VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Tomas Antanaitis

FINANSIŠKAI STABILIOS BONUS–MALUS SISTEMOS SUDARYMAS

Magistro baigiamasis darbas

Leidžiu ginti ....

Darbo Vadovas **doc. dr. G. Misevičius**

Vilnius, 2009

Turinys

Reziumė

Darbe konstruojame bonus-malus sistemas, kurios yra finansiškai stabilios bėgant metams. Pasinaudodami sudėtiniu Puasono skirstiniu randame begalinės bonus-malus sistemos koeficientus. Išsprendę kvadratinio minimizavimo uždavinį randame baigtinės bonus-malus sistemos koeficientus.

Raktiniai žodžiai

Bonus-malus sistema, neigiamas binominis pasiskirstymas, sudėtinis Puasono pasiskirstymas, maksimalaus tikėtinumo funkcija, Bajeso teorema, stacionarus pasiskirstymas

Įvadas

Turbūt teisūs yra tie, kurie draudimo rinką vadina šalies ūkio (ekonomikos) veidrodžiu, todėl reikia nepamiršti, kad 2006 ir 2007 metai buvo itin sėkmingi visam šalies ūkiui, sparčiai augo Lietuvos makroekonominiai rodikliai, didėjo ir šalies gyventojų bei įmonių pajamos. Šiuo metu Lietuvos ūkis įžengė į ekonominio vystymosi lėtėjimo fazę, todėl Lietuvos draudimo rinkos laukia nauji iššūkiai, siekiant ir toliau efektyviai vystyti draudimo verslą, esant ne tokioms palankioms makroekonominėms sąlygoms.

Pagrindinis aktuarų tikslas yra ir bus rūpestis, kad draudimo Įmonės veiklos sistema būtų patikima, veiksminga, saugi ir stabili. Bėgant metams, draudimo rinkoje vyksta ne tik kiekybiniai, bet ir kokybiniai pokyčiai, keičiasi ne tik draudimo verslo mastas, bet ir verslo aplinka, verslo kultūra, mentalitetas, kartu keičiasi ir aktuarų uždaviniai įgyvendinant pagrindinį jų tikslą. Savo kasdieninėje veikloje jie remiasi aiškumo, nuoseklumo, skaidrumo principais.

Pagrindinis draudimo principas – kiekvienas apdraustasis draudimo kompanijai perduoda savo riziką. Todėl vienas pagrindinių aktuaro uždavinių – sudaryti tokią draudimo kainodarą, kuri būtų teisinga prieš visus draudėjus (už didesnę draudiko prisiimamą riziką draudėjai mokėtų daugiau, už mažesne riziką – mažiau), padengtų veiklos kaštus ir neštų draudikui jo norimą pelną. Šiam tikslui pasiekti aktuarai dažnai grupuoja draudėjus į klases su tam tikrais draudėjų požymiais. Toje pačioje klasėje mokama vienoda įmoka. Pirminiai požymiai pagal kuriuos draudėjai skirstomi į klases praktikoje vadinami *a priori* požymiais (tai yra tokie požymiai, kurie gali būti ir yra nustatomi draudimo sutarties sudarymo momentu, dar prieš draudėjui pradedant vairuoti). Transporto priemonių valdytojų civilinės atsakomybės (toliau TPVCA) draudime draudėjai skirstomi pagal juridinį statusą, amžių, lytį, vietovę, transporto priemonės tipą, jos naudojimo pobūdį, kilometražą, kartais netgi pagal draudėjo turimą transporto priemonių skaičių, šeimyninę padėtį.

Nepaisant šio rūšiavimo, daug pakankamai svarbių faktorių negali būti įvertinti sutarties sudarymo metu (kiekvieno draudėjo individualus reakcijos laikas, vairavimo būdas, agresyvumas ar vietovės kelių žinojimas). Galiausiai šios rizikų klasės vis dar yra pakankamai nehomogeninės. Pagrįsta būtų manyti, kad šiuos faktorius geriausiai atspindi draudėjo sukeltų įvykių istorija (įvykių skaičius per tam tikrą (pakankamą) laiko periodą). Tokiu būdu draudimo įmoka yra nustatoma kiekvienais draudimo metais, priklausomai nuo draudėjo praneštų įvykių skačiaus per pastaruosius metus.

Kainodaros sistema, kurioje draudėjai yra baudžiami priemokomis už padarytus įvykius ir skatinami nuolaidomis už draudimo metus be įvykių yra naudojama daugelyje išsivysčiusių šalių. Draudėjų rūšiavimas, pagal jau faktinius (*a posteriori*) draudėjų požymius yra praktiškas būdas suskirstyti draudėjus į klases su panašia draudiko prisiimama rizika. Neapsiribojant drausmingų vairuotojų paraginimu ir nedrausmingų nubaudimu, aktuarai siekia suskirstyti draudimo portfelį į klases su gimininingomis savybėmis. Tokia kainodaros sistema vadinama nuolaidų–priemokų sistema (bonus-malus system, toliau BMS).

Tokioje sistemoje draudimo įmoka priklauso nuo draudėjo klasės, jo įvykių istorijos, bei taisyklių, kuriomis grindžiama sistema. Dažniausiai praktikoje naudojamos BMS su baigtiniu klasių skaičiumi, kur draudėjai esantys toje pačioje klasėje, moka vienodą draudimo įmoką. Nauji draudėjai pradeda dalyvauti sistemoje tam tikroje klasėje (priklausomai nuo jų *a priori* savybių ar sistemos taisyklių). Šios klasės įmoka laikysime lygią 100%. Klasės žemiau 100% yra nuolaidų klasės ir jose taikomi nuolaidų koeficientai, klasės aukščiau 100% - priemokų klasės, kuriose taikomi priemokų koeficientai. Kiekvienais metais draudėjai sistemos klasėmis juda aukštyn arba žemyn, priklausomai nuo jų sukeltų įvykių skaičiaus ir sistemoje galiojančių taisyklių. Kiekvienoje klasėje įmoka nustatoma prie bazinės įmokos pridedant priedus ar taikant nuolaidas priklausomai nuo klasės charakteristikų.

Šiuo metu draudimo Įmonės tobulina savo rizikos vertinimo metodus ir klientų segmentavimo procesus, ieško optimalaus verslo valdymo modelio.

Darbe aptarsime bei sukursime optimalią ir finansiškai stabilią draudimo kainodaros sistemą vienoje pagrindinių ne gyvybės draudimo rūšių – transporto priemonių valdytojų civilinės atsakomybės privalomajame draudime. Naudodami Sudėtinį Puasono skirstinį apskaičiuosime BMS parametrus. Minimizuodami kvadratinę funkciją, skirtumo tarp optimalios BMS su begaliniu klasių skaičiumi įmokos ir BMS su baigtiniu klasių skaičiumi įmokos, sudarysime finansiškai stabilią sistemą.

1. Bonus–malus sistemų aprašymai

Siekiant kuo tikslesnių rezultatų ir atsižvelgiant į tai, kad įvykių skaičiaus intensyvumo apskaičiavimas:

$$E\ [\ N(t+1) - N(t)|N(t) = k\ ]$$

reikalauja pakankamai ilgo laikotarpio stebėjimo duomenų, o tai šiuo metu neįmanoma Lietuvos TPVCA draudimo rinkoje, darbe naudosime realius, 2006 metų Įmonės duomenis. Atsižvelgiant į faktą, kad nagrinėjami duomenys yra vienerių metų, sukursime įmokų nuolaidų/priemokų sistemą, kuri priklausys tik nuo bendro praneštų autoįvykių skaičiaus ir nepriklausys nuo laiko momento, kada tie įvykiai įvyko. Tokia sistema yra artima bonus–malus sistemai su begaliniu klasių skaičiumi.

Duomenys atrinkti pagal šiuos požymius:

- draudėjas yra fizinis asmuo,
- draudžiama transporto priemonė yra lengvasis automobilis,
- draudimo sutartis įsigaliojo 2006 metais ir galiojo1-erius metus, t.y. nebuvo nutraukta.

Laikysime, kad iki 2009 m. balandžio 1-os dienos visi įvykiai, įvykę pagal analizuojamas sutartis jau yra pranešti, t.y. įvykusių, bet nepraneštų, įvykių numatomų išmokėjimų techninis atidėjinys yra lygus nuliui (*IBNR* = 0).

Apibrėžkime tuo metu Įmonėje galiojusią (šiandien nežymiai pakitusi) kainodaros sistemą:

- draudimo įmoka nustatoma atsižvelgiant į draudėjo, automobilio, vietovės ir kt. charakteristikas, kurios nustatomos draudimo sutarties sudarymo metu (*a priori* požymiai),
- draudimo įmoka koreguojama papildomais koeficientais, kurie aprašomi sistema:

- s = 1,2,3…8 – klasių skaičius, čia 1 – mažiausios kainos klasė ir 8 – didžiausios kainos klasė.
- Pradinė sistemos klasė yra 4-ta.
- Jei draudėjas per draudiminius metus neturėjo įvykių, t.y. jei draudimo kompanijai nepranešė apie draudiminius įvykius, tai jis pereina viena klase žemyn arba, jei jis buvo

priemokos klasėje, tai iškart leidžiasi į 3 klasę. T.y. už įvykusį(-sius) įvykį(-ius) draudėjas baudžiamas tik pirmais metais po įvykio(-ių).

