VILNIAUS UNIVERSITETAS

Inga Masiulaitytė

REGRESINIAI IR DEGRADACINIAI MODELIAI PATIKIMUMO TEORIJOJE IR IŠGYVENAMUMO ANALIZĖJE

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2010

Disertacija rengta 2005–2009 metais Vilniaus Universitete.

Mokslinis vadovas:
Prof. habil. dr. Vilijandas Bagdonavičius (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Disertacija ginama Vilniaus Universiteto matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas:
prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Nariai:
prof. habil. dr. Algimantas Bikelis (Vytauto Didžiojo Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
prof. habil. dr. Bronius Grigelionis (Matematikos ir informatikos institutas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
prof. habil. dr. Leonas Saulis (Vilniaus Gedimino Technikos Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
doc. dr. Rūta Levulienė (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Oponentai:
doc. dr. Marijus Radavičius (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
doc. dr. Vytautas Kazakevičius (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2010 m. gegužės mėn. 25 d., 14 val., Vilniaus Universiteto Nuotolinių studijų centre.
Adresas: Šaltinių 1A, 03225 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2010 m. balandžio mėn.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus Universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

Inga Masiulaitytė

REGRESSION AND DEGRADATION MODELS IN RELIABILITY THEORY AND SURVIVAL ANALYSIS

Summary of Doctoral Dissertation
Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2010

The scientific work was carried out in 2005–2009 at Vilnius University.

Scientific supervisor:
Prof. Habil. Dr. Vilijandas Bagdonavičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

The thesis is defended in the council of Mathematics of Vilnius University:

Chairman:
Prof. Habil. Dr. Remigijus Leipus (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).

Members:
Prof. Habil. Dr. Algimantas Bikelis (Vytautas Magnus University, Physical sciences, Mathematics - 01P).
Prof. Habil. Dr. Bronius Grigelionis (Institute of Mathematics and Informatics, Physical sciences, Mathematics - 01P).
Prof. Habil. Dr. Leonas Saulis (Vilnius Gediminas Technical University, Physical sciences, Mathematics - 01P).
Assoc. Prof. Dr. Rūta Levulienė (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).

Opponents:
Assoc. Prof. Dr. Marijus Radavičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).
Assoc. Prof. Dr. Vytautas Kazakevičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on May 25, 2010, in Vilnius University remote Education Study Centre at 2 pm.
Address: Šaltinių 1A, 03225 Vilnius, Lithuania.

The summary of dissertation was distributed on April, 2010.
The dissertation is available at the Library of Vilnius University.

DISERTACINIO DARBO APRAŠYMAS

Mokslinė problema ir tyrimo objektas.

Norint užtikrinti svarbių sistemos elementų aukštą patikimumą naudojami jų rezerviniai elementai, kurie gali būti įjungiami sugedus šiems pagrindiniams elementams. Rezerviniai elementai gali funkcionuoti "karštame režime" (tokiame pat, kaip pagrindiniai), "šiltame" ("lengvesniame" negu pagrindiniai) ar ""šaltame" (rezerviniai elementai nefunkcionuoja iki pagrindinių gedimo). "Šaltas" režimas būtų paprasčiausia ir pigiausia priemonė, bet dažnai sugedusio sistemos elemento pakeitimas "neišilusiu" elementu gali sukelti to rezervinio elemento gedimą arba padidinti jo gedimų intensyvumą, lyginant su pagrindiniu. "Karštas" rezervavimas nėra labai ekonomiškas, nes bet kuris rezervinis elementas su tikimybe $1/2$ sugenda anksčiau už pagrindinį. Kompromisinis variantas yra "šiltas" rezervavimas. Kadangi rezervinis elementas yra "įšilęs, tai nevykusio jo įjungimo į sistemą tikimybė sumažėja, be to "šiltame" režime atsarginis elementas turi didesnę tikimybę nesugesti iki pagrindinio elemento gedimo.

Rezervinio elemento "sklandaus įjungimo" hipotezės formulavimo ir jos statistinio patikrinimo problema yra vienas iš disertacijoje sprendžiamų uždavinių. Įsitikinus, kad parinktame "šiltame" režime rezervinių elementų įjungimas yra "sklandus", sistemos patikimumą galima vertinti naudojant elementų patikimumo eksperimentų įvairiuose režimuose duomenis. Tiek neparametrinio, tiek ir parametrinio taškinio ir intervalinio vertinimo uždaviniai taip pat nagrinėjami disertacijoje.

Kadangi aukšto patikimumo elementų gedimai yra reti, papildoma informacija apie jų patikimumą gaunama arba atliekant pagreitintus bandymus, kurių metu elementai bandomi griežtesniame negu įprastinis režime, arba matuojant kokių tai parametrų, charakterizuojančių elemento degradacijos lygį, reikšmes įvairiais laiko momentais. Darbe nagrinėjami pakankamai bendri modeliai, kurie aprašo elementų gedimo riziką kaip funkciją kiek naudojamų apkrovų, tiek ir degradacinio proceso, kuris savo ruožtu modeliuojamas naudojant tą ar kitą stochastinį procesą. Darbe pasiūlyti tokių modelių parametrų vertinimo metodai.

Tikslai ir uždaviniai.

Pagrindiniai darbo tikslai ir uždaviniai yra:

1. matematiškai apibrėžti "sklandaus" rezervinio elemento perėjimo iš "šilto" režimo į "karštą" sąvoką, naudojant Sediakino "patikimumo principą" ir pagreitintų gedimų modelį;
2. sukonstruoti kriterijus "sklandaus perjungimo hypotezei" tikrinti;
3. ištirti sukonstruoto kriterijaus asimptotines savybes;
4. sukonstruoti rezervuotos sistemos pasiskirstymo funkcijos parametrinius ir neparametrius įvertinius, naudojant elementų, funkcionuojančių įvairiuose režimuose, patikimumo eksperimentų duomenis;
5. ištirti parametrinių ir neparametrinių įvertinių asimptotines savybes;
6. sukonstruoti rezervuotos sistemos pasiskirstymo funkcijos pasikliovimo intervalus;
7. naudojant simuliaciją, ištirti parametrinių ir neparametrinių įvertinių savybės, kai imtys baigtinės;
8. suformuluoti bendrus gedimų ir degradacijos matavimo duomenų regresinius modelius;
9. modifikuoti didžiausiojo tikėtinumo metodą gedimų ir degradacinio proceso parametrams vertinti panaudojant degradacinio proceso prediktorius;
10. ištirti modifikuotos tikėtinumo funkcijos struktūrą, kai degradacijos procesas modeliuojamas laike transformuotu gama, "trajektorijų" ir "pažeidimų" procesais.

Aktualumas.

Literatūroje yra daug darbų, kuriuose rezervuotų sistemų modeliai nagrinėjami tikimybių teorijos metodais. Jų realus panaudojimas yra imanomas, jei šių modelių adekvatumas realiems duomenims patikrinamas statistiniais metodais ir gaunami modelių parametrų įveriniai. Būtent šie aktualūs uždaviniai ir sprendžiami disertacijoje.

Pagreitintųjų bandymų modeliai bei degradacinių procesų modeliai gana plačiai išnagrinėti literatūroje, tačiau vienalaikių gedimų-degradacijos modelių su kovariantėmis analizė yra aktuali tyrinėjimo kryptis.

Tyrimų metodika.

Nagrinėjant disertacijos temą buvo naudojami skaičiuojančių procesų teorija, delta metodas, parametriniai ir neparametriniai vertinimo metodai, ribinės teoremos atsitiktinių dydžių sekoms ir stochastiniams procesams, skaitiniai ir simuliaciniai metodai.

Darbo struktūra

Disertacija yra parašyta anglų kalba. Ją sudaro įvadas, tris skyriai, išvados, mokslinių publikacijų disertacijos tema sąrašas bei žymenys. Bendra darbo apimtis - 97 puslapiai.

Svarbiausi rezultatai.

1. Statistiniai kriterijai "sklandaus įjungimo" hipotezei tikrinti.

Tarkime, kad turime rezervuotą sistemą iš m elementų: vieno pagrindinio darbinio ir $(m-1)$ rezervinių elementų. Jeigu pagrindinis elementas sugenda, tai 1-as rezervinis elementas įsijungia ir veikia vietoj pagrindinio elemento. Jeigu 1-as rezervinis elementas sugenda, įsijungia ir veikia 2-as rezervinis elementas ir t.t. Tarkime, kad perjungimas yra momentinis ir elementai neremontuojami. Tokiai sistemai naudosime žymėjimą $S(1, m-1)$.

