right]}, \text{ o}$$

$$E\sigma_i^{2k} = \frac{\alpha^2 \left(1 + \beta + \alpha_1 \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v-k}{2}\right)(v-2)^{\frac{k}{2}}}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} g(k) \right)}{\left(1 - \beta - \alpha_1 \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v-k}{2}\right)(v-2)^{\frac{k}{2}}}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} g(k) \right)} \times$$

$$\times \frac{1}{\left(1 - \alpha_1^2 \frac{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v-2k}{2}\right)(v-2)^k}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} g(2k) - \beta\alpha_1 \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v-k}{2}\right)(v-2)^{\frac{k}{2}}}{2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} g(k) - \beta^2 \right)}$$

Čia $g(k) = (1+\gamma)^k + (1-\gamma)^k$.

Kaip matome išlieka tas pats momentų egzistavimo klausimas, kai laipsnis nėra k kartotinis. Įsivertinkime mūsų modelio parametrus. Tam, kaip ir standartiniu normaliuoju atveju, naudosisime garchOxFit() funkciją.

Maximum Likelihood Estimation

	Coefficient
Cst(V)	0.0033081
ARCH(1)	0.0713270
GARCH(1)	0.9353500
APARCH(1)	0.4745700
DELTA(1)	1.1117000
Student(DF)	6.5086000

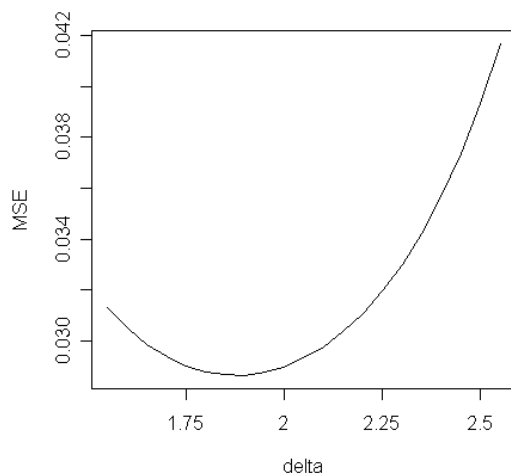
Taigi mūsų modelyje $\alpha_0 = 0,0033081$, $\alpha_1 = 0,0713270$, $\beta = 0,93535$, $\gamma = 0,47457$, $k = 1,1117$ ir $v = 6,5086$. Kaip matome, kintamumą nusako buvusios kintamumo reikšmės. Taip pat pastebėjome, kad asimetriškumo koeficientas didesnis nei standartinio normaliojo triukšmo sekos atveju.

Patikrinę k ir $2k$ momentų egzistavimo sąlygas, gauname, kad jos patenkinamos.

3.4.2.2. Vidutinė kvadratinė paklaida

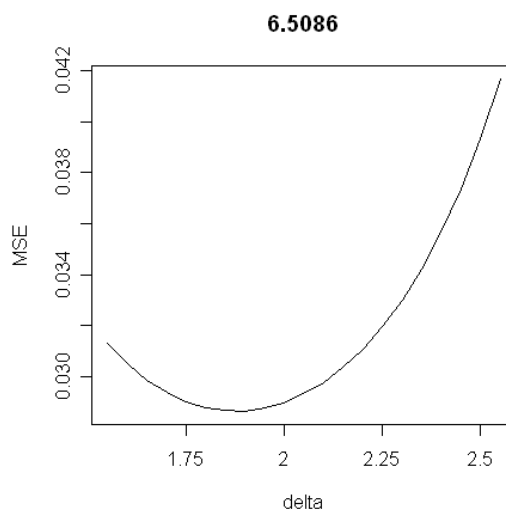
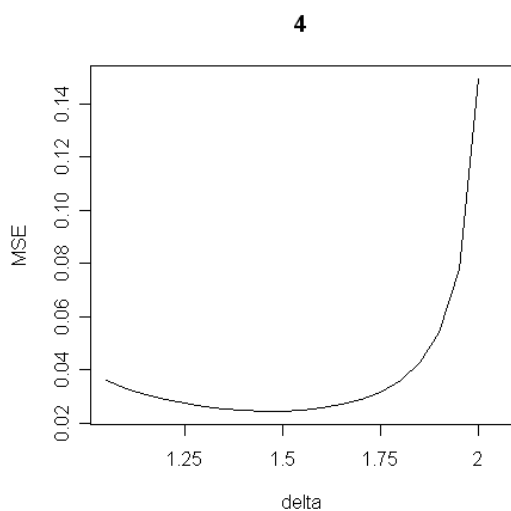
Sumodeliuokime 1000 kintamumo reikšmių ir paskaičiuokime joms vidutinę kvadratinę paklaidą.