- Jei įvykių buvo, tai už 1 įvykį kyla aukštyn į 5 klasę, už 2 – į 6 klasę, o už 3 ir daugiau – į 7 klasę.
- Į 8 klasę draudėjas patenka, jei draudiminį įvykį sukėlė būdamas neblaivus. Į šį rodiklį darbe neatsižvelgsime, todėl laikysime, kad Įmonės sistema yra su 7-niomis klasėmis.

Priemokos ir nuolaidos (procentais) tuo metu buvo sekančios:

1.1 lentelė. Įmonėje galiojusios sistemos klasių įmokų koeficientai.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
Ci	80	90	95	100	150	200	300	500

.

Akivaizdu, kad kaina *P*, kurią draudėjas mokės būdamas klasėje *i* yra lygi: $0,01 \times C_i \times P_0$, čia P_0 - pradinė įmoka.

Apibrėžkime darbe aptariamas bonus-malus sistemas:

BMS 1:

- s = 0,1,2,3…8 – klasių skaičius, čia 0 – mažiausios kainos klasė ir 8 – didžiausios kainos klasė.
- Pradinė sistemos klasė yra 4-ta.
- Jei draudėjas per draudiminius metus neturėjo įvykių, t.y. jei draudimo kompanijai nepranešė apie draudiminius įvykius, tai jis pereina viena klase žemyn.
- Jei įvykių buvo, tai draudėjas kyla aukštyn iškart į 8 klasę, nepaisant praneštų įvykių skaičiaus

BMS 2:

- s = 0,1,2,3…12 – klasių skaičius, čia 0 – mažiausios kainos klasė ir 12 – didžiausios kainos klasė.
- Pradinė sistemos klasė yra 6-ta.
- Jei draudėjas per draudiminius metus neturėjo įvykių, tai jis pereina viena klase žemyn.
- Jei įvykių buvo, tai draudėjas už kiekvieną įvykį kyla aukštyn per penkias klases.

BMS 3:

BMS 3 bus sistema su tokiomis pačiomis perėjimo taisyklėmis, kaip sistema BMS 2, bet su 19-ka klasių ir pradinė sistemos klasė bus 10-ta.

Bendros visoms sistemoms taisyklės:

- kai pasiekiama žemiausia klasė, tai nuolaida nebedidėja, nors ir nebuvo pranešta apie įvykius.
- kai pasiekiama aukščiausia klasė, tai priemoka nebedidėja, nors ir pranešama apie įvykius.
- Sistema yra uždara, t.y. nauji draudėjai neįeina į sistemą, o esantieji jos nepalieka, bent jau pirmus 40 metų, laikysime, kad toks yra vairavimo stažo vidurkis.

Bėgant metams dauguma draudėjų apsistoja ties žemiausiomis, t.y. didžiausių nuolaidų, klasėmis. Bendra, Įmonės surenkama įmokų suma mažėja, nes priemokos neatperka suteikiamų nuolaidų. Po 30 metų, vienos pirmųjų Belgijos BMS vidutinė metinė TPVCA įmoka nukrito iki 70%, o Japonijos - iki 40%. Mūsų tikslas - surasti tokius kiekvienos klasės priemokų/nuolaidų koeficientus (procentais), kad BMS bėgant metams išliktų finansiškai stabili, t.y $\sum_i f_i C_i \geq 100$, čia f_i - tikimybė, kad draudėjas bus klasėje *i.*

2. Tikimybiniai modeliai

Jau įprasta, kad transporto priemonių avarijų skaičiaus aprašymui naudojamas Puasono skirstinys. Laikysime, kad kiekvieno draudėjo, esančio portfelyje, avarijų skaičius pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį, įvykio įvykimo dažniai nepriklauso vienas nuo kito ir yra atsitiktiniai dydžiai.

2.1. Neigiamas binominis skirstinys

Laikysime, kad tikimybė jog draudėjas per *t* metų *k* kartų sukels avariją lygi:

$$\Pi\left(k,t\middle|\Lambda\right)=e^{-\Lambda t}\frac{(\Lambda t)^k}{k!}.$$

Tada tikimybė, jog a.d. įgys reikšmę *k* per laikotarpį (0,t] apskaičiuojama:

$$\Pi\left(k,t\right)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{\left(\lambda t\right)^k}{k!}U(\lambda)d\lambda,\quad \mathrm{k}\geq 0,$$

čia Λ atsitiktinis dydis pasiskirstęs su tankio funkcija *U(*λ*).*

Jei laikysime, kad Λ yra pasiskirstęs pagal gama[3] dėsnį su parametrais μ ir η, tai

$$U(\lambda|\mu,\eta)=\frac{\mu^\eta}{\Gamma(\eta)}\lambda^{\eta-1}e^{-\lambda\mu},$$
$$\check{c}ia\,\lambda>0,\eta>0.$$

Tuomet a.d. įgys reikšmę *k* su tikimybe:

$$P(N_t=k)=\frac{\Gamma(k+\eta)}{k!\Gamma(\eta)}\left(\frac{\mu}{t+\mu}\right)^\eta\left(\frac{t}{t+\mu}\right)^k,$$
$$\check{c}ia\,k=0,1,2,...$$

Kadangi mes nagrinėjame tik vienerių metų duomenis, tai t =1. Matome, kad tokiu atveju gaunamas neigiamas binominis pasiskirstymas (toliau NB):

$$B^{-}\left(\eta, \frac{\mu}{1+\mu}\right).$$

Teorinius momentus sulyginę su empiriniais, įvertinsime parametrus η, μ . Rasime neigiamo binominio skirstinio teorinį vidurkį ir teorinę dispersiją.

Pažymėkime, $p=\frac{\mu}{1+\mu}$, tada neigiamo binominio skirstinio tankio funkcija užrašoma:

$$P(N=k)=\frac{\Gamma(k+\eta)}{k!\Gamma(\eta)} p^{\eta}(1-p)^{k},$$
$$\check{c}ia\, k=0,1,2,\ldots$$

Tuomet

$$E(N)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\eta)}{k!\Gamma(\eta)} p^{\eta}(1-p)^{k}=\frac{p^{\eta}}{\Gamma(\eta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\eta)}{k!}(1-p)^{k}.$$

Pasinaudoję gama funkcijos savybe:

$\Gamma(k+\eta)=(k+\eta-1)\Gamma(k+\eta-1)$, gauname:

$$E(N)=\eta \frac{p^{\eta}(1-p)}{\Gamma(\eta)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\eta-1)}{(k-1)!}(1-p)^{k-1}+\frac{p^{\eta}(1-p)^{2}}{\Gamma(\eta)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\eta-1)}{(k-2)!}(1-p)^{k-2}.$$

Vėl pasinaudoję gama funkcijos savybe:

$\Gamma(k+\eta-1)=(k+\eta-2)\Gamma(k+\eta-2)$, gauname:

$$\begin{aligned} E(N)=&\eta \frac{p^{\eta}(1-p)}{\Gamma(\eta)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\eta-1)}{(k-1)!}(1-p)^{k-1}+\eta \frac{p^{\eta}(1-p)^{2}}{\Gamma(\eta)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\eta-2)}{(k-2)!}(1-p)^{k-2}+ \\ &+\eta \frac{p^{\eta}(1-p)^{3}}{\Gamma(\eta)} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\eta-2)}{(k-3)!}(1-p)^{k-3}. \end{aligned} \tag{1}$$

Remdamiesi šia gama funkcijos savybe procedūrą tęsiame toliau ir gauname begalinę eilutę. Pasinaudoję tuo, kad

$$\frac{p^{\eta}}{\Gamma(\eta)}\sum_{l}\frac{\Gamma(l+\eta)}{l!}(1-p)^{l}=1,$$

(1) eilutę užrašome taip:

$$\eta(1-p+(1-p)^{2}+(1-p)^{3}+...).$$

Kadangi $0<(1-p)<1$, tai ši eilutė konverguoja ir jos suma lygi:

$$\frac{\eta(1-p)}{p}$$, iš čia

$$E(N)=\eta\frac{1}{\mu}.$$

Suskaičiuokime teorinę dispersiją naudodamiesi formule:

$$Var(N)=E(N^{2})-(E(N))^{2}.$$

Tiesioginis teorinės dispersijos radimo būdas yra gana neefektyvus, tam, kad jį palengvinti, pasinaudosime generuojančių funkcijų savybėmis. Pirmiausiai rasime NB skirstinio generuojančią funkciją ir pasinaudoję sąryšiu:

$$E(N^{2})=\psi''(1)+E(N) \qquad (2)$$,

čia $\psi(s)$ - generuojančioji NB funkcija.

