VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATINĖS STATISTIKOS KATEDRA

Baigiamasis magistro darbas

GZD APROKSIMAVIMAS GAUSO DĖSNIU

Statistikos programos studijų studentės

NIJOLĖ GIEDRYTĖ

RENATA STANKEVIČIŪTĖ

VILNIUS 2008

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATINĖS STATISTIKOS KATEDRA

Darbo vadovas prof. habil. dr. A. Bikelis __________________ ________________
(parašas) **(data)**

Darbo recenzentas doc. P. Vaitkus

Gynimo data ________2008 m. gegužės mėn. 29 d._________
Gynimo posėdžio protokolo Nr. __________________________

Registravimo Nr. ________________________________

Turinys

Įvadas

Sprendžiant matematinės statistikos uždavinį tenka naudotis tam tikrų atsitiktinių dydžių pasiskirstymo funkcijų ar kvantilių reikšmėmis. Labiausiai išnagrinėtų tikimybinių skirstinių minėtos reikšmės yra surašytos į atitinkamų programų paketus (pvz., SAS, SPSS), iš kurių nesunkiai ir greitai galima gauti atsakymą. Tačiau yra mažiau išnagrinėtų skirstinių ir ieškant pasiskirstymo funkcijų ar kvantilių reikšmių, atitinkamais programų paketais pasinaudoti negalima. Tokiu atveju naudojamos aproksimacijos. Matematinėje statistikoje dažnai susiduriame su tikimybinių skirstinių aproksimavimu Gauso skirstiniais.

Daugelis statistinių išvadų remiasi prielaida, kad stebimas atsitiktinis dydis turi normalųjį skirstinį. Duomenų analizėje kai kurie skirstiniai priderinami prie tam tikro šablono – duomenų matematinio modelio. Labiausiai paplitęs normalusis modelis. Skaičiavimams naudodami normalųjį skirstinį daug naujo sužinome apie visą populiaciją. Statistikoje milžiniškas teorinis ir praktinis vaidmuo atitenka normalaus skirstinio kreivei. Todėl neretai tam tikro atsitiktinio dydžio skirstinį gerai aproksimuoja normalusis skirstinys.

Darbe nagrinėjama Br. Grigelionio $\mathrm{GZD}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta, \mu)$ tikimybinių skirstinių klasė, kuriai nepriklauso Gauso tikimybinis skirstinys. Skirstinius iš $\mathrm{GZD}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta, \mu)$ tikimybinių skirstinių klasės aproksimuojame Gauso tikimybiniais skirstiniais.

Gauso tikimybinis skirstinys turi labai geras savybes, t.y. kai

$$\eta \sim N\left(a, \sigma^2\right),$$

tai

$$\frac{\eta - a}{\sigma} \sim N(0,1).$$

Šios savybės neturi skirstiniai iš $\mathrm{GZD}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta, \mu)$ klasės.

Darbo tikslas:

Spręsti klasikinį uždavinį, kai tikimybinis skirstinys aproksimuojamas Gauso skirstiniu. Užrašyti neaprėžtai dalių tikimybinių skirstinių formalius charakteristinių funkcijų bei tankių asimptotinius skleidinius, panaudojant Kolmogorovo kanoninį išdėstymą ir Apelio daugianarius.

Gautos formulės bus naudingos matematinės statistikos specialistams ir ekonomistams, nagrinėjantiems finansuose iškilusias problemas, t.y. nagrinėjant matematinius modelius finansų matematikoje.

Darbo uždaviniai:

I. $\text{GZD}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta, \mu)$ dėsnių charakteristinės funkcijos aproksimavimas Gauso dėsnio charakteristine funkcija, laikant, kad dėsnių vidurkiai, dispersijos sutampa ir dispersija κ_2 neribotai didėja. Gauti skleidinius eilučių pavidalu ir išdėstyti $\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}$ laipsniais.

II. $\text{GZD}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta, \mu)$ skirstinių tankių aproksimavimas Gauso dėsnio tankiu ir jo išvestinėmis.

III. Gauti lygybę, kada skirstinį iš klasės $\text{GZD}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta, \mu)$ galime išreikšti skirstinio beta funkcija. Gavus tokią lygybę, galime pritaikyti D. Alfers ir H. Dinges [6] tvirtinimus apie beta skirstinio asimptotinį elgesį.

1. Neaprėžtai dalūs tikimybiniai skirstiniai su baigtine dispersija

Kaip žinome, kelių charakteristinių funkcijų sandauga yra charakteristinė funkcija. Tačiau jei charakteristinė funkcija $\hat{Q}(t)$ yra dviejų funkcijų $\hat{Q}_1(t)$ ir $\hat{Q}_2(t)$ sandauga

$$\hat{Q}(t) = \hat{Q}_1(t)\hat{Q}_2(t),$$

tai tie dauginamieji gali ir nebūti charakteristinės funkcijos. Jei vis dėlto taip yra, tai jos vadinamos charakteristinės funkcijos dalikliais.

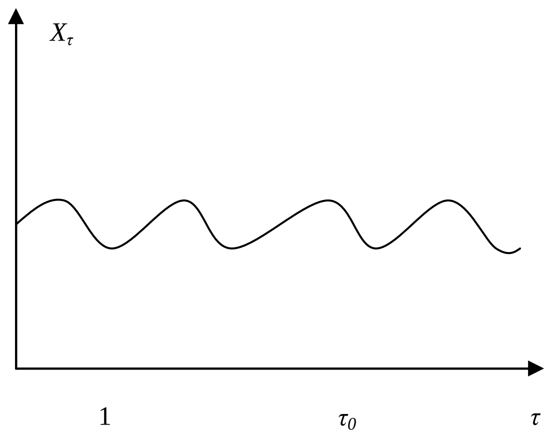
Charakteristinė funkcija $\hat{Q}(t)$ yra vadinama *neaprėžtai dalia*, jei kiekvienam sveikam teigiamam n ji yra kurios nors charakteristinės funkcijos n-asis laipsnis. Tai reiškia, kad kiekvienam n egzistuoja tokia charakteristinė funkcija $\hat{Q}_n(t)$, kad

$$\hat{Q}(t) = \left(\hat{Q}_n(t)\right)^n.$$

ID žymėsime neaprėžtai dalių dėsnių klasę su baigtine dispersija.

Funkciją $\hat{Q}_n(t)$ vienareikšmiškai apibrėžia funkcija $\hat{Q}(t)$. Jei $\hat{Q}(t) \neq 0$, tai egzistuoja $\ln \hat{Q}(t)$ ir yra baigtinis.

Atitinkamas pasiskirstymo funkcijas bei atitinkamus atsitiktinius dydžius taip pat vadinsime *neaprėžtai daliais* [1].



1 pav. *Atsitiktinio proceso realizacijos grafikas*

Kai duota neaprėžtai dali charakteristinė funkcija $\hat{Q}(t)$, tai jos pagalba apibrėžiame atsitiktinio dydžio $X(\tau)$ [žr. 1 pav.] charakteristinę funkciją:

$$Me^{itX(\tau)} = \hat{Q}_\tau(t) = \hat{Q}^\tau(t).$$

Jeigu $\tau = 1$, tuomet turime atsitiktinio dydžio X_1 charakteristinę funkciją

$$Me^{itX_1} = Me^{itX(1)} = \hat{Q}_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dP\{X_1 < x\}.$$

Neaprėžtai dalaus tikimybinio skirstinio $Q(x)$, turinčio baigtinę dispersiją, charakteristinę funkciją $\hat{Q}(t)$ galima užrašyti taip:

$$\hat{Q}(t) = \exp\left\{ it\gamma + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \frac{dK(x)}{x^2} \right\}, \tag{1.1}$$

čia $\gamma \in R^1$, $K(x)$ – nemažėjanti aprėžta funkcija, $K(-\infty) = 0$, $K(+\infty) = DX_1 < \infty$.

Tai yra Kolmogorovo charakteristinės funkcijos kanoninis išdėstymas. Formulė (1.1) yra vadinama *Kolmogorovo formule* [2].

Pakėlus laipsniu *τ*, gausime proceso Kolmogorovo charakteristinės funkcijos kanoninio išdėstymo išraišką:

$$\hat{Q}_\tau(t) = \hat{Q}^\tau(t) = \exp\left\{ it\tau\gamma + \tau \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) \frac{dK(x)}{x^2} \right\}.$$

Jeigu $\tau_0>0$, tai gautume atsitiktinio dydžio $X(\tau_0)$ charakteristines funkcijas $Me^{itX(\tau_0)} = \hat{Q}^{\tau_0}(t)$. Gauso ir Puasono skirstinių atveju turime:

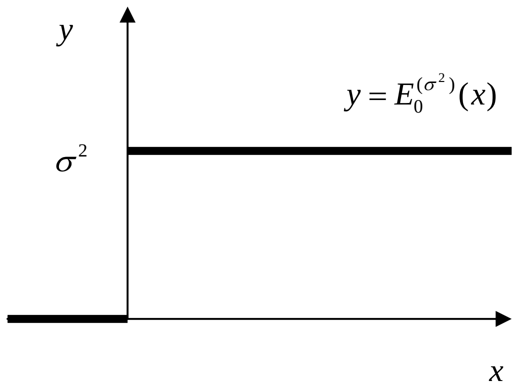
1. Tegu turim atsitiktinį dydį $X_1 \sim N\left(a, \sigma^2\right)$, t.y. šio atsitiktinio dydžio charakteristinė funkcija yra

$$Me^{itX_1} = e^{ita - \frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

Šio Gauso dėsnio charakteristinė funkcija turi kanoninį išdėstymą:

$$Me^{itX_1} = \exp\left\{ ita + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) \frac{dE_0^{(\sigma^2)}(x)}{x^2} \right\} = \exp\left\{ ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right\},$$

kur $K_N(x) = E_0^{(\sigma^2)}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sigma^2, & x > 0. \end{cases}$



2 pav. $E_0^{(\sigma^2)}(x)$ *grafikas*

Pastebime, kad $\dfrac{e^{itx}-1-itx}{x^2} = \dfrac{1+itx+\dfrac{(itx)^2}{2}+o((tx)^2)-1-itx}{x^2} \underset{x\to 0}{\to} -\dfrac{t^2}{2}+o(1) \to -\dfrac{t^2}{2}$.

Taigi, Kolmogorovo funkcija $K(x)$ šiuo atveju yra $E_0^{(\sigma^2)}(x)$, kuri tenkina sąlygas:

$$E_0^{(\sigma^2)}(-\infty) = 0\,,$$

$$E_0^{(\sigma^2)}(+\infty) = \sigma^2 = DX_1\,.$$

Jeigu charakteristinę funkciją, užrašytą Kolmogorovo formule, pakeliame laipsniu $\tau_0 > 0$, tai gauname:

$$\left(Me^{itX_1}\right)^{\tau_0} = \exp\left\{ita\tau_0 + \tau_0 \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx}-1-itx)\frac{dE_0^{(\sigma^2)}(x)}{x^2}\right\} = \left(e^{ita-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\right)^{\tau_0}.$$

Taigi gauname vėl normalų atsitiktinį dydį $X(\tau_0)$ su parametrais $a\tau_0, \tau_0\sigma^2$:

$$e^{ita\tau_0-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\tau_0} \sim N(a\tau_0, \tau_0\sigma^2)\,.$$

Iš čia išplaukia, kad normalaus dėsnio atsitiktinio dydžio $X_1 \sim N\left(a, \sigma^2\right)$ charakteristinę funkciją pakėlus laipsniu τ_0, gauname vėl normalaus dėsnio atsitiktinio dydžio $X(\tau_0) \sim N\left(a\tau_0, \tau_0\sigma^2\right)$ charakteristinę funkciją.

