

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro darbas

p-variacijos indekso ekonometrinis tyrimas
The Econometric Survey of p-variation Index

Jūratė Žirgulevičiūtė

VILNIUS 2008

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
EKONOMETRINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Darbo vadovas *Hab. dr. Rimas Norvaiša*

(parašas)

Darbas apgintas _____
Gynimo posėdžio protokolo Nr. _____
Darbas įvertintas _____

Registravimo Nr. _____
2008-05-20 _____

TURINYS

RESUME	4
ANOTACIJA.....	4
ĮVADAS	5
1. P-VARIACIJOS INDEKSO VERTINIMAS	7
1.1. p-variacijos indekso apibrėžimas.....	7
1.2. Tolydaus laiko gražos.....	11
1.3. Levy ir Trupmeninis Brauno judesys	13
1.5. Ryšys su fraktalo dimensija.....	18
2. EMPIRINĖ DALIS	19
2.1. Liekanų tyrimas	19
2.2. Monte Carlo procedūra.....	24
3. P-VARIACIJOS INDEKSO KINTAMUMO TYRIMAS	26
3.1. Akcijos kainos procesas.....	26
3.2. Pasikliautinųjų intervalų konstravimas.....	28
3.3. Pasikliautinųjų intervalų taikymas.....	30
IŠVADOS.....	33
LITERATŪRA IR ŠALTINIAI	34
PRIEDAI	36

RESUME

To estimate the roughness of the sample function the methodology introduced in Norvaiša and Salopek (2002) was applied. The roughness is defined as p-variation index of the sample function graph. Methodology is based on linear regression of the oscillation index. This master thesis tests the assumptions of linear regression residuals and constructs estimator which fulfill these assumptions. The model was used for the generated α -stable process and fractional Brownian motion.

Conclusions are generalized using Monte-Carlo procedure. The confidence intervals for the p-variation index was constructed making assumption that the process is the realisation of α -stable or fractional Brownian motion.

The p-variation index was estimated for the „Vallourec” stock price data, sampled at irregular time. In addition the variability in time of p-variation index was studied for different segments of intervals.

ANOTACIJA

Darbe taikyta Norvaišos ir Salopk (2002) metodologija funkcijos šiurkštumui nagrinėti remiantis modifikuotu funkcijos grafiko dėžučių skaičiaus indeksu. Funkcijos šiurkštumas nusakomas p-variacijos indeksu, kuris prie tam tikrų sąlygų lygus fraktalo dimensijai. Darbe ištirtos tiesinės regresijos, kuri vertina p-variacijos indeksą, liekanos ir pasiūlytas būdas kaip išpildyti balto triukšmo prielaidas. Rezultatai apibendrinti Monte Carlo procedūra. Sukonstruoti p-variacijos indekso pasikliautinieji intervalai α -stabiliam ir trupmeniniam Brauno judesio procesams. Ištirtas p-variacijos indekso kintamumas laike „Vallourec” akcijų kainos procesui.

IVADAS

Praeityje matematikai daugiausiai nagrinėjo aibes ir funkcijas, kurioms galėjo taikyti klasikinę matematiką. Funkcijos, kurios nebuvo pakankamai glodžios ar reguliarios, buvo atmestos kaip „patologijos“ ir nevertos dėmesio. Dažniausiai jos buvo laikomos pavienėmis keistenybėmis ir tik retais atvejais priskiriamos atskirai klasei objektų, kuriems galima taikyti bendrą teoriją.

Paskutiniu metu toks požiūris pasikeitė. Buvo pradėta vystyti neglodžių funkcijų teorija. Pastebėta, jog tokie nereguliarūs objektai daug geriau nei klasikinė geometrija aprašo realius objektus. Pavyzdžiui jūros kranto liniją, paviršiaus šiurkštumą, debesų formą, kalnų reljefą ar net aukšto dažnio finansines laiko eilutes. Fraktalinės geometrijos teorija siūlo įrankį analizuoti tokiems nepakankamai reguliariems objektams.

Terminą „fraktalas“ pirmą kartą ekonometrijoje pavartojo Benoit Mandelbrot 1975 metais (išvertus iš lotynų kalbos tai reiškia „sulaužytas“) aprašydamas aibes erdvėje R^d , kurios pasižymi savybėmis priešingomis nei glodumas. Visuotinai priimto vieno apibrėžimo, kas yra fraktalas, nėra. Jais vadinami objektai pasižymintys tam tikromis savybėmis, pavyzdžiui savipanašumu, turintys dimensiją, kuri apibrėžta ne sveikiems skaičiams ir griežtai didesnė nei topologinė. Pagrindinė savybė, leidžianti fraktalus lyginti tarpusavyje, ir yra jų dimensija. Teorinė fraktalo dimensija yra apibrėžta Hausdorfo prasme. Praktikoje dimensijos skaičiavimui naudojamos įvairios procedūros vadinamos indeksais

Pagrindinė idėja, kuria remiasi dimensijos skaičiavimai, yra aibės matavimas tam tikra skale, priklausančia nuo parametro δ . Tai reiškia, jog aibė F matuojama skale, kuri ignoruoja nereguliarumus, mažesnius nei δ , ir žiūrima, kaip šis matas elgiasi, kai $\delta \rightarrow 0$. Mandelbrot savo darbe nagrinėjo Hausdorfo dimensiją. Dėl lengvo empirinio pritaikymo labiausiai paplitusi yra dėžučių skaičiaus indeksas (box counting index). Šį indeksą toliau plėtojo Taylor ir Taylor (1989), Hall ir Wood (1993), Norvaiša ir Salopek (2000), (2002).

Darbe bus taikoma Norvaišos ir Salopek (2002) metodologija funkcijos šiurkštumui nagrinėti remiantis modifikuotu funkcijos grafiko dėžučių skaičiaus indeksu. Funkcijos šiurkštumas bus nusakomas p -variacijos indeksu. Norvaiša ir Salopek įrodė, jog tam tikrais atvejais p -variacijos indeksas sutampa su dimensija. Todėl p -variacijos skaičiavimo procedūra (Gladyševo, osciliacijos) leidžia skaičiuoti ir fraktalo dimensiją.

Paprasčiausias indekso skaičiavimo metodas grindžiamas tiesine regresija. Tai reiškia, jog daroma prielaida, kad tam tikrų sekų nuokrypis nuo mažiausių kvadratų linijos yra normaliai

pasiskirstęs atsitiktinis svyravimas, tenkinantis baltojo triukšmo savybes. Ši savybė retai kada būna nuodugniai išanalizuota. Darbo tikslas yra išanalizuoti tiesinės regresijos liekanas, rasti būdą, kaip gali būti išpildytos regresijos liekanų prielaidos, ir išsiaiškinti, kaip tai veikia patį p-variacijos įvertį. Liekanų analizei panaudoti įvairūs testai ir grafiniai įrankiai, o rezultatų apibendrinimui – Monte Carlo metodas. Taip pat p-variacijos indeksas bus skaičiuojamas Prancūzijos įmonės Vellorec akcijų kainos indekso duomenims, ir dvejetainio imties skaidymo principo pagalba tiriamas p-variacijos indekso kintamumas imtyje.

Darbo nauda yra dvejopa. Kadangi analizuojami du atvejai: α -stabilus ir trupmeninio Brauno judesio, todėl gautas išvadas galima taikyti prie abiejų prielaidų. Taip pat remiantis gautais rezultatais galima palyginti šiuos du procesus p-variacijos įverčio tikslumo, pasikliautinųjų intervalų prasme.

1. P-VARIACIJOS INDEKSO VERTINIMAS

1.1. p-variacijos indekso apibrėžimas

Tegul f yra realioji funkcija apibrėžta intervale $[0, T]$ ir tegul $0 < p < \infty$, taip pat pažymėkime:

$$s_p(f, \kappa) := \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p;$$

Čia $\kappa = \{t_i : i=0, \dots, n\}$ yra intervalo $[0, T]$ skaidiniai, tokie, kad $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Tada funkcijos f p -variacija vadinamas dydis:

$$\nu(f; [0, T]) := \sup\{s_p(f; \kappa) \in [0, \infty] \} \quad (1.1)$$

Sakoma, kad funkcija f turi baigtinę p -variaciją intervale $[0, T]$, jei $\nu(f; [0, T]) < \infty$. Skaičius:

$$\nu(f; [0, T]) := \inf\{p > 0, \nu(f; [0, T]) < \infty\} = \sup\{p > 0 : \nu(f; [0, T]) = \infty\} \quad (1.2)$$

Vadinamas funkcijos f p -variacijos indeksu.

Prieš aprašant metodą, kuriuo tirsime funkciją t.y vertinsime p -variacijos indeksą, apibrėžkime osciliacijos indeksą.

Tegul f yra realioji funkcija intervale $[0, T]$, tegul $\eta = \{N_m : m \geq 0\}$ griežtai auganti teigiamų sveikųjų skaičių seka. Toliau ši seka yra naudojama konstruojant intervalo $[0, T]$ skaidinių

seka $\{\lambda(m) : m \geq 1\}$, kur $\lambda(m) = \left\{ \frac{iT}{N_m} : i = 0, \dots, N_m \right\}$. Ši skaidinių seka intervalą $[0, T]$ skaido į

intervalus $\Delta_{i,m} := \left[\frac{(i-1)T}{N_m}, \frac{iT}{N_m} \right]$, kur $i = 1, \dots, N_m$. Kiekvieno tokio intervalo ilgis yra vienodas ir

lygus T/N_m . Kiekvienam $m \geq 1$ funkcijos f osciliacija intervale $\Delta_{i,m}$ yra vadinamas supremumas:

$$Osc(f; \Delta_{i,m}) := \sup\{|f(t) - f(s)| : s, t \in \Delta_{i,m}\} = \sup_{t \in \Delta_{i,m}} f(t) - \inf_{s \in \Delta_{i,m}} f(s)$$

o seka $Q_\eta(f) := \{Q(f; \lambda(m)) : m \geq 1\}$, kur

$$Q(f; \lambda(m)) := \sum_{i=1}^{N_m} \text{Osc}(f; \Delta_{i,m}) \quad (1.3)$$

vadinama *osciliacijos sumos* seka.

Viršutinė ir apatinė ribos yra apibrėžiamos:

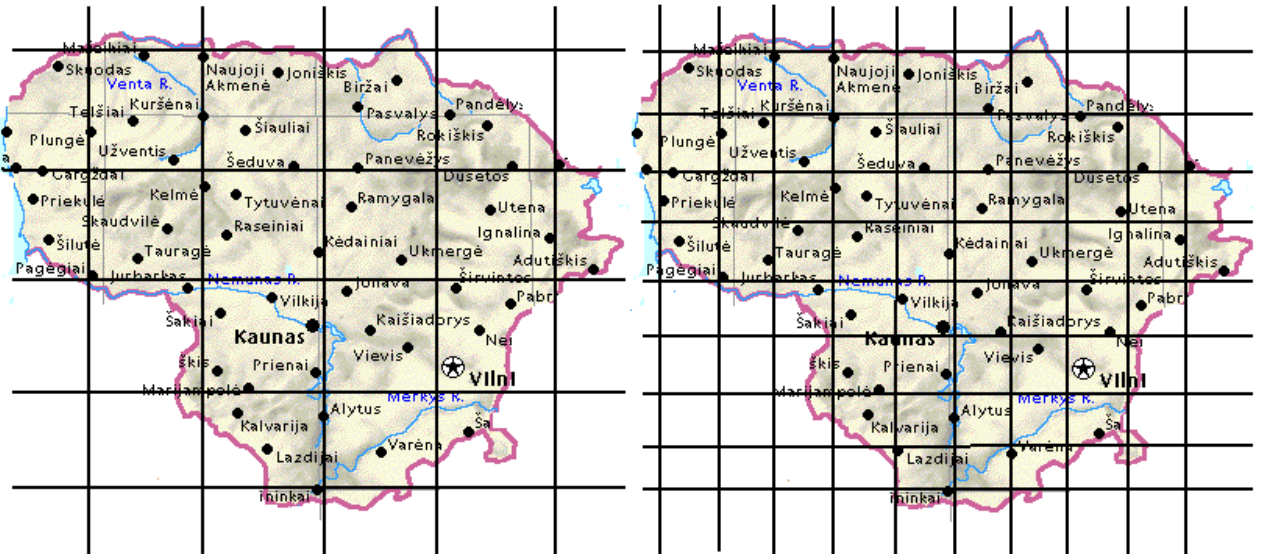
$$\delta_{\eta}^{-}(f) := \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\log Q(f; \lambda(m)) / N_m}{\log(1 / N_m)}$$

$$\delta_{\eta}^{+}(f) := \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\log Q(f; \lambda(m)) / N_m}{\log(1 / N_m)}$$

Jei turime, jog $\delta_{\eta}^{-}(f) = \delta_{\eta}^{+}(f)$, tada sakoma, jog funkcija f turi osciliacijos sumos indeksą, kuris yra lygus:

$$\delta_{\eta}(f) := \delta_{\eta}^{-}(f) = \delta_{\eta}^{+}(f) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log Q(f; \lambda(m)) / N_m}{\log(1 / N_m)} \quad (1.4)$$

Pakankama sąlyga, jog egzistuotų osciliacijos sumos indeksas yra dėžučių dimensijos egzistavimas.



