VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro darbas

Optimalaus dividendų barjero vertinimas
Methods for estimating the optimal dividend barrier

Giedrė Tamulytė

VILNIUS 2008

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
Matematinės analizės KATEDRA

Darbo vadovas Lekt. Kęstutis Liubinskas ____________
(Vadovo pareigos, vardas, pavardė) (parašas)

Darbas apgintas __2008 m. gegužės mėn. 29 d.________
Gynimo posėdžio protokolo Nr. ____________________
Darbas įvertintas ________________________

Registravimo Nr. _______________
2008-05-20 ______________________________

TURINYS

Anotacija

Nagrinėjant situaciją, kai draudimo kompanija moka dividendus akcininkams pagal barjero strategiją su parametru *b*, iškyla sunkumų nustatant optimalų dividendų barjerą. Dažnai individualių žalų dydžių skirstinys nežinomas, tačiau galime tikėtis kelių pirmųjų momentų įverčių. Šiame darbe nagrinėjami metodai, kurie leidžia žinant kelis pirmuosius momentus rasti optimalų dividendų barjerą. Šiam tikslui nagrinėjamos De Vylderio aproksimacijos bei difuzinės aproksimacijos. Pasirinktiems skirstiniams pritaikius De Vylderio A, De Vylderio B bei Vynerio, I eilės ir II eilės difuzines aproksimacijas, gaunami optimalūs dividendų barjerai. Gauti rezultatai palyginami su tiksliomis optimalių dividendų barjerų reikšmėmis.

Rezume

In the financial management of insurance companies and other financial systems an important aspect are dividends. Consider the situation dividends are paid to the shareholders of the insurance company according to barrier strategy with parameter *b.* In practical situations complete information about the individual claim amount distribution is often not known and the company faces the difficulty in finding the optimal dividend barrier.

Model of an insurance company is defined in such way: the premiums of a company are received at rate *c*, the agregate claims process $\{S(t)\}$ is a compound Poisson process with Poisson parameter λ, and the probability density function of an individual claim amount is denoted by *p(y)*, *y*>0. In the following, the moment of an individual claim amount distribution of order *k* will be denoted as p_k, *k*=1, 2, 3,....

Often when complete information about the individual claim amount distribution is not known, estimates for the first few moments of this distribution are available. For such a situation, in this paper methods for estimating the optimal dividend barrier are examined. De Vylder A approximation requires knowledge of p_1, p_2 and p_3, De Vylder B requires knowledge of p_1 and p_2. Wiener approximation requires knowledge of the same information as De Vylder B, while the diffusion approximation of order *k* requires knowledge of $p_1, p_2, ..., p_{k+2}$.

In order to illustrate the approximation methods for several claim amount distributions De Vylder A, De Vylder B, Wiener, I order and II order approximations are applied. The approximate values are compared with the exact values. From the obtained results we can note, that approximations which use third moment of the claim amount distribution are more accurate than that which use second moment. The diffusion approximation of order 2 also uses the fourth moment. In some cases it provides better results than De Vylder A and always better results than diffusion approximation of order 1.

Įvadas

Praeityje aproksimacijos buvo būtinos, nes be kompiuterinės įrangos tikslūs skaičiavimai praktiškai buvo neįmanomi arba užimdavo labai daug laiko. Dabar, turint galingą kompiuterinę įrangą, iškyla kitokios problemos: tiksliems skaičiavimams reikalingas modelis ir atitinkami parametrai, tačiau net jei modelis atrodo pakankamai pagrįstas, ne visada esame tikri dėl parametrų. Tokiu atveju aproksimacijos, kurios nereikalauja pilno duomenų rinkinio, yra puiki alternatyva.

Kalbant apie draudimo kompanijas, jų pajamų bei išlaidų valdymą, vienas iš dažnai pastaruoju metu nagrinėjamų klausimų yra dividendai ir dividendų strategijos. Šiame darbe nagrinėjama situacija, kai draudimo kompanija dividendus moka pagal pasirinktą barjero strategiją su parametru b ir ieškoma optimalaus barjero b^*.

Pagrindiniai ir svarbiausi duomenys draudimo kompanijos modelyje (kolektyvinės rizikos modelyje) yra premijų gavimo greitis c, Puasono parametras λ, žymintis žalų dažnį, ir individualios žalos dydžio tankio funkcija $p(y)$, $y>0$. Daugelyje praktinių situacijų neturime pilnos ir detalios informacijos apie individualių žalų dydžių skirstinį, geriausiu atveju žinome kelis pirmuosius šio skirstinio momentus. Darbe nagrinėjami optimalaus dividendų barjero b^* vertinimo metodai, kai žinomi keli pirmieji momentai. Toliau individualių žalų dydžių skirstinio k-tąjį momentą žymėsime p_k, k=1, 2, 3,....

Pagrindinis darbo tikslas – išsiaiškinti optimalaus dividendų barjero vertinimo metodus, juos pritaikyti konkretiems skirtiniams, palyginti gautus rezultatus. Nagrinėjamos dvi De Vylderio aproksimacijos ir trys difuzinės aproksimacijos. De Vylderio A aproksimacijai reikalingi pirmieji trys momentai p_1, p_2 ir p_3, tuo tarpu De Vylderio B pakanka žinoti p_1 ir p_2. Pagrindinei difuzinei aproksimacijai, dar vadinamai Vynerio aproksimacija, taip pat pakanka pirmų dviejų momentų p_1 ir p_2. Atitinkamai k-tosios eilės difuzinei aproksimacijai reikalingi $p_1, p_2, ..., p_{k+2}$ momentai.

Pasirinkti trys skirstiniai: dviejų eksponentinių skirstinių mišinys, gama skirstinys bei išsigimęs skirstinys, kai žalų dydis lygus 1. Norint gauti optimalių dividendų barjerų reikšmes, kai žalų dydžiai pasiskirstę pagal šiuos skirstinius, kiekvienam iš šių skirstinių taikytos 5 aproksimacijos: De Vylderio A, De Vylderio B, Vynerio, I eilės difuzinė bei II eilės difuzinė. Visi aproksimacijų skaičiavimai buvo atlikti su Maple. Palyginimui buvo suskaičiuotos ir tikslios optimalaus dividendų barjero reikšmės. Gauti rezultatai parodė, kad, kaip ir buvo galima tikėtis, aproksimacijos, kurioms reikalingi pirmieji trys momentai (De Vylderio A ir I eilės difuzinė), duoda geresnį rezultatą nei aproksimacijos su dviem pirmaisiais momentais (De Vylderio B ir Vynerio difuzinė). Kai žinomas ketvirtasis momentas ir taikoma II eilės difuzinė aproksimacija, gauname, kad ji daugeliu atvejų duoda geresnį rezultatą nei De Vylderio A ar I eilės difuzinė aproksimacija.

1. Pradinis modelis

Nagrinėjama draudimo kompanija, kuri įmokas gauna pastoviu greičiu *c*, bendrų žalų procesas $\{S(t)\}$ yra sudėtinis Puasono procesas su Puasono parametru $\lambda > 0,$ o individualių žalų dydžių tankio funkcija *p(y), y*>0.

Kai nėra mokami dividendai, draudimo kompanijos perviršis (arba laisvieji rezervai) laiko momentu *t* apibrėžiamas:

$$U(t) = u + ct - S(t),$$

čia $u \geq 0$ yra pradinis perviršis, *ct* per laiko intervalą (0,*t*) gautos įmokos, o $S(t)$ - to paties laikotarpio bendros žalos. Laikoma, kad $c > \lambda p_1,$ t.y. įmokos, gautos per laiko vienetą, viršija išmokas per laiko vienetą, čia p_1 žalų dydžių vidurkis. Tuomet saugumo priemoka θ apibrėžiama lygybe $c = (1+\theta)\lambda p_1,$

$$\theta = \frac{c}{\lambda p_1} - 1, \quad \theta > 0.$$

Draudimo kompanija pasirenka strategiją, pagal kurią akcininkams mokami dividendai. Tegu *D(t)* yra per laikotarpį (0,*t*) išmokėti dividendai. Tuomet perviršį laiko momentu *t* apibrėžiame naujai:

$$U(t) = u + ct - S(t) - D(t),$$

o bankroto momentas apibrėžiamas kaip

$$T = \inf\{t : U(t) < 0\}.$$

Dividendų strategija, kuri maksimizuoja visų iki bankroto momento išmokėtų dividendų tikėtiną dabartinę vertę, yra optimali. T.y. reikia maksimizuoti $\int_0^T \exp(-\delta t) dD(t),$ dividendų tikėtiną dabartinę vertę iki momento *T*, čia $\delta > 0$ yra palūkanų galia.

Toliau nagrinėjama barjero strategija, kuri apibrėžiama taip: kai taikoma barjero strategija su parametru *b*, dividendai nemokami, kol $U(t) < b.$ Kai $U(t) = b,$ dividendai mokami greičiu *c*. Laikysime, kad $U(0) = x \leq b,$ t.y. pradinis perviršis neviršija pasirinkto barjero *b*. Pažymėkime $V(x,b),\ 0 \leq x \leq b,$ kai *x* – pradinis perviršis, dividendų iki bankroto tikėtiną dabartinę vertę, kai taikoma barjero strategija su parametru *b*. Norėdami rasti $V(x,b),$ taikome faktorizacijos formulę (iš [3]):

$$V(x,b)=\frac{h(x)}{h'(b)},\ 0\le x\le b. \tag{1}$$

h(x) yra teigiama didėjanti funkcija, integralinės – diferencialinės lygties sprendinys:

$$ch'(x)-(\lambda+\delta)h(x)+\lambda\int_0^x h(x-y)p(y)dy=0, \qquad x>0. \tag{2}$$

Pažymėkime b^* optimalią dividendų barjero *b* reikšmę. Norėdami rasti optimalų dividendų barjerą, turime rasti tokia dividendų barjero *b* reikšmę b^*, kuri maksimizuoja $V(x,b)$ arba, kaip matome iš (1) lygybės, minimizuoja $h'(b).$ Jei $b^*>0,$ ji tenkina sąlygą $h''(b^*)=0.$

Naudodami Laplaso transformaciją galime išspręsti (2) lygtį. Žymėkime $\hat{f}(\xi)=\int_0^\infty \exp(-\xi x)f(x)dx$ funkcijos $f(x),\ x>0$ Laplaso transformaciją. Tuomet gauname:

$$c\int_0^\infty \exp(-\xi x)\frac{d}{dx}h(x)dx-(\lambda+\delta)\int_0^\infty \exp(-\xi x)h(x)dx+\lambda\int_0^\infty \exp(-\xi x)\int_0^x h(x-y)p(y)dydx=0,$$

$$c\left[-h(0)+\xi\hat{h}(\xi)\right]-(\lambda+\delta)\hat{h}(\xi)+\lambda\hat{h}(\xi)\hat{p}(\xi)=0.$$

Iš čia

$$\hat{h}(\xi)=\frac{ch(0)}{c\xi-(\lambda+\delta)+\lambda\hat{p}(\xi)},$$

vardiklyje esanti funkcija

$$L(\xi)=c\xi-(\lambda+\delta)+\lambda\hat{p}(\xi)$$

vadinama Lundbergo funkcija. Tuomet gauname paprastą $\hat{h}(\xi)$ išraišką:

$$\hat{h}(\xi)=\frac{ch(0)}{L(\xi)}. \tag{3}$$

Fundamentalioji Lundbergo lygtis $L(\xi)=0$ turi teigiamą sprendinį ρ ir neigiamą sprendinį, kuris žymimas –*R*. Jie bus svarbūs skaičiuojant optimalų dividendų barjerą.