Rasime teorinę dispersiją.

Ieškome NB generuojančios funkcijos:

$$\psi(s)=\frac{p^{\eta}}{\Gamma(\eta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\eta)}{k!}(1-p)^{k}s^{k}.$$

Tam, kad rasti paprastesnę generuojančios funkcijos išraišką, sudarysime paprastąją diferencialinę lygtį, su pradine sąlyga, ir ją išspręsime. Diferencijuojame generuojančią funkciją pagal kintamąjį *s:*

$$\psi'(s)=\frac{p^{\eta}}{\Gamma(\eta)}(1-p)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\eta+k)}{(k-1)!}(1-p)^{k-1}s^{k-1}=$$

$$=\frac{\eta p^{\eta}(1-p)}{\Gamma(\eta)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\eta+k-1)}{(k-1)!}(1-p)^{k-1}s^{k-1}+\frac{sp^{\eta}(1-p)^2}{\Gamma(\eta)}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\Gamma(\eta+k-1)}{(k-2)!}(1-p)^{k-2}s^{k-2}.$$

Tęsdami šį procesą toliau, gausime:

$$\psi'(s)=\eta(1-p)\psi(s)(1+(1-p)s+(1-p)^2s^2+...)\,. \tag{3}$$

Su sąlyga $0\le s<\frac{1}{1-p}$, skliausteliuose esanti eilutė konverguoja ir (3) perrašome:

$$\psi'(s)=\eta\psi(s)\frac{(1-p)}{1-(1-p)s}\text{, su pradine sąlyga } \psi(1)=1.$$

Sprendžiame aukščiau gautą diferencialinę lygtį:

$$\frac{\psi'(s)}{\psi(s)}=\frac{\eta(1-p)}{1-(1-p)s}$$

ir gauname

$$\psi(s)=\left(\frac{1}{1-(1-p)s}\right)^{\eta}C,$$

čia C – konstanta.

Konstantą C randame iš pradinės sąlygos $\psi(1)=1$. Gauname $C=p^{\eta}$. Iš čia generuojančioji NB funkcija:

$$\psi(s)=\left(\frac{p}{1-(1-p)s}\right)^{\eta}.$$

Randame:

$$\psi''(1)=\eta^2\frac{(1-p)^2}{p^2}+\eta\frac{(1-p)^2}{p^2}.$$

Pasinaudoję generuojančios funkcijos savybe (2), gauname:

$$Var(N) = \eta \frac{1-p}{p^2} = \eta \frac{1+\mu}{\mu}.$$

Teorinį vidurkį ir teorinę dispersiją sulyginame su empiriniais vidurkiu ir dispersija. Gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \eta \dfrac{1}{\mu} = 0,0652.., \\ \eta \dfrac{1+\mu}{\mu} = 0,0679... \end{cases}$$

Iš čia

$$\mu \approx 0,0414,$$
$$\eta \approx 0,0027.$$

Lentelėje pateikiame neigiamo binominio ir paprasto Puasono (su parametru $\Lambda \approx 0,0652$) skirstinių realizacijas.

2.1.1. lentelė. Darbe naudojamų duomenų pasiskirstymas ir realizacijos.

Įvykių skaičius, kiekis	Sutarčių skaičius	Neigiamas Binominis	Puasono su parametru Λ
0	62391	62404,706	62256,447
1	3901	3875,850	4108,926
2	202	211,803	135,595
3	10	11,048	2,983

Jei portfelį suskaidysime į keletą grupių, su panašiomis draudiminėmis rizikomis, tai turėsime sudėtinį Puasono procesą. Šiame darbe jį panagrinėsime detaliau.

2.2. Sudėtinis Puasono skirstinys

Pasiūlysime naudoti sudėtinį Puasono skirstinį ir laikysime, kad Λ tankio funkcija $U(\lambda)$ nėra žinoma. Tokiu atveju, Simar[6] 1976 metais parodė, kad maksimalaus tikėtinumo funkcijos įvertis yra geriausias, kai $U(\lambda)$ yra diskretus pasiskirstymas. Tuomet:

$$\Pi(k,t) = \sum_{j=1}^{r} p_j e^{-\lambda_j} \frac{\lambda_j^k}{k!}, \quad \mathrm{k} \geq 0 \,,$$

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 ... < \lambda_r \,,$$

$$\sum_{j=1}^{r} p_j = 1, \quad p_j \geq 0.$$

Simar[6] taip pat įrodė, kad tokia funkcija $U(\lambda)$ yra vienintelė, jei *r* tenkina šią sąlygą:

$$r \leq \min\left(v, \left\lfloor \frac{u+1}{2} \right\rfloor \right),$$

čia apibrėšime: *r* – homogeninių rizikų klasių skaičius, *u* - maksimalus draudėjo sukeltų avarijų skaičius, o *v* - klasių, kuriose praneštų įvykių skaičius nelygus 0, skaičius.
Iš mūsų turimų duomenų gauname, kad *r* =2.

Parametrų $\lambda_1, \lambda_2, p_1, p_2$ pradinius artinius apskaičiuosime pasinaudoję momentų[4] metodu ir juos patikslinsime pasinaudoję maksimalaus[4] tikėtinumo funkcijos metodu.

Iš pradinių teorinių momentų formulės:

$$\alpha_N = \sum_{k=0}^{\infty} k^N e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

ir sąryšių:

$$\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!};$$

$$\frac{k^2}{k!} = \frac{1}{(k-2)!} + \frac{1}{(k-1)!};$$

$$\frac{k^3}{k!} = \frac{1}{(k-3)!} + \frac{3}{(k-2)!} + \frac{1}{(k-1)!},$$

užrašome pirmus tris pradinius teorinius momentus:

$$\alpha_1 = p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2,$$

$$\alpha_2 = p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + p_1\lambda_1^2 + p_2\lambda_2^2,$$

$$\alpha_3 = p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + 3(p_1\lambda_1^2 + p_2\lambda_2^2) + p_1\lambda_1^3 + p_2\lambda_2^3.$$

Teorinius pradinius momentus prilyginame empiriniams momentams ir gauname netiesinę lygčių sistemą su keturiais nežinomaisiais :

$$\begin{cases} \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = \overline{x_1}, \\ \lambda_1^2 p_1 + \lambda_2^2 p_2 = \overline{x_2} - \overline{x_1}, \\ \lambda_1^3 p_1 + \lambda_2^3 p_2 = \overline{x_3} - 3\overline{x_2} + 2\overline{x_1}, \\ p_1 + p_2 = 1, \end{cases}$$

čia $\overline{x_i}, i = 1,2,3$ - pradiniai empiriniai momentai. Išsprendę randame pradinius artinius (detaliau žr. priedą nr. 1):

$$\lambda_1 \approx 2,71\%, \lambda_2 \approx 13,68\%, p_1 \approx 65,32\%, p_2 \approx 34,67\% .$$

2.2.1. lentelė. Duomenų atvaizdavimas sudėtiniu Puasono skirstiniu.

Įvykių skaičius, kiekis	Sutarčių skaičius	Sudėtinis Puasono (momentu metodu)
0	62391	62391,329
1	3901	3899,692
2	202	203,940
3	10	8,735

Įvertinkime parametrus maksimalaus tikėtinumo funkcijos metodu. Mūsų atveju maksimalaus tikėtinumo funkcija *L* yra lygi:

$$L = \Pi^{\alpha_{k0}}(k_0,1) \cdot \Pi^{\alpha_{k1}}(k_1,1) \cdot \Pi^{\alpha_{k2}}(k_2,1) \cdot \Pi^{\alpha_{k3}}(k_3,1),$$

čia k_0, k_1, k_2, k_3 yra *i-ojo* draudėjo praneštų įvykių skaičius.

Funkcija *L* logaritmuojame:

$$l = \sum_{i=0}^{3} \alpha_{k_i} \ln \Pi(k_i,1) = \sum_{i=0}^{3} \alpha_{k_i} \ln\left(\sum_{j=1}^{2} p_j e^{-\lambda_j} \frac{\lambda_j^{k_i}}{k_i\,!} \right).$$

Ieškome tokio sprendinio $\lambda_1, \lambda_2, p_1, p_2$, su kuriuo funkcija įgytų maksimalią reikšmę.

Tam tikslui pasiekti reikia išspręsti sekančią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l}{\partial \lambda_1} = 0, \\ \dfrac{\partial l}{\partial \lambda_2} = 0, \\ \dfrac{\partial l}{\partial p_1} = 0, \\ \dfrac{\partial l}{\partial p_2} = 0. \end{cases}$$

Panaudoję pradinį sprendinio artinį (momentu metodu gautas parametrų reikšmes) Niutono Rafsono metodu randame maksimalaus tikėtinumo funkcijos sprendinio įvertį. (detaliau žr. priedą nr. 2):

$$\lambda_1 \approx 3,26\%,$$
$$\lambda_2 \approx 14,93\%,$$
$$p_1 \approx 72,10\%,$$
$$p_2 \approx 27,90\%.$$

2.2.2. lentelė. Duomenų atvaizdavimas sudėtiniu Puasono skirstiniu.