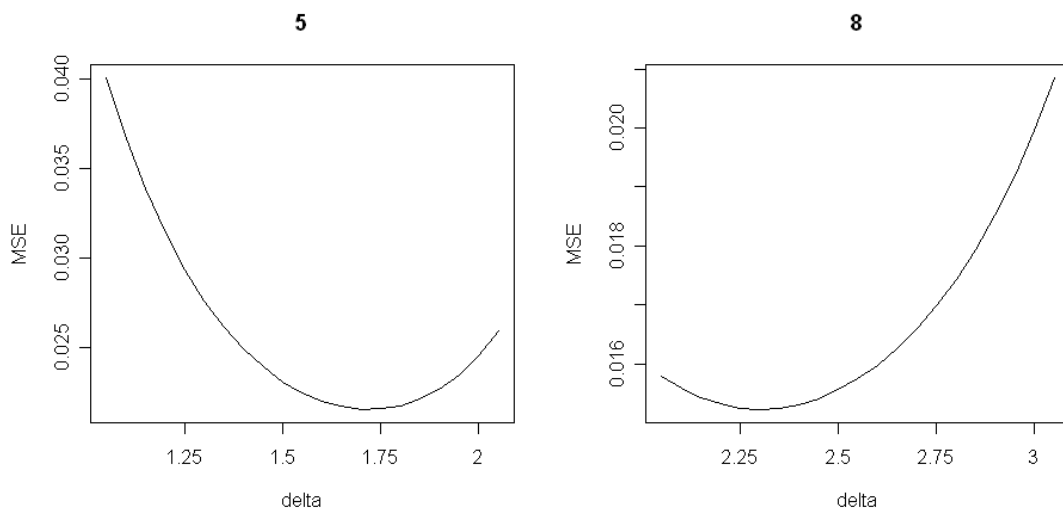
$$MSE(r_i|\delta) = \frac{(v-2)^\delta}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{2\delta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v-2\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} E\sigma_i^{2\delta} - 2 \frac{(v-2)^{\delta/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v-\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} E\sigma_i^{\delta+2} + E\sigma_i^4$$



41 pav. Vidutinė kvadratinė paklaida.

Kaip matome vidutinė kvadratinė paklaida mažiausia, kai δ apie 1,9. Pažiūrėkime kaip šis parametras kinta, kai keičiame laisvės laipsnių skaičių.



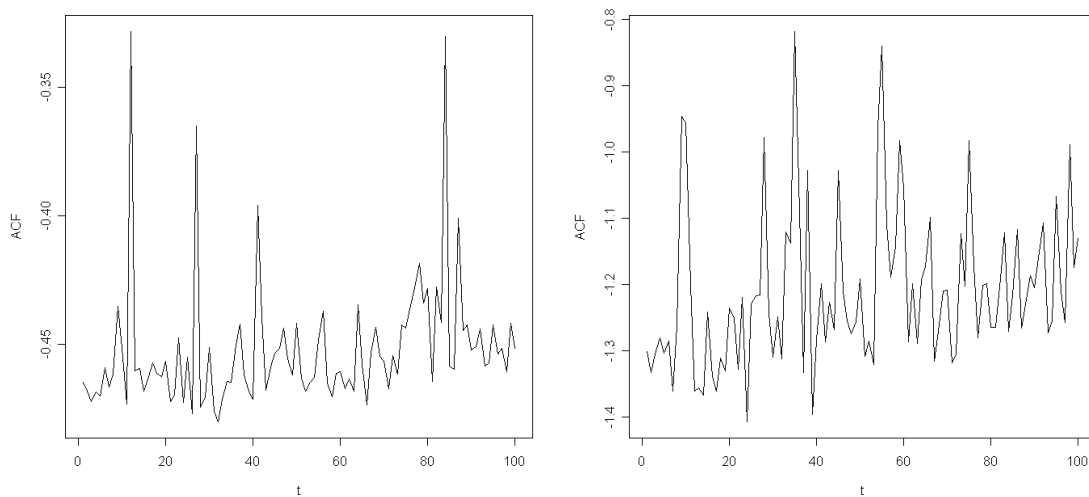


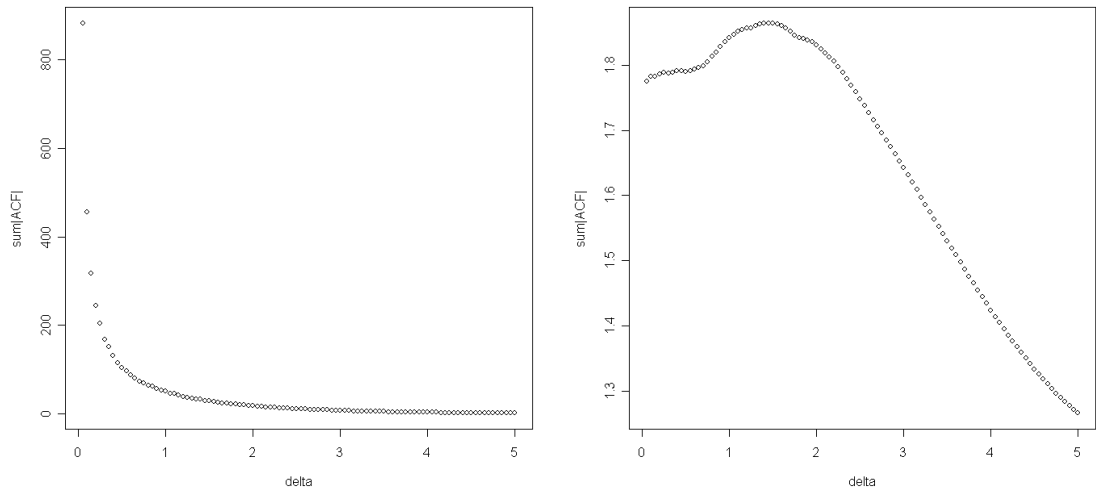
42 pav. Vidutinės kvadratinės paklaidos kitimas, kintant Stjudento laisvės laipsnių skaičiui.