Pasiskirstymo funkcija šiuo atveju yra

$$P\{X(\tau_0) < x\} = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2\tau_0 2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\tau_0 a}{\sqrt{\sigma\tau_0}}\right)^2} du .$$

2. Puasono dėsnio atveju turim atsitiktinį dydį $X_1 \sim P(\lambda)$, $\lambda>0$. Jo charakteristinė funkcija yra

$$Me^{itX_1} = e^{\lambda(e^{it}-1)} .$$

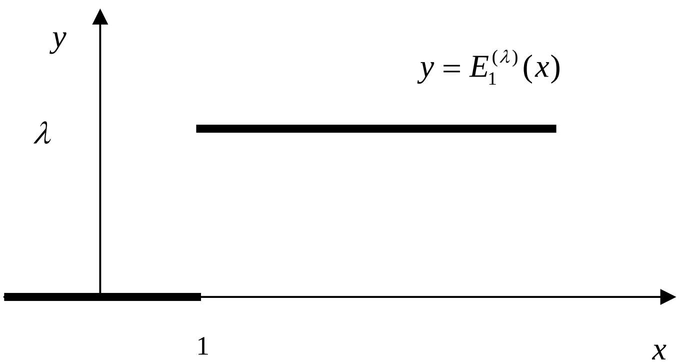
Puasono skirstinio atveju $MX_1 = DX_1 = \lambda$.

Užrašome charakteristinę funkciją Kolmogorovo kanoninio išdėstymo pavidalu:

$$Me^{itX_1} = \exp\left\{ it\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) \frac{dE_1^{(\lambda)}(x)}{x^2} \right\} = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\},$$

čia $K_P(x) = E_1^{(\lambda)}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \lambda, & x > 1, \end{cases}$

$\gamma=\lambda$.



3 pav. $E_1^{(\lambda)}(x)$ *grafikas*

Charakteristinę funkciją, užrašytą Kolmogorovo kanoninio išdėstymo pavidalu, pakėlę laipsniu τ_0, gauname:

$$(Me^{itX_1})^{\tau_0} = \exp\left\{ it\lambda\tau_0 + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx)\tau_0 \frac{dE_1^{(\lambda)}(x)}{x^2} \right\} =$$

$$= \exp\{(e^{it} - 1)\lambda\tau_0\} = \exp\{\lambda\tau_0(e^{it} - 1)\} = Me^{itX(\tau_0)} .$$

Gauname vėl Puasono atsitiktinį dydį $X(\tau) \sim P(\tau_0\lambda)$, kurio charakteristinė funkcija

$$Me^{itX(\tau_0)} = e^{\tau_0\lambda(e^{it}-1)} .$$

Iš čia išplaukia, kad atsitiktinis dydis $X(\tau_0)$ įgyja reikšmes 0,1,2,… ir reikšmę *m* įgyja su tikimybe

$P\{X(\tau_0)=m\}=\dfrac{(\lambda\tau_0)^m e^{-\lambda\tau_0}}{m!}$, *m*=0,1,2… .

3. *GZD* skirstinio atveju turim atsitiktinį dydį $\xi_{2\delta}$ [4]. Jo charakteristinė funkcija yra

$$\hat{Q}_{2\delta}(x)=\left(\frac{B\left(\beta_1+\dfrac{i\alpha t}{2\pi},\beta_2-\dfrac{i\alpha t}{2\pi}\right)}{B(\beta_1,\beta_2)}\right)^{2\delta}e^{it\mu}.$$

Užrašome charakteristinę funkciją Kolmogorovo kanoninio išdėstymo pavidalu:

$$Me^{it\xi_{2\delta}}=\hat{Q}_{2\delta}(x)=\exp\left\{it\kappa_1+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-itx\right)\frac{dK_G(x)}{x^2}\right\}=\left(\frac{B\left(\beta_1+\dfrac{i\alpha t}{2\pi},\beta_2-\dfrac{i\alpha t}{2\pi}\right)}{B(\beta_1,\beta_2)}\right)^{2\delta}e^{it\mu},$$

čia

$$K_G(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}k^-(u)du,\ kai\ \ x<0,\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{0}k^-(v)dv+\int_{0}^{x}k^+(v)dv,\ kai\ \ x>0,\end{cases}$$

kur

$$k(x)=\begin{cases}k^+(x)=\dfrac{2\delta x\exp\left\{-\dfrac{2\pi\beta_2}{\alpha}x\right\}}{1-\exp\left\{-\dfrac{2\pi}{\alpha}x\right\}},kai\ \ x>0,\\ k^-(x)=\dfrac{2\delta|x|\exp\left\{-\dfrac{2\pi\beta_1}{\alpha}x\right\}}{1-\exp\left\{-\dfrac{2\pi}{\alpha}x\right\}},\ kai\ \ x<0.\end{cases}$$

Charakteristinę funkciją, užrašytą Kolmogorovo kanoninio išdėstymo pavidalu, pakėlę laipsniu τ_0, gauname:

$$\left(Me^{it\xi_{2\delta}}\right)^{\tau_0}=\exp\left\{it\kappa_1\tau_0+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx}-1-itx\right)\tau_0\frac{dK_G(x)}{x^2}\right\}=$$

$$=\left(\frac{B\left(\beta_1+\dfrac{i\alpha t}{2\pi},\beta_2-\dfrac{i\alpha t}{2\pi}\right)}{B(\beta_1,\beta_2)}\right)^{2\delta\tau_0}e^{it\mu\tau_0}=Me^{it\xi_{2\delta}(\tau_0)}.$$

Gauname vėl atsitiktinį dydį $\xi_{2\delta}(\tau_0)$, kurio charakteristinė funkcija yra

$$Me^{it\xi_{2\delta}(\tau_0)} = \left(\frac{B\left(\beta_1 + \frac{i\alpha t\tau_0}{2\pi}, \beta_2 - \frac{i\alpha t\tau_0}{2\pi} \right)}{B(\beta_1, \beta_2)} \right)^{2\delta\tau_0} e^{it\mu\tau_0}.$$

GZD priklauso *ID* neaprėžtai dalių dėsnių klasei su baigtine dispersija. Jei paimtume $2\delta = 1$, tai gautume *ZD* skirstinį, kuris irgi priklauso *ID* klasei.

2. Neaprėžtai dalių tikimybinių skirstinių formalūs asimptotiniai skleidiniai

Tikimybinių skirstinių analizėje ypatingą vietą užima jų išreiškimas gerai žinomų atsitiktinių dydžių funkcijomis, t.y. nuo vieno tikimybinio skirstinio analizės pereiname prie kito lengviau įvertinamo tikimybinio skirstinio analizės. Mes šiame skyriuje nagrinėsime, kaip Br. Grigelionio GZD$(\alpha,\beta_1,\beta_2,\delta,\mu)$ charakteristinė funkcija skleidžiama Apelio daugianariais, t.y. atsitiktinių dydžių charakteristinę funkciją iš klasės GZD$(\alpha,\beta_1,\beta_2,\delta,\mu)$ aproksimuosim Gauso atsitiktinio dydžio $\eta \sim N(\kappa_1,\kappa_2)$ charakteristine funkcija.

Panaudosime Br. Grigelionio [4] tikimybinio skirstinio, priklausančio GZD$(\alpha,\beta_1,\beta_2,\delta,\mu)$ klasei, apibrėžimą.

1 apibrėžimas. *Atsitiktinio dydžio* $\xi_{2\delta}$ *tikimybinį skirstinį* $\hat{Q}_{2\delta}(x)$ *vadinsime apibendrintuoju GZD skirstiniu, jei jo charakteristinė funkcija yra*

$$\hat{Q}_{2\delta}(t)=\left(\frac{B\left(\beta_1+\frac{i\alpha t}{2\pi},\beta_2-\frac{i\alpha t}{2\pi}\right)}{B(\beta_1,\beta_2)}\right)^{2\delta} e^{it\mu},$$

kur $t\in R^1$, $\delta>0$, $\alpha>0$, $\beta_1>0$, $\beta_2>0$ *ir* $B(\beta_1,\beta_2)=\int_0^1 x^{\beta_1-1}(1-x)^{\beta_2-1}dx$ *Oilerio beta funkcija.*

Tokių skirstinių klasę žymėsime $GZD(\alpha,\beta_1,\beta_2,\delta,\mu)$.

2.1 Kolmogorovo formulės pritaikymai

Atsitiktinio dydžio ξ, priklausančio *ID* neaprėžtai dalių dėsnių klasei su baigtine dispersija $D\xi=K(+\infty)$, charakteristinę funkciją, kuri užrašyta Kolmogorovo formule (1.1), galime pakeisti taip:

$$\begin{aligned} Me^{it\xi} &= \exp\left\{it\gamma+K(+\infty)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(e^{itx}-1-itx\right)}{x^2}\frac{dK(x)}{K(+\infty)}\right\}= \\ &=\left(\exp\left\{it\frac{\gamma}{K(+\infty)}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(e^{itx}-1-itx\right)}{x^2}dP(X<x)\right\}\right)^{K(+\infty)}, \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

čia $\gamma \in R^1$, $K(x)$ – nemažėjanti aprėžta funkcija, $K(-\infty) = 0$, $M\xi = \gamma$.

Iš čia išplaukia, kad atsitiktinio dydžio ξ, kurio charakteristinė funkcija yra $\hat{Q}(t)$, pagrindinius momentus galima išreikšti pagalbinio atsitiktinio dydžio *X*, kurio tikimybinis skirstinys yra $P\{X < x\} = \dfrac{K(x)}{K(+\infty)}$, $x \in R^1$, momentais.

Atsitiktinio dydžio ξ semiinvariantai apibrėžiami formule:

$$\kappa_m = \frac{1}{i^m}\frac{d^m}{dt^m}\ln \hat{Q}(t)\,_{|t=0}.$$

Iš (1.2) išplaukia, kad

$$D\xi = \frac{1}{i^2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\ln Me^{it\xi}\right)_{|t=0} = \frac{1}{i^2}\frac{d^2}{dt^2}\left\{it\gamma + K(+\infty)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}-1-itx}{x^2}dP\{X<x\}\right\}_{|t=0} =$$

$$= K(+\infty)\int_{-\infty}^{+\infty}dP\{X<x\} = K(+\infty)\big(P\{X<+\infty\} - P\{X<-\infty\}\big) = K(+\infty) = \kappa_2.$$

Surasime atsitiktinio dydžio *X* pirmuosius du momentus, išreikštus per Br. Grigelionio apibrėžtus semiinvariantus. Yra žinoma , kad

$$Me^{itX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dP\{X<x\} = \frac{1}{i^2}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\ln Me^{it\xi}}{\kappa_2} = -\frac{d^2}{dt^2}\frac{\ln Me^{it\xi}}{\kappa_2}. \qquad (2.1.1')$$

Diferencijavę abi lygybės puses ir paėmę $t = 0$, gauname

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{itx}dP\{X<x\}\,_{|t=0} = \frac{1}{i^3}\frac{d^3}{dt^3}\frac{\ln Me^{it\xi}}{\kappa_2}\,_{|t=0} \quad\Rightarrow\quad MX = \frac{\kappa_3}{\kappa_2} = \frac{1}{i^3}\frac{d^3}{dt^3}\frac{\ln Me^{it\xi}}{\kappa_2}\,_{|t=0}.$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = i^2\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{itx}dP\{X<x\}\,_{|t=0} - \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)^2 = \frac{1}{i^4}\frac{d^4}{dt^4}\frac{\ln Me^{it\xi}}{\kappa_2}\,_{|t=0} - \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)^2 = \frac{\kappa_4}{\kappa_2} - \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2}\right)^2 \geq 0.$$

Tai gauname, kad $|\kappa_3| \leq \sqrt{\kappa_2\kappa_4}$.

Toliau naudosime dvi Kalinin [3] lemas.