Įvykių skaičius, kiekis	Sutarčių skaičius	Sudėtinis Puasono (didž. tikėtin. metodu)
0	62391	62391,066
1	3901	3900,691
2	202	202,772
3	10	9,127

.

Matome, kad sudėtinis Puasono skirstinys, kai parametrai įvertinami maksimalaus tikėtinumo funkcijos metodu, tiksliausiai atvaizduoja realius duomenis.

2.2.3. lentelė. Duomenų atvaizdavimas tikimybiniais modeliais.

Įvykių skaičius	Sutarčių skaičius	Neigiamas Binominis	Puasono su parametru Λ	Sudėtinis Puasono	
				momentų m.	didž. tikėtinumo m.
0	62.391,00	62.404,71	62.256,45	62.391,33	62.391,07
1	3.901,00	3.875,85	4.108,93	3.899,69	3.900,69
2	202,00	211,80	135,60	203,94	202,77
3	10,00	11,05	2,98	8,74	9,13

.

Sudėtinis Puasono skirstinys suskaidė mūsų portfelį į dvi dalis: 72% draudėjų pasiskirstę su parametru $\lambda \approx 0,0326$ ir 28% su parametru $\lambda \approx 0,1493$.

2.2.4. lentelė. Nuokrypio matas.

Neigiamas binominis	0,719
Puasono su parametru Λ	59,839
Sudėt. Puasono momentų m.	0,202
Sudėt. Puasono maks. tikėtinumo f. M.	0,086

χ_3^2 kriterijaus 0,95 kvantilio reikšmė – 7,815. Iš lentelės matome, kad tik Puasono pasiskirstymas su parametru Λ neatitinka stebėjimo duomenų. Tiksliausiai nagrinėjamą portfelį aprašo sudėtinis Puasono pasiskirstymas, kai parametrai įvertinti maksimalaus tikėtinumo funkcijos metodu.

3. Draudėjų pasiskirstymas bonus-malus sistemoje

Tegu $p(k)$ - tikimybė, kad vairuotojas, esantis klasėje s (su įvykių dažniu λ), padaro *k* įvykių per metus. Šio vairuotojo, perėjimo tarp klasių, tikimybių matrica Q mūsų aprašytose bonus-malus sistemose yra:

3.1. lentelė. Perėjimo tarp klasių tikimybių matrica.

BMS 1

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	*p(0)*	0	0	0	0	0	0	0	*p(k>=1)*
1	*p(0)*	0	0	0	0	0	0	0	*p(k>=1)*
2	0	*p(0)*	0	0	0	0	0	0	*p(k>=1)*
3	0	0	*p(0)*	0	0	0	0	0	*p(k>=1)*
4	0	0	0	*p(0)*	0	0	0	0	*p(k>=1)*
5	0	0	0	0	*p(0)*	0	0	0	*p(k>=1)*
6	0	0	0	0	0	*p(0)*	0	0	*p(k>=1)*
7	0	0	0	0	0	0	*p(0)*	0	*p(k>=1)*
8	0	0	0	0	0	0	0	*p(0)*	*p(k>=1)*

BMS 2

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	*p(0)*	0	0	0	0	*p(1)*	0	0	0	0	*p(2)*	0	*p(k>=3)*
1	*p(0)*	0	0	0	0	0	*p(1)*	0	0	0	0	*p(2)*	*p(k>=3)*
2	0	*p(0)*	0	0	0	0	0	*p(1)*	0	0	0	0	*p(k>=2)*
3	0	0	*p(0)*	0	0	0	0	0	*p(1)*	0	0	0	*p(k>=2)*
4	0	0	0	*p(0)*	0	0	0	0	0	*p(1)*	0	0	*p(k>=2)*
5	0	0	0	0	*p(0)*	0	0	0	0	0	*p(1)*	0	*p(k>=2)*
6	0	0	0	0	0	*p(0)*	0	0	0	0	0	*p(1)*	*p(k>=2)*
7	0	0	0	0	0	0	*p(0)*	0	0	0	0	0	*p(k>=1)*
8	0	0	0	0	0	0	0	*p(0)*	0	0	0	0	*p(k>=1)*
9	0	0	0	0	0	0	0	0	*p(0)*	0	0	0	*p(k>=1)*
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*p(0)*	0	0	*p(k>=1)*
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*p(0)*	0	*p(k>=1)*
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*p(0)*	*p(k>=1)*

BMS 3

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	*p(0)*	0	0	0	0	*p(1)*	0	0	0	0	*p(2)*	0	0	0	0	*p(3)*	0	0	*p(k>=4)*
1	*p(0)*	0	0	0	0	0	*p(1)*	0	0	0	0	*p(2)*	0	0	0	0	*p(3)*	0	*p(k>=4)*
2	0	*p(0)*	0	0	0	0	0	*p(1)*	0	0	0		*p(2)*	0	0	0	0	*p(3)*	*p(k>=4)*
3	0		*p(0)*	0	0	0	0	0	*p(1)*	0	0	0	0	*p(2)*	0	0	0	0	*p(k>=3)*
4	0	0	0	*p(0)*	0	0	0	0	0	*p(1)*	0	0	0	0	*p(2)*	0	0	0	*p(k>=3)*
5	0	0	0	0	*p(0)*	0	0	0	0	0	*p(1)*	0	0	0	0	*p(2)*	0	0	*p(k>=3)*
6	0	0	0	0	0	*p(0)*	0	0	0	0	0	*p(1)*	0	0	0	0	*p(2)*	0	*p(k>=3)*
7	0	0	0	0	0	0	*p(0)*	0	0	0	0	0	*p(1)*	0	0	0	0	*p(2)*	*p(k>=3)*
8	0	0	0	0	0	0	0	*p(0)*	0	0	0	0	0	*p(1)*	0	0	0	0	*p(k>=2)*
9	0	0	0	0	0	0	0	0	*p(0)*	0	0	0	0	0	*p(1)*	0	0	0	*p(k>=2)*
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*p(0)*	0	0	0	0	0	*p(1)*	0	0	*p(k>=2)*
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*p(0)*	0	0	0	0	0	*p(1)*	0	*p(k>=2)*
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*p(0)*	0	0	0	0	0	*p(1)*	*p(k>=2)*
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*p(0)*	0	0	0	0	0	*p(k>=1)*
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*p(0)*	0	0	0	0	*p(k>=1)*
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*p(0)*	0	0	0	*p(k>=1)*
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*p(0)*	0	0	*p(k>=1)*
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*p(0)*	0	*p(k>=1)*
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	*p(0)*	*p(k>=1)*

Kiekvienai BMS sistemai turime nesuskaidomą Markovo grandinę[8], kuri neturi ciklų. Tuomet stacionarus tikimybių skirstinys yra:

$$f_\infty(\lambda) = f_0(\lambda) \lim_{n\to\infty} Q^n ,$$

čia $f_0(\lambda)$ žymi bet kokį pradinį vairuotojų pasiskirstymą bonus-malus sistemoje. Stacionarus tikimybių skirstinys yra nepriklausomas nuo $f_0(\lambda)$.

Stacionarus tikimybių skirstinys taip pat gali būti rastas išsprendus:

$$f_\infty(\lambda) = f_\infty(\lambda) Q$$

su sąlyga

$$\sum_{i=0}^{s-1} f_\infty(i;\lambda) = 1 ,$$

čia $f_\infty(i;\lambda)$ yra i-sis vektoriaus $f_\infty(\lambda)$ komponentas (mūsų atveju – BMS klasė). Sudėtinio Puasono skirstinio atveju:

$$f_\infty = \sum_{i=1}^{r} p_i f_\infty(\lambda_i) .$$

Draudėjų pasiskirstymas po T metų bonus–malus sistemoje yra:

$$f_T(\lambda) = Q^T f_0(\lambda) .$$

Kad vaizdžiau matytųsi draudėjų pasiskirstymas tarp klasių, laikysime, kad pradinis draudėjų skaičius yra 100,000. Jei vairavimo stažo vidurkis - 40 metų, tai pagal mūsų duomenis ir BMS taisykles gauname:

3.2. lentelė. Stacionarus vairuotojų pasiskirstymas.