Didėjant Stjudento pasiskirstymo laisvės laipsniams, δ , minimizuojantis MSE, didėja.

3.4.2.3. Autokoreliacinė funkcija

Dabar pažiūrėkime kaip mūsų sugeneruotiems duomenims atrodo autokoreliacinė funkcija.





43 pav. Autokoreliacinė funkcija. Pirmame grafike delta=2, anytame delta=1.

Kaip matome teoriniai rezultatai nepakito. Kai ir anksčiau, tai galėjo nulemti nepatvirtintos momentų egzistavimo sąlygos. Tuo tarpu sumodeliuotų gražų grafikas rodo, kad „geriausias“ δ yra apie 1,5.

APARCH(1,1) modelio atveju gavome, kad

- „geriausias“ δ gautas MSE metodu yra 1,9, kai triukšmo seka pasiskirsčiusi pagal standartinį normalųjį pasiskirstymą, ir 3,1, kai pagal standartinį Stjudento.
- Autokoreliacinės funkcijos elgesys reikalauja tolimesnių tyrimų: reikia nustatyti kokias sąlygas turi tenkinti parametrai, kad egzistuotų ieškomi momentai.

IŠVADOS

Šiame darbe naudodami pagalbinį kintamumo rodiklį kaip alternatyvų kintamumo apibrėžimą gavome, kad kvadratinį kintamumą geriausiai nusako $E|r_t|^\delta$, kai $\delta \in 2,3-2,4$. Šis rezultatas papildo D. E. Giles [4] išvadą, kad kvadratinį kintamumą geriau nusako kvadratinės nei absoliučios gražos. Vienintelis modelis davęs kitokius rezultatus – APARCH(1,1). Standartinio normaliojo triukšmo sekos pasiskirstymo atveju gavome, kad $\delta \in 1,9$, tuo tarpu standartinio Stjudento atveju $\delta \in 3.1$. Autokoreliacinės funkcijos elgesio tyrimai buvo gan sudėtingi. Didžioji dalis modelių neprieštaravo Z. Ding, C. W. J. Granger, R. F. Engle [2] gautiems rezultatams. Jie pastebėjo, kad autokoreliacinė funkcija yra stipriausia, kai naudojamos absoliučios gražos. APARCH(1,1) ir GARCH(1,1) teoriškai įvertinti δ nepavyko.

Iš darbe gautų rezultatų galime daryti išvadą, kad absoliučių ir kvadratinių gražų naudojimas, bandant vertinti kintamumą, yra pagrįstas.

Šiame darbe nagrinėjome tik paprasčiausius kintamumo apibrėžimus, tačiau neišvengėme sunkumų. Pirmas iš jų buvo parametro δ , minimizuojančio MSE, išraiškos radimas. Šios išraiškos radimas palengvintų modelių parametru įtakos „geriausiam“ δ analizę. Kita problema - autokoreliacinės funkcijos analizė APARCH(1,1) ir GARCH(1,1) atvejais. Šią analizę visų pirma reiktų pradėti nuo momentų egzistavimo klausimo.

LITERATŪRA

1. Z. Ding, C.W.J. Granger, R.F. Engle, A long memory property of stock market returns and a new model, *Journal of Empirical Finance*, 1, 83-106 (1993).
2. L. Forsberg, E. Ghysels, Why Do Absolute Returns Predict Volatility So Well?, *Journal of Financial Econometrics*, 5, 31-67 (2007).
3. D.E. Giles, Some properties of absolute returns as a proxy for volatility, *Econometrics Working Paper*, EWP0706.
4. C. He, T. Terasvirta, Properties of moments of a family of GARCH processes, *Journal of Econometrics*, 92, 173-192 (1999).
5. M. Karanasos, J. Kim, A Re-examination of the Asymmetric Power ARCH Model, *Journal of Empirical Finance*, 13, 113-128 (2006).
6. J. Knight, S. Satchell, *Forecasting Volatility in the Financial Markets, Third edition*, Elsevier, Oxford, UK (2007).
7. S. Ling, M. McAleer, Stationarity and Existence of Moments of a Family of GARCH Processes, *Journal of Econometrics*, 106, 109-117 (2002).
8. R. S. Tsay, *Analysis of Financial Time Series*, A Wiley-Interscience publications, University of Chicago (2002).