Pastaba. Kai $\delta=0,$ lygtis (2) yra klasikinė išgyvenimo tikimybės integralinė diferencialinė lygtis [4]. Kai $\delta>0,$ ryšys su išgyvenimo tikimybe išlieka. Imkime funkciją

$$\tilde{h}(x)=\exp(-\rho x)h(x). \tag{4}$$

Iš (2) lygties ir $L(\rho)=0$ gauname, kad $\tilde{h}(x)$ tenkina lygtį

$$\tilde{c}\tilde{h}'(x) - \lambda\tilde{h}(x) + \lambda\int_0^x \tilde{h}(x-y)\tilde{p}(y)dy = 0, \quad (5)$$

čia

$$\tilde{c} = \frac{c}{\hat{p}(\rho)},$$

$$\tilde{p}(y) = \exp(-\rho y)\frac{p(y)}{\hat{p}(\rho)}.$$

Pastebime, kad (5) lygtis vėl yra klasikinė išgyvenimo tikimybės integralinė – diferencialinė lygtis. Galime tikėtis, kad tais atvejais, kai išgyvenimo tikimybė turi išreikštinę formą, funkciją $h(x)$ taip pat galėsime išsireikšti.

2. Tikslus sprendinys

Nagrinėkime atvejį, kai p(y) yra eksponentinių tankio funkcijų mišinys:

$$p(y) = \sum_{i=1}^{n} A_i\beta_i \exp(-\beta_i y).$$

Čia $0 < \beta_1 < \beta_2 < ... < \beta_n$, $A_i > 0$ ir $A_1 + A_2 + ... + A_n = 1$.

Tankio funkcijai taikome Laplaso transformaciją:

$$\hat{p}(\xi) = \int_0^\infty \exp(\xi y)\sum_{i=1}^{n} A_i\beta_i \exp(-\beta_i y)dy = \sum_{i=1}^{n} A_i\beta_i \int_0^\infty \exp(-(\beta_i + \xi)y)dy = \sum_{i=1}^{n}\frac{A_i\beta_i}{\beta_i + \xi}.$$

Turime lygtį:

$$c\left[-h(0) + \xi\hat{h}(\xi)\right] - (\lambda + \delta)\hat{h}(\xi) + \lambda\hat{h}(\xi)\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i\beta_i}{\beta_i + \xi} = 0.$$

Iš čia

$$\hat{h}(\xi) = \frac{ch(0)}{c\xi - (\lambda + \delta) + \lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i\beta_i}{\beta_i + \xi}}$$

ir Lundbergo funkcija

$$L(\xi) = c\xi - (\lambda + \delta) + \lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i\beta_i}{\beta_i + \xi}.$$

Tuomet fundamentalioji Lundbergo lygtis

$$\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i\beta_i}{\beta_i + \xi} = \lambda + \delta - c\xi. \quad (6)$$

(6) lygtis turi lygiai $n+1$ sprendinį $\rho_0,\ \rho_1,...,\rho_n$ kur $-\beta_n < \rho_n < ... < -\beta_1 < \rho_1 < 0 < \rho_0$, be to, čia $\rho_0 = \rho$ ir $\rho_1 = R$. Iš čia išplaukia, kad $\hat{h}(\xi)$ yra racionali funkcija. Jos nuliai yra $-\beta_1,...-\beta_n$, o jos poliai $\rho_0,\ \rho_1,...,\rho_n$. Kadangi $\hat{p}(\xi) \to 0$, kai $\xi \to \infty$, matome, kad $\xi\,\hat{h}(\xi) \to h(0)$, kai $\xi \to \infty$. Tada turime

$$\hat{h}(\xi) = \frac{h(0)\prod_{i=1}^{n}(\xi + \beta_i)}{\prod_{k=0}^{n}(\xi + \rho_k)}. \tag{7}$$

Dalinių trupmenų metodu gauname

$$\hat{h}(\xi) = h(0)\sum_{k=0}^{n} C_k \frac{1}{\xi - \rho_k}, \tag{8}$$

tuomet

$$h(x) = h(0)\sum_{k=0}^{n} C_k \exp(\rho_k x), \quad x > 0. \tag{9}$$

Koeficientus $C_0,...,\ C_n$ gauname dalindami (7) ir (8) lygybes iš $(\xi - \rho_k)$ ir pakeisdami $\xi = \rho_k$. Gauname

$$C_k = \frac{\prod_{i=1}^{n}(\rho_k + \beta_i)}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{n}(\rho_k - \rho_l)}. \tag{10}$$

Specialiu eksponentinės tankio funkcijos atveju (kai $n = 1,\ \beta_1 = \beta$), fundamentalioji Lundbergo lygtis

$$\lambda \frac{\beta}{\beta + \xi} = \lambda + \delta - c\xi$$

tampa kvadratine lygtimi

$$c\xi^2 + \left[c\beta - (\lambda + \delta)\right]\xi - \beta\delta = 0, \tag{11}$$

kurios sprendiniai $\rho_0 = \rho > 0,\ \rho_1 = R < 0.$

Tuomet funkcija $h(x)$ lygi

$$h(x) = (\beta + \rho)\exp(\rho x) - (\beta - R)\exp(-Rx).$$

Iš sąlygos $h''(b^*) = 0$ gauname optimalų dividendų barjerą b^***:**

$$b^* = \frac{1}{R + \rho}\ln\frac{(\beta - R)R^2}{(\beta + \rho)\rho^2}. \tag{12}$$

Jei šis skaičius neigiamas, optimalus dividendų barjeras bus lygus 0.

Pastabos. (1) Dar vienas būdas gauti (8) ir (9) reiškinių koeficientus $C_0, \dots, C_n$ yra sulyginti (3) ir (8) lygybes. Tuomet gauname

$$\sum_{k=0}^{n} C_k \frac{1}{\xi - \rho_k} = \frac{c}{L(\xi)}.$$

Padalinę šią lygybę iš $(\xi - \rho_j)$, kai ξ artėja į ρ_j, gauname

$$C_j = \frac{c}{L'(\rho_j)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

(2) Formulės (9) ir (10) teisingos ir bendresniu atveju, kai $p(y)$ yra eksponentinių tankio funkcijų kombinacija, šiuo atveju kai kurie A_i gali būti neigiami.

3. Asimptotinės formulės

Funkcijos $h(x)$ asimptotinį elgesį apibrėžia formulė [1]

$$h(x) \sim \frac{ch(0)}{L'(\rho)} \exp(\rho x) + \frac{ch(0)}{L'(-R)} \exp(-Rx) \quad \text{kai } x \to \infty. \tag{13}$$

Čia ρ ir $-R$ yra fundamentaliosios Lundbergo lygties sprendiniai. (4) funkcija $\tilde{h}(x)$ turi baigtinę ribą, kai $x \to \infty$. Tuomet iš (13) gauname aproksimaciją:

$$h''(x) \approx \frac{ch(0)\rho^2}{L'(\rho)} \exp(\rho x) + \frac{ch(0)R^2}{L'(-R)} \exp(-Rx) \text{ dideliems } x.$$

Iš sąlygos $h''(b^*) = 0$ gauname

$$\frac{\rho^2}{L'(\rho)} \exp(\rho b^*) + \frac{R^2}{L'(-R)} \exp(-Rb^*) = 0,$$

taigi, optimalus dividendų barjeras

$$b^* \approx \frac{1}{R+\rho} \ln \frac{L'(\rho) R^2}{-L'(-R)\rho^2}. \tag{14}$$

4.De Vylderio aproksimacijos

4.1. De Vylderio A aproksimacija

Aproksimacijos idėja yra pakeisti pradinį modelį į modelį su eksponentiniais žalų dydžiais ir tuomet pritaikyti optimalaus dividendų barjero formulę [5]. Turime pradinį modelį su parametrais $c, \lambda, p(y)$. Taikant De Vylderio A aproksimaciją pakanka žinoti žalų dydžio skirstinio pirmuosius tris momentus. Parametrus c, λ pakeičiame atitinkamai $\tilde{c}, \tilde{\lambda}$, o tankio funkcija $p(y)$ pakeičiama eksponentine tankio funkcija $\beta \exp(-\beta y)$. Parametrai $\tilde{c}, \tilde{\lambda}, \beta$ parenkami taip, kad sutaptų proceso $\{ct - S(t)\}$ pirmieji trys momentai (per laiko vienetą). Iš čia gauname lygtis:

$$c - \lambda p_1 = \tilde{c} - \frac{\tilde{\lambda}}{\beta},$$

$$\lambda p_2 = 2\frac{\tilde{\lambda}}{\beta^2},$$

$$\lambda p_3 = 6\frac{\tilde{\lambda}}{\beta^3}.$$

Išsprendę lygtis, turime:

$$\beta = 3\frac{p_2}{p_1},$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{9}{2}\lambda\frac{p_2^3}{p_3^2},$$

$$\tilde{c} = c - \lambda p_1 + \frac{3}{2}\lambda\frac{p_2^2}{p_3}, \tag{15}$$

čia p_1, p_2, p_3 atitinkami momentai.

Su naujaisiais parametrais sprendžiame fundamentaliąją Lundbergo lygtį, kuri šiuo atveju sutampa su (11) lygtimi su atitinkamais parametrais:

$$\tilde{c}\xi^2 + \left[\tilde{c}\beta - (\tilde{\lambda} + \delta)\right]\xi - \beta\delta = 0.$$

Gauname 2 sprendinius $\rho > 0$ ir $-R < 0$, tuomet, remiantis (12) lygybe, optimalus dividendų barjeras b^* bus

$$b^* \approx \frac{1}{R + \rho}\ln\frac{(\beta - R)R^2}{(\beta + \rho)\rho^2}.$$

4.2. De Vylderio B aproksimacija

De Vylderio B aproksimacijos idėja panaši į prieš tai pateiktą De Vylderio A aproksimaciją, šiuo atveju pakanka žinoti žalų dydžių skirstinio pirmuosius du momentus. Pradiniame modelyje parametras λ pakeičiamas $\bar{\lambda}$, o $p(y)$ pakeičiamas į $\bar{\beta}\exp(-\bar{\beta}y)$ [5]. Parametrai $\bar{\lambda}$ ir $\bar{\beta}$

parenkami tokie, kad sutaptų bendrų žalų proceso $\{S(t)\}$ pirmieji du momentai, o įmokų gavimo greitis c nekeičiamas. Tuomet:

$$\lambda p_1 = \frac{\overline{\lambda}}{\overline{\beta}},$$

$$\lambda p_2 = 2\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\beta}^2}.$$

Išsprendę lygtis gauname:

$$\overline{\beta} = 2\frac{p_1}{p_2},$$

$$\overline{\lambda} = 2\frac{p_1^2}{p_2}\lambda.$$

Kaip ir De Vylderio A aproksimacijos atveju, sprendžiam fundamentaliąją Lundbergo lygtį su atitinkamais parametrais:

$$c\xi^2 + \left[c\overline{\beta} - (\overline{\lambda} + \delta)\right]\xi - \overline{\beta}\delta = 0.$$

Gavę sprendinius $\rho > 0$ ir $-R < 0,$ galime skaičiuoti optimalų dividendų barjerą b^*:

$$b^* \approx \frac{1}{R+\rho}\ln\frac{(\overline{\beta} - R)R^2}{(\overline{\beta} + \rho)\rho^2}.$$

5. Difuzinės aproksimacijos

5.1. Vynerio difuzinė aproksimacija

Šios aproksimacijos idėja yra pakeisti pradinį modelį Vynerio procesu [6] su parametrais

$$\mu = c - \lambda p_1$$

ir

$$\sigma^2 = \lambda p_2.$$

Vynerio aproksimacijai pakanka pirmų dviejų žalų dydžių skirstinio momentų p_1 ir p_2.