1.pav. Pavyzdys, iliustruojantis dėžučių skaičiaus indekso skaičiavimą. Lietuvos žemėlapis yra sugraduojamas skirtingo dydžio kvadratais. Tarkime, jog kairėje dalyje kiekvieno kvadrato siena δ lygi $1/2$. Suskaičiuojamas kvadratų skaičius dengiantis arba liečiantis žemėlapi (šiuo atveju apytiksliai lygus 28) N , kadangi jis priklauso nuo δ , tai žymima $N(\delta)$ ($N(1/2)=28$). Mažinami kvadratai, ir vėl skaičiuojamas jų skaičius ($N(1/4)=82$). Brėžiamas \log/\log grafikas $\log(N(\delta))$ prieš $\log(1/\delta)$, o jo krypties koeficientas lygus dėžučių skaičiaus indeksui:

$$d_{\text{Box}} = \frac{\log(82) - \log(28)}{\log(4) - \log(2)} \approx 1.55$$

Tegul F netuščias aprėžtas Euklidinėje erdvėje R^n poaibis ir tegul $N_\delta(F)$, su $\delta > 0$, mažiausias skaičius „dėžučių“ (rutulių), kurių siena lygi δ , kurios gali padengti F . Atitinkamai apatinė ir viršutinė F dėžučių skaičiaus dimensija yra apibrėžiama:

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \quad \text{ir} \quad \overline{\dim}_B F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Jeigu turime

$$\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F \quad (1.5)$$

tada ši bendra reikšmė ir vadinama *dėžučių skaičiaus indeksu* aibei F .

Remiantis Norvaiša ir Salopek (2002), jei funkcijos grafikui egzistuoja dėžučių skaičiaus dimensija, sąryšį tarp osciliacijos indekso ir p -variacijos apibrėžia lygybė:

$$\delta_\eta(f) = \frac{1}{(1 \vee \nu_m(f))} \quad (1.6)$$

Iš čia apibrėšime p -variacijos indekso įvertinį, kuris paremtas osciliacijos indekso skaičiavimu.

Taigi tegul galioja anksčiau apibrėžtos sąlygos. Tegul f realioji funkcija intervale $[0,1]$, tegul $\eta = \{N_m : m \geq 0\}$ griežtai auganti teigiamų sveikųjų skaičių seka. Taip pat tegul aibė $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset [0,1]$ sukonstruota taip, jog:

$$\bigcup_{m=1}^M \lambda(m) = \{u_1, \dots, u_n\} \quad (1.7)$$

Kur $\lambda(m) := \{i / N_m : i = 0, 1, \dots, N_m\}$

Šiuose taškuose funkcijos reikšmių $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ p -variacijos indeksas $\nu_m(f)$ skaičiuojamas taikant osciliacijos sumos sekos (žr 1.3 formulę) aproksimaciją, kuri pakankamai dideliems M (iš 1.7) lygi:

$$Q(m) := \sum_{i=1}^{N_m} \left[\max_{u_k \in \Delta_{i,m}} \{f(u_k)\} - \min_{u_k \in \Delta_{i,m}} \{f(u_k)\} \right] \quad (1.8)$$

čia $m \in \{1, \dots, M\}$. Kitaip sakant, ši suma konstruojama skaičiuojant atskirai kiekvieno intervalo $\Delta_{i,m}$ amplitudę.

Iš osciliacijos indekso apibrėžimo ir iš sąryšio (1.6) išplaukia, jog p-variacijos indeksas gali būti skaičiuojamas iš sekos, kur kiekvienam $m=1, \dots, M$

$$\nu_{\eta}(f) := \frac{\log_2 1/N_m}{\log_2 Q(m)/N_m} = \frac{\log_2 N_m}{\log_2 N_m / Q(m)} \quad (1.9)$$

Paskutinė išraiška leidžia p-variacijos indeksui naudoti paprasčiausią tiesinę regresiją lygčiai:

$$\log_2 N_m = c + \nu_{\eta}(f) \log_2 N_m / Q(m) + \varepsilon_m$$

ir šį indeksą vertinti mažiausių kvadratų metodu.

Apibrėžimas I: tegul $\eta = \{N_m : m \geq 0\}$ griežtai auganti teigiamų sveikųjų skaičių seka, $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset [0,1]$ tokia, kad (1.7) yra teisinga kuriam nors M , tegul $\{f(u_1), \dots, f(u_N)\}$ aibė žinomų realiosios funkcijos f reikšmių intervale $[0,1]$, tuomet mažiausių kvadratų p-variacijos indekso įvertinys:

$$\hat{\nu}_{\eta}(f) := \frac{\sum_{m=1}^M (X_m - \bar{X}) \log_2 N_m}{\sum_{m=1}^M (X_m - \bar{X})^2} \quad (1.10)$$

1.2. Tolydaus laiko gražos

Finansiniuose modeliuose pagrindiniai tiriami objektai yra akcijų ar kitų finansinių instrumentų kaina ir jų gražos. Tačiau tolydaus ir diskretaus laiko modeliuose gražų sąvoka skiriasi. $P = \{P(t), t = 1, \dots, T\}$ yra akcijų kaina diskretaus laiko modeliuose, tai, pavyzdžiui, logaritminės vieno periodo gražos yra skaičiuojamos:

$$R_{\log}(t) = \log\left(\frac{P(t)}{P(t-1)}\right), \text{ kai } t=1, \dots, T.$$

Diskretaus laiko modeliuose gražų procesas $R_{\log} = \{R_{\log}(t), t = 1, \dots, T\}$ yra intervalinė funkcija, įgyjanti vieną reikšmę intervale $[t-1, t]$.

Tolydaus laiko modeliuose akcijų kainos procesas yra $P = \{P(t), t \geq 0\}$. Tokiu atveju logaritminės gražos skaičiuojamos:

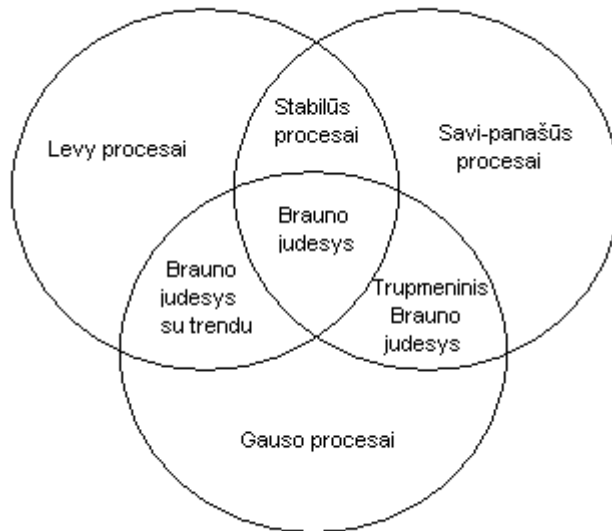
$$R_{\log}(t) = \log\left(\frac{P(t)}{P(0)}\right), \quad t \geq 0.$$

Tai yra taškinė funkcija intervale $[0, T]$. Kitaip sakant logaritminės gražos tolydžiu laiku parodo finansinio instrumento gražą kiekvienu laiku t nuo periodo pradžios.

Iš kitos pusės stochastinis gražų procesas $R_{\log} = \{R_{\log}(t), t \geq 0\}$ toks, kad $R(0)=0$, apibrėžia kainos procesą sąryšiu:

$$P(t) = P(0)\exp\{R(t)\} \text{ kai } t \geq 0$$

Taikant tokį tolydaus laiko modelį finansų matematikoje ir vertinant įvairius gražų pasiskirstymo parametrus pradžioje būtina padaryti prielaidą kokiai būtent proceso realizacijai priklauso konkreti nagrinėjama graža $R = \{R(t)\}$. Šiame darbe bus apsiribojama dviem klasėmis: Levy ir Gauso. Arba konkrečiau, bus daroma prielaida, jog gražų procesas yra arba simetrinis alfa-stabilusis procesas $X_{\alpha} = \{X_{\alpha}(t, \omega) : t \in [0, T], \omega \in \Omega\}$ arba trupmeninis Brauno judesys $X_{1/H} = \{X_{1/H}(t, \omega) : t \in [0, T], \omega \in \Omega\}$. Sąryšiai tarp šių klasių pavaizduoti 2 paveiksle.



2.pav. Sąryšiai tarp nagrinėjamų procesų klasių

Nors abu procesai yra savipanašūs (Cont ir Tankov) ir gali turėti tą patį p -variacijos indeksą kai $\alpha = \frac{1}{H} \in (1,2)$, tačiau kitos charakteristikos visiškai skirtingos. Pavyzdžiui trupmeninis Brauno judesys turi trumpos uodegas, ir priklausomai nuo Hursto eksponentės reikšmės, teigiamai ar neigiamai priklausančius prieauglius (išskyrus atvejį, kai $H=1/2$, prieaugliai nepriklausomi), o α -stabilusis procesas visada turi nepriklausančius prieauglius ir labai ilgas uodegas, o kai $\alpha < 2$ net neturi antrojo momento.

1.3. Levy ir Trupmeninis Brauno judesys

Pirmą kartą trupmeninis Brauno judesys ekonometrinėje analizėje buvo panaudotas 1968 metais B. Mandelbrot ir Van Ness. Jie naudojo šio proceso stochastinio integralo, atžvilgiu paprastojo Brauno judesio, reprezentaciją.

Standartinis ir trupmeninis Brauno judesys yra Gauso procesai ir todėl gali būti apibrėžti, nusakant jų prieauglių priklausomumą, kitaip sakant, jų pagrindinė charakteristika yra kovariacijų funkcija. Dar viena svarbi charakteristika yra savipanašumas.

Apibrėžimas: Atsitiktinis procesas $X = (X_t)_{t \geq 0}$ vadinamas *savipanašiu*, jei kiekvienam $a > 0$ egzistuoja $b > 0$ toks, kad:

$$(X_{at}, t \geq 0) \stackrel{d}{=} (bX_t, t \geq 0)$$

Jei $b = a^H$, tada procesas $X = (X_t)_{t \geq 0}$ vadinamas *savipanašiu su Hursto eksponente H*

Apibrėžimas: Tegul H yra skaičius iš intervalo (0,1). Trupmeninis Brauno judesys $(B^{(H)}(t))_{t \geq 0}$ su Hursto eksponente H yra tolydus Gauso procesas su kovariacijų funkcija:

$$r_H(s, t) := E[B^{(H)}(t)B^{(H)}(s)] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H})$$

Kai $H=1/2$ trupmeninis Brauno judesys yra standartinis Brauno judesys.

Remiantis šiuo apibrėžimu galima išvesti savybes:

- $B^{(H)}(0) = 0$ ir $E[B^{(H)}(t)] = 0$ visiems $t \geq 0$
- $B^{(H)}$ turi homogeninius prieauglius
- $B^{(H)}$ yra Gausinis procesas ir $E[B^{(H)}(t)^2] = t^{2H}$ kai $t \geq 0$ ir visiems H iš intervalo (0,1)
- $B^{(H)}$ turi tolydžias trajektorijas.

Trupmeninis Brauno judesys yra įdomus tuo, jog jis yra vienintelis Gauso savipanašus procesas su stacionariais prieaugliais.

Trupmeninio Brauno judesio prieauglių procesas $Y = \{Y_t : t = 0, 1, \dots\}$ dažnai vadinamas *trupmeniniu Gauso triukšmu*, kur:

$$Y_j = B_{j+1}^{(H)} - B_j^{(H)}$$

Tai stacionarus procesas su autokovariacijų funkcija, apibrėžiama:

$$\rho(j) = \frac{1}{2}(|j+1|^{2H} + |j-1|^{2H} - 2|j|^{2H}) \quad (1.3.1)$$

Kai $H=1/2$ visiems j kovariacijų funkcijos lygios 0, tai reiškia prieauglių nepriklausomumą. Kai $j \rightarrow \infty$, prieauglių kovariacinė funkcija:

$$\rho(j) \sim H(2H-1)j^{2H-2} \quad (1.3.2)$$

Apibrėžimas: Stacionarus procesas $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, kurio autokoreliacinė funkcija $\rho(n) = E[\xi_0 \xi_n]$, vadinamas ilgos atminties (arba turintis ilgalaikę priklausomybę), jei jo autokoreliacinė funkcija gęsta taip lėtai, jog diverguoja suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(n) = \infty$$

Ir atvirkščiai, jei autokoreliacinė funkcija gęsta eksponentiškai $\rho(n) \sim r^n$, kai n artėja į begalybę, procesas $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vadinamas trumpos atminties (turintis trumpalaikę priklausomybę)

Remiantis apibrėžimu ir (1.3.1) ir (1.3.2) prieauglių kovariacijų išraiškomis trupmeniniai Brauno judesiai gali būti sugrupuoti į tris labai skirtingas grupes pagal Hursto eksponentės H reikšmę:

- Kai $H = \frac{1}{2}$ tai yra standartinis Brauno judesys su nepriklausomais prieaugliais ir kovariacija $E[B^{(H)}(t)B^{(H)}(s)] = \min(t, s)$;
- Kai $H > \frac{1}{2}$ prieaugliai teigiamai koreliuoja ir yra ilgos atminties, todėl $B^{(H)}$ yra daug glodesnis lyginant su standartiniu Brauno judesiu;
- Kai $H < \frac{1}{2}$ prieaugliai neigiamai koreliuoja ir yra trumpos atminties, todėl $B^{(H)}$ yra aukšto kintamumo.