Jeigu rezervinis elementas neveikia iki pagrindinio elemento gedimo ("šaltas rezervavimas"), tai rezerviniam elementui pereinant iš "šalto" režimo į "karštą" jis gali sugesti arba gali sumažėti jo patikimumas. Jeigu rezervinis elementas veikia tokiu pačiu "karštu" režimu, kaip ir pagrindinis elementas, tai po perjungimo jo patikimumas nesikeičia. "Karštas" rezervavimas turi trūkumų: rezervinis elementas gali sugesti anksčiau negu pagrindinis elementas su tikimybe 0,5. Dažniausiai naudojamas "šiltas" rezervavimas: rezervinis elementas dirba mažesniu pajėgumu negu pagrindinis. Šiuo atveju tikimybė sugesti rezerviniam elementui yra mažesnė negu sugesti pagrindiniam elementui. Pagrindinis tikslas - patikrinti hipotezę, kad elemento persijungimas iš "šilto" į "karštą" vyksta sklandžiai.

Jeigu hipotezė teisinga su vienu rezerviniu elementu, tai hipotezė bus teisinga sistemai ir su keletu rezerviniu elementu.

Modeliai. Tarkime, kad pagrindinio elemento gedimo momentas yra T_1, jo pasiskirstymo funkciją F_1 ir tikimybinis tankis f_1, rezervinio elemento gedimo momentas T_2, jo pasiskirstymo funkcija F_2 ir tikimybinis tankis f_2. Sistemos gedimo momentas yra $T = max(T_1, T_2)$.

Apibrėžkime $f_2^{(y)}(x)$ rezervinio elemento sąlyginį tankį, su sąlyga, kad pagrindinis elementas sugedo momentu y. Sistemos $S(1,1)$ su vienu rezerviniu elementu gedimo momento T pasiskirstymo funkcija yra

$$F(t) = P(T_1 \le t, T_2 \le t) = \int_0^t \left\{ \int_0^y f_2(x)dx + \int_y^t f_2^{(y)}(x)dx \right\} f_1(y)dy. \tag{1}$$

"Šilto" rezervavimo atveju galima suformuluoti tokią hipotezę:

Pirmoji sklandaus įjungimo hipotezė:

$$H_0 : f_2^{(y)}(x) = f_1(x + g(y) - y), \quad \text{visiems} \quad x \ge y \ge 0, \tag{2}$$

čia $g(y)$ yra momentas, "karštu" režimu atitinkantis momentą y "šiltu" režimu, randamas iš lygties

$$F_1(g(y)) = P(T_1 \le g(y)) = P(T_2 \le y) = F_2(y).$$

Pagal (1) formulę esant teisingai hipotezei H_0 gauname

$$F(t) = \int_0^t F_1(t + g(y) - y)dF_1(y). \tag{3}$$

Tariant, kad elementų, veikiančių "šiltu" ir "karštu" režimu skirstiniai skiriasi tik masteliu, t.y. egzistuoja $r > 0$ toks, kad

$$F_2(t) = F_1(rt), \tag{4}$$

tai $g(y) = ry$ ir galima formuluoti tokią hipotezę:

Antroji sklandaus įjungimo hipotezė:

$$H_0^* : \exists\, r > 0 : \quad f_2^{(y)}(x) = f_1(x + ry - y), \quad \text{visiems} \quad x \ge y \ge 0. \tag{5}$$

Kriterijus hipotezei H_0^*.

Tarkime, kad turime tokius duomenis :

a) n_1 "karštame" režime funkcionuojančių elementų gedimo momentus $T_{11}, \dots, T_{1n_1}$;

b) n_2 "šiltame" režime funkcionuojančių elementų gedimo momentus $T_{21}, \dots, T_{2n_2}$;

c) n rezervuotų $S(1,1)$ sistemų (su "šiltais" rezerviniais elementais) gedimo momentus $T_1, \dots, T_n$.

Kriterijus yra grindžiamas dviejų pasiskirstymo funkcijos F įvertinių skirtumų. Pirmasis įvertinys yra empirinė pasiskirstymo funkcija, gautą iš gedimo momentų $T_1, \ldots, T_n$:

$$\hat{F}^{(1)}(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{T_i \le t\}}. \tag{6}$$

Antras įvertinys apibrėžiamas, naudojant gedimo momentus $T_{11}, \ldots, T_{1n_1}$ ir $T_{21}, \ldots, T_{2n_2}$, bei moduliu (3):

$$\hat{F}^{(2)}(t) = \int_0^t \hat{F}_1(t + \hat{g}(y) - y) d\hat{F}_1(y);$$

čia (tikrinant hipotezę H_0)

$$\hat{g}(y) = \hat{F}_1^{-1}(\hat{F}_2(y)), \quad \hat{F}_j(t) = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} \mathbf{1}_{\{T_{ji} \le t\}}, \quad \hat{F}_1^{-1}(y) = \inf\{s : \hat{F}_1(s) \ge t\}, \tag{7}$$

arba (tikrinant hipotezę H_0^*)

$$\hat{g}(y) = \hat{r}y, \quad \hat{r} = \frac{\hat{\mu}_1}{\hat{\mu}_2}, \quad \hat{\mu}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} T_{ji}. \tag{8}$$

Kriterijus grindžiamas statistika

$$X = \sqrt{n}\int_0^\infty (\hat{F}^{(1)}(t) - \hat{F}^{(2)}(t))dt. \tag{9}$$

Abiejų hipotezių atvejų H_0 ir H_0^* ribinis statistikos X skirstinys (kai $n_i/n \to l_i \in (0, \infty)$, $n \to \infty$) artėja prie normalaus skirstinio su nuliniu vidurkiu ir baigtine dispersija σ^2.

Statistikos X asimptotika.

1 teorema. *Tarkime, kad $n_i/n \to l_i \in (0, \infty)$, $n \to \infty$, ir tankio funkcijos $f_i(x)$, $i = 1, 2$ yra tolydžios ir teigiamos intervale $(0, \infty)$. Tada, esant teisingai hipotezei H_0^*, statistiką (9) konverguoja į normalųjį skirstinį $N(0, \sigma^2)$; čia*

$$\sigma^2 = \mathbf{Var}(T_i) + \frac{1}{l_1}\mathbf{Var}(H(T_{1i})) + \frac{c^2r^2}{l_2}\mathbf{Var}(T_{2i}), \tag{10}$$

$$H(x) = x[c + r - 1 - F_1(x/r) - rF_2(x)] + r\mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{T_{1i} \le x/r\}}T_{1i}) + r\mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{T_{2i} \le x\}}T_{2i}),$$
$$c = \frac{1}{\mu_2}\int_0^\infty y[1 - F_2(y)]dF_1(y).$$

2 teorema. *Tarkime, kad $n_i/n \to l_i \in (0, \infty)$, $n \to \infty$, ir tankio funkcijos $f_i(x)$, $i = 1, 2$ yra tolydžios ir teigiamos intervale $(0, \infty)$. Tada, esant teisingai hipotezei H_0, statistiką (9) konverguoja į normalųjį skirstinį $N(0, \sigma^2)$, čia*

$$\sigma^2 = \mathbf{Var}(T_i) + \frac{1}{l_1}\mathbf{Var}(H(T_{1i})) + \frac{1}{l_2}\mathbf{Var}(Q(T_{2i})), \tag{11}$$

$$H(x) = Q(x) - xF_1(g^{-1}(x)) + g(x)[1 - F_2(x)] + \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{g(T_{1i}) \le x\}}g(T_{1i})) + \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{T_{2i} \le x\}}g(T_{2i})) - x,$$
$$Q(x) = \mathbf{E}\{\mathbf{1}_{\{T_{1i} \le x\}}[1 - F_2(T_{1i})]/f_1(g(T_{1i}))\}.$$

σ^2 vertinimas

Tikrinant hipotezę H_0^*, pagrįstas dispersijos σ^2 įvertinys apibrėžiamas

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(T_i - \hat{\mu})^2 + \frac{n}{n_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}[\hat{H}(T_{1i}) - \hat{\bar{H}}]^2 + \frac{\hat{c}^2\hat{r}^2 n}{n_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}(T_{2i} - \hat{\mu}_2)^2;$$

čia

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i, \quad \hat{c} = \frac{1}{\hat{\mu}_2}\int_0^\infty y[1 - \hat{F}_2(y)]d\hat{F}_1(y) = \frac{1}{\hat{\mu}_2 n_1}\sum_{i=1}^{n_1} T_{1i}[1 - \hat{F}_2(T_{1i})],$$

$$\hat{H}(x) = x[\hat{c} + \hat{r} - 1 - \hat{F}_1(x/\hat{r}) - \hat{r}\hat{F}_2(x)] + \frac{\hat{r}}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{1}_{\{T_{1i}\le x/\hat{r}\}} T_{1i} + \frac{\hat{r}}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} \mathbf{1}_{\{T_{2i}\le x\}} T_{2i}, \quad \hat{\hat{H}} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\hat{H}(T_{1i}).$$