Kai $0 \le x \le b,$ tikėtina diskontuota dividendų iki bankroto vertė:

$$V_0(x;b) = \frac{h_0(x)}{h_0'(b)},$$

$$h_0(x) = \exp(rx) - \exp(sx), \tag{16}$$

čia $r > 0$ ir $s < 0$ yra kvadratinės lygties sprendiniai:

$$\frac{\sigma^2}{2}\xi^2 + \mu\xi - \delta = 0.$$

Iš sąlygos $h_0''(b_0^*) = 0$ gauname optimalų dividendų barjerą b_0^*:

$$b_0^* = \frac{1}{r-s}\ln\frac{s^2}{r^2}. \qquad (17)$$

5.2. I ir aukštesnių eilių difuzinės aproksimacijos

I eilės difuzinei aproksimacijai reikalingi pirmieji trys žalų dydžių skirstinio momentai p_1, p_2 ir p_3, *k*-tosios eilės aproksimacijai būtina žinoti $p_1,\ p_2,\ ...,\ p_{k+2}$.

Sakykime, kad $m > 0$, tuomet sudėtinis Puasono modelis aprašomas parametrais $\lambda(m),\ p(y;\ m)$ ir $c(m)$ [5]. Čia tankio funkcija

$$p(y;\ m) = \frac{1}{m}\,p\left(\frac{y}{m}\right),\quad y > 0,$$

naujas vidurkis lygus $p_1 m.$ Tuomet $\lambda(m)$ ir $c(m)$ apibrėžiami taip, kad sutaptų du pirmieji žalų dydžių skirstinio momentai:

$$c(m) - \lambda(m)\,p_1 m = \mu,$$

$$\lambda(m)\,p_2 m^2 = \sigma^2.$$

Iš čia gaunam $\lambda(m)$ ir $c(m)$ išraiškas:

$$\lambda(m) = \frac{1}{m^2}\frac{\sigma^2}{p_2},$$

$$c(m) = \mu + \frac{1}{m}\frac{\sigma^2 p_1}{p_2}. \qquad (18)$$

Tegu $h(x;\ m)$ žymi šiame modelyje pagalbinę funkciją, o $b^*(m)$ - optimalių dividendų barjerą. Kai $m \to 0,$ gauname Vynerio difuzinės aproksimacijos atveju aprašytą modelį. Taigi, pagrindinė idėja išskleisti $h(x;\ m)$ ir $b^*(m)$ *m* laipsniais:

$$h(x;\ m) = h_0(x) + mg(x) + ... \qquad (19)$$

čia $h_0(x)$ yra (16) funkcija, o $g(x)$ išraiška pateikiama toliau.

Iš (19) išraiškos ir sąlygų $h_0''(b_0^*) = 0$, $h''(b^*(m);\ m) = 0$ gauname optimalų dividendų barjerą:

$$b^*(m) = b_0^* - m\frac{g''(b_0^*)}{h_0'''(b_0^*)} + \dots \ . \tag{20}$$

Apibrėšime funkciją $g(x)$. Remiantis (3) lygtimi, funkcijos $h(x;\ m)$ Laplaso transformacija bus

$$\hat{h}(\xi;\ m) = \frac{c(m)h(0;\ m)}{L(\xi;\ m)}, \tag{21}$$

Čia $L(\xi;\ m)$ - Lundbergo funkcija:

$$L(\xi;\ m) = c(m)\xi - \left[\lambda(m) + \delta\right] + \lambda(m)\,\hat{p}(\xi;\ m).$$

$p(y;\ m)$ pritaikę Laplaso transformaciją, tankio funkciją galime užrašyti:

$$\hat{p}(\xi;\ m) = \hat{p}(\xi m) = 1 - mp_1\xi + \frac{1}{2}m^2p_2\xi^2 - \frac{1}{6}m^3p_3\xi^3 + \dots \tag{22}$$

Naudodami pastarąją lygybę ir (18) išraiškas, gauname Lundbergo funkciją:

$$L(\xi;\ m) = (\mu + \frac{1}{m}\frac{\sigma^2p_1}{p_2})\xi - \left[\frac{1}{m^2}\frac{\sigma^2}{p_2} + \delta\right] + \frac{1}{m^2}\frac{\sigma^2}{p_2}\left(1 - mp_1\xi + \frac{1}{2}m^2p_2\xi^2 - \frac{1}{6}m^3p_3\xi^3 + \dots\right) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2}\xi^2 + \mu\xi - \delta - \frac{1}{6}m\frac{\sigma^2p_3}{p_2}\xi^3 + \dots$$

$$= \frac{\sigma^2}{2}\left(\xi - r\right)\left(\xi - s\right) - \frac{1}{6}m\frac{\sigma^2p_3}{p_2}\xi^3 + \dots . \tag{23}$$

Pasirenkame $h(0;\ m) = \dfrac{2(r-s)}{\sigma^2c(m)}$, tuomet iš (21) ir (23) gauname

$$\hat{h}(\xi;\ m) = \frac{r-s}{(\xi - r)(\xi - r) - \frac{1}{3}m\frac{p_3}{p_2}\xi^3 + \dots}$$

$$= \frac{r-s}{(\xi - r)(\xi - r)} + m\frac{\frac{1}{3}\frac{p_3}{p_2}(r-s)\xi^3}{(\xi - r)^2(\xi - r)^2} + \dots .$$

(19) formulė dabar gali būti gaunama skaičiuojant atvirkštinę Laplaso transformaciją.

Pastebime, kad

$$\frac{r-s}{(\xi - r)(\xi - r)} = \frac{1}{(\xi - r)} - \frac{1}{(\xi - s)} \tag{23}$$

ir (23) atvirkštinė Laplaso transformacija tuomet sutampa su (16) funkcija (arba (19) dešinės pusės pirmuoju dėmeniu).

Norėdami rasti (19) dešinės pusės antrąjį dėmenį, matome, kad

$$\frac{(r-s)\xi^3}{(\xi-r)^2(\xi-r)^2} = \frac{r^3}{r-s}\frac{1}{(\xi-r)^2} + \frac{(r-3s)r^2}{(r-s)^2}\frac{1}{\xi-r}$$

$$-\frac{s^3}{s-r}\frac{1}{(\xi-s)^2} - \frac{(s-3r)s^2}{(r-s)^2}\frac{1}{\xi-s}.$$

Iš čia gauname, kad

$$g(x) = \frac{1}{3}\frac{p_3}{p_2}\left[\frac{r^3}{r-s}x\exp(rx) + \frac{(r-3s)r^2}{(r-s)^2}\exp(rx)\right.$$

$$\left.-\frac{s^3}{s-r}x\exp(sx) - \frac{(s-3r)s^2}{(r-s)^2}\exp(sx)\right].$$

5.3. Kitas difuzinės aproksimacijos gavimo būdas

Norėdami taikyti (13) ir (14) formules, turime tiksliai žinoti žalų dydžių skirstinį, tačiau praktikoje dažniausiai tai neįmanoma. Remdamiesi prieš tai aprašyta modelių šeima su parametru m>0, iš (13) ir (14) formulių gauname aproksimacijas:

$$h(x;\ m) \approx \frac{c(m)h(0;\ m)}{L'(\rho(m);\ m)}\exp(\rho(m)x) + \frac{c(m)h(0;\ m)}{L'(-R(m);\ m)}\exp(-R(m)x),$$

$$b^*(m) \approx \frac{1}{R(m)+\rho(m)}\ln\frac{L'(\rho(m);\ m)R(m)^2}{-L'(-R(m);\ m)\rho(m)^2}, \qquad (25)$$

čia $\lambda(m)$, $c(m)$, $\hat{p}(\xi;\ m)$ tokie patys, kaip prieš tai skyrelyje, $\rho(m)>0$ ir $-R(m)<0$ yra fundamentaliosios Lundbergo lygties $L(\xi;\ \mathrm{m})=0$ sprendiniai.

Pagrindinė mintis išlieka tokia pati kaip ir prieš tai buvusiame skyrelyje – išskleisti (25) formulės dešinę pusę m laipsniais. Kadangi $\rho(m)$ ir $-R(m)$ yra (23) funkcijos nuliai, galime užrašyti:

$$\rho(m) = r + m\frac{1}{3}\frac{p_3}{p_2}\frac{r^3}{r-s} + \ldots,$$

$$-R(m) = \mathrm{s} + m\frac{1}{3}\frac{p_3}{p_2}\frac{s^3}{s-r} + \ldots. \qquad (26)$$

Diferencijuodami (23) funkciją, gauname:

$$L'(\xi;\ m) = \frac{\sigma^2}{2}\left[\left(\xi-s\right)+\left(\xi-r\right)-m\frac{p_3}{p_2}\xi^2+\ldots\right].$$

Iš pastarosios lygybės ir (26) išraiškų gauname:

$$L'(\rho(m);\ m)=\frac{\sigma^2}{2}\left[r-s+m\frac{2}{3}\frac{p_3}{p_2}\frac{r^3}{r-s}-m\frac{p_3}{p_2}r^2+...\right]$$

ir

$$L'(-R(m);\ m)=\frac{\sigma^2}{2}\left[s-r+m\frac{2}{3}\frac{p_3}{p_2}\frac{s^3}{s-r}-m\frac{p_3}{p_2}s^2+...\right].$$

Pastarąsias funkcijos $L'(\xi;\ m)$ išraiškas ir (26) sprendinių reikšmes įstatę į (25), gauname I eilės optimalaus dividendų barjero difuzinę aproksimaciją:

$$b^*(m)\approx b_0^*-m\Delta_1, \tag{26}$$

čia

$$b_0^*=\frac{1}{r-s}\ln\frac{s^2}{r^2},$$

$$\Delta_1=\frac{1}{3}\frac{p_3}{p_2}\frac{r^3+s^3}{(r-s)^2}b_0^*+\frac{1}{3}\frac{p_3}{p_2}\frac{3r^2-2rs+3s^2}{(r-s)^2}.$$

II eilės $b^*(m)$ aproksimacija:

$$b^*(m)\approx b_0^*-m\Delta_1+m^2\Delta_2, \tag{27}$$

čia b_0^* ir Δ_1 tie patys,

$$\Delta_2=\frac{1}{6}\frac{p_4}{p_2}\frac{(r-s)(2r^2-3rs+2s^2)}{(r-s)^2}-\frac{1}{18}\frac{p_3^2}{p_2^2}\frac{(r-s)(r^2-4rs+5s^2)}{(r-s)^4}$$
$$+\left[\frac{1}{12}\frac{p_4}{p_2}\frac{r^4+s^4}{(r-s)^2}-\frac{1}{9}\frac{p_3^2}{p_2^2}\frac{r^6-3r^5s-2r^3s^3-rs^5+s^6}{(r-s)^4}\right]b_0^*.$$

6. Aproksimacijų taikymas

6.1.Eksponentinių skirstinių mišinys

6.1.1 Asimptotinė formulė

Anksčiau aprašytas aproksimacijas pritaikysime atvejui, kai žalų dydžių skirstinys aprašomas dviejų eksponentinių skirstinių mišiniu, šiuo atveju tankis:

$$p(y)=\frac{1}{6}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)+\frac{4}{3}\exp\left(-2y\right).$$

Šio skirstinio momentų generuojanti funkcija:

$$M_X(t)=\int_0^\infty \exp(tx)\left(\frac{1}{3}\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)+\frac{2}{3}2\exp(-2x)\right)dx=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}-t\right)^{-1}+\frac{4}{3}(2-t)^{-1},\ t<\frac{1}{2}.$$

Suskaičiavę atitinkamos eilės momentų generuojančios funkcijos išvestines taške 0, gauname tolesniems skaičiavimams reikalingus momentus:

$p_1=1;$

$p_2=3;$

$p_3=16{,}5;$

$p_4=129.$

Pirmiausia, remdamiesi asimptotinėmis fomulėmis (13) ir (14), rasime tikslias optimalaus dividendų barjero b^* reikšmes.