Levy procesą ekonometrinėje analizėje pirmasis pritaikė taip pat B. Mandelbrot. Išanalizavęs daugiau nei 50 metų ilgio medvilnės kainos procesą, pastebėjo, jog kainos grąžų proceso dispersija imtyje labai keičiasi. Dideli pikai atitiko šuolius kainos procese. Tokio proceso empirinis pasiskirstymas turi per sunkias uodegas, kad būtų modeliuojamas kaip Gauso procesas. Paprastas modelis su šuoliukais (jumps) gali modeliuoti didelio kintamumo grąžas be papildomų atsitiktinių faktorių įvedimo ar ekstremalių parametrų įvedimo.

Tarkime $X(t)$ yra atsitiktinis procesas, priklausantis nuo laiko t . Tuomet stochastinis procesas, apibrėžtas:

$$X(t) \text{ kai } 0 < t < \infty \text{ ir } X(0) = 0$$

vadinamas Levy procesu, tada ir tik tada, kai:

- turi stacionarius prieauglius: kiekvienam $s > 0$, atsitiktinio kintamojo $X(t+s) - X(t)$ pasiskirstymas nepriklauso nuo t .
- nepriklausomus prieauglius: kiekvienai didėjančiai sekai t_0, t_1, \dots, t_n , atsitiktiniai kintamieji $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ yra nepriklausomi

Pats paprasčiausias ir patogiausias būdas apibrėžti α -stabilų procesą, yra apibrėžti jo charakteristinę funkciją:

$$\phi_X(z) = \exp\left\{-\sigma^\alpha |z|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sgn} z \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\mu z\right\}, \text{ kai } \alpha \neq 1$$

$$\phi_X(z) = \exp\left\{-\sigma |z| \left(1 + i\beta \operatorname{sgn} z \log |z|\right) + i\mu z\right\}, \text{ kai } \alpha = 1$$

Kur α nusako stabilumą, σ yra skalės parametras, β -simetriškumo, ir μ poslinkio parametrai.

- Parametras $\alpha \in (0, 2]$ ir kitaip vadinamas charakteringąja eksponente. Kai $\alpha = 2$ jis nusako Normalųjį pasiskirstymą, todėl pagal jį galima spręsti, kaip pasiskirstymas skiriasi nuo Gausinio. Parametras α interpretuojamas, kaip nusakantis tankio formą, ar „uodegų sunkumą“.
- Skalės parametras $\sigma \geq 0$ ir egzistuoja tik Gauso atveju.

- Parametras $\beta \in [-1,1]$ nusako tankio simetriškumą. Kaip $\beta=1$ tuomet tankis yra pakreiptas į dešinę, analogiškai, kai $\beta=-1$, tankis pakreiptas į kairę, kai simetriškam pasiskirstymui $\beta=0$.
- Poslinkio ir vietos parametras $\mu \in \mathbb{R}$. Kada pirmasis momentas egzistuoja, tai $EX = \mu$

Atsitiktinį dydį X , pasiskirsčiusį pagal aukščiau apibrėžtą funkciją, žymėsime $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. Kai $\beta=0$ ir $\mu=0$, sakoma, kad X turi stabilų simetrinį pasiskirstymą, kurio charakteristinė funkcija:

$$\phi_X(z) = \exp\{-\sigma^\alpha |z|^\alpha\}$$

Taip pat $S_2(\sigma, 0, \mu)$ yra Gauso pasiskirstymas $N(\mu, 2\sigma^2)$ ir $S_1(\sigma, 0, \mu)$ yra Košy pasiskirstymas.

Svarbi α -stabilų procesų savybė yra jų momentų elgesys.

1. Jei $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ ir $\alpha \in (0,2)$, tuomet

$$E|X|^p < \infty, \text{ kai } p \in (0, \alpha)$$

Ir

$$E|X|^p = \infty, \text{ ka } p \geq \alpha$$

2. Jei $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ ir $\alpha \in (1,2]$:

$$\text{tuomet } EX = \mu$$

Tai reiškia, jog α -stabilusis pasiskirstymas neturi antrojo momento, o pirmąjį turi tik tada, kai $\alpha > 1$.

Pagrindinė problema analizuojant α -stabilius procesus ta, jog nepaisant to, jog charakteristinę funkciją nusako tik keli parametrai, tiksli tankio funkcijos išraiška nėra žinoma išskyrus šiuos atvejus:

1. Gauso pasiskirstymas $S_2(\sigma, 0, \mu) \sim N(\mu, 2\sigma^2)$, kurio tankis:

$$\frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} e^{-(x-\mu)^2/4\sigma^2}$$

2. Cashy pasiskirstymas $S_1(\sigma, 0, \mu)$ su tankiu

$$\frac{\sigma}{\pi((x-\mu)^2 + \sigma^2)}$$

3. Levy pasiskirstymas $S_{1/2}(\sigma, 1, \mu)$, kuro tankis:

$$\left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{(x-\mu)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}\right\} 1_{x>\mu}$$

Stochastinio simetrinio α -stabilaus proceso $X_\alpha = \{X_\alpha(t) : t \geq 0\}$ su eksponente $\alpha \in (0, 2]$ generavimo etapai:

- Generuojama n nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių intervale $(-\pi/2, \pi/2)$ atsitiktinių kintamųjų γ_i ir n nepriklausomų atsitiktinių kintamųjų turinčių eksponentinį skirstinį W_i su vidurkiu lygiu 1.
- Skaičiuojama aibė $\{\zeta_i : i=1, \dots, n\}$ simetrinių α -stabiliojų pseudo atsitiktinių kintamųjų pagal formulę:

$$\zeta_i = \frac{\sin \alpha \gamma_i}{(\cos \gamma_i)^{1/\alpha}} \left(\frac{\cos(1-\alpha)\gamma_i}{W_i} \right)^{(1-\alpha)/\alpha}$$

- Remiantis Centrine Ribine Teorema skaičiuojamos X_α aproksimacijos \tilde{X}_α , kur :

$$S_n = \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{i=1}^{[nt]} \zeta_i, \text{ kur } 0 \leq t \leq 1$$

Tada skirstinių prasme

$$S_n \rightarrow \tilde{X}_\alpha, \text{ kai } n \rightarrow \infty$$

Čia $[nt]$ žymi sveikąją nt dalį.

1.5. Ryšys su fraktalo dimensija

Apibrėždamas fraktalo dimensiją D , kaip laiko eilutės grafiko nereguliarumo matą, Mandelbrotas (1987) pateikė alternatyvią Hursto eksponentės interpretaciją. Fraktalo dimensiją jis apibrėžė kaip kiekį dvimatės erdvės, kuri užpildo laiko eilutės grafikas ir jį matavo:

$$D = 2 - H$$

Remiantis tokiu apibrėžimu, standartinio Brauno judesio fraktalinė dimensija $D=1.5$. Kai H įgyja ribines reikšmes $H=0$ ir $H=1$, fraktalo dimensija atitinkamai įgyja $D=2$ ir $D=1$. Intuityviai tai reiškia, kad kai $H=0$ tai atitinka trupmeninį Brauno judesį su neigiamai koreliuojančiais priaugliais, o jo grafikas - labai didelį kintamumą, todėl fraktalo dimensija lygi 2, ir tai reiškia, kad grafikas pilnai užpildo dvimatę erdvę. Viršutinė Hursto eksponentės riba yra $H=1$, toks trupmeninis Brauno judesys turi teigiamai koreliuojančius priauglius, jo funkcijos grafikas yra paprasčiausia tiesė, o fraktalo dimensija $D=1$ reiškia, kad grafikas užpildo lygiai vienos dimensijos erdvę (ilgį).

Ryšys tarp fraktalo dimensijos, apibrėžtos Hausdorfo prasme, ir p -variacijos indekso yra:

$$D = 2 - \frac{1}{\nu_p(f)}$$

Todėl avertinus p -variacijos indeksą nesunku suskaičiuoti ir fraktalo dimensiją.

2. EMPIRINĖ DALIS

2.1. Liekanų tyrimas

Šioje dalyje empiriškai įvertinsime generuoto α -stabilaus proceso p-varicijos indeksą $\hat{\nu}_\eta(f)$. Pradžioje turime suformuoti griežtai didėjančių sveikųjų skaičių seką $\eta = \{N_m : m \geq 0\}$, kuri intervalą $[0, T]$ dalina į skaidinius $\lambda(m) := \{i / N_m : i = 0, 1, \dots, N_m\}$. Yra du būdai taip suskaidyti intervalą:

- **Dvejetainis** intervalo skaidymas, kai pirmame etape visas intervalas padalinamas į dvi dalis, antrame etape kiekviena dalis vėl dalinama į dvi dalis, taip k-tajame etape gaunama 2^k lygių intervalų
- **1/m dalių intervalo skaidymas:** tarkime $X \subset [0, 1]$, pirmame etape naudojamas visas intervalas, antrame jis yra suskaidomas į dvi dalis $[0, 1/2), (1/2, 0]$, trečiame į tris dalis $[1, 1/3), (1/3, 2/3), (2/3, 1]$, ir n-tame etape į n lygių dalių $[1, 1/n), \dots, ((n-1)/n, 1]$

Pirmuoju atveju kiekvienam $m \geq 1$ $N_m = 2^m$ o antruoju $N_m = m$.

Jei turime logaritmuotą kainos procesą intervale $[0, T]$ ir žinome jo reikšmes taškuose $u_t = t/T$, kur $t=0, 1, \dots, T$, turime rasti maksimalų M , tokį, kad tenkintų:

$$\bigcup_{m=1}^M \lambda(m) \subset \{u_0, \dots, u_T\}$$

Ir

$$N \leq T < \# \bigcup_{m=1}^{M+1} \lambda(m) \quad (2.1)$$

Tai reiškia, kad taikant 1/m žingsnio skaidinių formavimą, turime atlikti tiek etapų, kad maksimaliai būtų išnaudoti visi taškai, bet skaidinių aibės $\{\lambda(m) : m = 1 \dots M\}$ dydis neviršytų imties ilgio.

Generuojame $N_m = 17$ tūkst. reikšmių α -stabilų, su $\alpha = 1.6$, procesą \tilde{X}_α taškuose $\{u_1 \dots u_{N_m}\}$. Iš (2.1) nelygybės randame $m=240$. Kiekvinai reikšmei $m=1 \dots 240$ skaičiuojama osciliacijų seka:

$$Q(m) := \sum_{i=1}^{N_m} \left[\max_{u_k \in \Delta_{i,m}} \{\tilde{X}_\alpha(u_k)\} - \min_{u_k \in \Delta_{i,m}} \{\tilde{X}_\alpha(u_k)\} \right]$$

sudarę tiesinę regresiją:

$$\log_2 N_m = c + \nu_m(f) \log_2 N_m / Q(m)$$

Iš apibrėžimo vertiname p-variacijos indeksą

$$\hat{\nu}_m(X_\alpha) := \frac{\sum_{m=1}^{240} (X_m - \bar{X}) \log_2 N_m}{\sum_{m=1}^{240} (X_m - \bar{X})^2}$$

Siekinant ištirti ar paprastos tiesinės regresijos metodas yra tinkamas vertinti p-variacijos indeksui tikrinsime prielaidas regresijos liekanoms:

- Nulinio vidurkio $E\varepsilon_m = 0 \quad \forall m$
- Nekoreliuotumo $E(\varepsilon_m \varepsilon_n) = 0$ kai $m \neq n$
- Homoskedastiškumo $Var(\varepsilon_m) = \sigma^2 \quad \forall m$
- Normalumo $\varepsilon_m \sim N(0, \sigma^2)$

Šioms prielaidoms tirti naudosime testus ir grafinius metodus.

Pritaikius dvejetainį skaidinių formavimą, gautas p-variacijos įvertis lygus 1.71 (žr 1.1 lentelę ir 1.2 pav. prieduose), tačiau atlikus diagnostinius testus paaiškėjo, jog įvertis nėra geras, kadangi liekanos netenkina modelio prielaidų. Liekanos turi vienetinę šaknį, koreliuotos, heteroskedastiškos ir nėra normaliosios (žr. 1.2 lentelę prieduose). Pašalinant po vieną osciliacijos sekos narį, p-variacijos įvertis $\hat{\nu}_\eta(f)$ vis didėja ir tampa dar netikslesnis. Taikant dvejetainį imties skaidymą iš 17 tūkstančių imties ilgio gaunama tik 14 narių osciliacijos seka. Dėl gana mažo sekos ilgio sunku nustatyti tendencijas ir netikslius, kurie gali veikti p-variacijos įvertį

Tam pačiam generuotam α -stabiliam procesui pritaikykime $1/m$ žingsnių sekos suskaidymo metodą. Siekiant išvengti „klaidingos“ regresijos visų pirma buvo atlikti regresijos kintamųjų stacionarumo testai, kurie parodė, jog abu regresijos kintamieji yra stacionarūs (žr 1.4 lentelę prieduose).

Sudarius tiesinę regresiją OLS metodas p-variacijos indeksą įvertino 1.727. Tačiau regresijos diagnostiniai testai aptiko liekanų koreliuotumą (Durbino-Watsonio statistika yra tik

0.48) ir heteroskedastiškumą, ir tai atsispindi liekanų bei jų dispersijos kitimo laike grafike (žr. 1.4 pav. *prieduose*). Intervalo pradžioje liekanos smarkiai svyruoja ir šis svyravimas palaipsniui mažėja ir taip pat mažėja dispersija. Tai galima paaiškinti tuo, jog osciliacijos seka formuojama imtį skaidant į intervalus ir kiekvienam jų apskaičiuojant amplitudę (skirtumą tarp didžiausios ir mažiausios reikšmės). Dėl to kuo didesnis skaidinių skaičius tuo intervalai yra mažesni ir tuo tikslesnis osciliacijos įvertis. Ir atvirkščiai, pirmaisiais žingsniais atliekamas skaidymas yra labai stambus todėl ir osciliacijos įvertis labai netikslus. Siekiant pagerinti įvertį pirmuosius osciliacijos sumos sekos narius reikia pašalinti.