2.1.1 lema. *Kai* $|y| < x$, *tai*

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)^x = e^y\left[1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{A_j(y)}{x^j}\right],$$

kur $A_j(y) = (-1)^j y^{j+1}\sum_{k=0}^{j-1} g_{jk}y^k$ *– Apelio daugianariai,* *koeficientai* $g_{jk} = \sum_{\substack{\nu_1+2\nu_2+...+j\nu_j=j \\ \nu_1+\nu_2+...+\nu_j=k+1 \\ \nu_i=0,1,2,...}} \frac{1}{2^{\nu_1}...(j+1)^{\nu_j}\nu_1!...\nu_j!}$, *kai* $k=0,1,...,j-1,\quad i=1,2,...,j.$

Yra įrodyta [3], *kad*

$$g_{10} = \frac{1}{2},$$

$$g_{jk} = 0, \quad kai\ k < 0,$$

$$g_{j0} = \frac{1}{j+1},$$

$$g_{j,j-1} = \frac{1}{2^j j!}.$$

□

2.1.2 lema. *Tarkime eilutė* $\sum_{j=1}^{\infty} \overline{\alpha}_j x^j$ *konverguoja į funkciją* $\varphi(x)$ *taško* $x=0$ *aplinkoje. Tuomet*

$$e^{\varphi(x)} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j x^j,$$

kur $\beta_j = \sum_{\substack{\nu_1+2\nu_2+...+j\nu_j=j \\ \nu_i=0,1,2,...}} \frac{\overline{\alpha}_1^{\nu_1}...\overline{\alpha}_j^{\nu_j}}{\nu_1!...\nu_j!}.$

Čia eilutė $f(x) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j x^j$ *konverguoja į* $f(x) = e^{\varphi(x)}$, *kai* $x \to 0.$

□

Nagrinėsime atsitiktinių dydžių Br. Grigelionio $\xi_{2\delta} \sim \mathrm{GZD}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta, \mu)$ [4] ir Gauso $\eta \sim N(\kappa_1, \kappa_2)$, kurio pasiskirstymo funkcija yra $P\{\eta < x\} = \frac{1}{\sqrt{\kappa_2 2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\kappa_1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^2} du$, charakteristinių funkcijų skirtumo formalų asimptotinį skleidinį.

Atsitiktinių dydžių $\xi_{2\delta}$ ir η charakteristinėmis funkcijomis yra:

$$Me^{it\xi_{2\delta}} = \hat{g}_G(t) = \exp\left\{ it\kappa_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \frac{dK_G(x)}{x^2} \right\} =$$

$$= \exp\left\{ it\kappa_1 + \int_{-\infty}^{0} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \frac{1}{x^2} \frac{2\delta|x| \exp\left\{-\frac{2\pi\beta_1}{\alpha} x\right\}}{1 - \exp\left\{-\frac{2\pi}{\alpha} x\right\}} dx + \int_{0}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \frac{1}{x^2} \frac{2\delta\, x \exp\left\{-\frac{2\pi\beta_2}{\alpha} x\right\}}{1 - \exp\left\{-\frac{2\pi}{\alpha} x\right\}} dx \right\},$$

čia $dK_G(x) = k(x)dx$, t.y.

$$K_G(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} k^-(u)du, \; kai \;\; x < 0, \\ \int_{-\infty}^{0} k^-(v)dv + \int_{0}^{x} k^+(v)dv, \; kai \;\; x > 0, \end{cases}$$

kur

$$k(x) = \begin{cases} k^+(x) = \dfrac{2\delta x \exp\left\{-\frac{2\pi\beta_2}{\alpha} x\right\}}{1 - \exp\left\{-\frac{2\pi}{\alpha} x\right\}}, kai \;\; x > 0, \\ k^-(x) = \dfrac{2\delta|x| \exp\left\{-\frac{2\pi\beta_1}{\alpha} x\right\}}{1 - \exp\left\{-\frac{2\pi}{\alpha} x\right\}}, \; kai \;\; x < 0. \end{cases}$$

Normalaus dėsnio atveju turime

$$Me^{it\eta} = \hat{g}_N(t) = \exp\left\{ it\kappa_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \frac{dK_N(x)}{x^2} \right\},$$

kur $K_N(x) = \begin{cases} 0, \text{ kai } x \le 0, \\ \kappa_2, \text{ kai } x > 0. \end{cases}$

Mes priėmėme, kad atsitiktinių dydžių $\xi_{2\delta}$ ir η du pirmieji momentai sutampa, t.y. $\kappa_1 = M\xi_{2\delta} = M\eta$, $\kappa_2 = D\xi_{2\delta} = D\eta$, $\kappa_2 > 0$, $K_G(+\infty) = K_N(+\infty) = \kappa_2$.

Pažymėsime atsitiktinius dydžius X_1 ir X_2, kurių pasiskirstymo funkcijos yra

$$P\{X_1 < x\} = \frac{K_G(x)}{\kappa_2}$$

ir

$$P\{X_2 < x\} = \frac{K_N(x)}{\kappa_2}.$$

Kaip jau minėjome atsitiktinio dydžio $\xi_{2\delta}$ charakteristinę funkciją aproksimuosime normalaus atsitiktinio dydžio η charakteristine funkcija. Tai atlikti yra pasiūlyta daugybė metodų, mes pasirenkame skleisti Kalinin [3] Apelio daugianariais.

Pažymėkime

$$\hat{Q}_G(t) = \exp\left\{ it\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \right) dP\{X_1 < x\} \right\} \tag{2.1.2}$$

ir

$$\hat{Q}_N(t) = \exp\left\{ it\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \right) dP\{X_2 < x\} \right\}. \tag{2.1.3}$$

2.1.3 lema. *Tarkime, kad* $\kappa_2 \to \infty$ *ir mažoms t reikšmėms yra* $\left| \frac{\hat{Q}_G(t) - \hat{Q}_N(t)}{\hat{Q}_N(t)} \right| < 1.$

Tuomet teisinga formali lygybė

$$\left(\hat{Q}_G(t)\right)^{\kappa_2} = \left(\hat{Q}_N(t)\right)^{\kappa_2} e^{\kappa_2 \cdot \frac{\hat{Q}_G(t) - \hat{Q}_N(t)}{\hat{Q}_N(t)}} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa_2} \right)^m A_m \left(\kappa_2 \frac{\hat{Q}_G(t) - \hat{Q}_N(t)}{\hat{Q}_N(t)} \right) \right),$$

čia

$$A_m\left(\kappa_2 \frac{\hat{Q}_G(t) - \hat{Q}_N(t)}{\hat{Q}_N(t)} \right) = (-1)^m \left(\kappa_2 \frac{\hat{Q}_G(t) - \hat{Q}_N(t)}{\hat{Q}_N(t)} \right)^{m+1} \sum_{k=0}^{m-1} g_{mk} \left(\kappa_2 \frac{\hat{Q}_G(t) - \hat{Q}_N(t)}{\hat{Q}_N(t)} \right)^k.$$

Kur

$$g_{mk} = \sum_{\substack{\nu_1 + 2\nu_2 + \ldots + m\nu_m = m \\ \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m = k+1 \\ \nu_j = 0,1,2,\ldots}} \frac{1}{2^{\nu_1} \ldots (m+1)^{\nu_m} \nu_1! \ldots \nu_m!}.$$

Įrodymas. Nagrinėjamas charakteristines funkcijas pagal (2.1.1) formulę galime užrašyti tokiu pavidalu:

$$Me^{it\xi_{2\delta}} = \left(\exp\left\{ it\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \right) \frac{dK_G(x)}{\kappa_2} \right\} \right)^{\kappa_2} =$$

$$= \left(\exp\left\{ it\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{itx} - 1 - itx}{x^2} \right) dP\{X_1 < x\} \right\} \right)^{\kappa_2} = \left(\hat{Q}_G(t)\right)^{\kappa_2}$$

ir

$$Me^{it\eta}=e^{it\kappa_1-\frac{\kappa_2 t^2}{2}}=\left(\exp\left\{it\frac{\kappa_1}{\kappa_2}+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{itx}-1-itx}{x^2}\right)\frac{dK_N(x)}{\kappa_2}\right\}\right)^{\kappa_2}=$$

$$=\left(\exp\left\{it\frac{\kappa_1}{\kappa_2}+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{itx}-1-itx}{x^2}\right)dP\{X_2<x\}\right\}\right)^{\kappa_2}=\left(\hat{Q}_N(t)\right)^{\kappa_2}.$$

Pasinaudojame 2.1.1 lema ir gauname formalią lygybę:

$$\left(\hat{Q}_G(t)\right)^{\kappa_2}=\left(\hat{Q}_N(t)+\hat{Q}_G(t)-\hat{Q}_N(t)\right)^{\kappa_2}=\left(\hat{Q}_N(t)\right)^{\kappa_2}\left[1+\frac{\hat{Q}_G(t)-\hat{Q}_N(t)}{\hat{Q}_N(t)}\right]^{\kappa_2}=$$

$$=\left(\hat{Q}_N(t)\right)^{\kappa_2}\left[1+\frac{1}{\kappa_2}\cdot\kappa_2\cdot\frac{\hat{Q}_G(t)-\hat{Q}_N(t)}{\hat{Q}_N(t)}\right]^{\kappa_2}=$$

$$=\left(\hat{Q}_N(t)\right)^{\kappa_2}e^{\kappa_2\cdot\frac{\hat{Q}_G(t)-\hat{Q}_N(t)}{\hat{Q}_N(t)}}\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\kappa_2}\right)^m A_m\left(\kappa_2\frac{\hat{Q}_G(t)-\hat{Q}_N(t)}{\hat{Q}_N(t)}\right)\right).$$

(2.1.4)

2.1.1 lemoje parinkome $x=\kappa_2$, o $y=\kappa_2\dfrac{\hat{Q}_G(t)-\hat{Q}_N(t)}{\hat{Q}_N(t)}$.

Čia $A_m\left(\kappa_2\dfrac{\hat{Q}_G(t)-\hat{Q}_N(t)}{\hat{Q}_N(t)}\right)$ – Apelio daugianariai, kurie pagal 2.1.1 lemą išreiškiami taip:

$$A_m\left(\kappa_2\frac{\hat{Q}_G(t)-\hat{Q}_N(t)}{\hat{Q}_N(t)}\right)=(-1)^m\left(\kappa_2\frac{\hat{Q}_G(t)-\hat{Q}_N(t)}{\hat{Q}_N(t)}\right)^{m+1}\sum_{k=0}^{m-1}g_{mk}\left(\kappa_2\frac{\hat{Q}_G(t)-\hat{Q}_N(t)}{\hat{Q}_N(t)}\right)^k.$$

Čia koeficientai yra lygūs

$$g_{mk}=\sum_{\substack{\nu_1+2\nu_2+\ldots+m\nu_m=m\\ \nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_m=k+1\\ \nu_j=0,1,2,\ldots}}\frac{1}{2^{\nu_1}\ldots(m+1)^{\nu_m}\nu_1!\ldots\nu_m!}.$$

□

2.1.4 lema. *Charakteristinių funkcijų skirtumą skleidžiant* $\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}$ *laipsniais, kai* $\kappa_2\to\infty$, *galime užrašyti lygybe:*

$$\frac{\hat{Q}_G\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)-\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)}{\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)}=\exp\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^l\cdot\frac{1}{l!}\cdot\frac{1}{x^2}d\left[P\{X_1<x\}-P\{X_2<x\}\right]\right\}-1.$$

(2.1.5)

Įrodymas. Pasinaudojus (2.1.2) ir (2.1.3) išraiškomis charakteristines funkcijas skleidžiame $\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}$ laipsniais ir gauname

$$\hat{Q}_G\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right) = \exp\left\{ i\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{\left(\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}\right)} - 1 - \frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}}{x^2}\right) dP\{X_1 < x\}\right\}$$

ir

$$\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right) = \exp\left\{ i\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{\left(\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}\right)} - 1 - \frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}}{x^2}\right) dP\{X_2 < x\}\right\}.$$