Statistiką (9) galima užrašyti taip:

$$X = -\sqrt{n}\hat{\mu} + \frac{\sqrt{n}}{n_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_1}\max(T_{1i}, T_{1j} - \hat{r}T_{1i} + T_{1i}). \tag{12}$$

Tikrinant hipotezę H_0, pagrįstas dispersijos σ^2 įvertinys yra apibrėžiamas

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(T_i - \hat{\mu})^2 + \frac{n}{n_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}[\hat{H}(T_{1i}) - \hat{\hat{H}}]^2 + \frac{n}{n_2^2}\sum_{i=1}^{n_2}[\hat{Q}(T_{2i}) - \hat{\hat{Q}}]^2,$$

čia

$$\hat{H}(x) = \hat{Q}(x) - x\hat{F}_1(\hat{g}^{-1}(x)) + \hat{g}(x)[1 - \hat{F}_2(x)] + \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\mathbf{1}_{\{\hat{g}(T_{1i})\le x\}}\hat{g}(T_{1i}) + \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}\mathbf{1}_{\{T_{2i}\le x\}}\hat{g}(T_{2i}) - x,$$

$$\hat{Q}(x) = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\mathbf{1}_{\{T_{1i}\le x\}}[1 - \hat{F}_2(T_{1i})]/\hat{f}_1(\hat{g}(T_{1i})),$$

$$\hat{g}^{-1}(x) = \hat{F}_2^{-1}(\hat{F}_1(x)), \quad \hat{\hat{H}} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\hat{H}(T_{1i}), \quad \hat{\hat{Q}} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}\hat{Q}(T_{2i}).$$

Tankio funkcija f_1 yra įvertinama branduoliniu įvertiniu:

$$\hat{f}_1(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h}K\left(\frac{x - X_{1i}}{h}\right).$$

Statistiką (9) galima užrašyti taip:

$$X = -\sqrt{n}\hat{\mu} + \frac{\sqrt{n}}{n_1^2}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_1}\max(T_{1i}, T_{1j} - \hat{g}(T_{1i}) + T_{1i}). \tag{13}$$

Kriterijaus statistika yra $T = X/\hat{\sigma}$, čia $\hat{\sigma}$ yra σ įvertinys. Statistikos T pasiskirstymas aproksimuojamas standartiniu normaliuoju skirstiniu ir hipotezė H_0 (ar H_0^*) atmetama su reikšmingumo lygmeniu α, jeigu $\mid T \mid > z_{\alpha/2}$; čia $z_{\alpha/2}$ yra standartinio normaliojo skirstinio $(\alpha/2)$-kritinė reikšmė.

Sukonstravus kriterijus "sklandaus šjungimo hipotezei" tikrinti, buvo atlikta simuliaciją. Įvairių alternatyvų atveju ištirtas reikšmingumo lygmuo ir kriterijų galia, kai imtys baigtinės. Duomenys "karštame" ir "šiltame" režime buvo modeliojami pagal eksponentinį, Veibulo ir log-logistinį skirstinus.

2. Rezervuotos sistemos $S(1, m-1)$ patikimumo neparametrinis vertinimas.

Tarkime, kad turime rezervuotą sistemą iš m elementų: vieno pagrindinio darbinio ir $(m-1)$ rezervinių elementų. Jeigu pagrindinis elementas sugenda, tai vietoj pagrindinio elemento įjungiamas dar nesugedęs rezervinis elementas. Jeigu šis rezervinis elementas sugenda, įsijungia ir veikia 2-as rezervinis elementas ir t.t. Tokiai sistemai naudosime žymėjimą $S(1, m-1)$. Tarkime, kad perjungimas yra momentinis ir pagrindinis (atsarginis sugedęs) elementas neremontuojamas.

Tikslas yra sukonstruoti pasikliovimo intervalą rezervuotos sistemos $S(1, m-1)$ pasiskirstymo funkcijai, naudojant dviejų grupių elementų gedimo momentus: pirmoji elementų grupė dirba "karštame", antroji grupė - "šiltame" režime.

Modelis. Tarkime, kad pagrindinio elemento gedimo momentas yra T_1, jo pasiskirstymo funkcija F_1 ir tankio funkcija f_1.

Rezervinių elementų gedimo momentus žymėsime $T_2, ..., T_m$; "karštame" režime jų pasiskirstymo funkcijos taip pat yra F_1, "šiltame" režime pasiskirstymo funkcija yra F_2 ir tankio funkcija f_2. Jeigu rezervinis elementas persijungia į "karštą" režimą, jo pasiskirstymo funkcija skiriasi nuo F_1 ir F_2. Kiekvienam $i = 1, 2$ apibrėžkime išgyvenamumo funkciją $S_i = 1 - F_i$, gedimų intensyvumo funkciją $\lambda_i = f_i/S_i$, sukauptų gedimų intensyvumo funkciją $\Lambda_i = -\ln S_i$.

Sistemos $S(1, m-1)$ gedimo momentai yra $T^{(m)} = T_1 \vee T_2 \vee \cdots \vee T_m$. Apibrėžkime gedimo momento $T^{(j)}$ pasiskirstymo funkciją K_j ir tankio funkciją k_j; $(j = 2, \ldots, m)$, $K_1 = F_1$, $k_1 = f_1$. Pasiskirstymo funkcija K_j galima užrašyti per K_{j-1} ir F_1.

$$K_j(t) = \mathbf{P}(T^{(j)} \le t) = \int_0^t \mathbf{P}(T_j \le t | T^{(j-1)} = y) dK_{j-1}(y). \tag{14}$$

Jei teisinga hipotezė H_0, kad sistemai $S(1,1)$ elemento perjungimas iš "šilto" į "karštą" režimą yra sklandus, tai nat$\overline{\text{u}}$ralu tarti, kad jis sklandus ir sistemai $S(1, m-1)$, todėl

$$f_{T_j|T^{(j-1)}=y}(t) = \begin{cases} f_2(t) & \text{if} \quad t \le y, \\ f_1(t + g(y) - y) & \text{if} \quad t > y; \end{cases}, \quad g(y) = F_1^{-1}(F_2(y)), \tag{15}$$

ir

$$K_j(t) = \int_0^t F_1(t + g(y) - y) dK_{j-1}(y). \tag{16}$$

Taškinis funkcijos $K_j(t)$ įvertinys.

Tarkime, kad turime tokius duomenis :

a) n_1 "karštame" režime funkcionuojančių elementų gedimo momentus $T_{11}, \ldots, T_{1n_1}$;

b) n_2 "šiltame" režime funkcionuojančių elementų, bandytų laike t_1, surikiuotus pirmuosius m_2 gedimo momentus $T_{21}, \ldots, T_{2m_2}$.

Tarkime, kad elementų, veikiančių "šiltame" ir "karštame" režimuose, pasiskirstymo funkcijos skiriasi tik masteliu, t.y. $g(y) = ry$. Tada pasiskirstymo funcija $K_j(t)$ gali b$\overline{\text{u}}$ti įvertinta, keĉiant $\hat{g}(y)$ į $\hat{r}y$ išraškoje (4), čia $\hat{r}$ yra r įvertinys.

Pažymėkime

$$N_1(t) = \sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{1}_{\{T_{1i} \le t\}}, \quad N_2(t) = \sum_{i=1}^{n_2} \mathbf{1}_{\{T_{2i} \le t, t \le t_1\}}, \quad Y_1(t) = \sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{1}_{\{T_{1i} \ge t\}}, \quad Y_2(t) = \sum_{i=1}^{n_2} \mathbf{1}_{\{T_{2i} \ge t, t \le t_1\}}.$$

Parametro r įvertinys

$$\hat{r} = \tilde{U}^{-1}(0) = sup\{r : \tilde{U}(r) > 0\} \tag{17}$$

gaunamas naudojant funkciją

$$\tilde{U}(r) = N_2(t_1) - \int_0^{t_1} Y_2(u) d\tilde{\Lambda}_2(u, r) = N_2(t_1) - \int_0^{rt_1} \frac{Y_2(v/r) dN_1(v)}{Y_1(v) + Y_2(v/r)} - \int_0^{t_1} \frac{Y_2(u) dN_2(u)}{Y_1(ru) + Y_2(u)}. \tag{18}$$

kuri yra nedidėjanti ir laiptuota,

$$\tilde{U}(0+) = N_2(t_1) - \int_0^{t_1} \frac{Y_2(u) dN_2(u)}{n_1 + Y_2(u)} > 0, \quad \tilde{U}(+\infty) = -\int_0^{\infty} \frac{n_2 dN_1(v)}{Y_1(v) + n_2} < 0,$$

$$\tilde{\Lambda}_2(t, r) = \int_0^t \frac{d\tilde{N}_1(u) + d\tilde{N}_2(u)}{\tilde{Y}_1(u) + \tilde{Y}_2(u)} = \int_0^t \frac{dN_1(ru) + dN_2(u)}{Y_1(ru) + Y_2(u)}.$$