PRIEDAI

A PRIEDAS

GARCH(1,1) sprendinys

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \alpha + \beta r_{t-1}^2 + \gamma \sigma_{t-1}^2 = \alpha + (\beta \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma) \sigma_{t-1}^2 = \alpha + (\beta \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma) (\alpha + (\beta \varepsilon_{t-2}^2 + \gamma) \sigma_{t-2}^2) = \dots \\ &= \alpha \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^j (\beta \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma) \right) + \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sigma_{t-k}^2 \prod_{i=1}^k (\beta \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma) \right]\end{aligned}$$

Irodysime, kad $\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sigma_{t-k}^2 \prod_{i=1}^k (\beta \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma) \right] = 0$

$$\begin{aligned}E \left[\sigma_t^2 - \alpha \left(1 + \sum_{j=1}^k \prod_{i=1}^j (\beta \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma) \right) \right]^2 &= E \left[\sigma_{t-k}^2 \prod_{i=1}^k (\beta \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma) \right]^2 = E \left[\sigma_{t-k}^4 \prod_{i=1}^k (\beta \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma)^2 \right] = \\ &= E \sigma_{t-k}^4 \prod_{i=1}^k E (\beta \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma)^2 = \frac{\alpha^2 (1 + \beta + \gamma)}{(1 - \beta - \gamma)(1 - (\beta + \gamma)^2 - 2\beta^2)} (3\beta^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \text{ nes}\end{aligned}$$

$3\beta^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2 < 1$ (ketvirto momento egzistavimo sąlyga).

Taigi, $\alpha \left(1 + \sum_{j=1}^k \prod_{i=1}^j (\beta \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma) \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sigma_t^2 \Rightarrow \sigma_{t-k}^2 \prod_{i=1}^k (\beta \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Vadinasi,

$$\sigma_t = \alpha^{\frac{1}{2}} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^j (\beta \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Stochastinio kintamumo sprendinys

$$\log \sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \log \sigma_{t-1}^2 + u_t = \gamma_0 + \gamma_0 \gamma_1 + \gamma_1^2 \log \sigma_{t-2}^2 + u_t + \gamma_1 u_{t-1} = \dots = \frac{\gamma_0}{1 - \gamma_1} + \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_1^k u_{t-k} +$$

$$+ \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_1^k \log \sigma_{t-k}^2 = \frac{\gamma_0}{1 - \gamma_1} + \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_1^k u_{t-k}$$

$$\sigma_t = \exp \left(\frac{\gamma_0}{2(1 - \gamma_1)} \right) \prod_{k=0}^{\infty} \exp \left(\frac{\gamma_1^k u_{t-k}}{2} \right)$$

EGARCH sprendinys

$$\begin{aligned} \log \sigma_t^2 &= \gamma_0 + \gamma_1 \log \sigma_{t-1}^2 + w\varepsilon_{t-1} = \gamma_0 + \gamma_0\gamma_1 + \gamma_1^2 \log \sigma_{t-2}^2 + w\varepsilon_{t-1} + \gamma_1 w\varepsilon_{t-2} = \dots = \frac{\gamma_0}{1-\gamma_1} + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_1^k w\varepsilon_{t-k-1} + \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_1^k \log \sigma_{t-k}^2 = \frac{\gamma_0}{1-\gamma_1} + \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_1^k w\varepsilon_{t-k-1} \\ \sigma_t &= \exp\left(\frac{\gamma_0}{2(1-\gamma_1)}\right) \prod_{k=0}^{\infty} \exp\left(\frac{\gamma_1^k w\varepsilon_{t-k-1}}{2}\right) \end{aligned}$$