Imant nagrinėjamų charakteristinių funkcijų skirtumą, gauname

$$\frac{\hat{Q}_G\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right) - \hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)}{\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)} = \frac{\hat{Q}_G\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)}{\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)} - 1 =$$

$$= \exp\left\{ i\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{\left(\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}\right)} - 1 - \frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}}{x^2}\right) dP\{X_1 < x\} - i\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\frac{\kappa_1}{\kappa_2} + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{\left(\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}\right)} - 1 - \frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}}{x^2}\right) P\{X_2 < x\}\right\} - 1 =$$

$$= \exp\left\{ \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{\left(\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}\right)} - 1 - \frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}}{x^2}\right) d\left[P\{X_1 < x\} - P\{X_2 < x\}\right]\right\} - 1.$$

Kadangi

$$e^{\left(\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}\right)} = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^l \frac{1}{l!} = 1 + \frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}} + \sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^l \frac{1}{l!},$$

tai iš to seka, kad

$$\frac{\hat{Q}_G\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)-\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)}{\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)}=\exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{\left(\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}\right)}-1-\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}}{x^2}\right)d\left[P\{X_1<x\}-P\{X_2<x\}\right]\right\}-1=$$

$$=\exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}+\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^l\frac{1}{l!}-1-\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}\right)d\left[P\{X_1<x\}-P\{X_2<x\}\right]\right\}-1=$$

$$=\exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^l\cdot\frac{1}{l!}\cdot\frac{1}{x^2}d\left[P\{X_1<x\}-P\{X_2<x\}\right]\right\}-1.$$

□

2.1.5 lema. *Teisinga lygybė*

$$\kappa_2\cdot\left(\exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^l\cdot\frac{1}{l!}\cdot\frac{1}{x^2}d\left[P\{X_1<x\}-P\{X_2<x\}\right]\right\}-1\right)=\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^s\hat{\alpha}_s.$$

(2.1.6)

Čia koeficientai

$$\hat{\alpha}_s=(it)^{s+2}\sum_{\substack{j=1\\2(r-1)+j=s}}^{\infty}\sum_{r=1}^{j}\sum_{\substack{\nu_1+2\nu_2+\ldots+j\nu_j=j\\\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_j=r\\\nu_i=0,1,2,\ldots}}\left(\frac{1}{3!}\gamma_1\right)^{\nu_1}\left(\frac{1}{4!}\gamma_2\right)^{\nu_2}\cdots\left(\frac{1}{(j+2)!}\gamma_j\right)^{\nu_j}\frac{1}{\nu_1!\ldots\nu_j!}$$

(2.1.7)

$$\gamma_j=\int_{-\infty}^{\infty}x^j\,d\left(P\{X_1<x\}-P\{X_2<x\}\right),\quad j=1,2,3,\ldots.$$

Įrodymas. Pažymėkime

$$J=\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^l\int_{-\infty}^{\infty}x^l\frac{1}{x^2}d\left[P\{X_1<x\}-P\{X_2<x\}\right].$$

Kai $l=2$, tai $\int_{-\infty}^{\infty}d\left[P\{X_1<x\}-P\{X_2<x\}\right]=1-1=0.$

Gauname, kad

$$J=\sum_{l=3}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^l\int_{-\infty}^{\infty}x^{l-2}d\left[P\{X_1<x\}-P\{X_2<x\}\right]=\left(\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^2\sum_{l=3}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{l-2}\gamma_{l-2}=$$

$$=\left(\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j+2)!}\left(\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^j\gamma_j=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\gamma_j}{(j+2)!}\left(\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^2\left(\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^j.$$

Čia $\gamma_j = \int_{-\infty}^{\infty} x^j d\left(P\{X_1 < x\} - P\{X_2 < x\}\right)$, t.y. j-os eilės pseudomomentas.

Pasinaudoję 2.1.2 lema galime užrašyti

$$\kappa_2 \cdot (\exp\{J\} - 1) = \kappa_2 \cdot \left(\exp\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma_j}{(j+2)!} \left(\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}} \right)^2 \left(\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}} \right)^j \right\} - 1 \right) =$$

$$= \kappa_2 \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \left(\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}} \right)^j - 1 \right) = \kappa_2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \left(\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}} \right)^j . \tag{2.1.8}$$

Čia koeficientai yra lygūs:

$$\beta_j = \sum_{\substack{\nu_1 + 2\nu_2 + \ldots + j\nu_j = j \\ \nu_i = 0,1,2,\ldots}} \frac{\overline{\alpha}_1^{\nu_1} \ldots \overline{\alpha}_j^{\nu_j}}{\nu_1! \ldots \nu_j!}, \quad i = 1,2,.., j,$$

ir

$$\overline{\alpha}_j = \left(\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}} \right)^2 \frac{1}{(j+2)!} \gamma_j ,$$

$$\gamma_j = \int_{-\infty}^{\infty} x^j d\left(P\{X_1 < x\} - P\{X_2 < x\}\right), \quad j = 1,2,3,\ldots .$$

Gauname, kad

$$\beta_j = \sum_{\substack{\nu_1 + 2\nu_2 + \ldots + j\nu_j = j \\ \nu_i = 0,1,2,\ldots}} \left(\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}} \right)^{2(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_j)} \left(\frac{1}{3!}\gamma_1 \right)^{\nu_1} \left(\frac{1}{4!}\gamma_2 \right)^{\nu_2} \ldots \left(\frac{1}{(j+2)!}\gamma_j \right)^{\nu_j} \frac{1}{\nu_1! \ldots \nu_j!} =$$

$$= \sum_{r=1}^{j} \left(\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}} \right)^{2r} \sum_{\substack{\nu_1 + 2\nu_2 + \ldots + j\nu_j = j \\ \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_j = r \\ \nu_i = 0,1,2,\ldots}} \left(\frac{1}{3!}\gamma_1 \right)^{\nu_1} \left(\frac{1}{4!}\gamma_2 \right)^{\nu_2} \ldots \left(\frac{1}{(j+2)!}\gamma_j \right)^{\nu_j} \frac{1}{\nu_1! \ldots \nu_j!}.$$

Įstatome šią išraišką į (2.1.8) formulę ir gauname

$$\kappa_2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \left(\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}} \right)^j = \kappa_2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}} \right)^j \sum_{r=1}^{j} \left(\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}} \right)^{2r} \sum_{\substack{\nu_1 + 2\nu_2 + \ldots + j\nu_j = j \\ \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_j = r \\ \nu_i = 0,1,2,\ldots}} \left(\frac{1}{3!}\gamma_1 \right)^{\nu_1} \left(\frac{1}{4!}\gamma_2 \right)^{\nu_2} \ldots \left(\frac{1}{(j+2)!}\gamma_j \right)^{\nu_j} \frac{1}{\nu_1! \ldots \nu_j!} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}} \right)^j \left(\sqrt{\kappa_2} \right)^2 \sum_{r=1}^{j} \left(\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}} \right)^{2r} \sum_{\substack{\nu_1 + 2\nu_2 + \ldots + j\nu_j = j \\ \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_j = r \\ \nu_i = 0,1,2,\ldots}} \left(\frac{1}{3!}\gamma_1 \right)^{\nu_1} \left(\frac{1}{4!}\gamma_2 \right)^{\nu_2} \ldots \left(\frac{1}{(j+2)!}\gamma_j \right)^{\nu_j} \frac{1}{\nu_1! \ldots \nu_j!} =$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{j}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{2r+j-2}(it)^{2r+j}\sum_{\substack{\nu_1+2\nu_2+...+j\nu_j=j\\ \nu_1+\nu_2+...+\nu_j=r\\ \nu_i=0,1,2,...}}\left(\frac{1}{3!}\gamma_1\right)^{\nu_1}\left(\frac{1}{4!}\gamma_2\right)^{\nu_2}\cdots\left(\frac{1}{(j+2)!}\gamma_j\right)^{\nu_j}\frac{1}{\nu_1!...\nu_j!}=$$

$$=\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{k-2}(it)^{k}\sum_{\substack{j=1\\2r+j=k}}^{\infty}\sum_{r=1}^{j}\sum_{\substack{\nu_1+2\nu_2+...+j\nu_j=j\\ \nu_1+\nu_2+...+\nu_j=r\\ \nu_i=0,1,2,...}}\left(\frac{1}{3!}\gamma_1\right)^{\nu_1}\left(\frac{1}{4!}\gamma_2\right)^{\nu_2}\cdots\left(\frac{1}{(j+2)!}\gamma_j\right)^{\nu_j}\frac{1}{\nu_1!...\nu_j!}=$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{s}(it)^{s+2}\sum_{\substack{j=1\\2(r+1)+j=s}}^{\infty}\sum_{r=1}^{j}\sum_{\substack{\nu_1+2\nu_2+...+j\nu_j=j\\ \nu_1+\nu_2+...+\nu_j=r\\ \nu_i=0,1,2,...}}\left(\frac{1}{3!}\gamma_1\right)^{\nu_1}\left(\frac{1}{4!}\gamma_2\right)^{\nu_2}\cdots\left(\frac{1}{(j+2)!}\gamma_j\right)^{\nu_j}\frac{1}{\nu_1!...\nu_j!}=$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{s}\hat{\alpha}_s.$$

Taigi gauname $\kappa_2\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j\left(\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{j}=\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{s}\hat{\alpha}_s.$ (2.1.9)

Čia koeficientais $\hat{\alpha}_s$ pažymėjome

$$\hat{\alpha}_s=(it)^{s+2}\sum_{\substack{j=1\\2(r-1)+j=s}}^{\infty}\sum_{r=1}^{j}\sum_{\substack{\nu_1+2\nu_2+...+j\nu_j=j\\ \nu_1+\nu_2+...+\nu_j=r\\ \nu_i=0,1,2,...}}\left(\frac{1}{3!}\gamma_1\right)^{\nu_1}\left(\frac{1}{4!}\gamma_2\right)^{\nu_2}\cdots\left(\frac{1}{(j+2)!}\gamma_j\right)^{\nu_j}\frac{1}{\nu_1!...\nu_j!}$$

□

2.1.1 teorema. *Kai κ_2 yra didelė dispersija ir t reikšmės mažos, tai teisinga formali lygybė*

$$\left(\hat{Q}_G\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\right)^{\kappa_2}=\left(\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\right)^{\kappa_2}\left(1+\sum_{g=1}^{\infty}c_g\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{g}\right).$$

Čia

$$c_g=\begin{cases}\hat{\beta}_g,\quad kai\ \ g=1,2,3,\\ \hat{\beta}_4+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{d=m+1\\2m+d=4}}^{\infty}W_d,\ kai\ \ g=4,\\ \hat{\beta}_g+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{d=m+1\\2m+d=g}}^{\infty}W_d+\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n=4}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{d=m+1\\2m+d=n\\s+n=g}}^{\infty}\hat{\beta}_sW_d^{(it)},\ kai\ \ g=6,5,...,\end{cases}$$

$$\hat{\beta}_0 = 1,\ \hat{\beta}_g = \sum_{\substack{\bar{\nu}_1 + 2\bar{\nu}_2 + \ldots + g\bar{\nu}_s = g \\ \bar{\nu}_i = 0,1,2,\ldots}} \frac{\hat{\alpha}_1^{\bar{\nu}_1} \ldots \hat{\alpha}_g^{\bar{\nu}_g}}{\bar{\nu}_1! \ldots \bar{\nu}_g!},$$

$$\hat{\alpha}_g = (it)^{g+2} \sum_{\substack{j=1 \\ 2(r-1)+j=g}}^{\infty} \sum_{r=1}^{j} \sum_{\substack{\nu_1 + 2\nu_2 + \ldots + j\nu_j = j \\ \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_j = r \\ \nu_i = 0,1,2,\ldots}} \left(\frac{1}{3!}\gamma_1\right)^{\nu_1} \left(\frac{1}{4!}\gamma_2\right)^{\nu_2} \cdots \left(\frac{1}{(j+2)!}\gamma_j\right)^{\nu_j} \frac{1}{\nu_1! \ldots \nu_j!},$$

$$W_d^{(it)} = \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{\substack{l''=0 \\ l'+l''+k+m+1=d}}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^m g_{mk} c_{l'+1}^{(m)} c_{l''+1}^{(k)},$$

$$\gamma_j = \int_{-\infty}^{\infty} x^j d\left(P\{X_1 < x\} - P\{X_2 < x\}\right),\ j = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$c_{l'}^{(m)} = \frac{1}{l'\hat{\alpha}_1} \sum_{s'=1}^{l'} (s'(m+1) - l' + s')\hat{\alpha}_{s'} c_{l'-s'}^{(m)}, \qquad c_1^{(m)} = \hat{\alpha}_1^{m+1},$$

$$c_{l''}^{(k)} = \frac{1}{l''\hat{\alpha}_1} \sum_{s''=1}^{l''} (s''k - l'' + s'')\hat{\alpha}_{s''} c_{l''-s''}^{(k)}, \qquad c_1^{(k)} = \hat{\alpha}_1^{k},$$

$$g_{mk} = \sum_{\substack{\nu_1 + 2\nu_2 + \ldots + m\nu_m = m \\ \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m = k+1 \\ \nu_i = 0,1,2,\ldots}} \frac{1}{2^{\nu_1} \ldots (m+1)^{\nu_m} \nu_1! \ldots \nu_m!},\quad k = 0, 1, \ldots, j-1,\quad i = 1, 2, \ldots, j.$$