Skaičiuojame mišinio tankio Laplaso transformaciją:

$$with(inttrans):$$
$$laplace\left(p(y)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\exp\left(-\frac{y}{2}\right)+\frac{2}{3}\cdot 2\cdot\exp(-2\cdot y),y,\xi\right)$$
$$laplace(p(y),y,\xi)=\frac{3\xi+2}{(2\xi+1)(\xi+2)}$$

Tuomet Lundbergo funkcija:

$$L(\xi)=(1+\theta)\lambda p_1\xi-(\lambda+\delta)+\lambda\frac{2+3\xi}{(1+2\xi)(2+\xi)}.$$

Padaliname iš λ ir, kadangi $p_1=1$, gauname:

$$\frac{L(\xi)}{\lambda}=(1+\theta)\xi-(1+\frac{\delta}{\lambda})+\frac{2+3\xi}{(1+2\xi)(2+\xi)}\ \text{arba}$$

$$> L:=(\xi,\theta,s)\to\left((1+\theta)\cdot\xi-(1+s)+\frac{(2+3\cdot\xi)}{(2+5\cdot\xi+2\cdot(\xi\hat{}2))}\right)$$
$$(\xi,\theta,s)\to\xi(1+\theta)-1-s+\frac{2+3\xi}{2+5\xi+2\xi^2}$$

čia $s=\frac{\lambda}{\delta}$.

Diferencijuojame Lundbergo funkciją pagal ξ:

$$> l:=diff(L(\xi,\theta,s),\xi)$$
$$1+\theta+\frac{3}{2+5\xi+2\xi^2}-\frac{(2+3\xi)(5+4\xi)}{(2+5\xi+2\xi^2)^2}$$

Lundbergo funkcijos išvestinė taške ξ:

$$l(\xi):=1+\theta+\frac{3}{2+5\xi+2\xi^2}-\frac{(2+3\xi)(5+4\xi)}{(2+5\xi+2\xi^2)^2}$$

Sprendžiame fundamentaliąją Lundbergo lygtį $L(\xi)=0$:

```
> LS := (ξ, θ, s) → (2·(1 + θ)·ξ^3 + ((1 + θ)·5 − 2 − 2·s)·ξ^2
        + (2·(1 + θ) − 2 − 5·s)·ξ − 2·s)
```

$$(\xi, \theta, s) \rightarrow (2 + 2\,\theta)\,\xi^3 + (3 + 5\,\theta - 2\,s)\,\xi^2 + (2\,\theta - 5\,s)\,\xi - 2\,s$$

Pasirinkę parametrus $\theta = 0.1$, s=0.001, gauname sprendinius:

```
> s := 0.001
0.001
θ := 0.1
0.1
sprLS := solve(LS(ξ, θ, s), ξ)
0.008845155498, −0.06709883775, −1.53174631
sprLS[1]
0.00884515549
sprLS[2]
−0.0670988377
```

čia sprLS$[1] = \rho_0 = \rho$, sprLS$[2] = \rho_1 = -R$.

Suskaičiuojame Lundbergo funkcijos išvestinės reikšmes šiuose taškuose:

```
> l(sprLS[1])
0.12590457
l(sprLS[2])
−.14622472
```

Tuomet optimalus dividendų barjeras $b^* \approx \dfrac{1}{R+\rho}\ln\dfrac{L'(\rho)R^2}{-L'(-R)\rho^2}$:

$$> \; b := \frac{1}{(sprLS[1] - sprLS[2])}\ln\left(\frac{(l(sprLS[1])\cdot(sprLS[2])\text{^}2)}{(-1)\cdot\, l(sprLS[2])\cdot sprLS[1]\text{^}2}\right)$$

$$51.3927834$$

Keisdami parametrą θ intervale [0,1;1,5], o santykį pasirinkę fiksuotą: $\dfrac{\delta}{\lambda} = 0,001$, gauname 1 lentelėje pateiktus duomenis.

Kitu atveju fiksuojame $\theta = 0,2$, o santykį $\dfrac{\delta}{\lambda}$ keičiame intervale [0,00001;0,01], gauti duomenys pateikiami 2 lentelėje.

6.1.2. De Vylderio aproksimacijos

Bendru De Vylderio A aproksimacijos atveju fundamentalioji Lundbergo lygtis yra $\tilde{c}\xi^2 + \left[\tilde{c}\beta - (\tilde{\lambda} + \delta)\right]\xi - \beta\delta = 0$.

Įstatę (15) reikšmes ir padalinę pastarąją lygtį iš λ turime:

$$\left(\theta p_1+\frac{3}{2}\frac{p_2^2}{p_3}\right)\xi^2+\left(\theta p_1-\frac{\delta}{\lambda}\right)\xi-3\frac{p_2}{p_3}\frac{\delta}{\lambda}=0$$

arba su Maple:

$$> DA := (\theta, a, b, c, s) \to \left(\left(\theta\cdot a+\frac{3}{2}\cdot\frac{(a\hat{}2)}{c}\right)\xi\hat{}2+\left(\frac{\theta\cdot a\cdot 3\cdot b}{c}-s\right)\cdot\xi-\frac{3\cdot b}{c}\cdot s\right)$$

$$(\theta, a, b, c, s)\to\left(\theta\, a+\frac{3}{2}\frac{a^2}{c}\right)\xi^2+\left(\frac{3\,\theta\, a\, b}{c}-s\right)\xi-\frac{3\, b\, s}{c}$$

čia *a*, *b*, *c* atitinkamai žymi žalų dydžių skirstinio momentus p_1, p_2, p_3.

Įrašę žinomas reikšmes $a = p_1 = 1$; $b = p_2 = 3$; $c = p_3 = 16{,}5$ ir pasirinkę parametrus $\theta = 0.1$,

$s=\dfrac{\lambda}{\delta}=0.001$, sprendžiame Lundbergo lygtį:

$> a := 1$

1

$b := 3$

3

$c := 16.5$

16.5

$s := 0.001$

0.001

$\theta := 0.1$

0.1

$sprDA := solve(DA(\theta, a, b, c, s), \xi)$

0.00984143772, −.290317628

$sprDA[1]$

0.00984143772

$sprDA[2]$

−.290317628

čia $\text{sprDA}[1]=\rho$, $\text{sprDA}[2]=-R$.

Tuomet optimalus dividendų barjeras $b^*\approx\dfrac{1}{R+\rho}\ln\dfrac{(\beta-R)R^2}{(\beta+\rho)\rho^2}$:

$$> bA := \frac{1}{(-sprDA[2]+sprDA[1])}\ln\left(\left(\left(\frac{3\cdot b}{c}+sprDA[2]\right)\cdot(sprDA[2])\hat{}2\right)\Big/\left(\left(\frac{3\cdot b}{c}+sprDA[1]\right)\cdot(sprDA[1])\hat{}2\right)\right)$$

51.4028976

Keisdami θ ir *s* reikšmes anksčiau aprašytu būdu, gauname 1 ir 2 lentelėse pateiktus duomenis.

De Vylderio B aproksimacijos atveju pakanka pirmų dviejų žalų dydžių skirstinio momentų p_1 ir p_2. Čia fundamentalioji Lundbergo lygtis atrodys taip:

$$(1+\theta)p_1\xi^2+\left(\theta\frac{p_1^2}{p_2}-\frac{\delta}{\lambda}\right)\xi-2\frac{p_1}{p_2}\frac{\delta}{\lambda}=0$$

arba su Maple

> $DB := (\theta, a, b, s) \rightarrow \left((1+\theta)\cdot a\cdot\xi\text{^}2+\left(\frac{2\cdot\theta\cdot a\text{^}2}{b}-s\right)\cdot\xi - \frac{2\cdot a\cdot s}{b}\right)$

$$(\theta, a, b, s) \rightarrow (1+\theta)\, a\, \xi^2 + \left(\frac{2\,\theta\, a^2}{b} - s\right)\xi - \frac{2\, s\, a}{b}$$

Kaip ir prieš tai, įrašę reikiamus momentus bei pasirinkę parametrus $\theta = 1$, $s = 0.001$, sprendžiame Lundbergo lygtį:

> $a := 1$

1

$b := 3$

3

$s := 0.001$

0.001

$\theta := 0.1$

0.1

$sprDB := solve(DB(\theta, a, b, s), \xi)$

0.008842504462, −0.0685394741

$sprDB[1]$

0.00884250446

$sprDB[2]$

−0.0685394741

Gauti sprendiniai atitinka teigiamą ir neigiamą Lundbergo lygties sprendinius: $\text{sprDB}[1] = \rho$, $\text{sprDB}[2] = -R$. Tuomet optimalus dividendų barjeras $b^* \approx \frac{1}{R+\rho}\ln\frac{(\bar{\beta}-R)R^2}{(\bar{\beta}+\rho)\rho^2}$:

> $bD := \frac{1}{(-sprDB[2]+sprDB[1])}\ln\left(\left(\left(\frac{2\cdot a}{b}+sprDB[2]\right)\cdot(sprDB[2])\text{^}2\right) \middle/ \left(\left(\frac{2\cdot a}{b}+sprDB[1]\right)\cdot(sprDB[1])\text{^}2\right)\right)$

51.3558345

Toliau, keisdami θ ir s reikšmes anksčiau aprašytu būdu, gauname 1 ir 2 lentelėse pateiktus duomenis.

6.1.3. Difuzinės aproksimacijos

Vynerio aproksimacijos atveju, kaip ir De Vylderio B aproksimacijai, reikalingi pirmieji du žalų dydžių skirstinio momentai p_1 ir p_2, tačiau, kaip vėliau matysime, gaunami rezultatai gerokai prastesni. Sprendžiame kvadratinę lygtį:

$$\frac{\sigma^2}{2}\xi^2+\mu\xi-\delta=0.$$

Pakeitę parametrus $\mu=c-\lambda p_1$ ir $\sigma^2=\lambda p_2$, gauname:

$$\frac{p_2}{2}\xi^2+\theta p_1\xi-\frac{\delta}{\lambda}=0$$

arba

> $V := (\theta, a, b, s) \rightarrow \left(\frac{b}{2}\cdot(\xi\text{^}2)+\theta\cdot a\cdot\xi-s\right)$

$$(\theta, a, b, s) \rightarrow \frac{1}{2}\,b\,\xi^2+\theta\,a\,\xi-s$$

Įrašę žinomus momentus ir pasirinkę parametrus θ ir s, sprendžiame kvadratinę lygtį:

> $a := 1$

1

$b := 3$

3

$s := 0.001$

0.001

$\theta := 0.1$

0.1

$sprV := solve(V(\theta, a, b, s), \xi)$

0.008830368802, −0.0754970354

$r := sprV[1]$

0.00883036880

$s := sprV[2]$

−0.0754970354

Gauname sprendinius r>0 ir s<0, kurie bus reikalingi skaičiuojant ne tik Vynerio, bet ir I bei II eilės aproksimacijas. Skaičiuojame optimalų dividendų barjerą $b_0^*=\frac{1}{r-s}\ln\frac{s^2}{r^2}$:

> $bV := \frac{1}{(sprV[1]-sprV[2])}\ln\left(\frac{((sprV[2])\text{^}2)}{sprV[1]\text{^}2}\right)$

50.8944068

Tęsdami toliau ir keisdami θ ir s reikšmes gausime visus aproksimacijų palyginimui reikalingus duomenis.