APARCH(1,1) sprendinys

$$\begin{aligned} \sigma_t^\delta &= \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^\delta \left(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma \varepsilon_{t-1}\right)^\delta + \beta \sigma_{t-1}^\delta = \dots = \\ &= \alpha_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^j \left(\alpha_1 \left(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma \varepsilon_{t-1}\right)^\delta + \beta\right)\right) + \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sigma_{t-k}^\delta \prod_{i=1}^k \left(\alpha_1 \left(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma \varepsilon_{t-1}\right)^\delta + \beta\right)\right] \\ \text{Irodysime, kad } \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sigma_{t-k}^\delta \prod_{i=1}^k \left(\alpha_1 \left(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma \varepsilon_{t-1}\right)^\delta + \beta\right)\right] &= 0 \\ E \left[\sigma_t^\delta - \alpha_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^j \left(\alpha_1 \left(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma \varepsilon_{t-1}\right)^\delta + \beta\right)\right) \right]^2 &= E \left[\sigma_{t-k}^\delta \prod_{i=1}^k \left(\alpha_1 \left(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma \varepsilon_{t-1}\right)^\delta + \beta\right) \right]^2 \\ &= E \left[\sigma_{t-k}^{2\delta} \prod_{i=1}^k \left(\alpha_1 \left(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma \varepsilon_{t-1}\right)^\delta + \beta\right)^2 \right] = E \sigma_{t-k}^{2\delta} \prod_{i=1}^k E \left(\alpha_1 \left(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma \varepsilon_{t-1}\right)^\delta + \beta\right)^2 \\ &= E \sigma_{t-k}^{2\delta} \left(E \left(\alpha_1 \left(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma \varepsilon_{t-1}\right)^\delta + \beta\right)^2 \right)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad \text{nes } E \left(\alpha_1 \left(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma \varepsilon_{t-1}\right)^\delta + \beta\right)^2 < 1 \quad \text{iš } 2\delta \end{aligned}$$

momento egzistavimo sąlygos..

$$\text{Taigi, } \alpha_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^j \left(\alpha_1 \left(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma \varepsilon_{t-1}\right)^\delta + \beta\right)\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sigma_t^\delta \Rightarrow \sigma_{t-k}^\delta \prod_{i=1}^k \left(\alpha_1 \left(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma \varepsilon_{t-1}\right)^\delta + \beta\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Vadinasi,

$$\sigma_t = \alpha^{\frac{1}{\delta}} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^j \left(\alpha_1 \left(|\varepsilon_{t-1}| - \gamma \varepsilon_{t-1}\right)^\delta + \beta\right)\right)^{\frac{1}{\delta}}.$$

B PRIEDAS

Teiginys. Jei $z_t \sim N(0,1)$, tai $E|z_t|^\delta = \frac{2^{\delta/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right)$.

Irodymas.

$$\begin{aligned} E|z_t|^\delta &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|^\delta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \int_{-\infty}^0 (-x)^\delta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx + \int_0^{\infty} x^\delta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \\ &= 2 \int_0^{\infty} x^\delta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \stackrel{x=\sqrt{2y}}{=} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (2y)^{\delta/2} \exp(-y) \frac{1}{\sqrt{2y}} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (2y)^{\delta/2} \times \\ &\times \exp(-y) \frac{1}{\sqrt{2y}} dy = \frac{2^{\delta/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} y^{\frac{\delta-1}{2}} \exp(-y) dy = \frac{2^{\delta/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right). \quad \square \end{aligned}$$

C PRIEDAS

Teiginys. Jei $z_t \sim Stj(\nu)$, tai $E|\varepsilon_t|^\delta = \frac{(\nu-2)^{\delta/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$, kai $\varepsilon_t = z_t \frac{\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\nu}}$.

Irodymas.

$$\begin{aligned} E|\varepsilon_t|^\delta &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| x \frac{\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\nu}} \right|^\delta \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} dx = 2 \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)(\nu-2)^{\frac{\delta}{2}}}{\sqrt{\nu^{\delta+1}}\pi\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{\infty} x^\delta \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} dx \stackrel{x=\sqrt{y}}{=} \\ &= 2 \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)(\nu-2)^{\frac{\delta}{2}}}{\sqrt{\nu^{\delta+1}}\pi\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{\infty} y^{\delta-\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{\delta+1}{2}} (1+y)^{-\frac{\nu+1}{2}} dy = 2 \frac{(\nu-2)^{\frac{\delta}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{\infty} y^{\delta-\frac{1}{2}} (1+y)^{-\frac{\nu+1}{2}} dy = \\ &= \frac{(\nu-2)^{\frac{\delta}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} B\left(\frac{\delta+1}{2}, \frac{\nu-\delta}{2}\right) = \frac{(\nu-2)^{\frac{\delta}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\delta}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} = \\ &= \frac{(\nu-2)^{\frac{\delta}{2}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\delta}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}, \text{ su sąlyga, kad } \nu > \delta. \quad \square \end{aligned}$$

D PRIEDAS

Teiginys. Jei a. d. $Y \sim N(m, v)$, tai atsitiktinis dydis $X = \exp(Y)$ yra log-normalusis su centriniais momentais, nusakomais $E(X^k) = \exp(km + k^2v/2)$.