Rezervuotos sistemos pasiskirstymo funcija K_m yra įvertinama naudojant tokias rekurentines formules $(j = 2, \ldots, m)$:

$$\hat{K}_1(t) = \hat{F}_1(t), \quad \hat{K}_j(t) = \hat{K}_{j-1}(t) - \int_0^t \hat{S}_1(t + \hat{r}y - y) d\hat{K}_{j-1}(y) =$$

$$= \hat{K}_{j-1}(t) - \sum_{i: T_{1i} \le t} \hat{S}_1(t + \hat{r}T_{1i} - T_{1i})(\hat{K}_{j-1}(T_{1i}) - \hat{K}_{j-1}(T_{1,i-1})); \quad \hat{S}_1 = 1 - \hat{F}_1.$$

Įvertinio $\hat{K}_j$ asimptotinis skirstinys ir funkcijos $K_j(t)$ pasikliovimo intervalai

Tarkime, kad

$$\frac{n_i}{n} = l_i + O(\frac{1}{n}), \quad l_i \in (0,1), \quad \text{as} \quad n = n_1 + n_2 \to \infty.$$

Empirinių pasiskirstymo funkcijų ribinis pasiskirstymas yra gerai žinomas:

$$\sqrt{n}(\hat{F}_i - F_i) \xrightarrow{\mathcal{D}} U_i \tag{19}$$

erdvėje $D(A_i)$; čia $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ reiškia silpną konfergavimą , $A_1 = [0, \infty)$, $A_2 = [0, t_1]$, U_1, U_2 yra nepriklausomi Gauso martingalai su $U_i(0) = 0$ ir kovariacijos

$$\mathbf{cov}(U_i(u), U_i(v)) = \frac{1}{l_i} F_i(u \wedge v) S_i(u \vee v). \tag{20}$$

Raskime įvertinio $\hat{r}$ asymptotinį pasiskirstymą. Pažymėkime $r_0 \in (0, 1)$ parametro r tikrąją reikšmę. Pagal modelį H_0^* tai yra santykis tarp funkcionavimo trukmių vidurkių μ_1 ir μ_2 atitinkamai "karštame" ir "šiltame" režimuose.

1 lema. *Tarkime, kad pasiskirstymo funkcija F_1 yra absoliučiai tolydi su teigiamu tankiu f_1 intervale $(0, \infty)$ ir hipotezė $F_2(t) = F_1(r_0 t)$ yra teisinga. Jeigu*

$$A = -\frac{1}{r_0} \int_0^{r_0 t_1} u f_1(u) d\Lambda_1(u) - t_1 f_1(r_0 t_1) \neq 0, \tag{21}$$

tai

$$\sqrt{n}(\hat{r} - r_0) \xrightarrow{d} Y = -\frac{W}{A}, \tag{22}$$

čia

$$W = -\int_0^{t_1} [U_1(r_0 u) - U_2(u) d\Lambda_2(u) - U_1(r_0 t_1) + U_2(t_1), \tag{23}$$

3 teorema. *Jeigu F_1 yra tolydžiai diferencijuojama intervale $[0, \infty)$, tai esant teisinga hipotezei H_0^* bet kokiam $t > 0$ ir $j \geq 2$*

$$\sqrt{n}(\hat{K}_j(s) - K_j(s)) \xrightarrow{\mathcal{D}} W_j(s) = \int_0^s U_1(s + r_0 y - y) dK_{j-1}(y) + \mu^{(j-1)}(s) Y + \int_0^s F_1(s + r_0 y - y) dW_{j-1}(y) \tag{24}$$

erdvėje $D[0, t]$, čia $W_1(s) = U_1(s)$, $\mu^{(j-1)}(s) = \int_0^s y f_1(s + r_0 y - y) dK_{j-1}(y)$.

Apibrėžkime

$$Z_{1i} = \hat{F}_1(t + (\hat{r} - 1) T_{1i}-), \quad \hat{F}_1(t-) = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \mathbf{1}_{\{T_{1i} < t\}}, \quad Z_{2i} = \hat{F}_1(\frac{t - T_{1i}}{1 - \hat{r}} -),$$

$$Z_{3i} = \hat{F}_1(T_{1i}-), \quad Z_{4i} = \hat{f}_1(t + (\hat{r} - 1) T_{1i}-), \quad \hat{\mu}(t) = \frac{1}{n_1} \sum_{T_{1i} \leq t} T_{1i} Z_{4i}, \quad Z_{5i} = \hat{f}_1(T_{1i}-).$$

Dispersijos $\mathbf{Var}(W_2(t))$ pagrįstas įvertinys yra

$$\frac{n_1}{n} \hat{\mathbf{Var}}(W_2(t)) = -\hat{F}_1(t) \hat{F}_2^2(t) - 4\hat{\phi}_1^2(t) + \hat{\phi}_2(t) + \frac{n\hat{\mu}^2(t)}{n_2 \hat{A}^2} + \frac{2\hat{\mu}(t)}{\hat{A}} \hat{\phi}_3(t);$$

čia

$$\hat{\phi}_1(t) = \frac{1}{n_1} \sum_{T_{1i} \leq t} Z_{1i}, \quad \hat{A} = -\frac{1}{\hat{r} n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \frac{T_{1i} Z_{5i}}{1 - Z_{3i}}, \quad \hat{\phi}_2(t) = \frac{1}{n_1} \sum_{T_{1i} \leq t} Z_{1i} [Z_{1i} + 2Z_{3i} + 2\hat{F}_1(t) \mathbf{1}_{\{T_{1i} \leq \hat{r} t\}} + 2Z_{2i} \mathbf{1}_{\{T_{1i} > \hat{r} t\}}],$$

$$\hat{\phi}_3(t) = \frac{1}{n_1} \sum_{T_{1i} \leq t} [Z_{1i}(1 + \ln(1 - Z_{3i})) - (1 - Z_{1i}) \ln(1 - Z_{1i})].$$

Taigi įvertinio $\hat{K}_2(t)$ dispersijos $\sigma_{\hat{K}_2}^2$ įvertinys

$$\hat{\sigma}_{\hat{K}_2}^2 = \frac{1}{n} \hat{\mathbf{Var}}(W_2(t)).$$

Asimptotinis $1 - \alpha$ pasikliovimo intervalas pasiskirstymo funkcijai $K_2(t)$ yra

$$\hat{K}_2(t) \pm \hat{\sigma}_{\hat{K}_2} z_{1-\alpha/2}.$$

Alternatyvus asimptotinis pasikliovimo intervalas yra $(\underline{K}_2(t), \overline{K}_2(t))$; čia

$$\underline{K}_2(t) = \left(1 + \frac{1-\hat{K}_2(t)}{\hat{K}_2(t)} \exp\left\{ \frac{\hat{\sigma}_{\hat{K}_2} z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{\hat{K}_2(t)(1-\hat{K}_2(t))}} \right\}\right)^{-1}, \tag{25}$$

$$\overline{K}_2(t) = \left(1 + \frac{1-\hat{K}_2(t)}{\hat{K}_2(t)} \exp\left\{ -\frac{\hat{\sigma}_{\hat{K}_2} z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{\hat{K}_2(t)(1-\hat{K}_2(t))}} \right\}\right)^{-1}.$$

Sukonstarvus kriterijus "sklandaus perjungimo hipotezei" tikrinti, buvo atlikta duomenų simuliacija. Įvairių alternatyvų atveju ištirtas reikšmingumo lygmuo ir kriterijų galia, kai imtys baigtinės.

Sukonstarvus rezervuotos sistemos pasiskirstymo funkcijos neparametrinius įvertinius bei pasikliovimo intervalus, buvo atlikta duomenų simuliacija. Ištirtos neparametrinių įvertinių savybės, kai imtys yra baigtinės. Duomenys buvo modeliojami pagal eksponentinį, Veibulo ir log-logistinį skirstinus.

3. Rezervuotos sistemos $S(1, m-1)$ patikimumo parametrinis vertinimas.

Tarkime, kad "karšto" režimo atveju pasiskirstymo funkcija $F_1(t;\theta)$ yra absoliučiai tolydi ir priklauso nuo baigtiniamačio parametro $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}^k$. Tegu $\gamma = (r, \theta^T)^T$.