BMS 1

Klasė \ T	10	20	30	40	f_T
0	63980	63980	63980	63980	0,63980
1	3203	3203	3203	3203	0,03203
2	3484	3484	3484	3484	0,03484
3	3801	3801	3801	3801	0,03801
4	4162	4162	4162	4162	0,04162
5	4572	4572	4572	4572	0,04572
6	5040	5040	5040	5040	0,05040
7	5574	5574	5574	5574	0,05574
8	6184	6184	6184	6184	0,06184

BMS 2

Klasė \ T	10	20	30	40	f_T
0	58289	68021	68232	68099	0,68128
1	0	2990	3253	3289	0,03299
2	18440	3225	3522	3641	0,03577
3	2736	3575	3827	3878	0,03888
4	2956	5769	4172	4230	0,04243
5	3203	4444	4595	4630	0,04645
6	849	1697	2202	1919	0,01931
7	1362	1739	1884	1931	0,01933
8	6797	1767	1867	1949	0,01908
9	1193	1839	1818	1838	0,01846
10	1298	2200	1726	1733	0,01739
11	1299	1351	1465	1446	0,01448
12	1578	1382	1436	1418	0,01416

BMS 3

Klasė \ T	10	20	30	40	f_T
0	58289	60624	65797	66439	0,66366
1	0	1921	2646	2898	0,03019
2	0	9940	2830	3097	0,03267
3	0	2760	3311	3327	0,03549
4	0	2873	5568	3604	0,03807
5	0	3040	3794	4121	0,04138
6	26343	751	1219	2371	0,01600
7	0	1335	1219	1427	0,01596
8	0	5963	1244	1394	0,01584
9	101	844	1600	1349	0,01537
10	321	785	2771	1303	0,01401
11	1252	677	887	1287	0,01151
12	8363	833	908	1587	0,01126
13	289	1416	944	994	0,01095
14	454	2676	1005	979	0,01058
15	705	738	1200	967	0,01004
16	1014	820	1313	959	0,00931
17	1465	944	853	984	0,00901
18	1404	1059	889	914	0,00869

4. Optimali bonus–malus sistema

4.1. Optimali BMS su begaliniu klasių skaičiumi

Kaip jau minėta, mūsų B-M sistema nepriklausys nuo to, kuriuo metu įvyko įvykis, todėl mes nagrinėjame tik bendrą praneštų įvykių skaičių, neatsižvelgiant į tai, kada įvykiai įvyko.

Naudodamiesi Bajeso teorema, galime užrašyti:

$$
\begin{aligned}
&dU\left(\lambda \middle| N(t)-N(t-1)=k_t,\ldots,N(1)-N(0)=k_1\right)\\
&=\frac{P\left[N(t)-N(t-1)=k_t,\ldots,N(1)-N(0)=k_1 \middle| \lambda\right]dU(\lambda)}{P\left[N(t)-N(t-1)=k_t,\ldots,N(1)-N(0)=k_1\right]}\\
&=\frac{\dfrac{e^{-\lambda_t}\lambda^k}{\prod_{j=1}^{t}k_j}dU(\lambda)}{\int_0^\infty \dfrac{e^{-\lambda_t}\lambda^k}{\prod_{j=1}^{t}k_j}dU(\lambda)},
\end{aligned}
$$

čia $k=\sum_{j=1}^{t}k_j$.

Pirmaisiais draudėjo buvimo B-M sistemoje metais draudimo įmoka vertinama pagal pirminius (*a priori)* draudėjo duomenis , nes nėra jokios praeities informacijos apie jo nešamą draudiminę riziką:

$$E[N(1)]=E[\Lambda].$$

Kadangi įvykių praeitis (įvykimo momentas) nėra svarbi, tai t-siais metais atsižvelgiame į informaciją, kuri susideda iš įvykių skaičiaus per pirmuosius t metų. Draudėjų, kurie sukėlė *k* įvykių per pirmuosius *t* metų, tikėtinas įvykių dažnis *t+1* –ais metais apskaičiuojamas:

$$E\left[N(t+1)-N(t)\middle|N(t)=k\right]=E\left(\Lambda\middle|N(t)=k\right)$$
$$=\frac{k+1}{t}\frac{\prod(k+1,t)}{\prod(k,t)}.$$

Tariant, kad pirmoji sumokėta įmoka yra 100, (4) formulės[7] pagalba galime sudaryti BMS įmokų lentelę, priklausančią nuo k ir t:

$$C_{(t,k)}=\frac{100}{E\Lambda}\frac{k+1}{t}\frac{\prod(k+1,t)}{\prod(k,t)}. \tag{4}$$

Patikrinę žemiau pateiktas sąlygas įsitikinsime, kad aukščiau apibrėžta bonus-malus sistema yra optimali:

1. Sistema yra finansiškai stabili kiekvienais metais

$$\sum_{k=0}^{\infty}\prod(k,t)E\left(\Lambda\middle|N(t)=k\right)=E\Lambda \qquad \forall t\ .$$

2. Kuo daugiau draudiminių įvykių draudėjas praneša draudikui, tuo didesnė draudimo įmoka:

$$E\left[\Lambda\middle|N(t)=k+1\right]>E\left[\Lambda\middle|N(t)=k\right] \qquad \forall t\ ,k.$$

3. Draudimo įmoka visada mažėja, kai nebepranešama apie naujus draudiminius įvykius:

$$\frac{d}{dt}E\left[\Lambda\middle|N(t)=k\right]\le 0 \qquad \forall t\ ,k.$$

Formulė (4) gali būti perrašoma:

$$\frac{100}{E\Lambda}\frac{k+1}{t}\frac{\prod(k+1,t)}{\prod(k,t)}=\frac{100}{E\Lambda}\frac{\sum_{j=1}^{m}p_je^{-\lambda_jt}\lambda_j^{k+1}}{\sum_{j=1}^{m}p_je^{-\lambda_jt}\lambda_j^{k}}.$$

Stacionari BMS įmoka laikui neaprėžtai augant apskaičiuojama :

$$\lim_{t\to\infty}\frac{100}{E\Lambda}\frac{\sum_{j=1}^{m}p_j e^{-\lambda_j t}\lambda_j^{\,k+1}}{\sum_{j=1}^{m}p_j e^{-\lambda_j t}\lambda_j^{\,k}}=\min_{\lambda_j}\lambda_j\frac{100}{E\Lambda}$$

4.1. lentelė. Optimali B-M sistema su begaliniu klasių skaičiumi, $k \le 8$.

t \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	95,91	159,50	207,17	223,71	227,81	228,73	228,93	228,98	228,99
2	92,05	154,48	204,83	223,08	227,66	228,70	228,92	228,97	228,99
3	88,42	149,37	202,29	222,38	227,50	228,66	228,92	228,97	228,98
4	85,03	144,19	199,53	221,59	227,32	228,62	228,91	228,97	228,98
5	81,86	138,98	196,55	220,72	227,11	228,57	228,90	228,97	228,98
6	78,93	133,77	193,34	219,75	226,88	228,52	228,89	228,97	228,98
7	76,22	128,60	189,89	218,68	226,63	228,47	228,87	228,96	228,98
8	73,72	123,50	186,21	217,48	226,34	228,40	228,86	228,96	228,98
9	71,43	118,51	182,30	216,16	226,02	228,33	228,84	228,96	228,98
10	68,33	113,66	178,17	214,70	225,66	228,25	228,83	228,95	228,98
15	61,37	92,18	154,65	204,92	223,10	227,67	228,70	228,92	228,97
20	56,56	76,31	128,77	190,01	218,71	226,64	228,47	228,87	228,96
25	53,76	65,73	104,60	169,43	211,38	224,82	228,06	228,78	228,94
30	52,15	59,17	85,25	144,54	199,73	221,65	227,33	228,62	228,91
35	51,25	55,27	71,58	118,85	182,57	216,26	226,04	228,33	228,85
40	50,73	53,02	62,75	96,32	160,00	207,39	223,77	227,82	228,73
50	50,29	51,01	54,23	67,61	109,43	174,27	213,26	225,30	228,17

4.2. Optimali BMS su baigtiniu klasių skaičiumi

Dabar mes galėsime aproksimuoti[2] mūsų analizuojamas bonus–malus sistemas analogiškomis lentelėmis. 8 lentelėje pateiktos kiekvienos sistemos aproksimacijos koeficientų lentelės, kai *k*=0, 1, 2, 3 ir *t* =1, ..., 10. Koeficientas C_i parodys įmokos *P* dalį, kuri turi būti mokama už draudiminę apsaugą, kai draudikui draudėjas jau yra pranešęs *k* įvykių per laikotarpį *t.* Su šiomis *k* ir *t* reikšmėmis yra ne viena klasė, kur konkrečiu laiko momentu gali būti draudėjas. Draudėjo klasė konkrečiu laiko momentu priklauso ne tik nuo jo praneštų įvykių skaičiaus, bet ir nuo laiko, kada tie įvykiai įvyko. Ne paslaptis, kad draudėjui „geriausia“ situacija, kai visi įvykiai įvyksta per vienerius metus, po tų „blogų“ metų jis dažniausiai būna aukščiausioje klasėje ir pasimokęs iš savo klaidų, kasmet lipa žemyn nuolaidų link. Jei ši situacija lemia, kad draudėjo visų metų draudimo įmokų suma yra mažiausia, tai reiškia, kad tokia situacija yra pati nepalankiausia draudikui, nes žalos padaroma tiek pat, o įmokų gaunama mažiau.

Šiame darbe yra atstovaujami draudiko interesai, todėl imsime pačią nepalankiausią situaciją draudikui ir netgi tokiais atvejais reikalausime, kad įmokų sistema būtų stabili.