Irodymas.

$$\begin{aligned} E(X^k) &= E \exp(kY) = \int \exp(kx) \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v}\right) dx = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2 - 2kvx}{2v}\right) dx = \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2xm + m^2 - 2kvx}{2v}\right) dx = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2(m+kv)x + m^2}{2v}\right) dx = \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(x-(m+kv))^2 - 2mkv - k^2v^2}{2v}\right) dx = \exp\left(km + \frac{k^2v}{2}\right) \times \\ &\times \int \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(x-(m+kv))^2}{2v}\right) dx = \exp\left(km + \frac{k^2v}{2}\right). \quad \square \end{aligned}$$

E PRIEDAS

Duomenų modeliavimas

1. GARCH(1,1) modelis

- Standartinio normaliojo triukšmo sekos pasiskirstymo atveju:

```
a0<-1.38254e-07
```

```
a1<-0.1
```

```
b1<-0.8
```

```
N<-100000
```

```
duom<-garchSim(model=list(omega=a0 , alpha=a1 , beta=b1 ),n=N, cond.dist="rnorm")
```

```
var[1]<-a0/(1-a1-b1)
```

```
for(i in 2:N)
```

```
{var[i]<-a0+a1*(duom[i-1]*duom[i-1])+b1*(var[i-1])}
```

```
st<-sqrt(var)
```

- Standartinio Stjudento triukšmo sekos atveju

```
a0<- 1.16224e-07
```

```
a1<-0.1
```

```
b1<-0.8
```

```
v<- 6.12163
```



```

N<-100000
duom2<-garchSim(model=list(omega=a0 , alpha=a1 , beta=b1 , shape=v ),n=N,
cond.dist="rstd")
vart2<-c()
vart2[1]<-a0/(1-a1-b1)
for(i in 2:N)
{vart2[i]<-a0+a1 *(duom2[i-1]*duom2[i-1])+b1*(vart2[i-1])}
st2<-sqrt(vart2)

```

2. Stochastinio kintamumo modelis

```

f0<- -0.0866
f1<- 0.9923
f2<- 0.01665873
N<-10000
s<-c()
data<-c()
for (l in 1:N){
s[l]<-1
for (i in 0:100){
s[l]<-s[l]*exp(0.5*f1^i*rnorm(1, mean=0,sd=sqrt(f2)))
data[l]<-exp(f0/2/(1-f1))*s[l]}

```

3. EGARCH modelis

```

f0<- -0.0866
f1<- 0.9923
f2<- 0.01665873
N<-10000
s<-c()
data<-c()
for (l in 1:N){
s[l]<-1
for (i in 0:100){
s[l]<-s[l]*exp(0.5*f1^i*f2*rnorm(1))
data[l]<-exp(f0/2/(1-f1))*s[l]}

```

4. APARCH(1,1) modelis

- Standartinio normaliojo triukšmo sekos pasiskirstymo atveju:

```

a0<- 0.003406
a1<- 0.079498
b1<- 0.924907
g<- 0.392206
lp<- 1.322134
N<-100000
r<-c()

```

```

m<-c()
k<-c()
for (l in 1:N){
m[l]<-0
for (i in 1:100){
r[i]<-1
for (j in 1:i){
k[j]<-rnorm(1)
r[i]<-r[i]*(b1+a1*(abs(k[j])-g*k[j])^lp)}}
m[l]<-(a0*(1+sum(r)))^(1/lp)}

```

- Standartinio Stjudento triukšmo sekos atveju

```

a0<- 0.0033081
a1<- 0.0713270
b1<- 0.9353500
g<- 0.4745700
lp<- 1.1117000
v<-6.5086000
N<-100000
r<-c()
m<-c()
k<-c()
for (l in 1:N){
m[l]<-0
for (i in 1:100){
r[i]<-1
for (j in 1:i){
k[j]<-rt(1, df=v)*sqrt(v-2)/sqrt(v)
r[i]<-r[i]*(b1+a1*(abs(k[j])-g*k[j])^lp)}}
m[l]<-(a0*(1+sum(r)))^(1/lp)}

```

F PRIEDAS

Vidutinės kvadratinės paklaidos funkcija

1. GARCH(1,1) modelis

- Standartinio normaliojo triukšmo sekos pasiskirstymo atveju:

```

mse3<-function(y){
2^y/sqrt(pi)*gamma(y+1/2)*mean(st^(2*y))-2^(y/2+1)/sqrt(pi)*gamma(y/2+1/2)*
mean(st^(y+2))+a0^2*(1+a1+b1)/(1-a1-b1)/(1-(a1+b1)^2-2*b1^2)}

```

- Standartinio Stjudento triukšmo sekos atveju

```

mse3<-function(y){

```

$$(v-2)^y/\sqrt{\pi}*\gamma(y+1/2)*\gamma(v/2-y)/\gamma(v/2)*\text{mean}(st2^{2*y})-2*(v-2)^{y/2}/\sqrt{\pi}*\gamma(y/2+1/2)*\gamma(v/2-y/2)/\gamma(v/2)*\text{mean}(st2^{2*(y+2)})+a0^{2*(1+a1+b1)/(1-a1-b1)/(1-(a1+b1)^2-(2+6/(v-4))*b1^2)}$$