Detalesnei osciliacijos sekos analizei, bei jos pirmųjų taškų įtakos regresijai analizuoti buvo naudojama kovariacijų santykio statistika. Ši statistika buvo pasiūlyta Belsley, Kuh ir Welsch (1980). Ji parodo kokią įtaką regresijos koeficientų tikslumui daro kiekvienas taškas, t.y. skaičiuoja koeficientų kovariacijų $Var(\hat{\beta})$ determinanto santykį pilnai imčiai ir pašalinant iš eilės po vieną narį. Laikoma, jog taškas daro didelę įtaką regresijai, jei koeficientų kovariacijų santykis patenka už intervalo $[1 - 3p/n, 1 + 3p/n]$ ribų. Čia p yra regresijos parametrų skaičius, o n mūsų atveju osciliacijų sekos ilgis. Remiantis šia statistika, dauguma taškų iki 69-tojo nario daro didelę įtaką regresijai. Iš studentizuotų liekanų grafiko (žr. 1.5 ir 1.6 pav. *prieduose*) maždaug pirmi 50 narių laikomi išskirtimis.

Toliau nagrinėsime regresijas, kai iš imties pašalinta 50, 70 ir 100 pirmųjų narių. Kadangi p -variacijos indeksas skaičiuojamas ir tikriems duomenims, o nagrinėjamų duomenų intervalų ilgiai skirsis, skirsis ir osciliacijos sekų ilgiai, todėl toliau gautus rezultatus taikysime imtims pašalinus 45%, 32% ir 23% pirmųjų narių.

Kadangi osciliacijos ir trendo seka priklauso nuo pradinės imties skaidymo etapo, todėl šiuos etapus galima būtų traktuoti kaip laiko momentus, o ignoruojant koku būdu buvo gautos šios dvi sekos, jas galima laikyti pseudo laiko eilutėmis. Darant tokią prilaidą regresijos liekanose galima ieškoti ARMA struktūros.

Sudarius tiesinę regresiją iš liekanų koreliacijos ir dalinės koreliacijos grafikų, buvo parinkta ARMA struktūra. Geriausias modelis buvo gautas pašalinus 100 (45%) pirmųjų sekos narių: didžiausias determinacijos koeficientas, mažiausias Akaičės ir Schwarz kriterijai, mažiausia liekanų kvadratų suma ir regresijos paklaida. Taikant regresiją šiuo atveju liekanos be ARMA struktūros, tenkina balto triukšmo savybes Tačiau modelis įvertintas be pirmųjų 70 (32%) sekos narių p -variacijos koeficientą įvertino arčiausiai tikrojo koeficiento (1.6). Šių abiejų modelių liekanos yra stacionarios, nekoreliuotos, homoskedastiškos ir normalios (žr. 1.5 ir 1.6 lenteles *prieduose*), todėl tenkina visas tiesinę regresijos modelio prielaidas.

$$\log_2 N_m = 1.73 + 1.615(\log_2 N_m / Q(m)) + \hat{\varepsilon}_m, \text{ kur } \hat{\varepsilon}_m = (1 - 0.379B^5)\hat{\xi}_m \quad m=51, \dots, 240$$

$$\log_2 N_m = 1.802 + 1.5965(\log_2 N_m / Q(m)) + \hat{\varepsilon}_m, \text{ kur } m=71, \dots, 240$$

$$\log_2 N_m = 1.83 + 1.587(\log_2 N_m / Q(m)) + \hat{\varepsilon}_m, \text{ kur } m=101, \dots, 240$$

Tokią pačią procedūrą atliksime ir generuotam trupmeniniam Brauno judesiui. Generuojame $N_m = 17$ tūkst. reikšmių trupmeninį Brauno judesio, su $H = 0.625$ (p-variacijos indeksas lygus 1.6), procesą \tilde{X}_H taškuose $\{u_1 \dots u_{N_m}\}$. Kiekvinai reikšmei $m=1 \dots 240$ randame:

$$Q(m) := \sum_{i=1}^{N_m} \left[\max_{u_k \in \Delta_{i,m}} \{\tilde{X}_H(u_k)\} - \min_{u_k \in \Delta_{i,m}} \{\tilde{X}_H(u_k)\} \right]$$

Vertiname p-variacijos indeksą

$$\hat{\nu}_\eta(X_H) := \frac{\sum_{m=1}^{240} (X_m - \bar{X}) \log_2 N_m}{\sum_{m=1}^{240} (X_m - \bar{X})^2}$$

Mažiausių kvadratų p-variacijos įvertis gautas 1.51. Liekanų diagnostiniai testai parodė, jog jos yra heteroskedastiškos ir nėra normalios (žr. 1.7 lentelę prieduose).

Vėl taip pat iš osciliacijos sekos buvo išmesti pirmi 50, 70 ir 100 narių. Gauti trys modeliai:

$$(I) \quad \log_2 N_m = 0.26 + 1.54(\log_2 N_m / Q(m)) + \hat{\varepsilon}_m, \text{ kur } m=51, \dots, 240$$

$$(II) \quad \log_2 N_m = 0.25 + 1.54(\log_2 N_m / Q(m)) + \hat{\varepsilon}_m, \text{ kur } m=71, \dots, 240$$

$$(III) \quad \log_2 N_m = 0.21 + 1.55(\log_2 N_m / Q(m)) + \hat{\varepsilon}_m, \text{ kur } m=101, \dots, 240$$

Visais trim atvejais gauti nekoreliuojantys, stacionarūs, normaliai pasiskirstę likučiai, tačiau atveju, kai išmesti 50 narių, jie yra heteroskedastiški. White heteroskedastiškumo testo statistika lygi 13.99. (žr. 1.7-1.9 lenteles prieduose). Lyginant modelius tarpusavyje geriausias būtų trečiasis modelis (mažiausias Akaikės ir Schwarz kriterijai), o pagal Durbino Watsono statistiką - antrasis modelis, tačiau didelio skirtumo tarp jų nėra. Lyginant p-variacijos įvertį, arčiausiai tikrojo įverčio trečiasis modelis, bet ir vėl skirtumas su likusiais labai nedidelis.

Ši analizė buvo atlikta tik vienu atveju: vieną kartą generuotas α -stabilus ir trupmeninis Brauno judesys. Todėl išanalizuotas tik vienas atsitiktinis įvykis ω . Vienu atveju

gautas geras modelis jokiū būdu neparodo, kad tai galioja kiekvieną kartą. Norint padaryti apibendrintas išvadas, aukščiau aprašytą analizę reikėtų atlikti daug kartų. Kitoje darbo dalyje bus taikomas Monte Carlo metodas ne tik abiem generuojamiems procesams atskirai, bet ir kiekvinai p-variacijos reikšmei iš aibės $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.0\}$

2.2. Monte Carlo procedūra

Siekiant tiksliau išsiaiškinti kokią įtaką ankščiau aprašyta procedūra daro p-variacijos koeficiento įverčiui, buvo atlikta Monte-Carlo procedūra.

Skirtingoms α ir $1/H$ reikšmėms iš aibės $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.0\}$ buvo generuoti 17 tūkstančių narių ilgio α -stabilūs $\{\tilde{X}_\alpha(m)\}$ ir trupmeniniai Brauno judesio procesai $\{\tilde{X}_H(m)\}$, kuriems buvo įvertintas OLS oksiliacijos η -sumavimo įverčiai $\hat{\nu}_\eta(X_\alpha)$ ir $\hat{\nu}_\eta(X_H)$. Ši procedūra buvo atlikta $K=400$ kartų. Visais atvejais gauti įverčių $\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_K$ rinkiniai.

Kiekvienam rinkiniui buvo suskaičiuojama:

- Vidutinė įverčio reikšmė $\bar{\nu} := \left(\sum_{i=1}^K \hat{\nu}_i \right) / K$
- Poslinkis $|\hat{\nu} - \nu|$
- Standartinis nuokrypis $SD := \sqrt{\sum_{i=1}^K (\hat{\nu}_i - \bar{\nu})^2 / (K - 1)}$
- Vidutinė kvadratinė paklaida $MSE := \sum_{i=1}^K (\hat{\nu}_i - \hat{\nu})^2 / K$

Pradžioje buvo nagrinėjamas atvejis, kai iš osciliacijos sekos buvo tik išmetama 50 pirmųjų narių ir atvejis kai liekanoms dar buvo parinkta geriausia ARMA struktūra (žr 1 ir 2 lenteles). Šiuo atveju α -stabilus procesas generuotas 100 kartų. Siekiant patikrinti, ar tokia liekanų struktūra pagerina įvertį, standartinės paklaidos ir kitos charakteristikos buvo suskaičiuotos paprastai regresijai, ir regresijai su ARMA liekanomis.

ARMA struktūros parinkimas labai mažai pakeitė įvertį. Daugeliu atveju nedaug sumažėjo standartinis nuokrypis ir vidutinė kvadratinė paklaida, tai rodo, jog įvertis mažiau išsibarstęs. Tačiau absoliutinis poslinkis ne visada sumažėjo. Iš Norvaišos ir Salopek (2002) atlikto tyrimo galima daryti išvadą, jog šis pritaikytas metodas turi savybę pervertinti p-variacijos indeksą mažoms reikšmėms ir nepakankamai įvertinti didesnėms reikšmėms. Liekanų ARMA struktūra daugeliu atveju pamažina nagrinėjamą koeficientą, todėl natūralu, jog mažesnėms reikšmėms sumažina poslinkį, o didesnėms padidina.

	1,2	1,4	1,6	1,8	2
Vidurkis	1,297	1,4186	1,59	1,757	1,8825
Nuokrypis	0,097	0,0186	-0,01	-0,043	-0,1175
SD	0,0831	0,096	0,095	0,072	0,068
MSE	0,0137	0,019	0,016	0,095	0,018

1 lentelė Monte Carlo procedūros rezultatai alfa-stabiliam procesui, kai p-variacijos indeksas vertinamas iš regresijos be pirmų 50 narių

	1,2	1,4	1,6	1,8	2
Vidurkis	1,285	1,4118	1,561	1,7463	1,8706
Nuokrypis	0,087	0,0118	0,039	0,054	0,1294
SD	0,0718	0,10285	0,066	0,070	0,057
MSE	0,0126	0,014	0,009	0,084	0,018

2 lentelė Monte Carlo procedūros rezultatai alfa-stabiliam procesui, kai p-variacijos indeksas vertinamas iš regresijos be pirmų 50 narių ir liekanoms uždėta ARMA struktūra

Toliau buvo generuoti $K=400$ kartų α -stabilūs $\{\tilde{X}_\alpha(m)\}$ ir trupmeninis Brauno judesys $\{\tilde{X}_H(m)\}$ ir abiem atvejais regresija vertinama pilnai osciliacijų imčiai, išmetus 50, 70 ir 100 narių. Gauti rezultatai parodė, jog iki 1.5 poslinkis yra teigiamas α -stabilaus proceso atveju, t.y. metodas įvertina p-variacijos indeksą didesniu, nei jis yra iš tikrųjų. Todėl tikslesni įverčiai gauti sumažinus imtį. Tačiau kai p-variacijos indeksas yra didesnis nei 1.5 metodas indeksą įvertina mažesniu, nei jis yra iš tikrųjų, todėl dar sumažinus imtį, poslinkis padidėja. Vidutinė kvadratinė paklaida mažėja didėjant α reikšmei ir mažinant osciliacijų imties ilgį, o standartinis nuokrypis maždaug išlieka panašus (žr 1.11 lenteles prieduose).

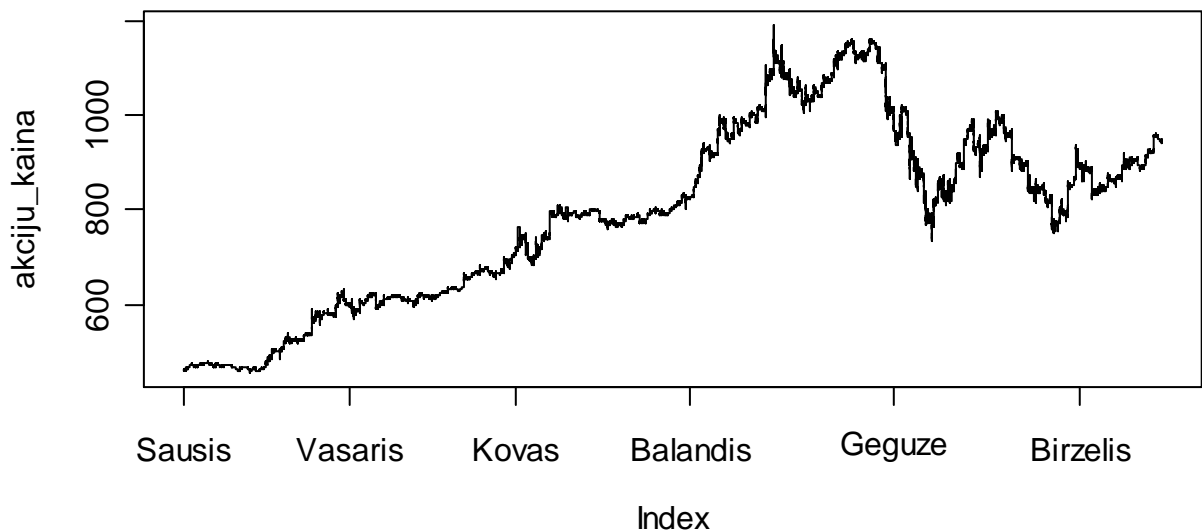
Trupmeninio Brauno judesio atveju situacija panaši: iki 1.5 reikšmės mažesnę poslinkį duoda sumažinta osciliacijų seka, o po 1.5 reikšmės pilna imtis. Tačiau dabar standartinis nuokrypis ir vidutinė kvadratinė paklaida didėja kartu su p-variacijos indekso reikšme, tai rodo, jog didėja reikšmių išsibarstymas (žr 1.12 lenteles prieduose).