Suskaičiavę b_0^*, remdamiesi (26) formule, nesunkiai galime gauti I eilės difuzinę aproksimaciją. Toliau difuzines aproksimacijas skaičiuosim kai m=1. Tuomet $b^*(1) \approx b_0^* - \Delta_1$:

> $$b1 := bV - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{(r\char`^3 + s\char`^3)}{(r-s)\char`^2} \cdot bV + \frac{1}{3} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{(3 \cdot (r\char`^2) - 2 \cdot r \cdot s + 3 \cdot (s\char`^2))}{(r-s)\char`^2} \right)$$

51.7191692(

Suskaičiavę I eilės difuzinės aproksimacijos barjerą, remdamiesi (27) formule, gauname II eilės difuzinę aproksimaciją:

> $$b2 := b1 + \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{d}{b} \cdot \frac{(r+s) \cdot (2 \cdot (r\char`^2) - 3 \cdot r \cdot s + 2 \cdot (s\char`^2))}{(r-s)\char`^2} - \frac{1}{18} \cdot \frac{(c\char`^2)}{b\char`^2} \cdot \frac{(r+s) \cdot ((r\char`^2) - 4 \cdot r \cdot s + s\char`^2) \cdot (5 \cdot (r\char`^2) - 4 \cdot r \cdot s + 5 \cdot (s\char`^2))}{(r-s)\char`^4} + \left(\frac{1}{12} \cdot \frac{d}{b} \cdot \frac{(r\char`^4 + s\char`^4)}{(r-s)\char`^2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{c\char`^2}{b\char`^2} \cdot \frac{(r\char`^6 - 3 \cdot (r\char`^5) \cdot s - 2 \cdot (r\char`^3) \cdot (s\char`^3) - 3 \cdot r \cdot (s\char`^5) + s\char`^6)}{(r-s)\char`^4} \right) \cdot bV \right)$$

51.3838695(

Toliau, keisdami θ ir s reikšmes, gauname 1 ir 2 lentelėse pateiktus duomenis.

1 lentelė

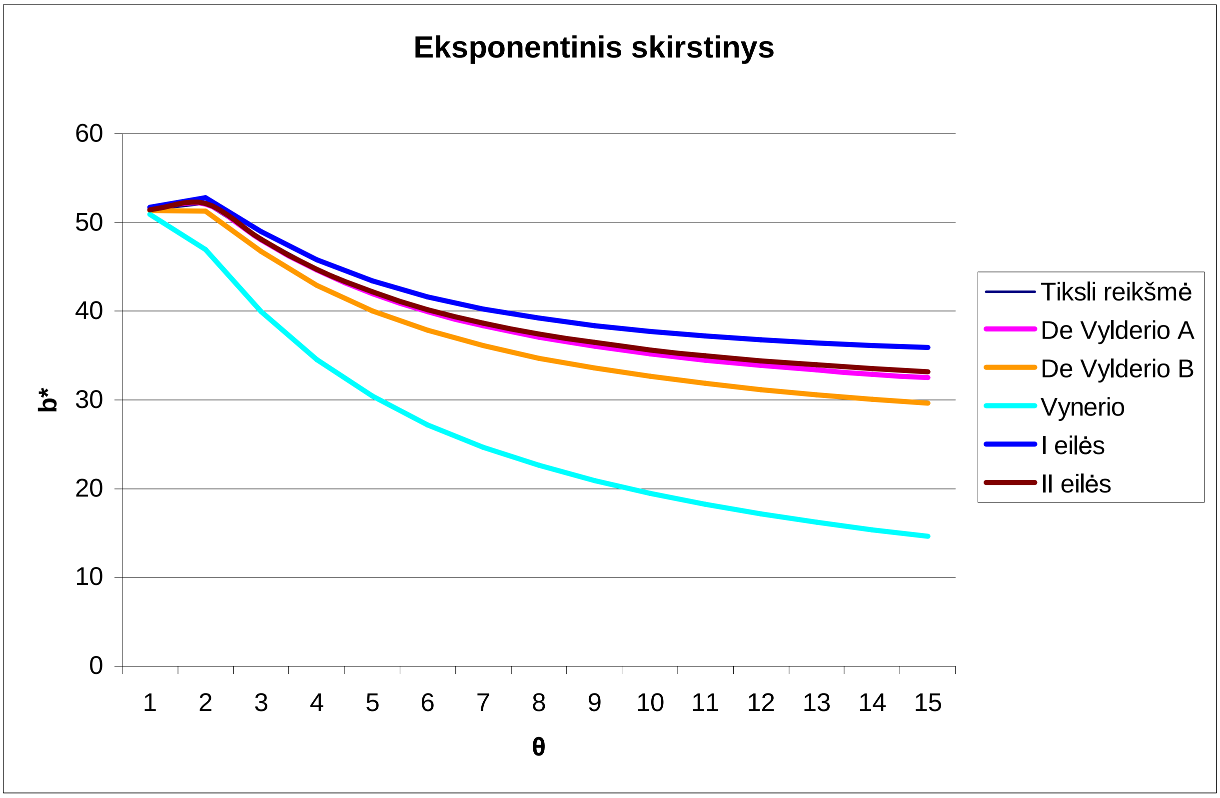
b^* aproksimacijos, kai $p(y) = \frac{11}{32}\exp\left(-\frac{y}{2}\right) + \frac{2}{3}2\exp(-2y)$., δ/λ=0.001

		De Vylderio aproksimacijos		Difuzinės aproksimacijos		
θ	Tiksli reikšmė	De Vylderio A	De Vylderio B	Vynerio	I eilės	II eilės
0,1	51,39	51,4029	51,3558	50,8944	51,7192	51,3839
0,2	52,14	52,1020	51,2518	46,9215	52,7564	52,1203
0,3	48,16	48,0521	46,7094	39,9583	48,9953	48,1243
0,4	44,78	44,6037	42,9314	34,5202	45,8105	44,7338
0,5	42,20	41,9659	40,0536	30,4046	43,4194	42,1540
0,6	40,24	39,9410	37,8434	27,2187	41,6274	40,1858
0,7	38,71	38,3554	36,1090	24,6852	40,2630	38,6552
0,8	37,50	37,0880	34,7184	22,6217	39,2064	37,4404
0,9	36,52	36,0558	33,5819	20,9069	38,3757	36,4588
1	35,71	35,2015	32,6378	19,4576	37,7145	35,6530
1,1	35,04	34,4846	31,8424	18,2150	37,1830	34,9827
1,2	34,47	33,8758	31,1642	17,1369	36,7484	34,4121
1,3	33,99	33,3535	30,5798	16,1916	36,4019	33,9392
1,4	33,57	32,9014	30,0718	15,3553	36,1155	33,5284
1,5	33,21	32,5069	29,6265	14,6096	35,8810	33,1737

2 lentelė

b^* aproksimacijos, kai $p(y)=\frac{1}{3}\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)+\frac{2}{3}2\exp(-2y).$, θ =0.2

		De Vylderio aproksimacijos		Difuzinės aproksimacijos		
δ/λ	Tiksli reikšmė	De Vylderio A	De Vylderio B	Vynerio	I eilės	II eilės
0,00001	141,31	141,0239	136,9710	118,2514	141,6492	141,3236
0,0001	97,62	97,4539	94,9657	83,2796	98,0887	97,6155
0,001	52,14	52,1020	51,2518	46,9215	52,7564	52,1203
0,01	12,10	12,1562	12,5897	14,1448	12,6838	12,0505



1 pav.

6.2. Gama skirstinys

6.2.1. Asimptotinė formulė

Nagrinėjame gama skirstinį su parametrais $\alpha=\beta=5$. Tankio funkcija yra:

$$p(x)=\frac{5^5x^4\exp(-5x)}{4!}.$$

Momentus generuojanti funkcija:

$$M_X(t)=\int_0^\infty \exp(tx)\left(\frac{5^5 x^4 \exp(-5x)}{4!}\right)dx=\left(\frac{5}{5-t}\right)^5,\ t<5.$$

Momentai:

$p_1=1;$

$p_2=\frac{6}{5};$

$p_3=\frac{42}{25};$

$p_4=\frac{336}{125}.$

Gama tankio Laplaso transformacija:

$$> \ with(inttrans):$$

$$laplace\left(p(x)=\frac{(5\,\hat{}\,5\cdot(x\,\hat{}\,4)\cdot\exp(-5\cdot x))}{1\cdot2\cdot3\cdot4},x,\xi\right)$$

$$laplace(p(x),x,\xi)=\frac{3125}{(\xi+5)^5}$$

Tuomet Lundbergo funkcija:

$$L(\xi)=(1+\theta)\lambda p_1\xi-(\lambda+\delta)+\lambda\frac{3125}{(\xi+5)^5}$$

arba

$$\frac{L(\xi)}{\lambda}=(1+\theta)p_1\xi-(1+\frac{\delta}{\lambda})+\frac{3125}{(\xi+5)^5}:$$

$$> \ G:=(\xi,\theta,s)\to\left((1+\theta)\cdot a\cdot\xi-(1+s)+\frac{3125}{(\xi+5)\,\hat{}\,5}\right)$$

$$(\xi,\theta,s)\to(1+\theta)\,a\,\xi-1-s+\frac{3125}{(\xi+5)^5}$$

Šios funkcijos išvestinė pagal ξ:

$$> \ g:=diff(G(\xi,\theta,s),\xi)$$

$$(1+\theta)\,a-\frac{15625}{(\xi+5)^6}$$

$$> \ g(\xi):=(1+\theta)\,a-\frac{15625}{(\xi+5)^6}$$

$$\xi\to(1+\theta)\,a-\frac{15625}{(\xi+5)^6}$$

Fundamentalioji Lundbergo lygtis:

$$> \ GL:=(\theta,s)\to((1+\theta)\cdot\xi\cdot((\xi+5)\,\hat{}\,5)-(1+s)\cdot((\xi+5)\,\hat{}\,5)+3125)$$

$$(\theta,s)\to(1+\theta)\,\xi\,(\xi+5)^5-(1+s)\,(\xi+5)^5+3125$$

Pasirinkę pradinius parametrus $\theta=0.1$ ir $s=\delta/\lambda=0,001$, sprendžiame lygtį:

> $\theta := 0.1$

0.1

$s := 0.001$

0.001

> $sprGL := solve(GL(\theta, s), \xi)$

Gauname Lundbergo funkcijos išvestines taškuose ρ ir $-R$:

> $g(sprGL[1])$

0.111282963(

$g(sprGL[4])$

$-.12079019$(

Tuomet optimalus sprendinys b^* remiantis (14) formule:

> $bG := \frac{1}{(sprGL[1] - sprGL[4])} \ln(1/((-1) \cdot g(sprGL[4]) \cdot sprGL[1]\text{^}2)(g(sprGL[1]) \cdot (sprGL[4])\text{^}2))$

32.4699924(

Kaip ir eksponentinių skirstinių mišinio atveju, keisdami parametrą θ intervale [0,1;1,5], o santykį pasirinkę $\frac{\delta}{\lambda} = 0,001,$ gauname 3 lentelėje pateiktus duomenis. Kitu atveju fiksuojame $\theta = 0,2,$ o santykį $\frac{\delta}{\lambda}$ keičiame intervale [0,00001;0,01], gauti duomenys pateikiami 4 lentelėje.