2. Stochastinio kintamumo modelis

- Standartinio normaliojo triukšmo sekos pasiskirstymo atveju:

$$\text{mse} <- \text{function}(x, f0, f1, f2) \{ \\ 2^x/\sqrt{\pi}*\gamma(x+1/2)*\exp(x*f0/(1-f1)+x^2*f2/2/(1-f1^2))- \\ 2^{(x/2+1)}/\sqrt{\pi}*\gamma((x+1)/2)*\exp((x/2+1)*f0/(1-f1)+(x/2+1)^2*f2/2/(1-f1^2))+\exp(2*f0/(1-f1)+4*f2/2/(1-f1^2)) \}$$

- Standartinio Stjudento triukšmo sekos atveju

$$\text{mse} <- \text{function}(x, f0, f1, f2, v) \{ \\ (v-2)^x*\gamma(x+1/2)*\gamma(v/2-x)/\sqrt{\pi}/\gamma(v/2)*\exp(x*f0/(1-f1)+x^2*f2/2/(1-f1^2))- \\ 2*(v-2)^{x/2}*\gamma(x/2+1/2)*\gamma(v/2-x/2)/\sqrt{\pi}/\gamma(v/2)*\exp((x+2)/2*f0/(1-f1)+((x+2)/2)^2*f2/2/(1-f1^2))+\exp(2*f0/(1-f1)+4*f2/2/(1-f1^2)) \}$$

3. EGARCH modelis

$$\text{mse} <- \text{function}(x, f0, f1, f2) \{ \\ 2^x/\sqrt{\pi}*\gamma(x+1/2)*\exp(x*f0/(1-f1)+x^2*f2/2/(1-f1^2))- \\ 2^{(x/2+1)}/\sqrt{\pi}*\gamma((x+1)/2)*\exp((x/2+1)*f0/(1-f1)+(x/2+1)^2*f2/2/(1-f1^2))+\exp(2*f0/(1-f1)+4*f2/2/(1-f1^2)) \}$$

4. APARCH(1,1) modelis

- Standartinio normaliojo triukšmo sekos pasiskirstymo atveju

$$\text{mse3} <- \text{function}(y) \{ \\ 2^y/\sqrt{\pi}*\gamma(y+1/2)*\text{mean}(m^{2*y})-2^{y/2+1}/\sqrt{\pi}*\gamma(y/2+1/2)* \\ \text{Mean}(m^{y+2})+\text{mean}(m^4) \}$$

- Standartinio Stjudento triukšmo sekos atveju

$$\text{mse3} <- \text{function}(y) \{ \\ (v-2)^y/\sqrt{\pi}*\gamma(y+1/2)*\gamma(v/2-y)/\gamma(v/2)*\text{mean}(m^{2*y})-2*(v-2)^{y/2}/\sqrt{\pi}*\gamma(y/2+1/2)*\gamma(v/2-y/2)/\gamma(v/2)*\text{mean}(m^{y+2})+\text{mean}(m^4) \}$$

G PRIEDAS

ACF funkcija

1. GARCH(1,1) modelis

- Standartinio normaliojo triukšmo sekos pasiskirstymo atveju:

$$o <- c() \\ \text{for } (i \text{ in } 1:N) \{ \\ o[i] <- -st[i]^2*a0+st[i]^4*(a1*(rnorm(1))^2+b1) \}$$

```

u<-function(x,t){
z<-c()
w<-1
for (i in 1:t){
z[i]<-1
  for (j in 1:i){
    z[i]<-z[i]*(a1*(rnorm(1))^2+b1)
  }
mean((a0*st^2*(1+sum(z[1:t-1]))+st^4*z[t]^(x/2))}
ACF1<- function(x){
(2^x/pi*(gamma(x/2+1/2))^2*(mean(o^(x/2))-
(mean(st^(x/2)))^2))/(2^x/sqrt(pi)*gamma(x+1/2)*mean(st^x)-
2^x/pi*(gamma(x/2+1/2))^2*(mean(st^(x/2)))^2)}
ACF<- function(x,t){
2^x/pi*(gamma(x/2+1/2))^2*(u(x,t)-
(mean(st^(x/2)))^2)/(2^x/sqrt(pi)*gamma(x+1/2)*mean(st^x)-
2^x/pi*(gamma(x/2+1/2))^2*(mean(st^(x/2)))^2)}

```

- Standartinio Stjudento triukšmo sekos atveju

```

o<-c()
for (i in 1:N){
o[i]<-st[i]^2*a0+st[i]^4*(a1*(v-2)/v*(rt(1, df=v))^2+b1)}
u<-function(x,t){
z<-c()
w<-1
for (i in 1:t){
z[i]<-1
  for (j in 1:i){
    z[i]<-z[i]*(a1*(v-2)/v*(rt(1, df=v))^2+b1)
  }
mean((a0*st2^2*(1+sum(z[1:t-1]))+st2^4*z[t]^(x/2))}
ACF1<- function(x){
(v-2)^x/pi*(gamma(x/2+1/2)*gamma(v/2-x/2)/gamma(v/2))^2*(mean(o^(x/2))-
(mean(st2^(x/2)))^2)/((v-2)^x/sqrt(pi)*gamma(x+1/2)*gamma(v/2-
x)/gamma(v/2)*mean(st2^x)-(v-2)^x/pi*(gamma(x/2+1/2)*gamma(v/2-
x/2)/gamma(v/2))^2*(mean(st2^(x/2)))^2)}
ACF<- function(x,t){
2^x/pi*(gamma(x/2+1/2))^2*(u(x,t)-
(mean(st^(x/2)))^2)/(2^x/sqrt(pi)*gamma(x+1/2)*mean(st^x)-
2^x/pi*(gamma(x/2+1/2))^2*(mean(st^(x/2)))^2)}