Įrodymas. Nagrinėsime charakteristinių funkcijų $Me^{it\xi_{2\delta}}$ ir $Me^{it\eta}$ skirtumą, t.y.

$$Me^{it\xi_{2\delta}} - Me^{it\eta} = \left(\hat{Q}_G(t)\right)^{\kappa_2} - \left(\hat{Q}_N(t)\right)^{\kappa_2},$$

Charakteristinės funkcijos $\hat{Q}_G(t)$ ir $\hat{Q}_N(t)$ apibrėžiamos (2.1.2) ir (2.1.3) formulėmis.

Nagrinėjamą charakteristinių funkcijų skirtumą skleisime $\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}$ laipsniais. Kadangi $\kappa_2 \to \infty$, pasinaudojus 2.1.3 lema galime užrašyti formulę:

$$\left(\hat{Q}_G\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\right)^{\kappa_2} = \left(\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\right)^{\kappa_2} \exp\left\{\kappa_2 \cdot \frac{\hat{Q}_G\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right) - \hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)}{\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)}\right\} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa_2}\right)^m A_m\left(\kappa_2 \frac{\hat{Q}_G\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right) - \hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)}{\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)}\right)\right). \tag{2.1.10}$$

Čia Apelio daugianariai užsirašo tokiu pavidalu

$$A_m\left(\kappa_2\frac{\hat{Q}_G\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)-\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)}{\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)}\right)=(-1)^m\left(\kappa_2\frac{\hat{Q}_G\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)-\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)}{\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)}\right)^{m+1}\sum_{k=0}^{m-1}g_{mk}\left(\kappa_2\frac{\hat{Q}_G\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)-\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)}{\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)}\right)^k, \tag{2.1.11}$$

kur $g_{mk}=\sum\limits_{\substack{\nu_1+2\nu_2+\ldots+m\nu_m=m\\ \nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_m=k+1\\ \nu_j=0,1,2,\ldots}}\frac{1}{2^{\nu_1}\ldots(m+1)^{\nu_m}\nu_1!\ldots\nu_m!}$.

Pasinaudojus 2.1.4 lema formulę (2.1.10) galime perrašyti tokiu pavidalu:

$$\left(\hat{Q}_G\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\right)^{\kappa_2}=\left(\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\right)^{\kappa_2}\exp\left\{\kappa_2\cdot\left(\exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^l\cdot\frac{1}{l!}\cdot\frac{1}{x^2}d\left[P\{X_1<x\}-P\{X_2<x\}\right]\right\}-1\right)\right\}\times$$
$$\times\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\kappa_2}\right)^m A_m\left(\kappa_2\left(\exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^l\cdot\frac{1}{l!}\cdot\frac{1}{x^2}d\left[P\{X_1<x\}-P\{X_2<x\}\right]\right\}-1\right)\right)\right). \tag{2.1.12}$$

Iš 2.1.5 lemos išplaukia, kad

$$\exp\left\{\kappa_2\cdot\left(\exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^l\cdot\frac{1}{l!}\cdot\frac{1}{x^2}d\left[P\{X_1<x\}-P\{X_2<x\}\right]\right\}-1\right)\right\}=\exp\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^s\hat{\alpha}_s\right\}, \tag{2.1.13}$$

čia koeficientai

$$\hat{\alpha}_s=(it)^{s+2}\sum_{\substack{j=1\\ 2(r-1)+j=s}}^{\infty}\sum_{r=1}^{j}\sum_{\substack{\nu_1+2\nu_2+\ldots+j\nu_j=j\\ \nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_j=r\\ \nu_i=0,1,2,\ldots}}\left(\frac{1}{3!}\gamma_1\right)^{\nu_1}\left(\frac{1}{4!}\gamma_2\right)^{\nu_2}\ldots\left(\frac{1}{(j+2)!}\gamma_j\right)^{\nu_j}\frac{1}{\nu_1!\ldots\nu_j!}. \tag{2.1.14}$$

Formulėje (2.1.13) dar kartą pritaikius 2.1.2 lemą gauname

$$\exp\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^s\hat{\alpha}_s\right\}=1+\sum_{s=1}^{\infty}\hat{\beta}_s\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^s, \tag{2.1.15}$$

kur

$$\hat{\beta}_s=\sum_{\substack{\bar{\nu}_1+2\bar{\nu}_2+\ldots+s\bar{\nu}_s=s\\ \bar{\nu}_i=0,1,2,\ldots}}\frac{\hat{\alpha}_1^{\bar{\nu}_1}\ldots\hat{\alpha}_s^{\bar{\nu}_s}}{\bar{\nu}_1!\ldots\bar{\nu}_s!}.$$

Koeficientai $\hat{\alpha}_s$ aprašyti formulėje (2.1.14).

Gauname, kad

$$\hat{\beta}_s = \sum_{\substack{\bar{\nu}_1+2\bar{\nu}_2+...+s\bar{\nu}_s=s \\ \bar{\nu}_i=0,1,2,...}} (it)^{2(\bar{\nu}_1+...+\bar{\nu}_s)+(\bar{\nu}_1+2\bar{\nu}_2+...+s\bar{\nu}_s)} \frac{D_1^{\bar{\nu}_1}\cdot ... \cdot D_s^{\bar{\nu}_s}}{\bar{\nu}_1!...\bar{\nu}_s!},$$

kur $D_s = \sum_{\substack{j=1 \\ 2(r-1)+j=s}}^{\infty} \sum_{r=1}^{j} \sum_{\substack{\nu_1+2\nu_2+...+j\nu_j=j \\ \nu_1+\nu_2+...+\nu_j=r \\ \nu_i=0,1,2,...}} \left(\frac{1}{3!}\gamma_1\right)^{\nu_1} \left(\frac{1}{4!}\gamma_2\right)^{\nu_2} ... \left(\frac{1}{(j+2)!}\gamma_j\right)^{\nu_j} \frac{1}{\nu_1!...\nu_j!}.$

Iš čia išplaukia, kad $\hat{\beta}_s$ yra 3s-osios eilės daugianaris atžvilgiu it .

Surasime Apelio daugianarius (2.1.11) formulėje. Esame įrodę 2.1.4 ir 2.1.5 lemose [žr. (2.1.5), (2.1.6) formules], kad

$$\kappa_2 \cdot \left(\exp\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^l \cdot \frac{1}{l!} \cdot \frac{1}{x^2} d\left[P\{X_1 < x\} - P\{X_2 < x\}\right] \right\} - 1 \right) = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^s \hat{\alpha}_s .$$

Pasinaudoję tuo ką gavome, formulėje (2.1.11) Apelio daugianarius galime perrašyti tokiu pavidalu:

$$A_m\left(\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^s \hat{\alpha}_s\right) = (-1)^m \left(\sum_{s'=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{s'} \hat{\alpha}_{s'}\right)^{m+1} \sum_{k=0}^{m-1} g_{mk} \left(\sum_{s''=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{s''} \hat{\alpha}_{s''}\right)^k \qquad (2.1.16)$$

Pakelkime eilutes laipsniu pasinaudoję tokia formule [5]:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k , \qquad (2.1.17)$$

kur $c_0 = a_0^n$, $c_m = \frac{1}{ma_0}\sum_{k=1}^{m}(kn-m+k)a_k c_{m-k}$, kai $m \geq 1$ (n - natūralus skaičius).

Tarkime $\hat{\alpha}_1 \neq 0$, tuomet pakeitę sumavimo tvarką (2.1.16) formulėje ir pritaikę (2.1.17) formulę gauname

$$A_m\left(\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^s \hat{\alpha}_s\right) = (-1)^m \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{m+1} \left(\sum_{s'=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{s'-1} \hat{\alpha}_{s'}\right)^{m+1} \sum_{k=0}^{m-1} g_{mk} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^k \left(\sum_{s''=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{s''-1} \hat{\alpha}_{s''}\right)^k =$$

$$= (-1)^m \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{m+1} \left(\sum_{l'=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{l'} \hat{\alpha}_{l'+1}\right)^{m+1} \sum_{k=0}^{m-1} g_{mk} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^k \left(\sum_{l''=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{l''} \hat{\alpha}_{l''+1}\right)^k =$$

$$= (-1)^m \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{m+1} \sum_{l'=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{l'} c_{l'+1}^{(m)} \sum_{k=0}^{m-1} g_{mk} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^k \sum_{l''=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{l''} c_{l''+1}^{(k)} =$$

$$=\sum_{l'=0}^{\infty}\sum_{l''=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^m\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{l'+l''+m+k+1} g_{mk}c_{l'+1}^{(m)}c_{l''+1}^{(k)}=$$

$$=\sum_{d=m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{d}\sum_{l'=0}^{\infty}\sum_{\substack{l''=0\\ l'+l''+k+m+1=d}}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^m g_{mk}c_{l'+1}^{(m)}c_{l''+1}^{(k)}=\sum_{d=m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{d}W_d^{(it)}.$$

Čia koeficientai yra tokie:

$$\hat{\alpha}_{s'}=\hat{\alpha}_{s''}=(it)^{s+2}\sum_{\substack{j=1\\ 2(r-1)+j=s}}^{\infty}\sum_{r=1}^{j}\sum_{\substack{\nu_1+2\nu_2+\ldots+j\nu_j=j\\ \nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_j=r\\ \nu_i=0,1,2,\ldots}}\left(\frac{1}{3!}\gamma_1\right)^{\nu_1}\left(\frac{1}{4!}\gamma_2\right)^{\nu_2}\ldots\left(\frac{1}{(j+2)!}\gamma_j\right)^{\nu_j}\frac{1}{\nu_1!\ldots\nu_j!},$$

$$\gamma_j=\int_{-\infty}^{\infty}x^j d\left(P\{X_1<x\}-P\{X_2<x\}\right),$$

$$g_{mk}=\sum_{\substack{\nu_1+2\nu_2+\ldots+m\nu_m=m\\ \nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_m=k+1\\ \nu_i=0,1,2,\ldots}}\frac{1}{2^{\nu_1}\ldots(m+1)^{\nu_m}\nu_1!\ldots\nu_m!},\ k=0,1,2,\ldots,\mathrm{m}-1,\ \ i=1,2,\ldots,\mathrm{m},$$

$$c_{l'}^{(m)}=\frac{1}{l'\hat{\alpha}_1}\sum_{s'=1}^{l'}(s'(m+1)-l'+s')\hat{\alpha}_{s'}c_{l'-s'}^{(m)},\qquad c_1^{(m)}=\hat{\alpha}_1^{m+1},$$

$$c_{l''}^{(k)}=\frac{1}{l''\hat{\alpha}_1}\sum_{s''=1}^{l''}(s''k-l''+s'')\hat{\alpha}_{s''}c_{l''-s''}^{(k)},\qquad c_1^{(k)}=\hat{\alpha}_1^{k},$$

$$W_d^{(it)}=\sum_{l'=0}^{\infty}\sum_{\substack{l''=0\\ l'+l''+k+m+1=d}}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^m g_{mk}c_{l'+1}^{(m)}c_{l''+1}^{(k)}.$$

Čia $W_d^{(it)}$ yra $(l'+3)(m+1)+(l''+3)k$ -osios eilės daugianaris atžvilgiu it.