6.2.2. De Vylderio aproksimacijos

De Vylderio aproksimacijų skaičiavimas analogiškas eksponentinių skirstinių atvejui. De Vylderio A aproksimacijos atveju fundamentalioji Lundbergo lygtis yra: $\tilde{c}\xi^2 + \left[\tilde{c}\beta - (\tilde{\lambda} + \delta)\right]\xi - \beta\delta = 0$.

Įstatę (15) reikšmes ir padalinę iš λ turime:

$$\left(\theta p_1 + \frac{3}{2}\frac{p_2^2}{p_3}\right)\xi^2 + \left(\theta p_1 - \frac{\delta}{\lambda}\right)\xi - 3\frac{p_2}{p_3}\frac{\delta}{\lambda} = 0$$

arba su Maple:

> $DA := (\theta, a, b, c, s) \rightarrow \left(\left(\theta \cdot a + \frac{3}{2} \cdot \frac{(b\text{^}2)}{c}\right)\xi\text{^}2 + \left(\frac{\theta \cdot a \cdot 3 \cdot b}{c} - s\right) \cdot \xi - \frac{3 \cdot b}{c} \cdot s\right)$

$$(\theta, a, b, c, s) \to \left(\theta\, a + \frac{3}{2}\,\frac{b^2}{c}\right)\xi^2 + \left(\frac{3\,\theta\, a\, b}{c} - s\right)\xi - \frac{3\, b\, s}{c}$$

Įrašę vietoje *a*, *b* ir *c* atitinkamaai momentus $p_1 = 1;\ \ p_2 = \dfrac{6}{5};\ \ p_3 = \dfrac{42}{25}$ bei pasirinkę pradinius parametrus $\theta = 0{,}1;\ \ s = \dfrac{\delta}{\lambda} = 0{,}001$ gauname lygties $L(\xi) = 0$ sprendinius:

```
> a := 1
1
b := 6/5
6/5
c := 42/25
42/25
s := 0.001
0.001
θ := 0.1
0.1

sprDA := solve(DA(θ, a, b, c, s), ξ)
0.009464861995, -.163382387'
sprDA[1]
0.00946486199
sprDA[2]
-.163382387'
```

čia $sprDA[1] = \rho,\ sprDA[2] = -R.$

Tuomet optimalus dividendų barjeras b^* skaičiuojamas:

$$> bA := \frac{1}{(-sprDA[2] + sprDA[1])}\ln\left(\left(\left(\frac{3\cdot b}{c} + sprDA[2]\right)\cdot (sprDA[2])^{\wedge}2\right) \Big/ \left(\left(\frac{3\cdot b}{c} + sprDA[1]\right)\cdot (sprDA[1])^{\wedge}2\right)\right)$$

32.47548720

Keisdami parametrus θ ir $\dfrac{\delta}{\lambda}$, gauname 3 ir 4 lentelėse pateiktus duomenis.

De Vylderio B aproksimacijų atveju fundamentalioji Lundbergo lygtis atrodys taip:

$$(1+\theta)\, p_1 \xi^2 + \left(\theta \frac{p_1^2}{p_2} - \frac{\delta}{\lambda}\right)\xi - 2\frac{p_1}{p_2}\frac{\delta}{\lambda} = 0$$

Su žinomais momentais p_1 ir p_2 bei kaip ir prieš tai pasirinktais parametrais $\theta = 0{,}1;$ $s = \dfrac{\delta}{\lambda} = 0{,}001$ ši lygtis virsta:

$> \quad DB := (\theta, a, b, s) \rightarrow \left((1+\theta) \cdot a \cdot \xi\text{^}2 + \left(\frac{2 \cdot \theta \cdot a\text{^}2}{b} - s \right) \cdot \xi - \frac{2 \cdot a \cdot s}{b} \right)$

$$(\theta, a, b, s) \rightarrow (1+\theta)\, a\, \xi^2 + \left(\frac{2\,\theta\, a^2}{b} - s \right) \xi - \frac{2\, a\, s}{b}$$

$a := 1$

1

$b := \frac{6}{5}$

$\frac{6}{5}$

$s := 0.001$

0.001

$\theta := 0.1$

0.1

$DB(\theta, a, b, s)$

$1.1\,\xi^2 + 0.1656666667\xi - 0.00166666666$

Radę šios lygties sprendinius, suskaičiuojame optimalų dividendų barjerą:

$> \quad sprDB := solve(DB(\theta, a, b, s), \xi)$

$0.009465465543, -.160071526$

$sprDB[1]$

0.00946546554

$sprDB[2]$

$-.160071526$

$bD := \frac{1}{(-sprDB[2] + sprDB[1])} \ln\left(\left(\left(\frac{2 \cdot a}{b} + sprDB[2] \right) \cdot (sprDB[2])\text{^}2 \right) \Big/ \left(\left(\frac{2 \cdot a}{b} + sprDB[1] \right) \cdot (sprDB[1])\text{^}2 \right) \right)$

$$32.7321188$$

Tęsdami toliau ir keisdami parametrus anksčiau aprašytu būdu gauname 3 ir 4 lentelėse pateiktus duomenis.

6.2.3 Difuzinės aproksimacijos

Tiek Vynerio, tiek I ir II eilės difuzinių aproksimacijų skaičiavimai analogiški eksponentinių skirstinių mišinio atvejui.

Taikydami Vynerio difuzinę aproksimaciją, sprendžiame kvadratinę lygtį:

$$\frac{\sigma^2}{2}\xi^2 + \mu\xi - \delta = 0.$$

Pakeitę parametrus $\mu = c - \lambda p_1$ ir $\sigma^2 = \lambda p_2$, gauname:

$$\frac{p_2}{2}\xi^2 + \theta p_1 \xi - \frac{\delta}{\lambda} = 0$$

Pasirinkę parametrus ir reikiamus žalų dydžių skirstinio momentus, gauname optimalų dividendų barjerą *bV*:

$$> \quad V := (\theta, a, b, s) \rightarrow \left(\frac{b}{2}\cdot(\xi\verb|^|2) + \theta\cdot a\cdot\xi - s\right)$$

$$(\theta, a, b, s) \rightarrow \frac{1}{2}\, b\, \xi^2 + \theta\, a\, \xi - s$$

$a := 1$

1

$b := \frac{6}{5}$

$\frac{6}{5}$

$s := 0.001$

0.001

$\theta := 0.1$

0.1

$sprV := solve(V(\theta, a, b, s), \xi)$

0.00946273938, −.1761294060

$r := sprV[1]$

0.00946273938

$s := sprV[2]$

−.1761294060

$$bV := \frac{1}{(sprV[1] - sprV[2])}\ln\left(\frac{((sprV[2])\verb|^|2)}{sprV[1]\verb|^|2}\right)$$

31.5084139

Tuomet galime skaičiuoti I eilės difuzinę aproksimaciją su *m*=1:

$$> \quad b1 := bV - \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{(r\verb|^|3 + s\verb|^|3)}{(r-s)\verb|^|2}\cdot bV + \frac{1}{3}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{(3\cdot(r\verb|^|2) - 2\cdot r\cdot s + 3\cdot(s\verb|^|2))}{(r-s)\verb|^|2}\right)$$

32.5308108

II eilės difuzinės aproksimacijos metodu gautas optimalus barjeras:

$$> \quad b2 := b1 + \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{d}{b}\cdot\frac{(r+s)\cdot(2\cdot(r\verb|^|2) - 3\cdot r\cdot s + 2\cdot(s\verb|^|2))}{(r-s)\verb|^|2} - \frac{1}{18}\cdot\frac{(c\verb|^|2)}{b\verb|^|2}\cdot\frac{(r+s)\cdot((r\verb|^|2) - 4\cdot r\cdot s + s\verb|^|2)\cdot(5\cdot(r\verb|^|2) - 4\cdot r\cdot s + 5\cdot(s\verb|^|2))}{(r-s)\verb|^|4} + \left(\frac{1}{12}\cdot\frac{d}{b}\cdot\frac{(r\verb|^|4 + s\verb|^|4)}{(r-s)\verb|^|2} - \frac{1}{9}\cdot\frac{c\verb|^|2}{b\verb|^|2}\cdot\frac{(r\verb|^|6 - 3\cdot(r\verb|^|5)\cdot s - 2\cdot(r\verb|^|3)\cdot(s\verb|^|3) - 3\cdot r\cdot(s\verb|^|5) + s\verb|^|6)}{(r-s)\verb|^|4}\right)\cdot bV\right)$$

32.4669028

Pastarajam metodui būtina žinoti žalų dydžių skirstinio ketvirtąjį momentą.

Keisdami parametrą θ intervale [0,1;1,5], o santykį $\frac{\delta}{\lambda}$ pasirinkę $\frac{\delta}{\lambda} = 0,001$, gauname 3 lentelėje pateiktus duomenis. Kitu atveju fiksuojame $\theta = 0,2$, o santykį $\frac{\delta}{\lambda}$ keičiame intervale [0,00001;0,01], gauti duomenys pateikiami 4 lentelėje.