Parametro γ didžiausiojo tikėtinumo įvertinys $\gamma^* = (r^*, (\theta^*)^T)^T$ maksimizuoja tikėtinumo funkcijos logaritmą

$$\ell(\gamma) = \sum_{i=1}^{n_1} \ln f_1(T_{1i};\theta) + m_2 \ln r + \sum_{i=1}^{m_2} \ln f_1(rT_{2i};\theta) + (n_2 - m_2) \ln S_1(rt_1;\theta).$$

Jeigu duomenys neprieštarauja hipotezei H_0^*, tai bet kokiam $t \geq 0$ ir $j \geq 2$ pasiskirstymo funkcija $K_j(t)$ vertinama rekurentiškai:

$$\hat{K}_j(t) = \int_0^t F_1(t + r^*y - y;\theta^*) d\hat{K}_{j-1}(y), \quad \hat{K}_1(t) = F_1(t;\theta^*). \tag{26}$$

Pažymėkime $I_n(\gamma) = -\mathbf{E}\ddot{\ell}(\gamma)$ Fišerio informacinę matricą ir tarkime, kad $\frac{1}{n} I_n(\gamma) \to i(\gamma)$. Esant teisingoms klasikinėms prielaidoms apie skirstinių šeimą $f_1(t,\theta)$ didžiausiojo tikėtinumo įvertinys γ^* yra asimptotiškai normalusis:

$$\sqrt{n}(\gamma^* - \gamma) \xrightarrow{d} Y = (Y_1, Y_2^T)^T \sim N_{k+1}(0, i^{-1}(\gamma)).$$

Y_1 yra vienamatis, Y_2 – k-matis.

Panaudojus delta metodą, gauname :

$$\sqrt{n}(\hat{K}_2(t) - K_2(t)) \xrightarrow{\mathcal{D}} W_2(t) = C_2^T(t;\gamma) Y,$$

čia

$$C_2(t;\gamma) = (C_{21}(t;\gamma), C_{22}^T(t;\gamma))^T, \quad C_{21}(t;\gamma) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial r} F_1(t + ry - y;\theta) dF_1(y;\theta),$$

$$C_{22}(t;\gamma) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial \theta} F_1(t + ry - y;\theta) dF_1(y;\theta) + F_1(t + ry - y;\theta) d(\frac{\partial}{\partial \theta} F_1(y;\theta)).$$

Atsitiktinis dydis $W_2(t)$ yra tiesinė funkcija nuo Y.

Jeigu $j \geq 2$ tada

$$\sqrt{n}(\hat{K}_j(t) - K_j(t)) \xrightarrow{\mathcal{D}} W_j(t).$$

Atsitiktinis dydis $W_j(t)$, $j \geq 2$ taip pat yra tiesinė funkcija nuo Y:

$$W_j(t) = Y^T C_j(t;\gamma), \quad C_j(t;\gamma) \in (C[0,t])^{k+1};$$

čia

$$C_j(t;\gamma) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial \gamma} F_1(t + ry - y;\theta) dK_{j-1}(y;\gamma) + F_1(t + ry - y;\theta) dC_{j-1}(t;\gamma).$$

Taigi dispersijos

$$\mathbf{Var}(W_j(t)) = \mathbf{Var}(C_j(t;\gamma)^T Y) = C_j^T(t;\gamma)i^{-1}(\gamma)C_j(t;\gamma)$$

įvertinys yra $nC_2^T(t;\hat{\gamma})I^{-1}(\hat{\gamma})C_j(t;\hat{\gamma})$, o įvertinio $\hat{K}_2(t)$ dispersijos $\sigma^2_{\hat{K}_j(t)}$ įvertinys yra

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{K}_j(t)} = C_j^T(t;\hat{\gamma})I^{-1}(\hat{\gamma})C_j(t;\hat{\gamma}).$$

Matrica $I(\hat{\gamma})$ gali būti pakeista į $-\ddot{\ell}(\hat{\gamma})$.

Asimptotinis $1-\alpha$ pasikliovimo intervalas pasiskirstymo funkcijai $K_2(t)$ yra

$$\hat{K}_2(t) \pm \hat{\sigma}_{\hat{K}_2} z_{1-\alpha/2}.$$

Alternatyvus asimptotinis pasikliovimo intervalas yra užrašomas (25) formule.

Sukonstarvus rezervuotos sistemos pasiskirstymo funkcijos parametrinius įvertinius bei pasikliovimo intervalus, buvo atlikta duomenų simuliacija. Ištirtos neparametrinių įvertinių savybės, kai imtys yra baigtinės. Duomenys "karštame" ir "šiltame" režime buvo modeliojami pagal eksponentinį, Veibulo ir log-logistinį skirstinus.

4. Statistinis vertinimas gedimų-degradaciniuose modeliuose su kovariantėmis.

Gedimų-degradaciniai modeliai su kovariantėmis nagrinėjami trečiajame disertacijos skyriuje.

Modeliai

Elementų ir sistemų gedimai gali būti trauminiai arba netrauminiai. Gedimas yra vadinamas netrauminiu, kai pasiekiama kokią tai fiksuotą degradacijos ribą z_0. Kiti gedimai vadinami trauminiais. Trauminiai gedimai gali būti skirtingų tipų: susiję su gamybiniu broku, mechaniniais gedimais ar komponenčių nusidėvėjimu.

Tarkime, kad esant fiksuotoms pastovioms kovariantėms degradacija yra aprašoma stochastiniu procesu $Z(t)$, $t \geq 0$. Pažymėkime $T^{(k)}$ - k-tojo tipo trauminio gedimo momentą , $k = 1, \cdots, s$.

Sąlyginį trauminių gedimų intensyvumą $\tilde{\lambda}^{(k)}(t|Z)$ žinant Z modeliuosime tokiu būdu:

$$\tilde{\lambda}^{(k)}(t|Z) = \tilde{\lambda}^{(k)}(t|Z(s), 0 \leq s \leq t) = \lambda^{(k)}(Z(t)) + \mu^{(k)}(t); \tag{27}$$

čia komponentė $\lambda^{(k)}(z)$ charakterizuoja k-ojo tipo trauminio gedimo intensyvumo dalį priklausančią nuo degradacijos, o komponentė $\mu^{(k)}$ – dalį, priklausančio nuo kitų priežasčių.

Tarkime, kad $x(t) = \big(x_1(t), \dots, x_s(t)\big)^T$ yra s kovariančių, kurios gali kisti laike, vektorius. Pažymėkime $Z(t|x)$ degradacijos lygį momentu t, esant kovariantei x.

Apibrėžiamos patikimumo funkcijos, atitinkančios intensyvumus $\lambda^{(k)}(z)$ ir $\mu^{(k)}(z)$:

$$S_1^{(k)}(t|Z) = \exp\{-\int_0^t \lambda^{(k)}[Z(u)]du\}, \quad S_2^{(k)}(t) = \exp\{-\int_0^t \mu^{(k)}(u)du\}.$$

Kovariančių poveikiui antrai patikimumo funkcijai modeliuoti naudosime pagreitintų gedimų modelį:

$$S_2^{(k)}(t|x) = S_2^{(k)}(\int_0^t e^{\beta_k^T x(s)}\, ds);$$

parametrai β_k yra tokio pačio matavimo, kaip ir x.

Kovariančių poveikiui degradacijai modeliuoti naudosime modelį:

$$Z(t|x) = Z(f(t,x,\beta)), \quad f(t,x,\beta) = \int_0^t e^{\beta^T x(u)}\, du. \tag{28}$$

Kovariantės turi dvigubą įtaką trauminių gedimų pasiskirstymo pirmajai komponentei $S_1^{(k)}(t)$: per degradaciją ir tiesiogiai, t.y.:

$$S_1^{(k)}(t|x,Z) = \exp\{-\int_0^t e^{\tilde{\beta}_k^T x(u)} \lambda^{(k)}(Z(u|x)du\}.$$

Sąlyginė patikimumo funkcija, priklausanti nuo gedimo tipo k ir degradacijos lygio Z esant kovariantei x, žymima $S^{(k)}(t|x,Z)$ ir salyginis trauminių gedimų intensyvumas, priklausantis nuo degradacijos lygio Z išreiškiamas per $S^{(k)}(t|x,Z)$:

$$S^{(k)}(t|x,Z) = \mathbf{P}(T^{(k)} > t|x(u), Z(u|x), 0 \leq u \leq t), \quad \tilde{\lambda}^{(k)}(t|x,Z) = -\frac{d}{dt}\ln S^{(k)}(t|x,Z).$$

Apibrėžiame tokį modelį:

$$\mathbf{P}(T^{(1)} > t, \dots, T^{(s)} > t | x(u), Z(u|x), 0 \le u \le t) = \prod_{k=1}^{s} S^{(k)}(t|x, Z), \tag{29}$$

$$S^{(k)}(t|x,Z) = \exp\left\{-\int_0^t \tilde{\lambda}^{(k)}(t|x,Z)\,du\right\} = \exp\left\{-\int_0^t e^{\tilde{\beta}_k^T x(u)}\lambda^{(k)}(Z(u|x))\,du - H^{(k)}(f(t,x,\beta_k))\right\},$$