Taigi gavome, kad

$$A_m\left(\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{s}\hat{\alpha}_s\right)=\sum_{d=m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{d}W_d^{(it)}. \tag{2.1.18}$$

Įstatę gautas (2.1.15) ir (2.1.18) išraiškas į formulę (2.1.12) gauname

$$\left(\hat{Q}_G\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\right)^{\kappa_2}=\left(\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\right)^{\kappa_2}\left(1+\sum_{s=1}^{\infty}\hat{\beta}_s\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{s}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\kappa_2}\right)^{m}\sum_{d=m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{d}W_d^{(it)}\right)=$$

$$=\left(\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\right)^{\kappa_2}\left(1+\sum_{s=1}^{\infty}\hat{\beta}_s\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{s}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{2m}\sum_{d=m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^{d}W_d^{(it)}\right)=$$

$$=\left(\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\right)^{\kappa_2}\left(1+\sum_{s=1}^{\infty}\hat{\beta}_s\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^s\right)\left(1+\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^n\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{d=m+1\\2m+d=n}}^{\infty}W_d^{(it)}\right)=$$

$$=\left(\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\right)^{\kappa_2}\left(1+\sum_{s=1}^{\infty}\hat{\beta}_s\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^s+\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^n\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{d=m+1\\2m+d=n}}^{\infty}W_d^{(it)}+\sum_{s=1}^{\infty}\hat{\beta}_s\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^s\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^n\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{d=m+1\\n=2m+d}}^{\infty}W_d^{(it)}\right)=$$

$$=\left(\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\right)^{\kappa_2}\left(1+\sum_{s=1}^{\infty}\hat{\beta}_s\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^s+\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^n\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{d=m+1\\n=2m+d}}^{\infty}W_d^{(it)}+\sum_{g=5}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^g\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n=4}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{d=m+1\\s+2m+d=g}}^{\infty}\hat{\beta}_sW_d^{(it)}\right)=$$

$$=\left(\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\right)^{\kappa_2}\left(1+\sum_{s=1}^{3}\hat{\beta}_s\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^s+\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^4\left(\hat{\beta}_4+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{d=m+1\\2m+d=4}}^{\infty}W_d^{(it)}\right)+\sum_{g=5}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^g\left[\hat{\beta}_g+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{d=m+2\\2m+d=g}}^{\infty}W_d^{(it)}+\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n=4}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{d=m+1\\s+2m+d=g}}^{\infty}\hat{\beta}_sW_d^{(it)}\right]\right)=$$

$$=\left(\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\right)^{\kappa_2}\left(1+\sum_{g=1}^{\infty}c_g\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^g\right),$$

kur $c_g=\hat{\beta}_g$, kai $g=1,2,3,$

$$c_4=\hat{\beta}_4+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{d=m+1\\2m+d=4}}^{\infty}W_d\ ,$$

$$c_g=\hat{\beta}_g+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{d=m+1\\2m+d=g}}^{\infty}W_d+\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n=4}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\substack{d=m+1\\s+2m+d=g}}^{\infty}\hat{\beta}_sW_d\text{, kai } g=5,6,\ldots,$$

$$\hat{\beta}_0=1,\ \hat{\beta}_s=\sum_{\substack{\bar{\nu}_1+2\bar{\nu}_2+\ldots+s\bar{\nu}_s=s\\\bar{\nu}_i=0,1,2,\ldots}}\frac{\hat{\alpha}_1^{\bar{\nu}_1}\ldots\hat{\alpha}_s^{\bar{\nu}_s}}{\bar{\nu}_1!\ldots\bar{\nu}_s!}\quad s=1,2,3,\ldots\text{, o likusios konstantos aprašytos aukščiau.}$$

Taigi gavome asimptotinį charakteringųjų funkcijų skleidinį per Apelio daugianarius:

$$\left(\hat{Q}_G\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\right)^{\kappa_2}=\left(\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\right)^{\kappa_2}\left(1+\sum_{g=1}^{\infty}c_g\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^g\right).$$

Čia c_g yra $3s+(l'+3)(m+1)+(l''+3)k$ -osios eilės daugianaris atžvilgiu it.

□

2.2 Formalus tankių asimptotinis skleidinys

Tarkime, kad nagrinėjami tikimybiniai skirstiniai turi aprėžtus tankius $p_N(x)$ ir $p_G(x)$:

$$p_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\hat{g}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\exp\left\{\int_0^{\infty}\left(e^{\frac{itu}{\sqrt{\kappa_2}}} - 1 - \frac{itu}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\frac{dK_N(u)}{u^2}\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

ir

$$p_G(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\hat{g}_G\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\exp\left\{\int_0^{\infty}\left(e^{\frac{itu}{\sqrt{\kappa_2}}} - 1 - \frac{itu}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\frac{dK_G(u)}{u^2}\right\}dt.$$

Čia imame $\kappa_1 = 0$ ir charakteristines funkcijas užrašome:

$$Me^{\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}}\eta} = \hat{g}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right) = \exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}} - 1 - \frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\frac{dK_N(x)}{x^2}\right\},$$

$$Me^{\frac{it}{\sqrt{\kappa_2}}\xi_{2\delta}} = \hat{g}_G\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right) = \exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}} - 1 - \frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\frac{dK_G(x)}{x^2}\right\},$$

kur $K_N(x) = \begin{cases} 0, \text{ kai } x \le 0, \\ \kappa_2, \text{ kai } x > 0, \end{cases}$

$dK_G(x) = k(x)dx$,

t.y.

$$k(x) = \begin{cases} \dfrac{2\delta x \exp\left\{-\dfrac{2\pi\beta_2}{\alpha}x\right\}}{1 - \exp\left\{-\dfrac{2\pi}{\alpha}x\right\}}, kai \;\; x > 0, \\[2ex] \dfrac{2\delta|x|\exp\left\{-\dfrac{2\pi\beta_1}{\alpha}x\right\}}{1 - \exp\left\{-\dfrac{2\pi}{\alpha}x\right\}}, \;\; kai \;\; x < 0. \end{cases}$$

2.2.1 teorema. *Teisinga formali lygybė*

$$g_G(x) = p_N(x) + \sum_{g=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^g \sum_{h=0}^{H} a_h(-1)^h \frac{d^h p_N(x)}{dx^h}.$$

Įrodymas. Iš teoremos 2.1.1 turime, kad $\left(\hat{Q}_G\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\right)^{\kappa_2} = \left(\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\right)^{\kappa_2}\left(1+\sum_{g=1}^{\infty} c_g\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^g\right).$

Iš šios teoremos įrodymo išplaukia, kad $c_g(t)$ yra $3s+(l'+3)(m+1)+(l''+3)k$ eilės daugianaris atžvilgiu it, o $\hat{\beta}_s$ yra 3s-osios eilės daugianaris atžvilgiu it.

Tegu $H<\infty$ yra baigtinės eilės, tuomet daugianarį $c_g(t)$ galime apibrėžti taip:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} c_g(t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\left(a_0 + a_1(it) + \ldots + a_H(it)^H\right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \sum_{h=0}^{H} a_h \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}(it)^h e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sum_{h=0}^{H} a_h(-1)^h \frac{d^h p_N(x)}{dx^h}.$$

čia $\frac{d^h p_N(x)}{dx^h}(-1)^h = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}(it)^h e^{-\frac{t^2}{2}} dt$,

a_h – daugianario $c_g(t)$ koeficientai, $h = 1, 2, 3, \ldots,$ H.

Iš to gauname, kad

$$p_G(x) = p_N(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{g=1}^{\infty} c_g(t)\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^g dt =$$

$$= p_N(x) + \sum_{g=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^g \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} c_g(t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = p_N(x) + \sum_{g=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^g \sum_{h=0}^{H} a_h(-1)^h \frac{d^h p_N(x)}{dx^h}.$$

□

3. ZD analizė D.Alfers ir H. Dinges metodu

Šiuolaikinėje matematinėje statistikoje yra labai naudinga vieną kurį nors nežinomą skirstinį aproksimuoti gerai žinomu skirstiniu. Vienas iš geriausiai išnagrinėtų ir turintis geras savybes yra normalus, arba kitaip vadinamas Gauso, skirstinys. $\mathrm{GZD}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\delta,\mu)$ tikimybiniai skirstiniai yra naudojami finansų matematikoje, bet apie juos yra nedaug žinoma. Šiame skyriuje mes parodysime, kaip galima šį skirstinį aproksimuoti normaliuoju skirstiniu, remiantis D. Alfers ir H. Dingės [6] įrodytomis teoremomis.

3.1 Beta tikimybinio skirstinio aproksimavimas Gauso dėsniu

D. Alfers ir H. Dinges savo straipsnyje [6] įrodė keletą teiginių apie beta ir su juo susijusių skirstinių aproksimavimą normaliuoju skirstiniu. Jų metodas yra grindžiamas transformacijomis, kurios iš tankio funkcijos išskiria Gauso tankį. Jie remiasi dviem elementariomis funkcijomis $A(\alpha,p)$ ir $D(\alpha,p)$, kurios yra glaudžiai susijusios su Peizer ir Pratt panaudota funkcija $\pi(\alpha,p)$.

D. Alfers ir H. Dinges [6] binominio, beta, Stjudento, gama tikimybinių skirstinių analizei panaudojo originalų metodą ir gavo keletą tvirtinimų, kuriuos panaudosime *ZD* skirstinių analizėje.

2 Apibrėžimas. [6] *Funkcija* $D(\alpha,u)$, *kur* $\alpha\in(0,1)$ *ir* $u\in R^1$, *yra teigiama ir iškila. Visoms* α *reikšmėms* $D(\alpha,0)=1$. *Jos asimptotinis elgesys nusakomas ribomis*

$$\lim_{u\to-\infty}\frac{D(\alpha,u)}{u}=-\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

$$\lim_{u\to\infty}\frac{D(\alpha,u)}{u}=\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

Funkcija $D(\alpha,u)$ *yra simetrinė, kai parametras* $\alpha=\frac{1}{2}$ *ir* $D\left(\frac{1}{2},u\right)=\frac{|u|}{\sqrt{1-e^{-u^2}}}$.