3. P-VARIACIJOS INDEKSO KINTAMUMO TYRIMAS

3.1. Akcijos kainos procesas

Nagrinėjama akcija yra “Vallourec” organizacijos, listinguojamos Paryžiaus vertybinių popierių biržoje. Tai Prancūzijos kompanijų grupė specializuojanti vambzdžių iš nerūdijančio plieno gamyboje ir juos parduoda pramonės įmonėms. Gaminius tiekia statybos, dujas ir naftą apdirbančioms įmonėms, taip pat gaminančioms automobilius, boilerius ir juos prižiūri. Tai viena didžiausių pasaulyje plieninių vambzdžių gamintojų. Turi kelias antrines įmones Prancūzijoje, Vokietijoje, Brazilijoje ir JAV. Valdo tarptautinį plieninių įrenginių prekybos ir tyrimų tinklą.

Akcijos kainos procesas



3.pav. “Vallourec” akcijos kainos procesas

Nagrinėjama akcijos kaina laikotarpiu nuo 2006 metų sausio 2-os dienos iki 2006 birželio 17-tos dienos. Turimi įrašai yra penkių savaitės dienų biržos darbo laiku nuo 8 iki 17 valandos. Laiko intervalai yra nereguliarūs, t.y. nagrinėjami duomenys, kai užfiksuotas kiekvienas kainos pasikeitimas arba įvykdytas sandoris. Per dieną turima nuo 3 iki 20 tūkstančių, o visas laikotarpis apima daugiau nei 9 milijonus kainos įrašų ir tai atitinka maždaug 2^{20} taškų.

Šioje dalyje įvertinsime p-variacijos indeksą $\hat{D}_\eta(X)$ Vallourec akcijos kainai. Taip pat išnagrinėsime šio parametro kintamumą laike. Finansų terijoje kainos procesas dažnai modeliuojamas:

$$\log\left(\frac{P_t}{P_0}\right) = \mu_t + \int_0^t \sigma_s dB_s^H$$

Tai stochastinis integralas trupmeninio Brauno judesio su Hursto eksponente H atžvilgiu. Tačiau realybėje finansiniai duomenys pasižymi nepastovumu, todėl vienuose ar kituose perioduose modelio parametrai gali skirtis. Kitaip sakant, šioje dalyje sieksime išanalizuoti parametro H kintamumą laike, kai daroma prielaida, jog kainos procesas yra trupmeninis Brauno judesys. Iš kitos pusės, darant prielaidą, jog kainos procesas yra Levy α -stabilusis p-variacijos indekso kintamumas reikštų kainos prieauglių uodegų svorio pasikeitimus.

Mes nedarysime jokių išankstinių prielaidų apie galimus kainos struktūrinius pasikeitimus, tirsime tik p-variacijos indekso kintamumą laike iš turimų duomenų.

Tam, jog išvengtume papildomo p-variacijos indekso kintamumo dėl skirtingo imties ilgio, turimus duomenis suskaidysime į vienodus intervalus. Tiksliau sakant, parametą vertinsime pilnai imčiai, po to dalinsime į dvi lygias dalis, į keturias ir taip toliau.

3.2. Pasikliautinių intervalų konstravimas

Siekiant ištirti p-variacijos parametro kintamumą imtyje, visų pirma reikia sukonstruoti pasikliautinuosius intervalus kiekvienai p-variacijos reikšmei iš aibės {1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.0}. Kadangi turimai laiko eilutei daromos dvi skirtingos prielaidos: procesas priklauso α -stabiliam arba trupmeniniam Brauno judesiui, todėl ir pasikliautiniai intervalai konstruojami atskirai prie abiejų prielaidų.

P-variacijos indekso pasirinkto tikėtinumo lygio Q pasikliaustinasis intervalas $[\nu - \varepsilon, \nu + \varepsilon]$ randamas išsprendus:

$$P(|\hat{\nu} - \nu| > \varepsilon) = Q$$

Tačiau tikroji p-variacijos indekso pasiskirstymo funkcija $F(x)$ nėra žinoma, todėl iš Monte Carlo simuliacijų, jam bus sukonstruota empirinė pasiskirstymo funkcija:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(\nu(\omega_i) \leq x)$$

Buvo 400 kartų generuotos α -stabilūs ir trupmeninio Brauno judesio trajektorijos su parametrais iš aibės $\alpha = 1/H \in \{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.0\}$. Kiekvieno generuoto proceso ilgis 17 tūkstančių. p-variacijos indeksas buvo skaičiuojamas iš osciliacijos sekos, kurios ilgis 240. Remiantis II skyriaus Monte Carlo procedūros rezultatais, buvo parinktas tas modelis, kuris turėjo mažiausią poslinkį.

Pasirinktas reikšmingumo lygmuo 0.01 ir 0.05 ir kiekvienam jų konstruojamas pasikliaustinasis intervalas:

95%	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
Apatinė riba	1.06	1.1	1.14	1.266	1.33	1.39	1.47	1.56	1.61	1.76
Viršutinė ribe	1.33	1.39	1.48	1.55	1.61	1.74	1.89	1.98	2.068	2.08
Intervalo ilgis	0.27	0.29	0.34	0.28	0.28	0.35	0.42	0.42	0.45	0.32

99%	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
Apatinė riba	1.03	1.106	1.09	1.22	1.31	1.36	1.42	1.48	1.56	1.73
Viršutinė ribe	1.34	1.41	1.50	1.58	1.63	1.77	1.938	1.99	2.12	2.11
Intervalo ilgis	0.31	0.304	0.41	0.36	0.32	0.41	0.518	0.52	0.56	0.38

3 lentelės alfa-stabilaus proceso pasikliautiniai intervalai

95% 1/H	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
Apatinė riba	1.02	1.1	1.21	1.27	1.38	1.42	1.51	1.58	1.69	1.72
Viršutinė riba	1.19	1.28	1.38	1.51	1.65	1.69	1.81	1.95	2.06	2.07
Intervalo ilgis	0.17	0.18	0.17	0.24	0.27	0.27	0.3	0.37	0.37	0.35

99% 1/H	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
Apatinė riba	1.00	1.1	1.18	1.25	1.36	1.40	1.49	1.50	1.58	1.69
Viršutinė riba	1.21	1.29	1.41	1.55	1.69	1.71	1.84	1.97	2.12	2.10
Intervalo ilgis	0.21	0.19	0.23	0.3	0.33	0.31	0.35	0.47	0.54	0.41

4 lentelės trupmeninio Brauno judesio proceso pasikliautiniai intervalai

Lyginant α -stabilaus ir trupmeninio Brauno judesio pasikliautinius intervalus, pirmojo proceso intervalų ilgiai yra didesni. Remiantis II skyriuje gautais rezultatais, α -stabilaus proceso reikšmės yra labiau išsibarsčiusios.

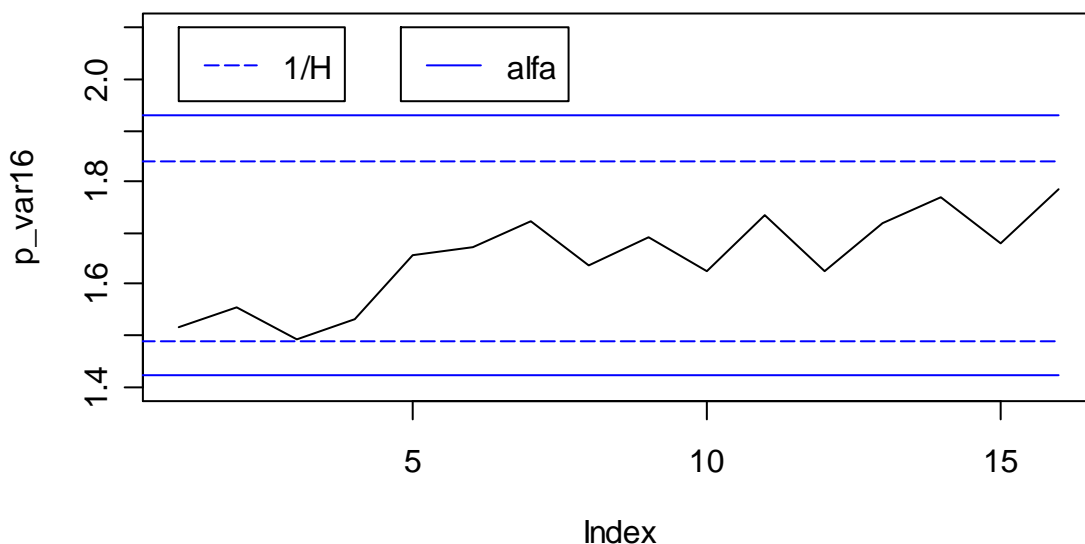
3.3. Pasikliautinųjų intervalų taikymas

Visai turimai imčiai įvertintas p-variacijos koeficientas lygus 1.62. Tiesinė regresija su oscilacijos seka su nekoreliuojančiais, homoskedastiškais ir normaliai pasiskirsčiusiais likučiais buvo gauta pašalinus 22% pirmųjų narių. Gautas modelis:

$$\log_2 N_m = 1.62(\log_2 N_m / Q(m)) + \hat{\varepsilon}_m, \text{ kur } (1 + 0.18B)\hat{\varepsilon}_m = (1 - 0.12B^5)\hat{\xi}_m$$

Padalinus imtį į dvi dalis, pirmoje dalyje p-variacijos indeksas gautas lygus 1.61, o antroje dalyje 1.69.

Suskaidžius duomenis į 16 segmentų, vidutinė p-variacijos indekso reikšmė yra 1.65, o standartinis nuokrypis 0.089. Nors indekso reikšmė kinta segmentuose, tačiau remiantis pasikliautinųjų intervalų viršutine ir apatine ribomis, galima daryti išvadą, jog tikroji indekso reikšmė visame intervale lygi 1.7. Ši išvada tokia pati prie abiejų trupmeninio Brauno judesio ir α -stabilaus proceso prielaidų.

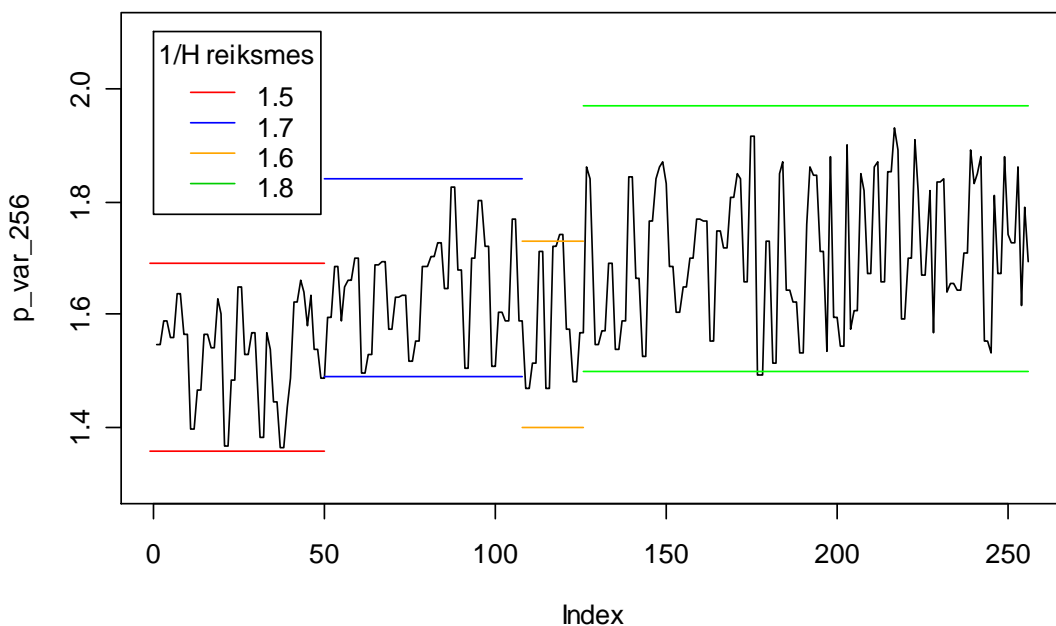


4.pav. p-variacijos indekso kintamumas laike, kai imtis suskaidyta į 16 segmentų

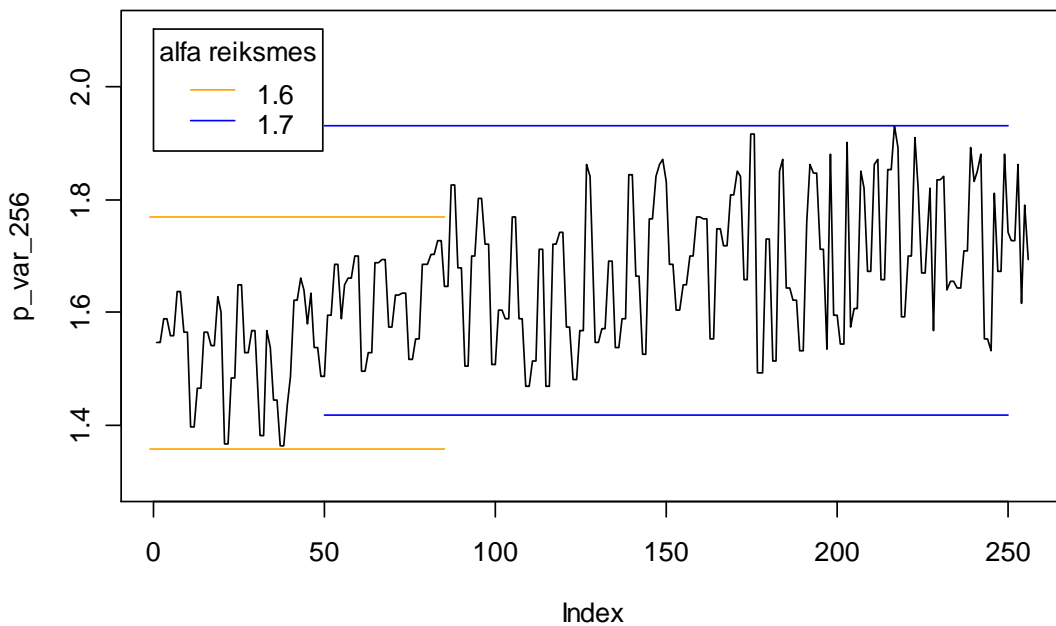
Didinant segmentų skaičių iki 64, p-variacijos indekso kintamumas didėja. Vidutinė indekso reikšmė išliko panaši 1.66, tačiau standartinis nuokrypis išaugo iki 0.116. Pirmuose 15-oje