čia

$$\tilde{\lambda}^{(k)}(t|x,Z) = e^{\tilde{\beta}_k^T x(t)}\lambda^{(k)}(Z(t|x)) + e^{\beta_k^T x(t)}\mu^{(k)}(f(t,x,\beta_k)), \quad H^{(k)}(t) = \int_0^t \mu^{(k)}(u)du.$$

Netrauminio gedimo momentas apibrėžiamas taip:

$$T^{(0)} = \inf\{t : Z(t|x) \ge z_0\}.$$

ir atsitiktinio dydžio $T^{(0)}$ patikimumo funkcija esant kovariantei x yra

$$S^{(0)}(t|x) = \mathbf{P}\big\{T^{(0)} > t \mid x(u), 0 \le u \le t\big\} = \mathbf{P}\big\{Z(t|x) < z_0 \mid x(u), 0 \le u \le t\big\}.$$

Elemento gedimo momentas $T = \min(T^{(0)}, T^{(1)}, \dots, T^{(s)})$ gali būti trauminis arba netrauminis. Apibrėžkime gedimo tipo indikatorių

$$V = k, \quad \text{jeigu} \quad T = T^{(k)}, \quad k = 0, \dots, s.$$

Gedimo tipo indikatorius lygus 0, kai įvyksta netrauminis gedimas. Kitų atvejų gedimas yra trauminis.

Apibrėžkime patikimumo charakteristikas, kurias nagrinėsime:

1) Gedimo momento patikimumo funkcija esant kovariantei x yra apibrėžiama:

$$S(t|x) = \mathbf{P}(T > t|x) = \mathbf{E}S(t|x,Z), \quad S(t|x,Z) = \mathbf{1}_{\{Z(t|x) < z_0\}} \prod_{k=1}^{s} S^{(k)}(t \mid x, Z). \tag{30}$$

2) Vidutinis gedimo laikas esant kovariantei x yra:

$$e(x) = \mathbf{E}(T|x) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(T|x,Z)), \quad \mathbf{E}(T|x,Z) = \int_0^{T^{(0)}} \prod_{k=1}^{s} S^{(k)}(t \mid x, Z)dt. \tag{31}$$

3) Tikimybė, kad netrauminis gedimas įvyks intervale $[0, t]$ esant kovariantei x yra:

$$P^{(0)}(t|x) = \mathbf{E}P^{(0)}(t|x,Z), \quad P^{(0)}(t|x,Z) = \mathbf{1}_{\{Z(t|x) \ge z_0\}} \prod_{k=1}^{s} S^{(k)}(T^{(0)} \mid x, Z). \tag{32}$$

4) Tikimybė, kad trauminis gedimas įvyks intervale $[0, t]$ esant kovariantei x yra:

$$P^{(tr)}(t|x) = \mathbf{E}P^{(tr)}(t|x,Z), \quad P^{(tr)}(t|x,Z) = 1 - \prod_{k=1}^{s} S^{(k)}(t \wedge T^{(0)} \mid x, Z). \tag{33}$$

5) Tikimybė, kad trauminis k tipo gedimas $(k = 1, \dots, s)$ įvyks intervale $[0, t]$ esant kovariantei x yra:

$$P^{(k)}(t|x) = \mathbf{E}P^{(k)}(t|x,Z), \quad P^{(k)}(t|x,Z) = \int_0^{t \wedge T^{(0)}} \prod_{l=1}^{s} S^{(l)}(s \mid x, Z)\,\lambda^{(k)}(s \mid x, Z)\,ds. \tag{34}$$

Modelio parametrų vertinimas

Tarkime, kad stebima n elementų. i-asis elementas funkcionuoja esant kovariančių vektoriui $x^{(i)}$, ir momentais

$$0 < t_{i1} < t_{i2} < .... < t_{im_i}$$

matuojamos degradacijos lygio reikšmės $Z_{ij} = Z_i(t_{ij}|x^{(i)})$.

Apibrėžkime gedimo momentą $T_i = \min(T_i^{(0)}, \ldots, T_i^{(s)})$ ir gedimo tipo indikatorių V_i. Duomenys gali b$\bar{\text{u}}$ti cenzuruojami iš dešinės. Apibrėžkime i-tojo elemento cenzuravimo momentą C_i, ir

$$\tilde{C}_i = C_i \wedge t_{im_i}, \quad X_i = T_i \wedge \tilde{C}_i, \quad \delta_i = \mathbf{1}_{\{T_i \leq \tilde{C}_i\}}, \quad \tilde{\delta}_i = \mathbf{1}_{\{T_i \leq \tilde{C}_i, V_i \neq 0\}}. \tag{35}$$

Apibrėžkime i-tojo elemento matavimų skaičių

$$\mu_i = \begin{cases} j, & \text{if} \quad X_i \in (t_{ij}, t_{i,j+1}], \quad j = 0, ..., m_i - 1, \\ m_i, & \text{if} \quad X_i = t_{im_i}. \end{cases} \tag{36}$$

Atsitiktinis duomenų vektorius yra

$$(X_i, \delta_i, V_i, \mu_i, Z_{i1}, ..., Z_{i\mu_i}, x^{(i)}), \quad i = 1, ..., n. \tag{37}$$

Tarkime, kad funkcijos $\lambda^{(k)}(z)$ ir $\mu^{(k)}(t)$ priklauso parametrinėms funkcijų klasėms

$$\lambda^{(k)}(z) = \lambda^{(k)}(z, \eta_k), \quad \mu^{(k)}(t) = \mu^{(k)}(t, \gamma_k), \tag{38}$$

čia η_k, γ_k yra galimai daugiamačiai nežinomi parametrai, o pačių funkcijų pavidalas žinomas. Pavyzdžiui, padangų gedimo ir nusidėvėjimo laiko analizė parodo, kad intensyvumai $\lambda^{(k)}(z)$ ir $\mu^{(k)}(t)$ turi formas $(z/\eta_{1k})^{\eta_{2k}}$ ir $(t/\gamma_{1k})^{\gamma_{2k}}$.

Modifikuotoji log-tikėtinumo funkcija parametrams $\beta_k, \tilde{\beta}_k$, η_k ir γ_k vertinti iš duomenų vektoriaus (37) yra:

$$\tilde{l} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} \mathbf{1}_{\{V_i = k\}} \ln \left[e^{\tilde{\beta}_k^T x^{(i)}(X_i)} \lambda^{(k)}(\hat{Z}_i(X_i); \eta_k) + e^{\beta_k^T x^{(i)}(X_i)} \mu^{(k)}(f(X_i, x^{(i)}, \beta_k); \gamma_k) \right] -$$
$$\sum_{k=1}^{s} \left(\int_0^{X_i} e^{\tilde{\beta}_k^T x^{(i)}(u)} \lambda^{(k)}(\hat{Z}_i(u); \eta_k)\, du - H^{(k)}(f(X_i, x^{(i)}, \beta_k); \gamma_k) \right); \tag{39}$$

čia $\hat{Z}_i$ yra atsitiktinių procesų Z_i prediktoriai. Prediktorių pavidalas priklauso nuo degradacijos proceso pavidalo.

Darbe pateiktos prediktorių išraiškos, kai degradacijos procesas modeliuojamas laike transformuotu gama procesu, "sm$\bar{\text{u}}$gių" procesu bei "trajektorijų" procesu.

Modeliui be kovariančių

$$\tilde{l} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} \mathbf{1}_{\{V_i = k\}} \ln \left[\lambda^{(k)}(\hat{Z}_i(X_i); \eta_k) + \mu^{(k)}(X_i; , \gamma_k) \right] - \sum_{k=1}^{s} \left(\int_0^{X_i} \lambda^{(k)}(\hat{Z}_i(u); \eta_k)\, du - H^{(k)}(X_i; \gamma_k) \right),$$

čia prediktoriai $\hat{Z}_i$ apibrėžti, keičiant visuose formulėse $f(u, \beta, x^{(i)})$ į u.

Patikimumo rodiklių įvertiniai

Nagrinėkime patikimumo charakteristikų (30)-(34) vertinimą, kai vidutinė degradacija $m(t)$ užrašoma parametrine forma. Pažymėkime

$$\hat{Z}_i(t|x) = \hat{Z}_i\big(g(f(t, \hat{\beta}, x), x^{(i)}, \hat{\beta})\big); \tag{40}$$

čia $\hat{Z}_i(t)$ yra diskrečiai stebimų procesų $Z_i(t|x^{(i)})$, $i = 1, \ldots, n$, prediktoriai. Prediktorių konstravimą nagrinėjome ankstesniame skyrelyje.