3.1.1 teorema. *Tegu Y yra pasiskirstęs pagal beta pasiskirstymą su parametrais* $\left(\alpha(n+1),(1-\alpha)(n+1)\right)$, *t.y.* $Y\sim Be\left(\alpha(n+1),(1-\alpha)(n+1)\right)$, $0<\alpha<1$, $n+1>0$, *tuomet teisinga lygybė*

$$P(Y \geq p) = \Psi^{(n)}(\alpha, p) = \exp\{S^{(n+1)}(\alpha)\} \cdot \int_p^1 \sqrt{\frac{(n+1)\alpha(1-\alpha)}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{n+1}{2} A^2(\alpha,t)\right\} \frac{dt}{t(1-t)},$$

(3.1.1)

čia $\frac{1}{2} A^2(\alpha,u) = \alpha \ln \frac{\alpha}{u} + (1-\alpha)\ln\frac{1-\alpha}{1-u},$ (3.1.2)

$$S^{(n+1)}(\alpha) = \int_0^\infty \left[e^{-t} + \frac{e^{-t} - e^{-\alpha(n+1)t} - e^{-(1-\alpha)(n+1)t} + e^{-(n+1)t}}{1-e^{-t}}\right]\frac{dt}{t} - \ln\sqrt{\frac{(n+1)\alpha(1-\alpha)}{2\pi}} - \ln\alpha^{-(n+1)\alpha} - \ln(1-\alpha)^{-(n+1)(1-\alpha)}.$$

(3.1.3)

Įrodymas. Pagal beta pasiskirstymo apibrėžimą (žr. [6] (18) formulė) turime

$$P(Y \geq p) = \int_p^1 \frac{u^{\alpha(n+1)-1}(1-u)^{(1-\alpha)(n+1)-1}}{B(\alpha(n+1),(1-\alpha)(n+1))} du = \frac{1}{B(\alpha(n+1),(1-\alpha)(n+1))}\int_p^1 u^{\alpha(n+1)}(1-u)^{(1-\alpha)(n+1)} \frac{du}{u(1-u)}$$

(3.1.4)

Pertvarkome pointegralinę išraišką ir gauname:

$$\begin{aligned}
&u^{\alpha(n+1)}(1-u)^{(1-\alpha)(n+1)} = e^{\ln u^{\alpha(n+1)}} \cdot e^{\ln(1-u)^{(1-\alpha)(n+1)}} = \\
&= \exp\{\alpha(n+1)\ln u + (1-\alpha)(n+1)\ln(1-u)\} = \\
&= \exp\{(n+1)[\alpha \ln u + (1-\alpha)\ln(1-u)]\} = \\
&= \frac{\exp\left\{-(n+1)[\alpha\ln\frac{1}{u} + (1-\alpha)\ln\frac{1}{1-u}]\right\}\exp\{-(n+1)[\alpha\ln\alpha + (1-\alpha)\ln(1-\alpha)]\}}{\exp\{-(n+1)[\alpha\ln\alpha + (1-\alpha)\ln(1-\alpha)]\}} = \\
&= \frac{1}{\alpha^{-(n+1)\alpha}(1-\alpha)^{-(n+1)(1-\alpha)}}\exp\left\{-(n+1)\left[\alpha\ln\frac{1}{u} + (1-\alpha)\ln\frac{1}{1-u} + \alpha\ln\alpha + (1-\alpha)\ln(1-\alpha)\right]\right\} = \\
&= \frac{1}{\alpha^{-(n+1)\alpha}(1-\alpha)^{-(n+1)(1-\alpha)}}\exp\left\{-(n+1)\left[\alpha\ln\frac{\alpha}{u} + (1-\alpha)\ln\frac{1-\alpha}{1-u}\right]\right\} = \\
&= \frac{1}{\alpha^{-(n+1)\alpha}(1-\alpha)^{-(n+1)(1-\alpha)}}\exp\left\{-\frac{n+1}{2}A^2(\alpha,u)\right\}.
\end{aligned}$$

Dabar įstatome į (3.1.4) ir gauname:

$$P(Y \geq p) = \frac{1}{B(\alpha(n+1),(1-\alpha)(n+1))} \cdot \frac{1}{\alpha^{-(n+1)\alpha}(1-\alpha)^{-(n+1)(1-\alpha)}}\int_p^1 \exp\left\{-\frac{n+1}{2}A^2(\alpha,u)\right\}\frac{du}{u(1-u)}.$$

Tarkime

$$\exp\{S^{(n+1)}(\alpha)\} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(n+1)\alpha(1-\alpha)}{2\pi}} B(\alpha(n+1),(1-\alpha)(n+1))\alpha^{-(n+1)\alpha}(1-\alpha)^{-(n+1)(1-\alpha)}}, \qquad (3.1.5)$$

tuomet gauname (3.1.1) formulę:

$$P(Y \geq p) = \exp\{S^{(n+1)}(\alpha)\} \cdot \int_p^1 \sqrt{\frac{(n+1)\alpha(1-\alpha)}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{n+1}{2} A^2(\alpha, u)\right\} \frac{du}{u(1-u)} .$$

Išnagrinėkime $S^{(n+1)}(\alpha)$ išraišką. Pasinaudoję (3.1.5) formule logaritmuojame abi lygybės puses:

$$S^{(n+1)}(\alpha) + \ln\sqrt{\frac{(n+1)\alpha(1-\alpha)}{2\pi}} + \ln \alpha^{-(n+1)\alpha} + \ln(1-\alpha)^{-(n+1)(1-\alpha)} + \ln B(\alpha(n+1), (1-\alpha)(n+1)) = 0 .$$

Pasinaudoję formulėmis:

1. $\ln \Gamma(z) = \int_0^\infty \left[(z-1)e^{-t} - \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{1-e^{-t}} \right] \frac{dt}{t}$,

2. $B(z, \omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}$ (žr. [7], psl. 84) gauname, kad

$$B(\alpha(n+1), (1-\alpha)(n+1)) = \frac{\Gamma(\alpha(n+1))\Gamma((1-\alpha)(n+1))}{\Gamma(\alpha(n+1) + (1-\alpha)(n+1))} = \frac{\Gamma(\alpha(n+1))\Gamma((1-\alpha)(n+1))}{\Gamma(n+1)},$$

$$\ln B(\alpha(n+1), (1-\alpha)(n+1)) = \ln \frac{\Gamma(\alpha(n+1))\Gamma((1-\alpha)(n+1))}{\Gamma(n+1)} =$$
$$= \ln\Gamma(\alpha(n+1)) + \ln\Gamma((1-\alpha)(n+1)) - \ln\Gamma(n+1).$$

Iš to seka, kad

$$\ln B(\alpha(n+1), (1-\alpha)(n+1)) = \int_0^\infty \left[(\alpha(n+1)-1)e^{-t} - \frac{e^{-t} - e^{-\alpha(n+1)t}}{1-e^{-t}} \right] \frac{dt}{t} +$$
$$+ \int_0^\infty \left[((1-\alpha)(n+1)-1)e^{-t} - \frac{e^{-t} - e^{-(1-\alpha)(n+1)t}}{1-e^{-t}} \right] \frac{dt}{t} - \int_0^\infty \left[((n+1)-1)e^{-t} - \frac{e^{-t} - e^{-(n+1)t}}{1-e^{-t}} \right] \frac{dt}{t} =$$
$$= \int_0^\infty \left[(\alpha(n+1) - 1 + (1-\alpha)(n+1) - 1 - (n+1) + 1)e^{-t} - \frac{e^{-t} - e^{-\alpha(n+1)t} + e^{-t} - e^{-(1-\alpha)(n+1)t} - e^{-t} + e^{-(n+1)t}}{1-e^{-t}} \right] \frac{dt}{t} =$$
$$= -\int_0^\infty \left[e^{-t} + \frac{e^{-t} - e^{-\alpha(n+1)t} - e^{-(1-\alpha)(n+1)t} + e^{-(n+1)t}}{1-e^{-t}} \right] \frac{dt}{t}.$$

Panaudojus šias formules gauname $S^{(n+1)}(\alpha)$ (3.1.3) formulę:

$$S^{(n+1)}(\alpha) = \int_0^\infty \left[e^{-t} + \frac{e^{-t} - e^{-\alpha(n+1)t} - e^{-(1-\alpha)(n+1)t} + e^{-(n+1)t}}{1-e^{-t}} \right] \frac{dt}{t} - \ln\sqrt{\frac{(n+1)\alpha(1-\alpha)}{2\pi}} - \ln \alpha^{-(n+1)\alpha} - \ln(1-\alpha)^{-(n+1)(1-\alpha)}.$$

□

3.1.2 teorema. *Tegu Y yra pasiskirstęs pagal Beta pasiskirstymą su parametrais* $\left(\alpha(n+1),(1-\alpha)(n+1)\right)$, *t.y.* $Y \sim Be\left(\alpha(n+1),(1-\alpha)(n+1)\right)$, $0<\alpha<1$, $n+1>0$, *tuomet teisinga lygybė*

$$P(Y \geq p) = \Psi^{(n)}(\alpha, p) = \exp\{S^{(n+1)}(\alpha)\} \cdot \int\limits_{-\infty}^{A(\alpha,p)} \sqrt{\frac{(n+1)}{2\pi}} \exp(-\frac{n+1}{2}a^2) D(\alpha, a)da, \quad (3.1.6)$$

čia $\frac{1}{2}A^2(\alpha,u) = \alpha \ln\frac{\alpha}{u} + (1-\alpha)\ln\frac{1-\alpha}{1-u}$.

Įrodymas. Pasinaudojame įrodyta formule (3.1.1), kurioje atliekame kintamųjų pakeitimą, ir straipsnyje [6] D. Alfers ir H. Dinges nustatytomis funkcijos $A(\alpha,t)$ savybėmis:

$$A(\alpha,t) = a. \quad (3.1.7)$$

Suraskime integralo rėžius:

Iš to, kad $A(\alpha,t) = \frac{\alpha - t}{t(1-t)}\sqrt{1+\pi(\alpha,p)}$ ir $\frac{1}{2}A^2(\alpha,t) = \alpha\ln\frac{\alpha}{t} + (1-\alpha)\ln\left(\frac{1-\alpha}{1-t}\right)$, $0<\alpha<1$, $0<t<1$ [6], seka, kad

$$\lim A(\alpha,t) = -\infty, \text{ kai } t \to 1,$$

$$\lim A(\alpha,t) = A(\alpha,p), \text{ kai } t \to p.$$

Tuomet išsireiškiame

$$t = A^{-1}(\alpha,a).$$

Pasirėmę [8] turime, kad

$$\left(A^{-1}(\alpha,a)\right)_a^{'} = \frac{1}{\left(A(\alpha,t)\right)_t^{'}}.$$

Iš čia gauname

$$dt = dA^{-1}(\alpha,a) = \left(A^{-1}(\alpha,a)\right)_a^{'} da = \frac{da}{\left(A(\alpha,t)\right)_t^{'}}.$$

Pažymėkime

$$D(\alpha,a) = -\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\frac{1}{A^{-1}(\alpha,a)(1-A^{-1}(\alpha,a))\left(A(\alpha,t)\right)_t^{'}}. \quad (3.1.8)$$

Įstatę gautas išraiškas į (3.1.1) formulę gauname teoremos tvirtinimą:

$$P(Y \geq p) = \exp\{S^{(n+1)}(\alpha)\} \cdot \int\limits_{-\infty}^{A(\alpha,p)} \sqrt{\frac{(n+1)}{2\pi}} \exp\left(-\frac{n+1}{2}a^2\right) D(\alpha,a)da.$$

□

Visoms tradicinėms aproksimacijoms svarbi situacija, kai αn ir βn yra dideli, o $|\alpha - p|$ mažas. Tada užtenka pakeisti $\exp\{S^{(n+1)}(\alpha)\} \cdot D(\alpha, a) = 1$.

Pateikiame kelis teiginius iš straipsnio [6], kurie bus naudojami tolesniuose įrodymuose.

1 teiginys. *Tegu X yra pasiskirstęs pagal standartinį normalų skirstinį, o Y_n pagal beta skirstinį su parametrais $(\alpha(n+1), (1-\alpha)(n+1))$. Tuomet visiems fiksuotiems p, kai $n \to \infty$ ir $\alpha_n \to \alpha \in (0,1)$ teisinga lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(Y_n \geq p)}{P(X \leq \sqrt{n+1} A(\alpha_n, p))} = D(\alpha, p).$$

□

2 teiginys. *Tegu Y yra pasiskirstęs pagal Beta skirstinį su parametrais $(\alpha(n+1), (1-\alpha)(n+1))$. Tarkime, kad parametrai yra dideli. Tuomet galime aproksimuoti standartiniu normaliuoju X skirstiniu*

$$P(A(\alpha, Y) \leq a) \sim P(X \leq \sqrt{n+1} a), \text{ jei } a \text{ nedidelis} \tag{3.1.9}$$

arba

$$P(Y \geq p) \sim P(X \leq \sqrt{n+1} \cdot A(\alpha, p)), \text{ jei } p - a \text{ nedidelis.} \tag{3.1.10}$$

□

3 teiginys. *Tegu Y' yra pasiskirstęs pagal Beta pasiskirstymą su parametrais $(k, n+1-k)$, t.y. $Y \sim Be(k, n+1-k)$ ir $\alpha = \frac{k}{n} < 1$ tuomet visiems $p \in (0,1)$ teisinga lygybė*

$$P(Y' \leq p) = \exp\{S^{(n)}(\alpha)\} \cdot \int_{A(\alpha,p)}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \exp\left(-\frac{n}{2} a^2\right) \left[D(\alpha, a) + \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} a \right] da. \tag{3.1.11}$$

arba

$$P(A(\alpha, Y') \geq a) \geq P(X \geq \sqrt{n} a) \tag{3.1.11'}$$

Čia atsitiktinis dydis *X* yra pasiskirstęs pagal standartinį normalų skirstinį.