segmentų bendra indekso reikšmė 1.5 remiantis trupmeninio Brauno judesio pasikliautinaisiais intervalais, o α -stabilaus proceso 1.6. Likusioje dalyje bendroji reikšmė 1.7. Šiuo atveju kiekvieno segmento ilgis yra 147 tūkstančiai, todėl 15 segmentų apima maždaug 220 tūkstančių įrašų. Tiek įrašų buvo padaryta maždaug per pirmus du metų mėnesius, kada prekyba biržoje buvo vangi.

Padalinus imtį į 256 segmentus, kurių kiekvieno ilgis lygus 3684, gavome, p-variacijos indekso kitimą, pavaizduotą (5 ir 6 pav.) Vidutinė p-variacijos indekso reikšmė lieka panaši (1.667), standartinis nuokrypis dar išauga iki 0.122. Dabar segmentus galima sukaidyti į keturias grupes pagal trupmeninio Brauno judesio pasikliautinuosius intervalus. Iš grafiko aiškiai matyti p-variacijos indekso didėjimo tendencija. Pradžioje jo reikšmė patenka į 1.5 pasikliautinąjį intervalą, o pabaigoje į 1.8. Remiantis α -stabilaus proceso pasikliautinaisiais intervalais, p-variacijos indekso reikšmė varijuoja ties dviem reikšmėm: 1.6 ir 1.7, kadangi intervalai yra platesni.



5.pav. p-variacijos indekso kintamumas laike, kai imtis suskaidyta į 256 segmentų, darant prielaidą jog tai trupmeninis Brauno judesys



6.pav. *p*-variacijos indekso kintamumas laike, kai imtis suskaidyta į 256 segmentų, darant prielaidą jog tai α -stabilus procesas

Pažvelgus į akcijos kainos procesą galima išvelgti, jog kainos kintamumas pirmus tris mėnesius yra mažesnis nei likusioje dalyje. Didesnį kainos kintamumą atitinka didesmė *p*-variacijos indekso reikšmė. Todėl gauti rezultatai analizuojant jo kintamumą laike neprieštarauja pirminiam išpūdžiui.

Galimybė rinkoje nerizikuojant gauti teigiamą pelną vadinama arbitražu. Arbitražo nebuvimas rinkoje yra pagrindinė pusiausvyros sąlyga finansų matematikoje. Tokią situaciją galima pailsiutruoti pavyzdžiu. Iš kelių strategijų, investuotojas pasirinks tą, kuri leis jam nerizikuojant užsitikrinti pelną. Priklausomai nuo rinkos situacijos ir nuo pasiūlos ir paklausos pusiausvyros, kaina tokio instrumento iškart išaugs, o tai reiškia, kad ji nėra pusiausvyroje. Štai todėl arbitražo nebuvimas rinkoje yra minimalus reikalavimas įkainojimo modeliams.

Rinkoje, kurioje Hursto eksponentė lygi 0.5 nėra arbitražo galimybės (D.M. Salopek 1998). *p*-variacijos indekso reikšmė 1.65 lygi 0.6 Hursto eksponentės reikšmei. Nors ji reikšmingai skiriasi nuo 0.5, tačiau matosi mažėjimo tendencija. Šiuo atveju negalima būtų atmesti arbitražo egzistavimo rinkoje galimybės, tačiau galima, teigti, jog prieauglių koreliuotumas mažėja ir rinkos efektyvumas didėja.

IŠVADOS

Darbe ištirtos p-variacijos indekso, skaičiuojamo remiantis osciliacijų sumos seka $1/m$ žingsnių intervalo skaidymo principu, tiesinės regresijos liekanos. Vertinant indeksą pilnai imčiai liekanos yra koreliuotos ir heteroskedastiškos. Išmetus pirmus 22% narių ir pritaikius ARMA struktūrą – nekoreliuotos bet heteroskedastiškos. Išmetus 32% ir 45% pirmų narių tenkina visas tiesinės regresijos liekanų prielaidas.

Rezultatai apibendrinti Monte Carlo procedūra. Mažesnis įverčio poslinkis, sumažinus osciliacijų imtį, gautas, kai p-variacijos reikšmė mažesnė nei 1.5. Didėjant reikšmei, imties mažinimas didina poslinkį.

Remiantis gautais rezultatais, sukonstruoti pasikliautiniai intervalai simetriniam α stabiliam procesui ir trupmeniniam Brauno judesiui kiekvienai p – variacijos reikšmei iš aibės {1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.0}. Gauta, jog α stabilaus proceso intervalai yra platesni.

Buvo ištirtas prancūzų įmonės „Vallourec“ akcijų kainos procesas prie abiejų prielaidų. Nagrinėtoje imtyje, suskaidžius ją į maždaug vienos dienos intervalus, gauta, jog indeksas kinta nuo 1.6 iki 1.7 prie α stabilaus proceso prielaidos ir nuo 1.5 iki 1.8 prie trupmeninio Brauno judesio prielaidos. Nors p-variacijos indeksas mažesnis nei 2, jo didėjimas reiškia rinkos efektyvumo išaugimą.

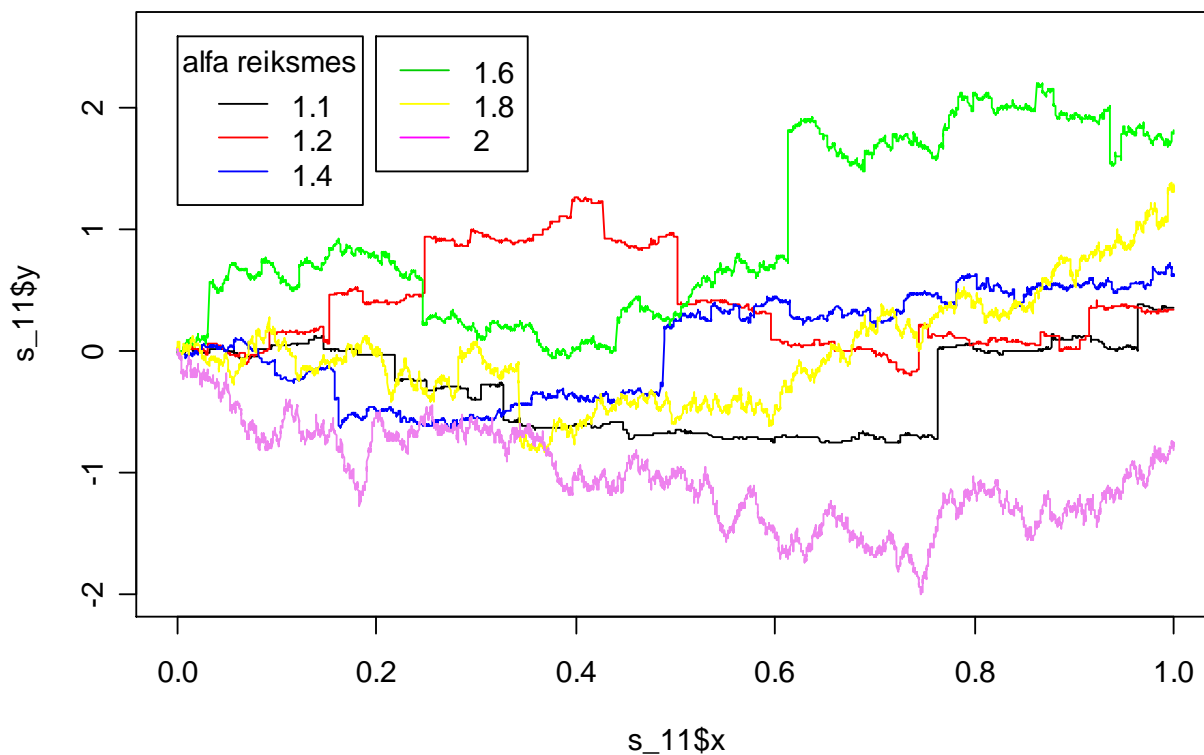
LITERATŪRA IR ŠALTINIAI

1. J.Batten and C. Ellis. *Scaling Foreign Exchange Volatility*. University of Western Sydney.
2. John Y. Campbell, Andrew W. Lo ir A. Craig MacKinlay. *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Prss:New Jersey, 1997
3. R.Cont and P.Tankov. *Financial Modelling With Jump Processes*. *CRC Press, (Chapman & Hall/Crc Financial Mathematics Series) 2004*.
4. R.M.Crownover. *Introduction to Fractals and Chaos*. Tones and Bartlett Publisher, London,U.K. (1995)
5. F. Hunt. Error analysis and convergence of capacity dimension algorithms. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1990, psl. 307 - 321
6. K.Falconer. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley and Sons.1990
7. Janicki and A. Weron. Can One See alpha-Stable Variables and Processes? *statistical Science*, Vol. 9, No. 1 (Feb., 1994), psl. 109-126
8. B. Mandelbrot, The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, XXXVI A963, 1963, psl. 392 417.
9. B. Mandelbrot, and J. Van Ness, Fractional Brownian motion, fractional noises and applications, *SIAM Review*, 1968, psl. 422 437.
10. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*. Freeman: San Francisco, 1982.
11. R.Norvaiša and D.M.Salopek, „Estimating the Orey Index of a Gaussian Stochastic process with Stationary Increments:An application to financial data set“, *in Stochastic Models,Proc.Int.Conf.*, Ottawa, Canada, June 10-13,1998,(L.G. Gorostiza and B.G.Ivanoff,eds),Canadian Maths. Soc., Conference Proceedings, vol.26 psl 353-374, (2000).

12. R.Norvaiša and D.M.Salopek, „Estimating the p-variation index of a sample function: An application to financial data set“, *Methodology and Computing in Applied Probability* **4**, 27-53 (2002).
13. D.M.Salopek, „Tolerance to Arbitrage“, *Stoch.Proc.Appl.*76, psl 217-230 (1998)
14. C.C. Taylor and S.J. Taylor. Estimating the dimension of fractal *J. R. Statist. Soc. B* 53 353–64 1989
15. C.G.Turvey. Does Ordinary or Fractional Brownian Motion. Describe Agricultural Commodity Futures Prices? 2001

PRIEDAI

alfa-stabiliojo proceso trajektorijos



1.1 pav. alfa-stabiliam proceso trajektorijos.