Kai $x, x^{(i)}$ yra pastovios laike, tai

$$\hat{Z}_i(t|x) = \hat{Z}_i(e^{\hat{\beta}(x - x^{(i)})} t).$$

Netrauminio gedimo i-tojo elemento esant kovariantei x įvertinys yra:

$$\hat{T}_i^{(0)}(x) = \inf\{t : \hat{Z}_i(t|x) \geq z_0\}.$$

Gaunami sekantys patikimumo rodiklių įvertiniai:

1) Gedimo momento patikimumo funkcijos esant kovariantei x įvertinys:

$$\hat{S}(t|x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{\hat{Z}_i(t|x) < z_0\}} \prod_{k=1}^{s} \hat{S}^{(k)}(t \mid x, \hat{Z}_i),$$

čia
$$\hat{S}^{(k)}(t \mid x, \hat{Z}_i) = \exp\left\{-\int_0^t e^{\hat{\hat{\beta}}_k^T x(u)} \lambda^{(k)}(\hat{Z}_i(u|x), \hat{\eta}_k)\, du - H^{(k)}(f(t, x, \hat{\beta}_k), \hat{\gamma}_k)\right\}.$$

2) Vidutinio gedimo laiko esant kovariantei x įvertinys:

$$\hat{e}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{\hat{T}_i^{(0)}(x)} \prod_{k=1}^{s} \hat{S}^{(k)}(t \mid x, \hat{Z}_i) dt.$$

3) Tikimybės, kad netrauminis gedimas įvyks intervale $[0, t]$ esant kovariantei x, įvertinys:

$$\hat{P}^{(0)}(t|x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{\hat{Z}_i(t|x) \geq z_0\}} \prod_{k=1}^{s} \hat{S}^{(k)}(\hat{T}_i^{(0)}(x) \mid x, \hat{Z}_i).$$

4) Tikimybės, kad traumatinis gedimas įvyks intervale $[0, t]$ esant kovariantei, įvertinys:

$$\hat{P}^{(tr)}(t|x) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{s} \hat{S}^{(k)}(t \wedge \hat{T}_i^{(0)}(x) \mid x, \hat{Z}_i).$$

5) Tikimybės, kad trauminis k tipo gedimas $(k = 1, \ldots, s)$ įvyks intervale $[0, t]$ esant kovarianeti x, įvertinys:

$$\hat{P}^{(k)}(t|x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{t \wedge \hat{T}_i^{(0)}(x)} \prod_{l=1}^{s} \hat{S}^{(l)}(s \mid x, \hat{Z}_i)\, \lambda^{(k)}(s \mid x, \hat{Z}_i)\, ds.$$

Išvados.
1. sukonstruoti kriterijai "sklandaus įjungimo hypotezei" tikrinti; bei ištirtos jų asimptotines savybes;
2. sukonstruoti "šiltai" rezervuotos sistemos pasiskirstymo funkcijos parametriniai ir neparametriniai įvertiniai bei jų asimptotines savybes;
3. sukonstruoti rezervuotos sistemos pasiskirstymo funkcijos pasikliovimo intervalai;
4. naudojant simuliaciją, ištirtos statistinių kriterijų galia ir parametrinių bei neparametrinių įvertinių savybės, kai imtys baigtinės;
5. pateikti bendri gedimų-degradacijos duomenų regresiniai modeliai;
6. pateikti naudotų modelių parametrų bei patikimumo charakteristikų vertinimo metodai.

Aprobacija

Disertacijos rezultatai pristatyti 6-ame darbiniame seminare "Workshop on Simulation", Sankt-Peterburgas, Rusija, 2009 m; tarptautinėje konferencijoje "Second International Conference ALT 2008". Bordo, Pranc$\overline{u}$zija 2008; tarptautinėje konferencijoje "Nordstat". Vilnius, Lietuva, 2008; tarptautinėje konferencijoje "Mathematical methods in Reliability 2007". Glasgovas, Škotija, 2007., o taip pat Lietuvos matematikų draugijos konferencijose (2008, 2009).

Padėka

Dėkoju moksliniam vadovui prof. habil. dr. V. Bagdonavičiui už paramą ruošiant disertaciją. Esu dėkinga prof. habil. dr. M. Nikulinui (Bordo Universitetas, Pranc$\overline{u}$zija), prof. habil. dr. G. Kuldorfui (Umeåuniversitetas, Švedija), doc. dr. D. Krapavickaitei ir Vilniaus universiteto matematinės statistikos katedros nariams už dėmesį ir konsultacijas doktorant$\overline{u}$ros studijų metu.

Cituota literatūra

1. Bagdonavičius, V. Testing the hyphothesis of the additive accumulation of damages. *Probab. Theory and its Appl.*, **23**, 1978, p. 403–408.

2. Bagdonavičius, V. and Nikoulina, V. A goodness-of-fit test for Sedyakin's model. *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*, **42**, 1997, p. 5–14.

3. Bagdonavicius, V. and Nikulin, M. *Accelerated Life Models* (Boca Raton: Chapman and Hall/CRC), 2002.

4. Bagdonavičius, V. Accelerated life models when the stress is not constant. *Kybernetika*, **26**, 1990, p. 289–295.

5. Bagdonavičius, V. and Nikulin, M. S. Estimation in degradation models with explanatory variables, *Lifetime Data Analysis*, **7**, 2001, p. 85–103.

6. Bagdonavičius, V. and Nikulin, M. *Accelerated life models: Modeling and Statistical Analysis*. Chapman & Hall/CRC: Boca Raton, 2002.

7. Bagdonavičius, V., Bikelis, A., and Kazakevičius, V. Statistical analysis of linear degradation and failure time data with multiple failure modes, *Lifetime Data Analysis*, **10**, 2004, p. 65–81.

8. Bagdonavičius V., Bikelis,A., Kazakevičius, V., Nikulin, M. Non-parametric estimation from simultaneous renewal-failure-degradation data with competing risks. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 2007, p. 2191–2207.

9. Couallier V. Some recent results on joint degradation and failure time modelling. In *Probability, Statistics and Modelling in Public Health* (Eds., Nikulin, M., Commenges, D., Huber, C.), Springer Science+Business Media, 2006, p. 73–89.

10. Cox D. R. Regression models and life tables, Journal of the Royal Statistical Society, B vol. 34 pp. 1972, p. 187–220.

11. Doksum K. A. and Hoyland A. Models for variable-stress accelerated life testing experiment based on a Wiener process and the inverse Gaussian distribution, *Technometrics*, **34**, 1992, p. 74–82.

12. Doksum, K. A. and Normand, S. L. T. Gaussian models for degradation processes - part I: Methods for the analysis of biomarker data, *Lifetime Data Analysis*, **1**, 1995, p. 131–144.

13. Doksum, K. A. and Normand, S. T. Models for degradation processes and event times based on gaussian processes. In: Jewell, N. P. et al. (eds), *Lifetime data: Models in reliability and survival analysis*, Kluwer academic publishers, 1996, p. 85–91.

14. Esary, J. D., Marshall, A. W. and Proshan, F. Shock models and wear processes, *The annals of probability*, **1**, 1973, p. 627–649.

15. Finkelstein, M. S. On the exponential formula of reliability, *IEEE Transactions on Reliability*, **53**, 2004, p. 265–269.

16. Greenwood, P.E. and Nikulin, M. *A Guide to Chi-Squared Testing* (New York: John Wiley and Sons), 1996.

17. Harlamov, B. Inverse Gamma-Process as a Model of Wear. In: *Longevity, Aging and Degradation Models in Reliability, Health, Medicine and Biology*, **v.2**, (Eds. V. Antonov, C. Huber, M. Nikulin, V. Politschook), St. Petersburg State Polytechnical University, Saint Petersburg, 2004, p. 180–190.

18. Kahle, W. Simultaneous confidence regions for the parameters of damage processes. *Statistical Papers*, **35**, 1994, p. 27–41.

19. Kahle, W. and Lehmann, A. Parameter estimation in damage processes: Dependent observations of damage increments and first passage time, In *Advances in Stochastic Models for Reliability, Quality and Safety* (Eds., Kahle, W., von Collani, E., Franz, F., Jensen, U.). Birkhauser: Boston, 1998, p. 139–152,

20. Kahle, W. and Wendt, H. Statistical Analysis of Some Parametric Degradation Models. In: Nikulin, M., Commenges, D., Huber, C. (eds), *Probability, Statistics and Modelling in Public Health*, Springer Science+Business Media, 2006, p. 266-79.

21. Lawless J. and Crowder M. Covariates and random effects in a gamma process model with application to degradation and failure, *Lifetime Data Analysis*, **10**, 2004, p. 213–227.

22. Lehmann, A. A Wiener process based model for failure and degradation data in dynamic environments, *Dresdner Schriften zur Mathemat. Stochastik*, **4**, 2001, p. 35–40.