Dažniau pasitaikanti probleminė situacija susidaro, kai imamas ilgas laiko tarpas ir pasiekiama žemiausia klasė. Šiame darbe vairavimo laikotarpį apribosime *t* =10.

4.2. lentelė. BMS aproksimacijos koeficientai.

BMS 1

t \ k	0	1	2	3
0	C_4			
1	C_3	C_8	C_8	C_8
2	C_2	C_7	C_7	C_7
3	C_1	C_6	C_6	C_6
4	C_0	C_5	C_5	C_5
5	C_0	C_4	C_4	C_4
6	C_0	C_3	C_3	C_3
7	C_0	C_2	C_2	C_2
8	C_0	C_1	C_1	C_1
9	C_0	C_0	C_0	C_0
10	C_0	C_0	C_0	C_0

BMS 2

t \ k	0	1	2	3
0	C_6			
1	C_5	C_{11}	C_{12}	C_{12}
2	C_4	C_{10}	C_{11}	C_{11}
3	C_3	C_9	C_{10}	C_{10}
4	C_2	C_8	C_9	C_9
5	C_1	C_7	C_8	C_8
6	C_0	C_6	C_7	C_7
7	C_0	C_5	C_6	C_6
8	C_0	C_4	C_5	C_5
9	C_0	C_3	C_4	C_4
10	C_0	C_2	C_3	C_3

BMS 3

t \ k	0	1	2	3
0	C_{10}			
1	C_9	C_{15}	C_{18}	C_{18}
2	C_8	C_{14}	C_{17}	C_{17}
3	C_7	C_{13}	C_{16}	C_{16}
4	C_6	C_{12}	C_{15}	C_{15}
5	C_5	C_{11}	C_{14}	C_{14}
6	C_4	C_{10}	C_{13}	C_{13}
7	C_3	C_9	C_{12}	C_{12}
8	C_2	C_8	C_{11}	C_{11}
9	C_1	C_7	C_{10}	C_{10}
10	C_0	C_6	C_9	C_9

Optimalioms koeficientų C_i reikšmėms apskaičiuoti minimizuosime kvadratinę funkciją:

$$\sum_{(t,k)} f_{i(t,k)} \times (C_{i(t,k)} - C_{(t,k)})^2, \tag{5}$$

čia $f_{i(t,k)}$ – tikimybė, kad draudėjas bus klasėje *i(t,k),* $C_{i(t,k)}$ – ieškomas įmokos koeficientas, $C_{(t,k)}$ – įmokos koeficientas iš BMS su begaliniu klasių skaičiumi, *i(t,k)* – indeksas, atitinkantis *(t,k)* koordinates iš aproksimuojančių koeficientų lentelės. Pavyzdžiui, nagrinėjant BMS 1 *i(8,2)*=1, o BMS 2 *i(8,2)*=5.

Rastiems koeficientams C_i reikalausime:

1. Kad aukštesnę klasę atitiktų didesnė kaina: $C_{i+1} - C_i \geq 0, i = 0,1,...,k-1$. Taikant praktikoje naudosime: $C_{i+1} - C_i \geq a, a = konst$.

2. Pradinės klasės kaina – 100, t.y. $BMS1: C_4 = 100, BMS2: C_6 = 100, BMS3: C_{10} = 100$.

3. Kad užtikrinti sistemos finansinį stabilumą: $\sum_i f_i C_i \geq 100$.

Minimizavę (5) ir suradę koeficientus, turime:

4.3. lentelė. bonus–malus sistemų klasių įmokos.

klasė	BMS 1	BMS 2	BMS 3	Įmonės sistema
0	70	75	68	80
1	80	80	68	90
2	90	85	71	95
3	95	90	74	100
4	100	94	77	150
5	151	97	80	200
6	182	100	85	300
7	202	150	90	500
8	233	205	95	
9		265	98	
10		320	100	
11		390	258	
12		450	366	
13			376	
14			389	
15			411	
16			489	
17			552	
18			667	

4.3. BMS įvertis

Praktikoje bonus–malus sistemų palyginimui naudojami tam tikri koeficientai. Vienas pagrindinių ir svarbiausių koeficientų – tai nusistovėjusios vidutinės įmokos koeficientas *RSAL*[5] (relative stationary average premium level). Šis koeficientas, išreikštas procentais, apibrėžia reliatyvią vidutinę draudėjo poziciją. Apskaičiuojamas sekančiai:

$$RSAL = \frac{Vid.stac.įmoka - Min.įmoka}{Maks.įmoka - Min.įmoka},$$

čia:

- *Vid. Stac. Įmoka* – vidutinė įmoka, kuri nusistovi sistemoje po tam tikro metų skaičiaus;
- *Min. įmoka* – minimali sistemos įmoka;
- *Maks. įmoka* – maksimali sistemos įmoka.

Maža *RSAL* reikšmė rodo didelę draudėjų sankaupą maksimalių nuolaidų klasėje. Aukšta – kad reikalingas geresnis išsiskaidymas per klases. Idealiu atveju *RSAL* reikšmė yra 50%, tačiau praktikoje naudojamose bonus–malus sistemose prie tokios reikšmės kol kas priartėti nepavyko. Pirmasis 10-tukas analizuotų pasaulio[5] BMS pagal *RSAL* koeficientus atrodo taip:

4.4. lentelė. Pasaulio BMS pagal *RSAL* koeficientus.

Nr.	BMS	RSAL
1	Kenijos	28,79%
2	Ispanijos	25,67%
3	Malaizijos	21,17%
4	Suomijos (nauja)	16,04%
5	Švedijos	14,20%
6	Danijos	11,78%
7	D. Britanijos	11,37%
8	Taivanio	9,55%
9	Suomijos (sena)	8,46%
10	Honkongo	8,35%

Mūsų pasiūlytoms 3 BMS atitinkamai *RSAL* koeficientai yra:

RSAL 1=18,4%,

RSAL 2=6,66%,

RSAL 3=5,34%.

Svarbu palyginti ir vidutinę sistemos įmoka po pirmųjų draudimo metų:

BMS 1 = 103,53,

BMS 2 = 115,31,

BMS 3 = 118,17,

čia laikyta, kad bazinė įmoka P=100.

Matome, kad BMS 1 draudėjų sklaida tarp klasių po daugelio metų yra pakankamai gera ir geriausia iš nagrinėjamų BMS, o ir pirmaisiais metais iš draudėjų neimamos nepagrįstai didelės įmokos. Šio darbo tikslas sukurti finansiškai stabilią įmokų sistemą, bet tuo pačiu siekiant išlikti kuo teisingesniais draudėjų atžvilgiu. Svarbu pastebėti, kad BMS 1 per visą laikotarpį išlieka ir stabili, ir pakankamai teisinga draudėjų atžvilgiu. Bėgant metams šios sistemos vidutinė įmoka svyruoja tarp 96,79% ir 105,09%, kai tuo tarpu BMS 2 – tarp 99,95% ir 123,07%, BMS 3 – tarp 98,79% ir 153,51%.

4.5. lentelė. BMS finansinis stabilumas bėgant metams.

BMS 1

t	C	t	C	t	C	t	C
1	103,53	11	100,00	21	100,00	31	100,00
2	105,09	12	100,00	22	100,00	32	100,00
3	101,40	13	100,00	23	100,00	33	100,00
4	96,79	14	100,00	24	100,00	34	100,00
5	98,03	15	100,00	25	100,00	35	100,00
6	98,98	16	100,00	26	100,00	36	100,00
7	99,68	17	100,00	27	100,00	37	100,00
8	100,00	18	100,00	28	100,00	38	100,00
9	100,00	19	100,00	29	100,00	39	100,00
10	100,00	20	100,00	30	100,00	40	100,00

BMS 2

t	C	t	C	t	C	t	C
1	115,31	11	102,26	21	100,45	31	100,03
2	121,93	12	100,20	22	100,31	32	100,05
3	123,07	13	101,11	23	100,13	33	100,05
4	118,28	14	101,41	24	99,95	34	100,03
5	110,95	15	101,45	25	100,10	35	100,00
6	102,05	16	101,05	26	100,15	36	99,98
7	104,54	17	100,52	27	100,15	37	100,00
8	105,36	18	99,95	28	100,10	38	100,01
9	105,37	19	100,31	29	100,03	39	100,01
10	104,05	20	100,43	30	99,97	40	100,00

BMS 3

t	C	t	C	t	C	t	C
1	118,17	11	115,63	21	104,76	31	99,57
2	132,50	12	103,81	22	105,29	32	100,25
3	143,73	13	105,40	23	102,83	33	100,82
4	153,51	14	107,79	24	99,59	34	100,96
5	140,73	15	109,79	25	100,33	35	99,93
6	112,93	16	110,67	26	101,36	36	98,79
7	114,89	17	106,64	27	102,24	37	99,13
8	118,40	18	100,76	28	102,53	38	99,58
9	121,26	19	101,86	29	100,96	39	99,94
10	122,70	20	103,42	30	99,07	40	100,00

Atsižvelgiant į aukščiau išdėstytą ir priimant dėmesin, kad Lietuvos draudimo rinka yra pakankamai maža, o konkurencinė situacija įtempta, siūlome taikyti pirmąją sistemą.