Dependent Variable: DIODIC_TREND

Method: Least Squares

Date: 05/19/08 Time: 22:46

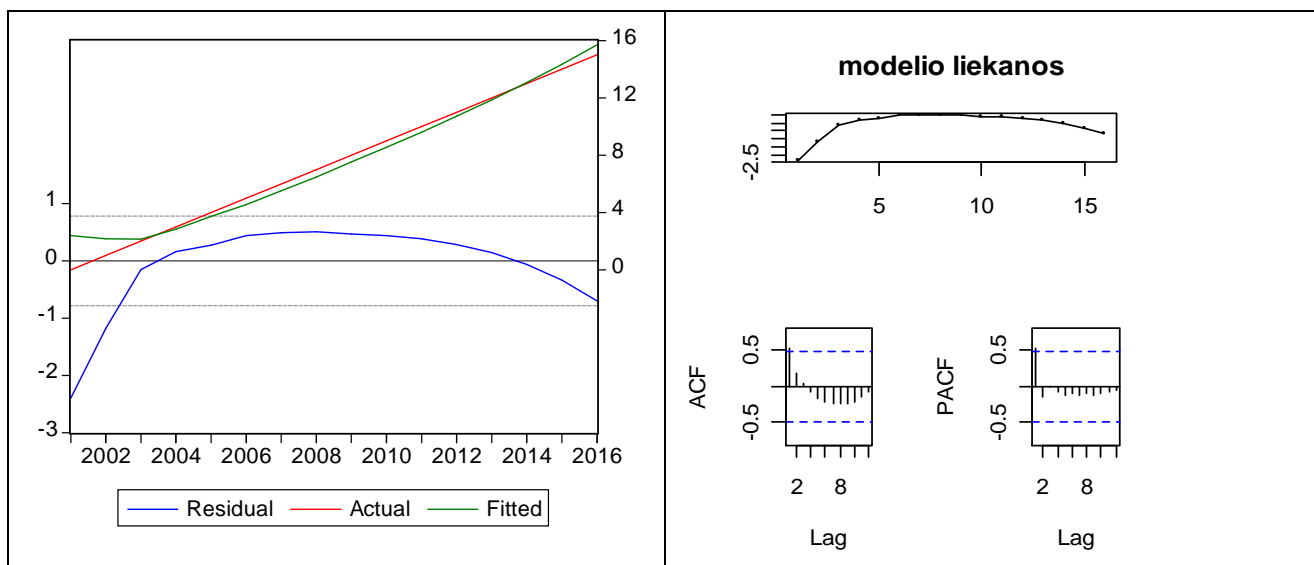
Sample (adjusted): 2001 2016

Included observations: 16 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Stat	Prob.
DIODIC_SERIJ	1.712291	0.074660	22.934	0.0000
C	0.697858	0.393807	1.7720	0.0981

R-squared	0.974073	Mean dep var	8.50000
Adj R-squared	0.972222	S.D. dep var	4.76095
S.E. of regression	0.793501	Akaike inf criterion	2.49174
Sum squared resid	8.815012	Schwarz criterion	2.58831
Log likelihood	-17.93396	F-statistic	525.987
DW stat	0.344140	Prob(F-statistic)	0.00000

1.1 lentelė. Dvejetainio imties skaidymo metodo p -variacijos indekso, vertinto alfa-stabiliam procesui regresijos rezultatai



1.2 pav. Dvejetainio imties skaidymo metodo p -variacijos indekso, vertinto alfa-stabiliam procesui regresijos liekanų grafikai

Testas	Nulinė hipotezė	Testo statistika	p-reikšmė	Nulinė hipotezė ... (5% r.l.)
Jarque-Bera	Liekanos normaliosios	9.16	0.012	atmetama
t testas	Vidurkis lygus nuliui	0.07	0.941	neatmetama
ADF (su trendu ir konstanta)	Eilutė nestacionari	Trendas nereikšmingas		neatmetama
ADF (su konstanta)	Eilutė nestacionari		0.99	neatmetama
Breusch-Godfrey (LM) (lag = 2)	Liekanos nekoreliuotos	11.98	0.001	atmetama
ARCH LM (lag = 3)	Liekanų kvadratai nekoreliuoti	8.987	0.011	atmetama
White (besąlyginis)	Liekanos homoskedastiškos	3.25	0.2015	neatmetama
White (sąlyginis)	Liekanos homoskedastiškos	3.204	0.2015	neatmetama

1.2 lentelė Dvejetainio imties skaidymo metodo p -variacijos indekso, vertinto alfa-stabiliam procesui regresijos liekanų diagnostinių testų rezultatai

Testas	Nulinė hipotezė	Testo statistika	p-reikšmė	Nulinė hipotezė ... (5% r.l.)
Jarque-Bera	Liekanos normaliosios	87.49	0.000	atmetama
t testas	Vidurkis lygus nuliui	0.00	0.99	priimama
ADF (su trendu ir konstanta)	Eilutė nestacionari	-7.598	0.000	atmetama
ADF (su konstanta)	Eilutė nestacionari	-3.2183	0.025	neatmetama
Breusch-Godfrey (LM)	Liekanos nekoreliuotos	136.00	0.000	atmetama
ARCH LM	Liekanų kvadratai nekoreliuoti	86.65	0.000	atmetama
White (besąlyginis)	Liekanos homoskedastiškos	149.64	0.000	atmetama
White (sąlyginis)	Liekanos homoskedastiškos	149.64	0.000	atmetama

1.3 lentelė $1/m$ žingsnio imties skaidymo metodo p -variacijos indekso, vertinto alfa-stabiliam procesui pilnos imties regresijos liekanų diagnostinių testų rezultatai

Testas	Nulinė hipotezė	Testo statistika	Kritinė reikšmė	p-reikšmė	Nulinė hipotezė ... (5% r.l.)
ADF (su trendu ir konstanta)	Eilutė nestacionari	-5.76	-3.4	0.000	atmetama
PP (su trendu ir konstanta)	Eilutė nestacionari	-12.19	-3.4	0.000	atmetama

1.4 lentelė 1/m žingsnio imties skaidymo metodo p-variacijos indekso, vertinto alfa-stabiliam procesui regresijos liekanų stacionarumo testų rezultatai

Testas	Nulinė hipotezė	Be pirmų 50 narių	Be pirmų 70 narių	Be pirmų 100 narių
Jarque-Bera	Liekanos normaliosios	7.77(0.02)	0.14 (0.92)	3.465(0.58)
ADF (su konstanta)	Eilutė nestacionari	nereikšminga	nereikšminga	nereikšminga
ADF	Eilutė nestacionari	-12.9(0.0)	-13.04 (0.00)	-11.8 (0.00)
Breusch-Godfrey (LM) (lag =)	Liekanos nekoreliuotos	2.9 (0.23)	0.29 (0.86)	0.007 (0.998)
ARCH LM (lag =)	Liekanų kvadratai nekoreliuoti	1.26(0.26)	0.21 (0.64)	1.388(0.32)
White (besąlyginis)	Liekanos homoskedastiškos	17.09 (0.00)	4.28 (0.11)	3.32(0.18)
White (sąlyginis)	Liekanos homoskedastiškos	17.09 (0.00)	4.28 (0.11)	3.56(0.165)
Shapiro-Wilk	Liekanos normalios	0.99(0.29)	0.99(0.95)	0.992(0.64)

1.5 lentelė 1/m žingsnio imties skaidymo metodo p-variacijos indekso, vertinto alfa-stabiliam procesui regresijos liekanų diagnostinių testų rezultatai

Testas	50	70	100
R kvadratas	0.99	0.99	0.99
Standartinė regresijos paklaida	0.027	0.0235	0.023
Liekanų kvadratų suma	0.1397	0.092	0.073
Tikėtinumo santykio	416.04	397.47	329.7
Durbin_watson	1.81	1.984	1.992
Akaike kriterijus	-4.34	-4.64	-4.70
Schwarz kriterijus	-4.29	-4.58	-4.64
F-statistika	47765	37061(0.00)	17085(0.00)

1.6 lentelė 1/m žingsnio imties skaidymo metodo p-variacijos indekso, vertinto alfa-stabiliam procesui regresijos modelio diagnostinių testų rezultatai

Testas	Nulinė hipotezė	Testo statistika	p-reikšmė	Nulinė hipotezė ... (5% r.l.)
Jarque-Bera	Liekanos normaliosios	3015	0.000	atmetama
ADF (su trendu ir konstanta)	Eilutė nestacionari			Trendas nereikšmingas
ADF (su konstanta)	Eilutė nestacionari	-2.98	0.036	neatmetama
Breusch-Godfrey (LM) (lag =)	Liekanos nekoreliuotos	1.19	0.55	neatmetama
ARCH LM (lag =)	Liekanų kvadratai nekoreliuoti	2.4	0.12	neatmetama
White (besąlyginis)	Liekanos homoskedastiškos	84.4	0.000	atmetama
White (sąlyginis)	Liekanos homoskedastiškos	84.4	0.000	atmetama

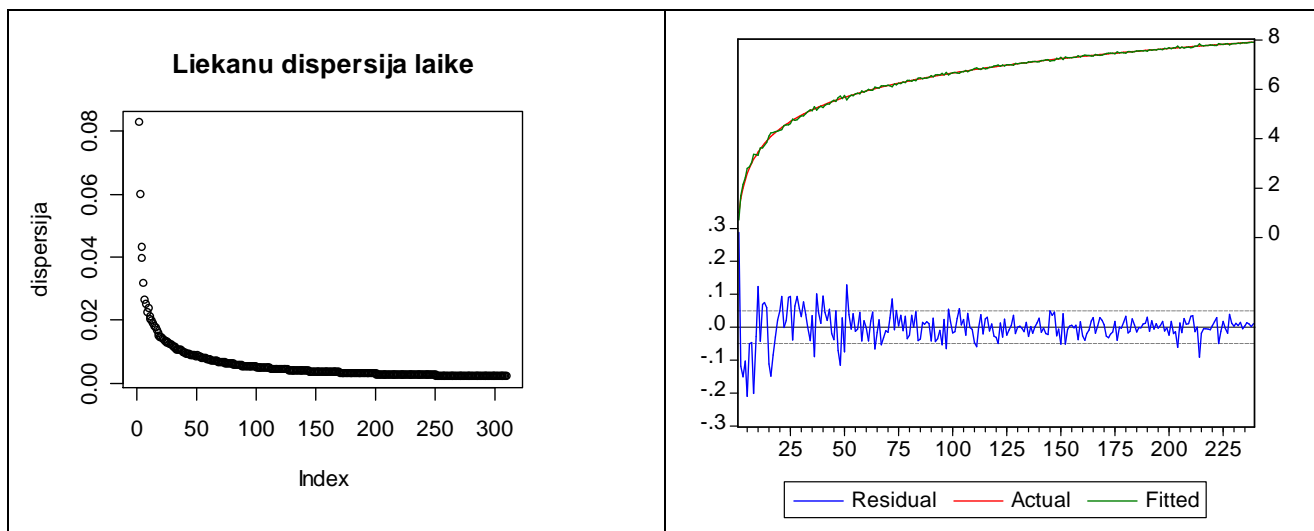
1.7 lentelė 1/m žingsnio imties skaidymo metodo p-variacijos indekso, vertinto trupmeniniam Brauno judesio procesui pilnos imties regresijos liekanų diagnostinių testų rezultatai

Testas	50	70	100
R kvadratas	0.99	0.99	0.99
Standartinė regresijos paklaida	0.027	0.025	0.024
Liekanų kvadratų suma	0.137	0.109	0.085
Tikėtimumo santykio	417.67	383.64	320.84
Durbin_watson	1.725	1.804	1.77
Akaike kriterijus	-4.37	-4.48	-4.55
Schwarz kriterijus	-4.34	-4.45	-4.512
F-statistika	97715	63350	29193

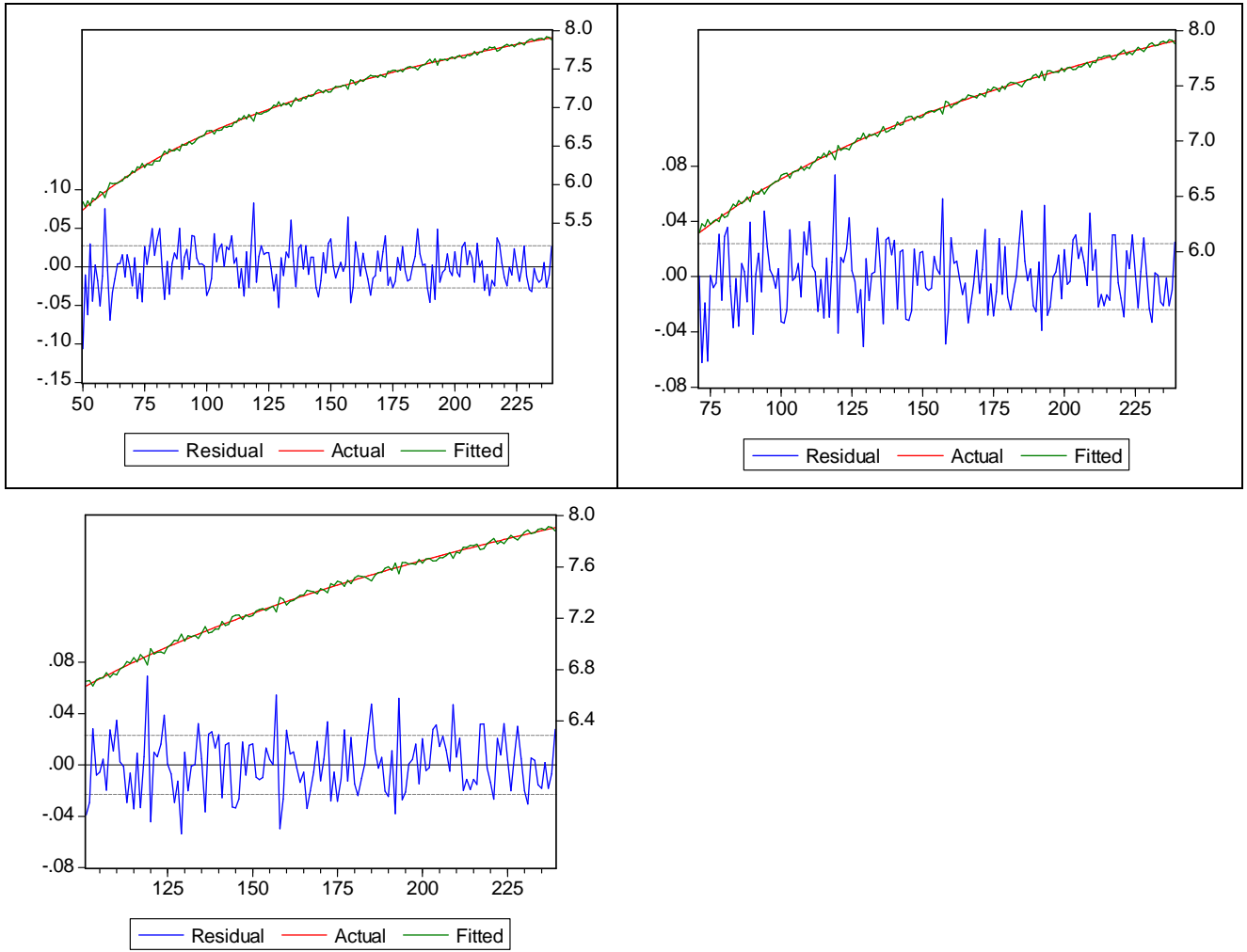
1.8 lentelė 1/m žingsnio imties skaidymo metodo p-variacijos indekso, vertinto trupmeniniam Brauno judesio procesui regresijos modelio adekvatumo diagnostinių testų rezultatai