3 lentelė

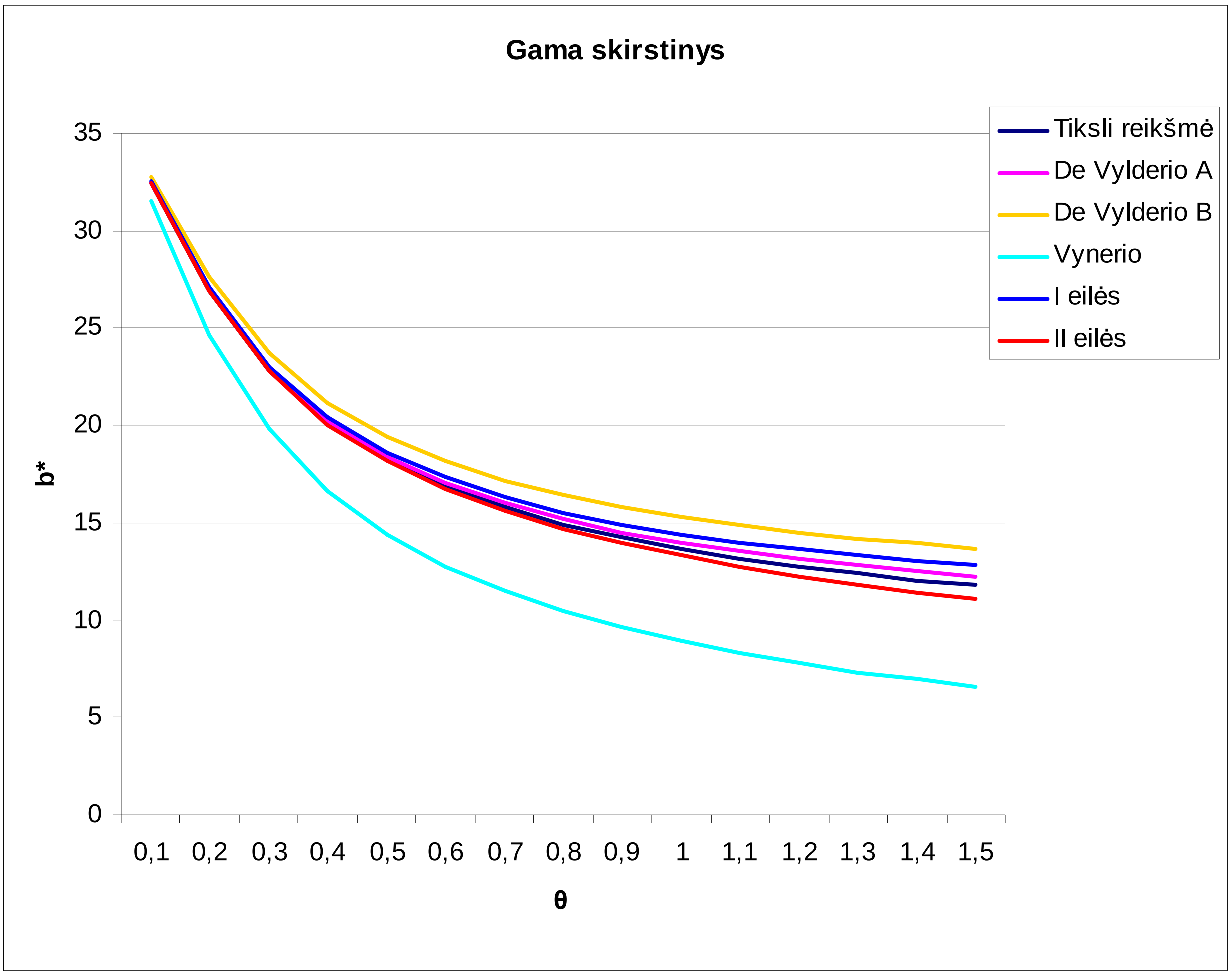
b^* aproksimacijos, kai $p(x) = 5^5 x^4 \exp(-5x)/4!$, δ/λ=0.001

		De Vylderio aproksimacijos		Difuzinės aproksimacijos		
θ	Tiksli reikšmė	De Vylderio A	De Vylderio B	Vynerio	I eilės	II eilės
0,1	32,47	32,4755	32,7321	31,5084	32,5308	32,4669
0,2	26,91	26,9438	27,5631	24,6457	27,0516	26,8944
0,3	22,82	22,8863	23,7063	19,8327	23,0423	22,7826
0,4	20,12	20,2236	21,1767	16,6559	20,4255	20,0564
0,5	18,23	18,3729	19,4234	14,4199	18,6188	18,1351
0,6	16,83	17,0168	18,1431	12,7581	17,3050	16,7026
0,7	15,76	15,9816	17,1693	11,4708	16,3107	15,5860
0,8	14,91	15,1660	16,4047	10,4417	15,5344	14,6845
0,9	14,22	14,5069	15,7890	9,5982	14,9134	13,9356
1	13,64	13,9634	15,2832	8,8931	14,4069	13,2989
1,1	13,16	13,5079	14,8606	8,2938	13,9870	12,7468
1,2	12,74	13,1206	14,5026	7,7776	13,6344	12,2599
1,3	12,37	12,7875	14,1957	7,3277	13,3349	11,8245
1,4	12,06	12,4980	13,9299	6,9319	13,0782	11,4303
1,5	11,78	12,2442	13,6976	6,5805	12,8563	11,0693

4 lentelė

b^* aproksimacijos, kai $p(x) = 5^5 x^4 \exp(-5x)/4!$, θ=0.2

		De Vylderio aproksimacijos		Difuzinės aproksimacijos		
δ/λ	Tiksli reikšmė	De Vylderio A	De Vylderio B	Vynerio	I eilės	II eilės
0,00001	59,40	59,5262	61,4077	52,8152	59,6410	59,3903
0,0001	43,38	43,4577	44,7195	38,9151	43,5624	43,3594
0,001	26,91	26,9438	27,5631	24,6457	27,0516	26,8944
0,01	10,30	10,2875	10,2839	10,1789	10,3888	10,2851



2 pav.

6.3. Išsigimęs skirstinys kai žalų dydis lygus 1

6.3.1 Asimptotinė formulė

Nagrinėjamas atvejis, kai žalų dydis yra lygus 1. Šiuo atveju visi žalų dydžių skirstinio momentai bus lygūs: $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1$.

Tuomet Lundbergo funkcija:

$$L(\xi) = c\xi - (\lambda + \delta) + \lambda \exp(-\xi);$$

$$\frac{L(\xi)}{\lambda} = (1+\theta)\, p_1 \xi - (1 + \frac{\delta}{\lambda}) + \exp(-\xi).$$

> $Z1 := (\xi, \theta, s) \to ((1+\theta) \cdot a \cdot \xi - (1+s) + \exp(-\xi))$

$$(\xi, \theta, s) \to (1+\theta)\, a\, \xi - 1 - s + e^{-\xi}$$

Lundbrego funkcijos išvestinė taške ξ:

> $z(\xi) := (1+\theta)\cdot a - e^{-\xi}$

$$\xi \rightarrow (1+\theta)\, a - e^{-\xi}$$

Įrašę momentus, pasirinkę parametrus $\theta = 0{,}1;\ s = 0{,}001,$ remdamiesi asimptotine formule (14), skaičiuojame optimalų dividendų barjerą:

> *optimalus barjeras*

optimalus barjeras

$$b := \frac{1}{(sprZ1[1] - sprZ1[2])} \ln\left(\frac{(z(sprZ1[1])\cdot(sprZ1[2])\char`^2)}{(-1)\cdot z(sprZ1[2])\cdot sprZ1[1]\char`^2}\right)$$

29.0132263

Keisdami parametrus θ ir $s = \dfrac{\delta}{\lambda}$, gauname 5 ir 6 lentelėse pateiktus duomenis.

6.3.2 De Vylderio aproksimacijos

De Vylderio aproksimacijų atveju būtina žinoti pirmuosius žalų dydžių skirstinio tris pirmuosius momentus, skaičiavimai analogiški prieš tai aprašytiems atvejams. Kadangi visi nagrinėjamu atveju visi momentai lygūs 1, skaičiavimai dar labiau supaprastėja. De Vylderio aproksimacijos atveju Lundbergo fundamentalioji lygtis yra

$$(\theta + \frac{3}{2})\xi^2 + \left(3\theta - \frac{\delta}{\lambda}\right)\xi - 3\frac{\delta}{\lambda} = 0.$$

Įrašę žalų dydžių skirstinio momentų reikšmes ir pasirinkę pradines parametrų reikšmes, sprendžiame šią lygtį:

> $a := 1$

1

$b := 1$

1

$c := 1$

1

$s := 0.001$

0.001

$\theta := 0.1$

0.1

$sprDA := solve(DA(\theta, a, b, c, s), \xi)$

0.009545830720, −.196420830

$sprDA[1]$

0.00954583072

$sprDA[2]$

−.196420830

Tuomet optimalus dividendų barjeras, kai $\theta = 0,1;\ \frac{\delta}{\lambda} = 0,001$:

> $bA := \frac{1}{(-sprDA[2] + sprDA[1])} \ln\left(\left(\left(\frac{3 \cdot b}{c} + sprDA[2]\right) \cdot (sprDA[2])^2\right) \Big/ \left(\left(\frac{3 \cdot b}{c} + sprDA[1]\right) \cdot (sprDA[1])^2\right)\right)$

29.0212871

De Vylderio B aproksimacijos atveju Lundbergo fundamentalioji lygtis:

$$(1+\theta)\xi^2 + \left(2\theta - \frac{\delta}{\lambda}\right)\xi - 2\frac{\delta}{\lambda} = 0.$$

Jos sprendiniai:

> $a := 1$

1

$b := 1$

1

$s := 0.001$

0.001

$\theta := 0.1$

0.1

$sprDB := solve(DB(\theta, a, b, s), \xi)$

0.009546487598, −.190455578

$sprDB[1]$

0.00954648759

$sprDB[2]$

−.190455578

Tuomet optimalus dividendų barjeras kai $\theta = 0,1;\ \frac{\delta}{\lambda} = 0,001$:

> $bD := \frac{1}{(-sprDB[2] + sprDB[1])} \ln\left(\left(\left(\frac{2 \cdot a}{b} + sprDB[2]\right) \cdot (sprDB[2])^2\right) \Big/ \left(\left(\frac{2 \cdot a}{b} + sprDB[1]\right) \cdot (sprDB[1])^2\right)\right)$

29.4079833

Keisdami parametrą θ intervale [0,1;1,5], o santykį $\frac{\delta}{\lambda}$ pasirinkę lygų 0,001, gauname 5 lentelėje pateiktus duomenis. Kitu atveju fiksuojame $\theta = 0,2$, o santykį $\frac{\delta}{\lambda}$ keičiame intervale [0,00001;0,01], gauti duomenys pateikiami 6 lentelėje.

6.3.3. Difuzinės aproksimacijos

Pradinį modelį keičiame Vynerio procesu su parametrais $\mu = \theta\lambda$, $\sigma^2 = \lambda$. Tuomet turime kvadratinę lygtį:

$$\frac{\xi^2}{2} + \theta\xi - \frac{\delta}{\lambda} = 0.$$

Radę jos sprendinius $r>0$ ir $s<0$, suskaičiuojame optimalų dividendų barjerą Vynerio aproksimacijos atveju ($\theta = 0{,}1$; $\frac{\delta}{\lambda} = 0{,}001$):

> $V := (\theta, a, b, s) \rightarrow \left(\frac{b}{2} \cdot (\xi\text{^}2) + \theta \cdot a \cdot \xi - s\right)$

$$(\theta, a, b, s) \rightarrow \frac{1}{2}\, b\, \xi^2 + \theta\, a\, \xi - s$$

$a := 1$
1
$b := 1$
1
$c := 1$
1
$d := 1$
1
$s := 0.001$
0.001
$\theta := 0.1$
0.1
$sprV := solve(V(\theta, a, b, s), \xi)$
0.009544511501, −.209544511:
$r := sprV[1]$
0.00954451150
$s := sprV[2]$
−.209544511:

optimalus barjeras

$bV := \frac{1}{(sprV[1] - sprV[2])} \ln\left(\frac{((sprV[2])\text{^}2)}{sprV[1]\text{^}2}\right)$

28.1983082'

Toliau nesunkiai gauname optimalius dividendų barjerus I ir II eilės difuzinių aproksimacijų atvejais:

I eiles difuzine aproksimacija

$$b1 := bV - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{(r\hat{}3 + s\hat{}3)}{(r-s)\hat{}2} \cdot bV + \frac{1}{3} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{(3 \cdot (r\hat{}2) - 2 \cdot r \cdot s + 3 \cdot (s\hat{}2))}{(r-s)\hat{}2} \right)$$

29.0554224

II eiles difuzine aproksimacija

$$b2 := b1 + \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{d}{b} \cdot \frac{(r+s) \cdot (2 \cdot (r\hat{}2) - 3 \cdot r \cdot s + 2 \cdot (s\hat{}2))}{(r-s)\hat{}2} - \frac{1}{18} \cdot \frac{(c\hat{}2)}{b\hat{}2} \cdot \frac{(r+s) \cdot ((r\hat{}2) - 4 \cdot r \cdot s + s\hat{}2) \cdot (5 \cdot (r\hat{}2) - 4 \cdot r \cdot s + 5 \cdot (s\hat{}2))}{(r-s)\hat{}4} + \left(\frac{1}{12} \cdot \frac{d}{b} \cdot \frac{(r\hat{}4 + s\hat{}4)}{(r-s)\hat{}2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{c\hat{}2}{b\hat{}2} \cdot \frac{(r\hat{}6 - 3 \cdot (r\hat{}5) \cdot s - 2 \cdot (r\hat{}3) \cdot (s\hat{}3) - 3 \cdot r \cdot (s\hat{}5) + s\hat{}6)}{(r-s)\hat{}4} \right) \cdot bV \right)$$

29.0108324

Tęsdami toliau ir keisdami parametrus aukščiau aprašytu būdu, gauname 5 ir 6 lentelėse pateiktus duomenis.