5. Išvados

Taikydami sudėtinį Puasono skirstinį TPVCA draudiminių rizikų portfelį suskaidėme į dvi dalis. Tai leido pakankamai tiksliai atvaizduoti realius Įmonės duomenis. Išsprendę kvadratinio minimizavimo uždavinį parodėme kaip sudaryti bonus–malus sistemą, kuri:

- Yra finansiškai stabili.
- Bėgant metams išlieka teisinga tiek draudiko tiek ir draudėjo atžvilgiu.
- Yra nepriklausoma nuo draudėjo asmeninių charakteristikų, kurių neįmanoma tiksliai įvertinti sutarties sudarymo metu. Tuo pačiu išsprendžiama aktuali draudėjo diskriminacijos, dėl vienokių ar kitokių jo savybių, problema.

Nepaisant teigiamų sukonstruotos BMS savybių, turime paminėti ir trūkumus:

- Darbe naudojami vienerių metų duomenys, todėl reikėtų ilgesnio periodo duomenų, kad įvertinti gautą sistemą.
- Mūsų sistema yra su baigtiniu klasių skaičiumi, todėl ji tampa finansiškai stabili tik po kurio laiko, tačiau sistemos permokos atperka trūkumus. (žr. 4.5 lentelę)
- Laikome, kad sistema uždara, bet praktikoje draudėjas kiekvienais metais gali laisvai rinktis draudimo įmonę.

Darbas gali būti tęsiamas įvedant papildomų sąlygų, tokių kaip:

- Jei draudėjo sukeltų avarijų žala viršija tam tikrą lygį, tai jis baudžiamas papildomomis baudomis.
- Įvesti draudėjo startinės pozicijos priklausomybę nuo draudėjo pradinių (*a priori*) duomenų (transporto priemonės eksploatavimo vietovės, darbinio tūrio, draudėjo amžiaus ar kt.)
- Galima apriboti didžiausią nuolaidą ir didžiausią baudą, įvedant sąlygas:

$$C_1 \geq A,$$

$$C_n \leq B,$$

čia *A* ir *B* – tam tikros, iš anksto parinktos konstantos.

Šios ir panašios sąlygos gali būti įtrauktos ir įtakoti bonus–malus sistemos sudarymą, ypatingai užtikrinant jos finansinį stabilumą bėgant metams.

Construction of financially balanced bonus–malus system

Tomas Antanaitis

Mixed Poisson fit is applied to a motor third party liability insurance portfolio in order to construct a bonus–malus system with finite number of classes. The premiums for a bonus-malus system which stays in financial equilibrium over the years are calculated. This is done by minimizing a quadratic function of the difference between the premiums for an optimal BMS with an infinite number of classes and the premiums for a BMS with finite number of classes, weighted by the stationary probability of being in a certain class, and by imposing various constraints on the system.

Naudotos literatūros ir šaltinių sąrašas

1. **Bagdonavičius V., Golokvosčius P., Kašuba R., Kubilius J., Kudžma R., Mackevičius V., Mačys J., Misevičius E., Rumšas P., Svecevičius B., Vaškas P.** Matematikos terminų žodynas – Mokslo ir enciklopedijų leidykla, 1994.
2. **Coene G., Doray L.G.** A financially balanced bonus-malus system – Astin bulletin, Vol. 26, No. 1, 107 – 116, 1996.
3. **Kruopis J.** Matematinė statistika – V.: Mokslas, 1977.
4. **Kubilius J.** Tikimybių teorija ir matematinė statistika – V.: Vilniaus univ., 1996.
5. **Lemaire J., Zi H.,** A comparative analysis of 30 bonus-malus systems - Astin bulletin, Vol. 24, No. 2, 287 – 309, 1994.
6. **Simar L.** Maximum likelihood estimation of a compound Poisson process – The Annals of Statistics, Vol. 4, No. 6, 1200 – 1209, 1976.
7. **Walhin J.F., Paris J.,** Using mixed Poisson processes in connection with bonus-malus systems - Astin bulletin, Vol. 29, No. 1, 81 – 99, 1999.
8. **Walhin J.F., Paris J.,** The true claim amount and frequency distributions within a bonus-malus system - Astin bulletin, Vol. 30, No. 2, 391 – 403, 2000.

Priedas Nr. 1

Parametrų įvertinimas pasinaudojant momentų metodu

```
> restart:
x[1]:=0.0651840490797546:
x[2]:=0.00697702393840972:
x[3]:=0.000902201371346084:
l1:=x1*p1+x2*p2-x[1]=0:
l2:=(x1)^2*p1+(x2)^2*p2-x[2]=0:
l3:=(x1)^3*p1+(x2)^3*p2-x[3]=0:
l4:=(x1)^4*p1+(x2)^4*p2-x[4]=0:
l7:=p1+p2-1=0:evalf(fsolve({l1,l2,l3,l7})):
```

Priedas Nr. 2

Parametrų įvertinimas maksimalaus tikėtinumo funkcijos metodu

NIUTONO - RAFSONO METODAS

```
> restart:
with(LinearAlgebra):with(VectorCalculus):
```

PRADINES SALYGOS.

```
> N[0]:=62391:
N[1]:=3901:
N[2]:=202:
N[3]:=10:
N[4]:=0:

> F:=(x,lambda1,lambda2,n)->ln(x*exp(-lambda1)*(lambda1)^n+(1-
x)*exp(-lambda2)*(lambda2)^n):
> S:=sum(N[n]*F(x,lambda1,lambda2,n),n=0..4):
x[0]:=0.6532438357:
lambda1[0]:=0.02712992875:
lambda2[0]:=0.1368730977:
Niteraciju:=1000:
st:=time():
```

N-R iteraciju pradzia.

```
> for i from 0 by 1 to Niteraciju do
Matrix([[diff(S,x)],[diff(S,lambda1)],[diff(S,lambda2)]]):
M:=unapply(%,(x,lambda1,lambda2)):
f:=evalf(M(x[i],lambda1[i],lambda2[i])):
Hessian(S,[x,lambda1,lambda2]):
H:=unapply(%,(x,lambda1,lambda2)):
HH:=evalf(H(x[i],lambda1[i],lambda2[i])):
Theta:=MatrixInverse(HH):
kappa:=MatrixMatrixMultiply(Theta,f):
Dzeta:=Matrix([[x[i]],[lambda1[i]],[lambda2[i]]])-kappa:
x[i+1]:=Dzeta[1,1]:lambda1[i+1]:=Dzeta[2,1]:lambda2[i+1]:=Dzeta[
3,1]:fIndex:=i+1:
end do:
```

LAIKAS per kuri randamos iteracijos.

```
> total:=(time()-st):
```

REIKSMES SURASTOS N-R METODU.

```
> x[fIndex]:lambda1[fIndex]:lambda2[fIndex]:
```

Priedas Nr. 3

Kvadratinės funkcijos $\sum_{(k,t)} f_{i(k,t)} \times (C_{i(k,t)} - C_{(k,t)})^2$ *minimizavimas*

BMS 1

```
> restart:
sqF:=[0.639800411858493,0.0320349323230395,0.0348370353203466,0.0380120709434932,0.0416174802232205,0.0457198649436376,0.0503964594779104,0.0557368394642702,0.0618449054455896]:
sqC[1]:=[95.91306817,159.4982771,207.167594,223.713011]:
sqC[2]:=[92.05188883,154.4826401,204.8330234,223.082051]:
sqC[3]:=[88.42230378,149.3684243,202.2911309,222.3784977]:
sqC[4]:=[85.02652662,144.1883078,199.5326671,221.5947198]:
sqC[5]:=[81.86353045,138.9767164,196.5499307,220.7224626]:
sqC[6]:=[78.9294842,133.768922,193.3372086,219.7528429]:
sqC[7]:=[76.21820989,128.6000943,189.8912334,218.6763568]:
sqC[8]:=[73.72163772,123.5043572,186.2116381,217.4829049]:
sqC[9]:=[71.43024052,118.513905,182.3013846,216.1618383]:
sqC[10]:=[68.333,113.658,178.167,214.702]:
for j from 1 by 1 to 10 do
f[j]:=sqF[j]:end do:
for l from 1 by 1 to 10 do
for s from 1 by 1 to 4 do
C[s-1,l]:=sqC[l][s]:
end do:
end do:
c[4]:=100: P:=f[1]*((c[0]-C[0,4])^2+(c[0]-C[0,5])^2+(c[0]-C[0,6])^2+(c[0]-C[0,7])^2+(c[0]-C[0,8])^2)+     f[2]*((c[1]-C[0,3])^2+(c[1]-C[1,8])^2+(c[1]-C[2,8])^2+(c[1]-C[3,8])^2)+ f[3]*((c[2]-C[0,2])^2+(c[2]-C[1,7])^2+(c[2]-C[2,7])^2+(c[2]-C[3,7])^2)+ f[4]*((c[3]-C[0,1])^2+(c[3]-C[1,6])^2+(c[3]-C[2,6])^2+(c[3]-C[3,6])^2)+ f[5]*((c[4]-C[1,5])^2+(c[4]-C[2,5])^2+(c[4]-C[3,5])^2)+ f[6]*((c[5]-C[1,4])^2+(c[5]-C[2,4])^2+(c[5]-C[3,4])^2)+ f[7]*((c[6]-C[1,3])^2+(c[6]-C[2,3])^2+(c[6]-C[3,3])^2)+ f[8]*((c[7]-C[1,2])^2+(c[7]-C[2,2])^2+(c[7]-C[3,2])^2)+ f[9]*((c[8]-C[1,1])^2+(c[8]-C[2,1])^2+(c[8]-C[3,1])^2):
with(Optimization): QPSolve(P,{c[8]-c[7]>=0,c[7]-c[6]>=0,c[6]-c[5]>=0,c[5]-c[4]>=0,c[4]-c[3]>=5,c[3]-c[2]>=5,c[2]-c[1]>=10,c[1]-c[0]>=5,f[1]*c[0]+f[2]*c[1]+f[3]*c[2]+f[4]*c[3]+f[5]*c[4]+f[6]*c[5]+f[7]*c[6]+f[8]*c[7]+f[9]*c[8]>=100},assume=nonnegative):
```