Testas	Nulinė hipotezė	50	70	100
Jarque-Bera	Liekanos normaliosios	0.106(0.94)	0.45(0.79)	0.68(0.7)
ADF (su konstanta)	Eilutė nestacionari	nereikšminga	nereikšminga	nereikšminga
ADF	Eilutė nestacionari	-12.2(0.00)	-11.95(0.00)	-10.48 (0.00)
Breusch-Godfrey (LM)	Liekanos nekoreliuotos	3.80 (0.14)	1.19(0.27)	3.11(0.21)
ARCH LM	Liekianų kvadratai nekoreliuoti	1.88(1.16)	0.36(0.54)	0.83(0.36)
White (besąlyginis)	Liekanos homoskedastiškos	13.99(0.00)	5.38(0.07)	4.17(0.12)
White (sąlyginis)	Liekanos homoskedastiškos	13.99(0.00)	5.38(0.07)	4.17(0.12)
Shapiro-Wilk	Liekanos normalios	0.99(0.99)	0.99(0.99)	0.99(0.83)

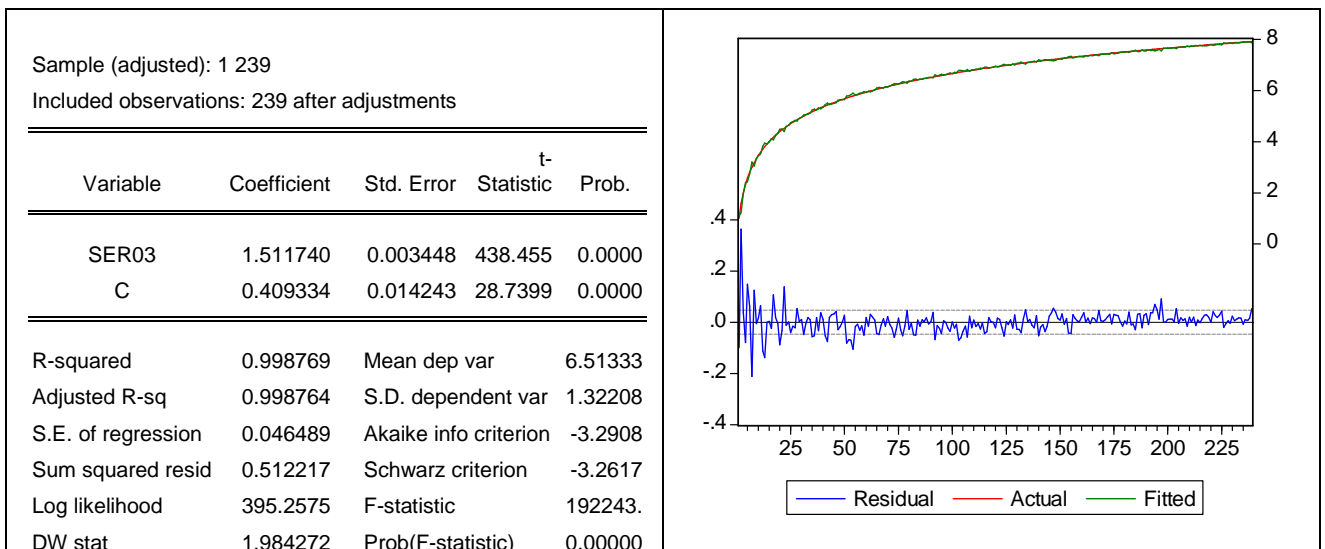
1.9 lentelė 1/m žingsnio imties skaidymo metodo p-variacijos indekso, vertinto trupmeniniam Brauno judesio procesui regresijos liekanų diagnostinių testų rezultatai



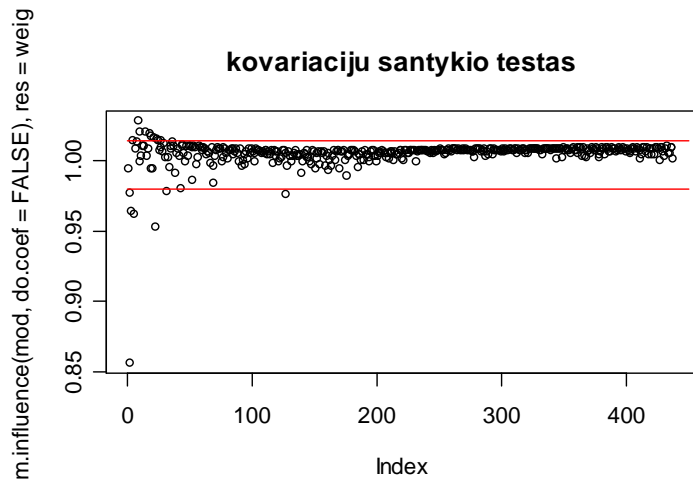
1.3pav. 1/m žingsnio imties skaidymo metodo p-variacijos indekso, vertinto alfa-stabiliam procesui pilnos osciliacijų sekos regresijos liekanų grafikai



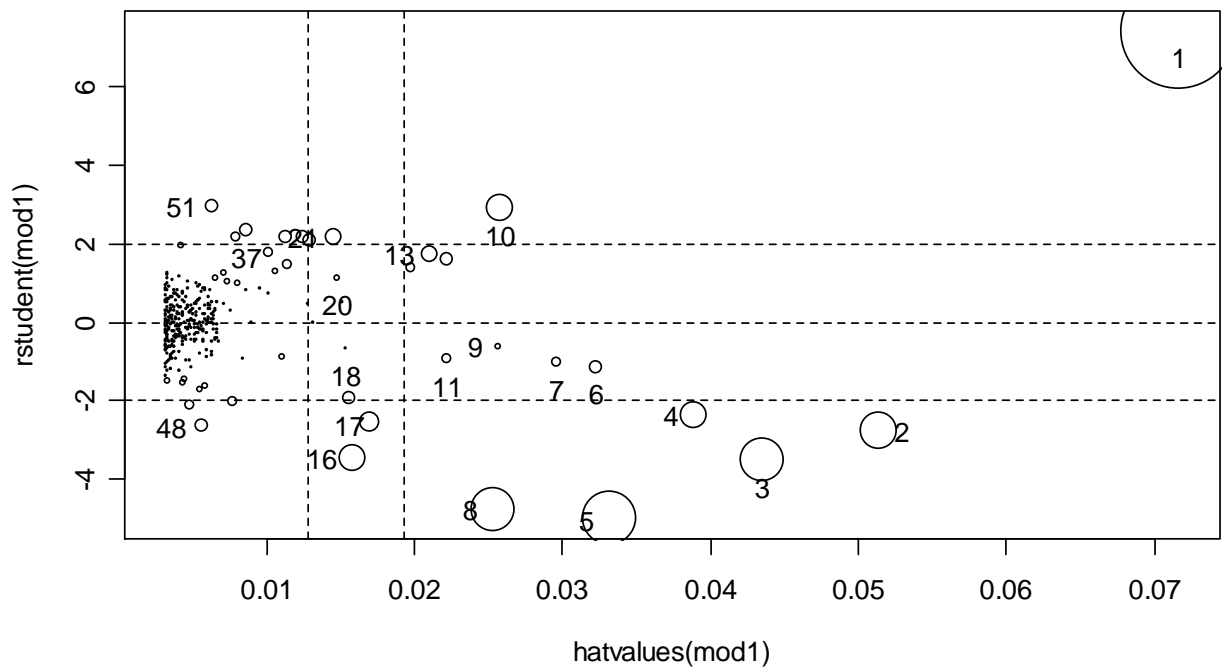
1.4 pav. $1/m$ žingsnio imties skaidymo metodo p -variacijos indekso, vertinto alfa-stabiliam procesui regresijos be pirmų 50,70 ir 100 narių liekanų grafikai



1.10 lentelė $1/m$ žingsnio imties skaidymo metodo p -variacijos indekso, vertinto trupmeniniam Brauno judesio procesui regresijos rezultatai liekanų grafikas



1.5 pav. Kovariacijų santykio grafikas



1.6 pav. Studentizuotų liekanų ir jų įtakos, matuojamos Cook'o atstumu grafikas

a	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
Vidurkis	1.25	1.32	1.39	1.46	1.538	1.587	1.677	1.75	1.81	1.89
Poslinkis	0.15	0.12	0.09	0.06	0.082	-0.033	-0.033	-0.05	-0.09	-0.11
SD	0.12	0.11	0.12	0.12	0.119	0.13	0.11	0.11	0.15	0.09
MSE	0.036	0.028	0.024	0.019	0.016	0.017	0.014	0.012	0.014	0.013

a	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
Vidurkis	1.21	1.29	1.35	1.42	1.51	1.59	1.65	1.74	1.81	1.88
Poslinkis	0.11	0.09	0.05	0.02	0.01	-0.01	-0.05	-0.06	-0.09	-0.11
SD	0.08	0.083	0.093	0.096	0.092	0.095	0.088	0.072	0.073	0.068
MSE	0.019	0.014	0.011	0.009	0.008	0.009	0.0099	0.0095	0.014	0.018

a	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
Vidurkis	1.21	1.266	1.34	1.41	1.49	1.523	1.62	1.72	1.78	1.86
Poslinkis	0.11	0.066	0.04	0.01	-0.01	-0.077	-0.08	-0.08	-0.11	-0.14
SD	0.077	0.085	0.089	0.092	0.088	0.09	0.0838	0.068	0.068	0.057
MSE	0.017	0.012	0.010	0.008	0.007	0.0096	0.009	0.012	0.015	0.021

a	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
Vidurkis	1.18	1.26	1.33	1.39	1.48	1.52	1.61	1.71	1.77	1.84
Poslinkis	0.08	0.06	0.03	-0.01	-0.02	-0.08	-0.09	-0.09	-0.13	-0.16
SD	0.074	0.081	0.085	0.088	0.083	0.086	0.072	0.064	0.063	0.054
MSE	0.015	0.013	0.0086	0.007	0.0072	0.0097	0.010	0.011	0.018	0.025

1.11 lentelė 1/m žingsnio imties skaidymo metodo p-variacijos indekso, vertinto alfa-stabiliam procesui Monte Carlo procedūros rezultatai, pilnai osciliacijų sekai, ir kai iš jos pašalinta 50,70 ir 100 pirmų narių

1/H	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
Vidurkis	1.126	1.217	1.31	1.41	1.49	1.58	1.647	1.738	1.812	1.89
Poslinkis	0.026	0.017	0.01	0.01	-0.01	-0.02	-0.053	-0.082	-0.088	-0.11
SD	0.07	0.075	0.745	0.084	0.088	0.089	0.078	0.099	0.099	0.1026
MSE	0.0053	0.006	0.005	0.007	0.008	0.01	0.0104	0.0159	0.0212	0.0310

50

1/H	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
Vidurkis	1.1148	1.2023	1.298	1.39	1.473	1.572	1.61	1.7	1.80	1.86
Poslinkis	0.0148	0.0023	-0.002	-0.01	-0.027	-0.028	-0.09	-0.1	-0.1	-0.14
SD	0.051	0.0515	0.05	0.056	0.059	0.054	0.057	0.06	0.059	0.070
MSE	0.0028	0.0026	0.0026	0.0036	0.0047	0.0098	0.0136	0.019	0.0252	0.052

70

1/H	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
Vidurkis	1.113	1.2009	1.296	1.392	1.467	1.5681	1.60	1.69	1.79	1.84
Poslinkis	0.013	0.009	-0.004	-0.008	-0.033	-0.032	-0.1	-0.11	-0.11	-0.16
SD	0.05	0.049	0.047	0.052	0.055	0.05	0.0548	0.057	0.055	0.068
MSE	0.0026	0.0024	0.0024	0.0035	0.0048	0.010	0.0147	0.0208	0.027	0.059

100

1/H	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
Vidurkis	1.118	1.197	1.294	1.375	1.451	1.56	1.59	1.66	1.785	1.804
Poslinkis	0.012	-0.003	-0.006	-0.025	-0.049	-0.04	-0.11	-0.14	-0.115	-0.2
SD	0.047	0.046	0.044	0.047	0.0496	0.047	0.051	0.053	0.0506	0.065
MSE	0.0025	0.002	0.0023	0.004	0.0048	0.012	0.0176	0.0248	0.034	0.071

1.12 lentelė 1/m žingsnio imties skaidymo metodo p-variacijos indekso, vertinto trupmeninio Brauno judesio procesui Monte Carlo procedūros rezultatai, pilnai osciliacijų sekai, ir kai iš jos pašalinta 50,70 ir 100 pirmų narių