```

2. Stochastinio kintamumo modelis

- Standartinio normaliojo triukšmo sekos pasiskirstymo atveju:

```
acff<-function(x,t,f0,f1,f2){(gamma(x/2+1/2))^2*(exp(x^2*f2*f1^t/4/(1-f1^2))-1)/(-
(gamma(x/2+1/2))^2+gamma(x+1/2)*sqrt(pi)*exp(x^2*f2/4/(1-f1^2)))}
```

- Standartinio Stjudento triukšmo sekos atveju

```
mse<-function(x,,f0,,f1,f2,v){
(gamma(x/2+1/2)*gamma(v/2-x/2))^2*(exp(x^2*f2*f1^t/4/(1-f1^2))-1)/(-
(gamma(x/2+1/2)*gamma(v/2-x/2))^2+sqrt(pi)*gamma(v/2)*gamma(x+1/2)*gamma(v/2-
x)*exp(x^2*f2/4/(1-f1^2)))}
```

3. EGARCH modelis

```
acff<-function(x,t,f0,f1,f2){(gamma(x/2+1/2))^2*(exp(x^2*f2*f1^t/4/(1-f1^2))-1)/(-
(gamma(x/2+1/2))^2+gamma(x+1/2)*sqrt(pi)*exp(x^2*f2/4/(1-f1^2)))}
```

4. APARCH(1,1) modelis

- Standartinio normaliojo triukšmo sekos pasiskirstymo atveju

```
o<-c()
for (i in 1:N){
h<-rnorm(1)
o[i]<-m[i]^lp*a0+m[i]^(2*lp)*(a1*(abs(h)-g*h)^lp+b1)}
u<-function(x,t){
z<-c()
w<-1
for (i in 1:t){
z[i]<-1
for (j in 1:i){
z[i]<-z[i]*(a1*(abs(h)-g*h)^lp +b1)
}}
mean((a0*m^lp*(1+sum(z[1:t-1]))+m^(2*lp)*z[t])^(x/lp))}
ACF1<- function(x){
2^x/pi*(gamma(x/2+1/2))^2*(mean(o^(x/lp))-
(mean(st^(x/2)))^2)/(2^x/sqrt(pi)*gamma(x+1/2)*mean(m^x)-
2^x/pi*(gamma(x/2+1/2))^2*(mean(m^(x/2)))^2)}
ACF<- function(x,t){
2^x/pi*(gamma(x/2+1/2))^2*(u(x,t)-
(mean(m^(x/2)))^2)/(2^x/sqrt(pi)*gamma(x+1/2)*mean(m^x)-
2^x/pi*(gamma(x/2+1/2))^2*(mean(m^(x/2)))^2)}
o<-c()
for (i in 1:N){
h<-rt(1, df=v)*sqrt(v-2)/sqrt(v)
o[i]<-m^lp*a0+m^(2*lp)*(a1*(abs(h)-g*h)^lp+b1)}
u<-function(x,t){
z<-c()
w<-1
```

```

for (i in 1:t){
  z[i]<-1
  for (j in 1:i){
    h<-rt(1, df=v)*sqrt(v-2)/sqrt(v)
    z[i]<-z[i]*(a1*(abs(h)-g*h)^lp +b1)
  }
}
mean((a0*m^lp*(1+sum(z[1:t-1]))+m^(2*lp)*z[t])^(x/lp))
ACF1<- function(x){
  (v-2)^x/v^x*v^x/pi*(gamma(x/2+1/2)*gamma(v/2-x/2)/gamma(v/2))^2*(mean(o^(x/lp))-
  (mean(m^(x/2)))^2)/((v-2)^x/sqrt(pi)*gamma(x+1/2)*gamma(v/2-
  x)/gamma(v/2)*mean(m^x)-(v-2)^x/pi*(gamma(x/2+1/2)*gamma(v/2-
  x/2)/gamma(v/2))^2*(mean(m^(x/2)))^2)}
ACF<- function(x,t){
  2^x/pi*(gamma(x/2+1/2))^2*(u(x,t)-
  (mean(m^(x/2)))^2)/(2^x/sqrt(pi)*gamma(x+1/2)*mean(m^x)-
  2^x/pi*(gamma(x/2+1/2))^2*(mean(m^(x/2)))^2)}

```