BMS 2

```
> restart:
sqF:=[0.680986139,0.032891626,0.03640594,0.038775065,0.042300739
,0.046303863,0.019187998,0.019311858,0.019492279,0.01837863,0.01
732939,0.014459488,0.014176985]:
sqC[1]:=[95.913,159.498,207.167,223.713]:
sqC[2]:=[92.051,154.482,204.833,223.082]:
sqC[3]:=[88.422,149.368,202.291,222.378]:
sqC[4]:=[85.026,144.188,199.532,221.594]:
sqC[5]:=[77.92,145.98,206.30,226.49]:
sqC[6]:=[78.929,133.768,193.337,219.752]:
sqC[7]:=[76.218,128.600,189.891,218.676]:
sqC[8]:=[73.721,123.504,186.211,217.482]:
sqC[9]:=[71.430,118.513,182.301,216.161]:
sqC[10]:=[68.333,113.658,178.167,214.702]:
for j from 1 by 1 to 13 do
f[j]:=sqF[j]:end do:
for l from 1 by 1 to 10 do
for s from 1 by 1 to 4 do
C[s-1,l]:=sqC[l][s]:
end do:
end do:
c[6]:=100:                              P:=f[1]*((c[0]-
C[0,6])^2+(c[0]-C[0,7])^2+(c[0]-C[0,8])^2)+
f[2]*((c[1]-C[0,5])^2)+
f[3]*((c[2]-C[0,4])^2)+
f[4]*((c[3]-C[0,3])^2)+
f[5]*((c[4]-C[0,2])^2+(c[4]-C[1,8])^2)+ f[6]*((c[5]-
C[0,1])^2+(c[5]-C[1,7])^2+(c[5]-C[2,8])^2+(c[5]-C[3,8])^2)+
f[7]*((c[6]-C[1,6])^2+(c[6]-C[2,7])^2+(c[6]-C[3,7])^2)+
f[8]*((c[7]-C[1,5])^2+(c[7]-C[2,6])^2+(c[7]-C[3,6])^2)+
f[9]*((c[8]-C[1,4])^2+(c[8]-C[2,5])^2+(c[8]-C[3,5])^2)+
f[10]*((c[9]-C[1,3])^2+(c[9]-C[2,4])^2+(c[9]-C[3,4])^2)+
f[11]*((c[10]-C[1,2])^2+(c[10]-C[2,3])^2+(c[10]-C[3,3])^2)+
f[12]*((c[11]-C[1,1])^2+(c[11]-C[2,2])^2+(c[11]-C[3,2])^2)+
f[13]*((c[12]-C[2,1])^2+(c[12]-C[3,1])^2):
with(Optimization): QPSolve(P,{c[12]-c[11]>=5,c[11]-
c[10]>=5,c[10]-c[9]>=5,c[9]-c[8]>=5,c[8]-c[7]>=5,c[7]-
c[6]>=5,c[6]-c[5]>=3,c[5]-c[4]>=3,c[4]-c[3]>=3,c[3]-
c[2]>=3,c[2]-c[1]>=3,c[1]-
c[0]>=3,f[1]*c[0]+f[2]*c[1]+f[3]*c[2]+f[4]*c[3]+f[5]*c[4]+f[6]*c
[5]+f[7]*c[6]+f[8]*c[7]+f[9]*c[8]+f[10]*c[9]+f[11]*c[10]+f[12]*c
[11]+f[13]*c[12]>=100},assume=nonnegative):
```

BMS 3

```
> restart:
sqF:=[0.664388304,0.02898187,0.030970306,0.033269274,0.036043256
,0.041210206,0.023713467,0.014268752,0.013937196,0.013489403,0.0
1302832,0.012871278,0.015865174,0.009937017,0.009788896,0.009665
559,0.009586567,0.009842617,0.009142539]:
sqC[1]:=[95.913,159.498,207.167,223.713]:
sqC[2]:=[92.051,154.482,204.833,223.082]:
sqC[3]:=[88.422,149.368,202.291,222.378]:
sqC[4]:=[85.026,144.188,199.532,221.594]:
sqC[5]:=[77.92,145.98,206.30,226.49]:
sqC[6]:=[78.929,133.768,193.337,219.752]:
sqC[7]:=[76.218,128.600,189.891,218.676]:
sqC[8]:=[73.721,123.504,186.211,217.482]:
sqC[9]:=[71.430,118.513,182.301,216.161]:
sqC[10]:=[68.333,113.658,178.167,214.702]:
for j from 1 by 1 to 19 do
f[j]:=sqF[j]:end do:
for l from 1 by 1 to 10 do
for s from 1 by 1 to 4 do
C[s-1,l]:=sqC[l][s]:
end do:
end do:
c[10]:=100: P:=f[1]*((c[0]-C[0,10])^2)+
f[2]*((c[1]-C[0,9])^2)+
f[3]*((c[2]-C[0,8])^2)+
f[4]*((c[3]-C[0,7])^2)+
f[5]*((c[4]-C[0,6])^2)+
f[6]*((c[5]-C[0,5])^2)+
f[7]*((c[6]-C[0,4])^2+(c[6]-C[1,10])^2)+
f[8]*((c[7]-C[0,3])^2+(c[7]-C[1,9])^2)+
f[9]*((c[8]-C[0,2])^2+(c[8]-C[1,8])^2)+ f[10]*((c[9]-
C[0,1])^2+(c[9]-C[1,7])^2+(c[9]-C[2,10])^2+(c[9]-C[3,10])^2)+
f[11]*((c[10]-C[1,6])^2+(c[10]-C[2,9])^2+(c[10]-C[3,9])^2)+
f[12]*((c[11]-C[1,5])^2+(c[11]-C[2,8])^2+(c[11]-C[3,8])^2)+
f[13]*((c[12]-C[1,4])^2+(c[12]-C[2,7])^2+(c[12]-C[3,7])^2)+
f[14]*((c[13]-C[1,3])^2+(c[13]-C[2,6])^2+(c[13]-C[3,6])^2)+
f[15]*((c[14]-C[1,2])^2+(c[14]-C[2,5])^2+(c[14]-C[3,5])^2)+
f[16]*((c[15]-C[1,1])^2+(c[15]-C[2,4])^2+(c[15]-C[3,4])^2)+
f[17]*((c[16]-C[2,3])^2+(c[16]-C[3,3])^2)+ f[18]*((c[17]-
C[2,2])^2+(c[17]-C[3,2])^2)+ f[19]*((c[18]-C[2,1])^2+(c[18]-
C[3,1])^2):
with(Optimization): QPSolve(P,{c[18]-c[17]>=5,c[17]-
c[16]>=5,c[16]-c[15]>=5,c[15]-c[14]>=5,c[14]-c[13]>=5,c[13]-
c[12]>=5,c[12]-c[11]>=5,c[11]-c[10]>=5,c[10]-c[9]>=5,c[9]-
c[8]>=5,c[8]-c[7]>=5,c[7]-c[6]>=5,c[6]-c[5]>=3,c[5]-
c[4]>=3,c[4]-c[3]>=3,c[3]-c[2]>=3,c[2]-c[1]>=3,c[1]-
c[0]>=3,f[1]*c[0]+f[2]*c[1]+f[3]*c[2]+f[4]*c[3]+f[5]*c[4]+f[6]*c
[5]+f[7]*c[6]+f[8]*c[7]+f[9]*c[8]+f[10]*c[9]+f[11]*c[10]+f[12]*c
[11]+f[13]*c[12]+f[14]*c[13]+f[15]*c[14]+f[16]*c[15]+f[17]*c[16]
+f[18]*c[17]+f[19]*c[18]>=100},assume=nonnegative):
```