5 lentelė

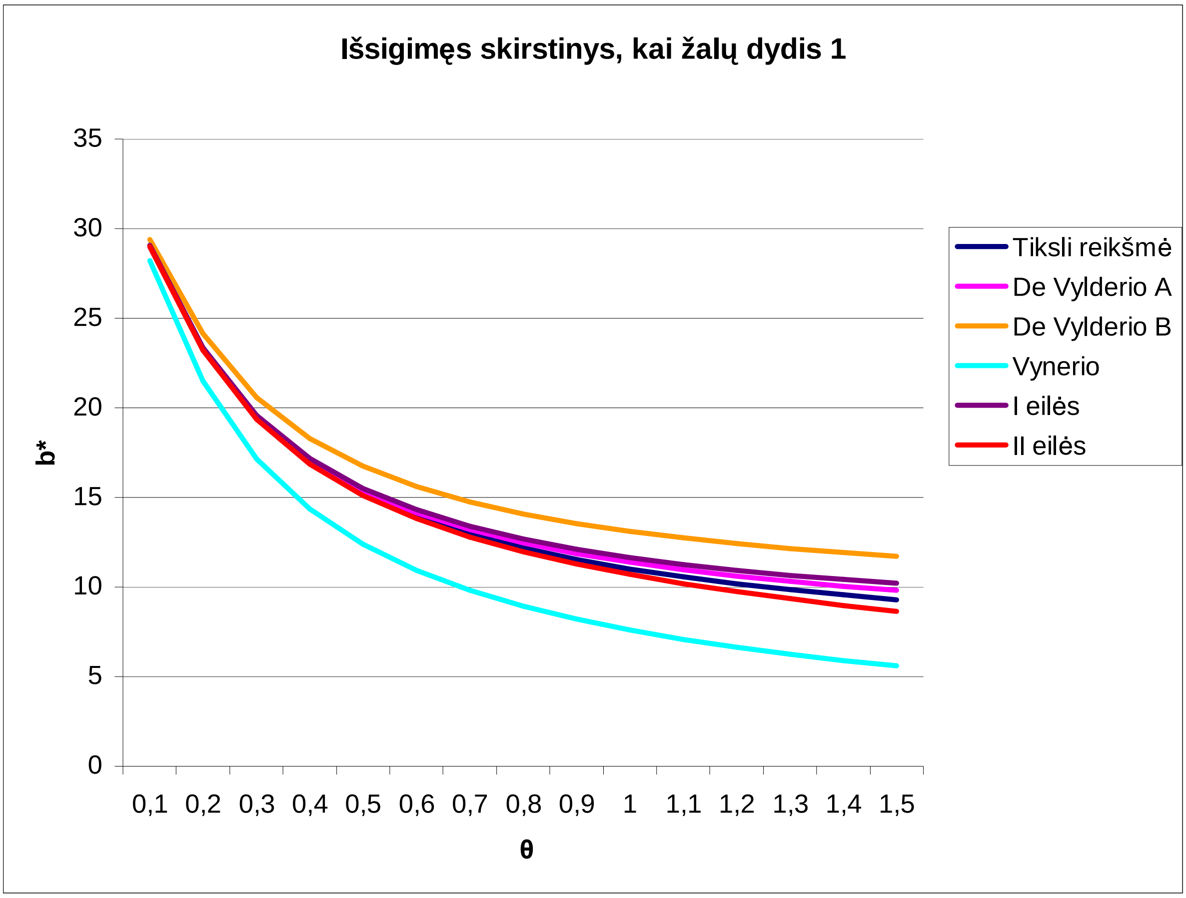
Žalų dydis 1, δ/λ=0.001

		De Vylderio aproksimacijos		Difuzinės aproksimacijos		
θ	Tiksli reikšmė	De Vylderio A	De Vylderio B	Vynerio	I eilės	II eilės
0,1	29,01	29,0213	29,4080	28,1983	29,0554	29,0108
0,2	23,24	23,2843	24,1286	21,5019	23,3505	23,2300
0,3	19,40	19,4808	20,5766	17,1570	19,5770	19,3696
0,4	16,92	17,0403	18,3033	14,3470	17,1651	16,8634
0,5	15,19	15,3589	16,7447	12,3877	15,5114	15,1098
0,6	13,92	14,1321	15,6135	10,9397	14,3114	13,8053
0,7	12,95	13,1975	14,7565	9,8222	13,4027	12,7885
0,8	12,18	12,4617	14,0854	8,9313	12,6920	11,9665
0,9	11,54	11,8673	13,5462	8,2026	12,1219	11,2823
1	11,02	11,3771	13,1037	7,5943	11,6553	10,6991
1,1	10,57	10,9659	12,7345	7,0781	11,2671	10,1921
1,2	10,19	10,6161	12,4220	6,6339	10,9397	9,7438
1,3	9,85	10,3150	12,1542	6,2472	10,6603	9,3417
1,4	9,56	10,0531	11,9225	5,9072	10,4196	8,9765
1,5	9,30	9,8232	11,7201	5,6057	10,2104	8,6414

6 lentelė

Žalų dydis 1, θ=0,2

		De Vylderio aproksimacijos		Difuzinės aproksimacijos		
δ/λ	Tiksli reikšmė	De Vylderio A	De Vylderio B	Vynerio	I eilės	II eilės
0,00001	49,71	49,8516	52,2693	44,9260	49,9156	49,6936
0,0001	36,64	36,7310	38,3749	33,3523	36,7954	36,6244
0,001	23,24	23,2843	24,1286	21,5019	23,3505	23,2300
0,01	9,55	9,5501	96,0116	9,3588	9,6138	9,5472


Išsigimęs skirstinys, kai žalų dydis 1
35
30
25
20
15
10
5
0
b*
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
1,1
1,2
1,3
1,4
1,5
θ
Tiksli reikšmė
De Vylderio A
De Vylderio B
Vynerio
I eilės
II eilės

3 pav.

Išvados

Atlikę skaičiavimus ir palyginę gautus rezultatus, 1, 2 ir 3 pav. matome, kad arčiausiai tikslios reikšmės visuomet De Vylderio A ir II eilės difuzinės aproksimacijos rezultatai. Kai kuriais atvejais II eilės difuzinės aproksimacijos rezultatas arčiau nei De Vylderio A, pvz. eksponentinių skirstinių mišinio atveju II eilės difuzinės aproksimacijos rezultatas beveik sutampa su tikslia reikšme. Tai galima paaiškinti tuo, kad De Vylderio A aproksimacijai naudojami pirmieji trys žalų dydžių skirstinio momentai, II eilės difuzinei aproksimacijai įtraukiamas ir ketvirtasis žalų dydžių skirstinio momentas, todėl ir galime tikėtis geresnio rezultato. Dėl tos pačios priežasties De Vylderio aproksimacija A duoda geresnį rezultatą negu De Vylderio B, pastaroji skaičiuojama naudojant tik du pirmus momentus.

Nagrinėjant kaip kinta optimalus dividendų barjeras keičiantis saugumo priemokai θ, akivaizdu, kad didėjant θ, optimalus dividendų barjeras mažėja. Kai saugumo priemoka θ didesnė, draudimo kompanija gauna didesnes įmokas, tačiau bendros žalos išlieka tos pačios, todėl optimalus dividendų barjeras sumažėja.

Lyginant aproksimacijas, kurioms reikalinga ta pati informacija, turime 2 variantus: De Vylderio A ir I eilės difuzinę bei De Vylderio B ir Vynerio aproksimacijas. Matome, kad kai θ reikšmės mažos, visų aproksimacijų rezultatai panašūs į tikslias reikšmes. Tačiau θ didėjant, De Vylderio aproksimacijos išlieka panašios, o difuzinių aproksimacijų rezultatai ima labiau tolti nuo tikrosios reikšmės. Difuzinės aproksimacijos duoda gerus rezultatus kai θ ir $\frac{\delta}{\lambda}$ yra maži, nes $\theta(m) = \frac{\mu}{\lambda(m) m p_1} = m \frac{\mu p_2}{\sigma^2 p_1} \to 0$, o $\lambda(m) = \frac{1}{m^2} \frac{\sigma^2}{p_2} \to \infty$, kai $m \to 0$.

Žinant pirmuosius du žalų dydžių skirstinio momentus, kai saugumo priemoka θ yra maža, optimaliam dividendų barjerui skaičiuoti galima naudoti tiek De Vylderio B, tiek Vynerio aproksimaciją, tačiau kai θ didėja, geresnį rezultatą duoda pirmoji aproksimacija. Analogiškai galima teigti ir tuo atveju, kai žinomi pirmieji trys momentai: mažoms θ reikšmėms tinka tiek De Vylderio A, tiek I eilės difuzinė aproksimacijos, tačiau kai θ didėja, vėl De Vylderio A aproksimacija duoda geresnį rezultatą. Žinant, kokia yra saugumo priemoka θ, galima pasirinkti tinkamiausią aproksimaciją ir suskaičiuoti optimalų dividendų barjerą tuo atveju, kai dividendai mokami draudimo kompanijos akcininkams arba draudėjams, kurie turi draudimo liudijimus su dalyvavimu pelne.

Literatūros sąrašas

1. B. Chan, H.U.Gerber, E.S.W.Shiu. Discussion of X. Zhou‘s “On a classical risk model with a constant dividend barrier”. *North American Actuarial Journal*, 2006, 10(2), p. 133-139
2. D.C.M.Dickson. *Insurance Risk and Ruin*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
3. H.U.Gerber, X.S.Lin, H.Yang. „A note on the dividends – penalty identity and the optimal dividend barrier“, *Astin Bulletin*, 2006, 36(2), p. 489-503.
4. H.U.Gerber. *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. Philadelphia: Huebner Foundation, 1979.
5. H.U.Gerber, E.S.W.Shiu, N.Smith. „Methods for estimating the optimal dividend barrier and the probability of ruin“. *Insurance: Mathematics and Economics*. 2008, 42, p. 243-254.
6. H.U.Gerber, E.S.W.Shiu. „Optimal dividends: analysis with Brownian motion“, *North American Actuarial Journal*, 2004, 8(1), p. 1-20.
7. H.U.Gerber, E.S.W. Shiu. ”On the time or ruin”, *North American Actuarial Journal*, 1998, 2(1), p. 48-78.

Priedai

1. eksponentinis skirstinys.mw
2. gama skirstinys.mw
3. issigimes skirstinys.mw