23. Lehmann, A. On a degradation-failure model for repairable items, In *Semiparametric Models and its Applications for Reliability, Survival Analysis and Quality of Life* (Eds., Nikulin, M., Balakrishnan, N., Limnios, N., Mesbah, M.) , Birkhauser: Boston, 2004, p. 65–79.

24. Lehmann, A. Joint models for degradation and failure time data, Proceedings of the International Workshop Statistical Modelling and Inference in Life Sciences, September 1-4, Potsdam, 2005, p. 90–94.

25. Lehmann, A. Degradation-Threshold-Shock Models. In : *Probability, Statistics and Modelling in Public Health*, (Eds. M.Nikulin, D.Commenges, C.Huber). Springer: New York, 2006, p. 286–298.

26. Lawless, J.F. *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. New York: John Wiley and Sons. 2nd edition, 2003.

27. Lu, C. J. and Meeker, W. Q. Using degradation measures to estimate a time-to-failure distribution, *Technometrics*, **35**, 1993, p. 161–174.

28. Meeker, W. Q. and Escobar, L. A. *Statistical methods for reliability data*, Wiley, New York, 1998.

29. Meeker, W. Q., Escobar, L. A. and Lu, C. J. Accelerated degradation test: Modeling and analysis, *Technometrics*, **40**, 1998, p. 89–99.

30. Meeker, W.Q., Escobar, L.A. *Statistical Methods for Reliability Data*. New York: John Wiley and Sons, 1998.

31. Nelson, W. *Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans, and Data Analyses* (New York: John Wiley and Sons), 1990.

32. Nelson, W. *Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans, and Data Analyses.* New York: John Wiley and Sons. 2nd edition, 2004.

33. Padgett, W. J. and Tomlinson, M. A. Inference from accelerated degradation and failure data based on Gaussian process models, *Lifetime Data Analysis*, **10**, 2004, p. 191–206.

34. Padgett W. J. and Tomlinson M. A. Accelerated degradation models for failure based on geometric Brownian motion and gamma processes, *Lifetime Data Analysis*, **11**, 2005, p. 511–527.

35. Pieruschka, E. Relation between lifetime distribution and the stress level causing the failures, 1961.

36. Sedyakin,N.M. On one physical principle in reliability theory. *Technical Cybernetics*, **3**, 1966, p. 80–87.

37. Singpurwalla, N.D. Inference from Accelerated Life Tests When Observations Are Obtained from Censored Samples, *Technometrics*, **13**, 1971, p. 161–170.

38. Singpurwalla, N. D. Survival in dynamic environments, *Statistical Science*, **10**, 1995, p. 86–103.

39. Veklerov, E. Reliability of redundant systems with unreliable switches. *IEEE transactions on reliability*, **36**, 1987, p. 470-472.

40. Viertl, R. *Statistical Methods in Accelerated Life Testing*. Göttingen: Vandenhoeck and Ruprecht, 1988.

41. Wasson Ch.S. *System Analysis, Design, and Development: Concepts, Principles, and Practices*. New York: Wiley, 2005.

42. Wendt, H. and Kahle, W. On a Cumulative Damage Process and Resulting First Passage Times. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **20**, 2004a, p. 17–26.

43. Wendt, H., Kahle, W. On Parametric Estimation for a Position-Dependent Marking of a Doubly Stochastic Poisson Process. In : *Parametric and Semiparametric Models with Applications to Reliability, Survival Analysis, and Quality of Life*, (Eds. M.Nikulin, N.Balakrishnan, M.Mesbah, N.Limnios). Birkhauser: Boston, 2004b, p. 473–486.

44. Whitmore G. A. Estimation degradation by a Wiener diffusion process subject to measurement error, *Lifetime Data Analysis*, **1**, 1995, p. 307–319.

45. Whitmore, G. A. and Schenkelberg, F. Modelling accelerated degradation data using Wiener diffusion with a time scale transformation, *Lifetime Data Analysis*, **3**, 1997, p. 27–45.

46. Whitmore G. A., Crowder M.I. and Lawless J. Failure inference from a marker process based on a bivariate Wiener model, *Lifetime Data Analysis*, **4**, 1998, p. 229–251.

47. Yashin, A.I. Semiparametric Models in the Studies of Aging and Longevity. In: *Parametric and Semiparametric Models with Applications for Reliability, Survival Analysis, and Quality of Life*, (Eds. M.Nikulin, N.Balakrishnan, N.Limnios, M.Mesbah), Birkhauser: Boston, 2004, p. 149–166.

48. Yashin, A. I. and Manton, G. M. Effects of unobserved and partially observed covariate processes on system failure: A review a models and estimation strategies, *Statistical Science*, **12**, 1997, p. 20–34.

49. Zacks, Sh. Failure Distributions Associated With General Compound Renewal Damage Processes. In: *Longevity, Aging and Degradation Models in Reliability, Public Health, Medicine and Biology*, v.2. (eds. V.Antonov, C.Huber, M.Nikulin, V.Polischook), St.Petersburg State Polytechnical University, St.Petersburg, Russia, 2004, p. 336–344.

Pagrindinių publikacijų sąrašas
Pagrindiniai darbo rezultatai yra publikuoti sekančiuose leidiniuose:

1. V. Bagdonavičius, I. Masiulaitytė, M. Nikulin, Statistical Analysis of Redundant System with one Stand-by Unit. In Mathematical Methods in Survival Analysis, Reliability and Quality of Life, (eds. C.Huber, N.Limnios, M.Mesbah, M.Nikulin) , ISTE&Wiley : London 2008, p. 179-189.

2. V. Bagdonavičius, I. Masiulaitytė, M. Nikulin, Statistical analysis of redundant systems with 'warm' stand-by units. Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes, Volume 80, Issue 2 and 3, 2008, p. 115 - 128.

3. V. Bagdonavičius, I. Masiulaitytė, M. Nikulin, Statistical analysis of reliability of a redundant system with one operating unit and one stand-by unit in warm operating state. Proceeding of ALT, 2008.

4. V. Bagdonavičius, I. Masiulaitytė, M. Nikulin, Asymptotic properties of redundant systems reliability estimators. In: Advances in Degradation Modelling Applications to Reliability, Survival Analysis, and Finance. M.S. Limnios, N. Balakrishnan, N.; Kahle, W.; Huber-Carol, C.(Editors). Birkhauser, 2010, p. 293-310 ISBN: 978-0-8176-4923-4.

5. V. Bagdonavičius, I. Masiulaitytė, M. Nikulin, Reliability estimation from failure-degradation data with covariates. In: Advances in Degradation Modelling Applications to Reliability, Survival Analysis, and Finance. M.S. Limnios, N. Balakrishnan, N.; Kahle, W.; Huber-Carol, C.(Editors). Birkhauser, 2010, p.275-292 ISBN: 978-0-8176-4923-4.

Summary.

There are many publications on probabilistic modelling of redundant systems reliability given the reliability of the system components. Applying of these results in real analysis of system reliability is possible if the probability distribution of the components is known. So a very actual problem is the estimation of the redundant system reliability and the properties of the estimators using estimators the reliability of the components.

Methods of accelerated life testing and degradation process analysis separately are well developed but joint modelling and statistical analysis of simultaneous failure time-degradation data with covariates is very recent research direction.

In the Chapter 1 the main issues and results which other authors analyzed that theme are presented.

In the Chapter 2 redundant system with one main unit and $m-1$ stand-by units operating in "warm" conditions are analysed. Goodness-of-fit tests for a general stand-by unit "fluent switching hypothesis" based on Sedyakin's principle and for "fluent switching hypothesis" based on accelerated failure time model are constructed. Parametric and nonparametric estimators and properties of the estimators of the cumulative distribution function of redundant system using reliability data of components tested in "hot" and "warm" conditions are presented. Asymptotic confidential intervals for cumulative distribution function of redundant system are constructed and investigated by simulation.

In the Chapter 3 general simultaneous failure time and degradation regression data models are presented. Maximum likelihood method for estimation of failure process and degradation process parameters is given.

Trumpos žinios apie autorių

Gimimo data ir vieta
1981 m. sausio 17 d., Vilnius.
Išsilavinimas ir kvalifikacija
1999 m. Vilniaus Ateities vidurinė mokykla.
2003 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, statistikos bakalauras.
2005 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, statistikos magistras.
Darbo patirtis
2009, Tarptautinė teisės ir verslo aukštoji mokykla, lektorė.
2009-2010, Mykolo Romerio universitetas, lektorė.

Short information about the author

Birth date and place
1981 17^{th} of January, Vilnius.
Education
1999 Ateities High School of Vilnius.
2003 Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, bachelor of statistics.
2005 Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, master of statistics.
Darbo patirtis
2009 International school of law and business, lector.
2009-2010 Mykolas Romeris university, lector.