□

4 teiginys. *Tegu* Y'' *yra pasiskirstęs pagal beta pasiskirstymą su parametrais* $(k+1, n-k)$, *t.y.* $Y \sim Be(k+1, n-k)$ *ir* $\alpha = \dfrac{k}{n} > 0$ *tuomet visiems* $p \in (0,1)$ *teisinga lygybė*

a) kai $p \in (0,1)$

$$P(Y'' \geq p) = \exp\{S^{(n)}(\alpha)\} \cdot \int_{-\infty}^{A(\alpha,p)} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \exp\left(-\frac{n}{2}a^2\right)\left[D(\alpha,a) + \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}a\right] da. \tag{3.1.12}$$

b) kai $a \in (-\infty, +\infty)$

$$P(A(\alpha, Y'') \geq a) \geq P(X \leq a\sqrt{n}), \tag{3.1.12'}$$

kur *X* yra pasiskirstęs pagal standartinį normalų pasiskirstymą.

□

3.2 ZD *skirstinių aproksimavimas Gauso skirstiniu (Dinges metodas)*

Šiame skyrelyje įrodysime svarbų sąryšį tarp beta ir *ZD* skirstinių, kuriuo pasinaudojus galėsime taikyti D. Alfers, H. Dinges teoremas.

GZD$(\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta, \mu)$ skirstinių klasę apibrėžėme 2 skyriuje. Šiame skyriuje mes panagrinėsime atskirą atvejį, kai parametras $\delta = \dfrac{1}{2}$.

Jei 2δ=1, tai $\xi_1 \in GZD\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \dfrac{1}{2}, \mu\right)$ charakteristinė funkcija yra

$$\hat{Q}_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} g_1(x)dx, \quad t \in R^1,$$

kur tankis yra

$$g_1(x) = \frac{2\pi \exp\left\{\dfrac{2\pi\beta_1}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{\alpha B(\beta_1, \beta_2)\left(1 + \exp\left\{\dfrac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}\right)^{\beta_1+\beta_2}}, \quad x \in R^1.$$

Atsitiktinis dydis ξ_1 yra atsitiktinio dydžio $\theta \sim Be(\beta_1, \beta_2)$ funkcija.

3.2.1 lema. *Teisinga lygybė*

$$P\{\xi_1 < x\} = P\left\{\theta < \frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}\right\}, \tag{3.2.1}$$

visiems $x \in R^1$.

Čia atsitiktinis dydis $\theta = \dfrac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}$, $\theta \sim Be(\beta_1, \beta_2)$, *jo tankio funkcija*

$$p(u) = \frac{1}{B(\beta_1,\beta_2)} u^{\beta_1-1}(1-u)^{\beta_2-1}, \quad u \in [0,1].$$

Įrodymas. Lemos tvirtinimas išplaukia iš $P\{\xi_1 < x\} = \int_{-\infty}^{x} g_1(u)du$, atlikus kintamųjų pakeitimą po integralo ženklu.

Atliekame kintamųjų pakeitimą $v = \frac{2\pi}{\alpha}(u-\mu)$, tai $u = \mu + \frac{\alpha}{2\pi}v$, $\mathrm{d}u = \frac{\alpha}{2\pi}dv$ ir gauname

$$P\{\xi_1 < x\} = \int_{-\infty}^{x} g_1(u)du = \int_{-\infty}^{x} \frac{2\pi\exp\left\{\frac{2\pi\beta_1}{\alpha}(u-\mu)\right\}}{\alpha B(\beta_1,\beta_2)\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(u-\mu)\right\}\right)^{\beta_1+\beta_2}}du =$$

$$= \frac{2\pi}{\alpha B(\beta_1,\beta_2)} \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)} \frac{e^{\beta_1 v}}{(1+e^v)^{\beta_1+\beta_2}}dv = \frac{1}{B(\beta_1,\beta_2)} \int_{-\infty}^{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)} \left(\frac{e^v}{1+e^v}\right)^{\beta_1} \frac{dv}{(1+e^v)^{\beta_2}}$$

Dar kartą atliekame kintamųjų pakeitimą $y = \dfrac{e^v}{1+e^v}$, $e^v = \dfrac{y}{1-y}$ ir gauname

$$e^v dv = de^v = d\frac{y}{1-y} = \frac{1-y+y}{(1-y)^2}dy = \frac{1}{(1-y)^2}dy,$$

$$dv = e^{-v}\frac{1}{(1-y)^2}dy = \left(\frac{y}{1-y}\right)^{-1}\frac{dy}{(1-y)^2} = \frac{dy}{(1-y)y},$$

o kintamojo y kitimo sritis yra $0 \le y \le \dfrac{e^{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)}}{1+e^{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)}}$.

Gauname, kad

$$P\{\xi_1 < x\} = \frac{1}{B(\beta_1,\beta_2)} \int_0^{\frac{e^{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)}}{1+e^{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)}}} y^{\beta_1} \frac{1}{\left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\beta_2}} \frac{dy}{(1-y)y} = \frac{1}{B(\beta_1,\beta_2)} \int_0^{\frac{e^{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)}}{1+e^{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)}}} y^{\beta_1-1}(1-y)^{\beta_2-1}dy.$$

Kadangi atsitiktinis dydis $\theta \sim Be(\beta_1,\beta_2)$, tai $P\{\theta < u\} = \frac{1}{B(\beta_1,\beta_2)} \int_0^u z^{\beta_1-1}(1-z)^{\beta_2-1}dz$, $z \in [0,1]$, iš čia gauname, kad $P\{\xi_1 < x\} = P\left\{\theta < \frac{e^{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)}}{1+e^{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)}}\right\}$.

Suraskime, kam lygus x kairėje lygybės pusėje.

Pažymime $w = \frac{e^{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)}}{1+e^{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)}}$ ir tada gauname

$$w + w\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\} = \exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\} \Rightarrow$$

$$w = \exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\} - w\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\} \Rightarrow$$

$$w = \exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}(1-w) \Rightarrow$$

$$\frac{w}{(1-w)} = \exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}.$$

Logaritmuojame abi lygybės $\frac{w}{(1-w)} = \exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}$ puses ir gauname

$$\ln\frac{w}{(1-w)} = \frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu).$$

Iš čia

$$x = \mu + \frac{\alpha}{2\pi}\ln\frac{w}{(1-w)}.$$

Tada gauname lygybę, kad

$$P\left\{\xi_1 < \mu + \frac{\alpha}{2\pi}\ln\frac{w}{(1-w)}\right\} = P\{\theta < w\}. \tag{3.2.2}$$

Suraskime sąryšį tarp atsitiktinio dydžio $\theta \sim Be(\beta_1,\beta_2)$ ir $\xi_1 \in ZD(\alpha,\beta_1,\beta_2,\mu)$.

Iš (3.2.2) gauname, kad

$$\xi_1 < \mu + \frac{\alpha}{2\pi}\ln\frac{w}{(1-w)} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1 - \mu) < \ln\frac{w}{(1-w)}.$$

Eksponencijuojam abi nelygybės puses ir gauname, kad

$$\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1 - \mu)\right\} < \frac{w}{(1-w)} \quad \Rightarrow$$

$$w > (1-w)\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1 - \mu)\right\} \quad \Rightarrow$$

$$w > \exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1 - \mu)\right\} - w\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1 - \mu)\right\} \quad \Rightarrow$$

$$w\left(1 + \exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1 - \mu)\right\}\right) > \exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1 - \mu)\right\} \quad \Rightarrow$$

$$w > \frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1 - \mu)\right\}}{1 + \exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1 - \mu)\right\}}.$$

Gauname, kad $P\left\{\frac{e^{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)}}{1+e^{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)}} < w\right\} = P\{\theta < w\}$.

Tada galime daryti išvadą, kad atsitiktinio dydžio θ išraiška yra $\theta = \frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1 - \mu)\right\}}{1 + \exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1 - \mu)\right\}}$.

□

3.2.1 išvada. *Atsitiktinio dydžio* ξ_1 *tikimybinį skirstinį galime išreikšti beta tikimybinio skirstinio pagalba:*

$$\theta = \frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1 - \mu)\right\}}{1 + \exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1 - \mu)\right\}},$$

$$\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1 - \mu)\right\} = \theta + \theta\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1 - \mu)\right\},$$

$$\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}=\frac{\theta}{1-\theta},$$

logaritmuodami gauname

$$\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)=\ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right),$$

tai

$$\xi_1=\mu+\frac{\alpha}{2\pi}\ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right). \tag{3.2.3}$$

□

Kai atsitiktinį dydį ξ_1 išreiškėme beta atsitiktiniu dydžiu θ, tai dabar ξ_1 savybes galime tirti panaudojant teoremas apie θ tikimybinį skirstinį. Tai atliksime kitame paragrafe.

Pastaba. Norėdami pritaikyti D. Alfers ir H. Dinges įrodytas teoremas reikia pakeisti įrodytoje 3.2.1 lemoje formulę:

$$P\{\xi_1>x\}=P\left\{\theta>\frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}\right\}.$$

3.3 Tikimybinio skirstinio $Q_1(x)$ aproksimavimas Gauso dėsniu

Šiame skyrelyje pasinaudosime gautu sąryšiu (3.2.1) ir pritaikysime D. Alfers ir H Dinges [6] įrodytas teoremas mūsų nagrinėjamiems $\xi_1\in ZD(\alpha,\beta_1,\beta_2,\mu)$.

3.3.1 lema. *Tarkime, kad $\beta_1+\beta_2$ yra sveikasis skaičius $(\beta_1+\beta_2\geq 2)$. Tuomet*

$$P\{\xi_1>x\}=\exp\left\{S^{(\beta_1+\beta_2)}\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\right)\right\}\cdot\int_{y(x)}^{1}\sqrt{\frac{\beta_1\beta_2}{2\pi(\beta_1+\beta_2)}}\exp\left\{-\frac{\beta_1+\beta_2}{2}A^2\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2},u\right)\right\}\frac{du}{u(u-1)},$$

$$P\{\xi_1>x\}=\exp\left\{S^{(\beta_1+\beta_2)}\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\right)\right\}\cdot\int_{-\infty}^{A\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2},\,y(x)\right)}\sqrt{\frac{\beta_1+\beta_2}{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\beta_1+\beta_2}{2}u^2\right\}D\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2},u\right)du.$$

(3.3.1)

Čia $$y(x)=\frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}},$$

$$\frac{1}{2}A^2\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2},y(x)\right)=\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\ln\left[\frac{\beta_1}{y(x)(\beta_1+\beta_2)}\right]+\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\ln\left[\frac{\beta_2}{(1-y(x))(\beta_1+\beta_2)}\right], \quad (3.3.2)$$

$$S^{(\beta_1+\beta_2)}\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\right)\approx\frac{1}{12(\beta_1+\beta_2)}\left(1-\frac{(\beta_1+\beta_2)^2}{\beta_1\beta_2}\right).$$

Pagal formulę (3.1.3) turime, kad

$$S^{(\beta_1+\beta_2)}\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\right)=\int_0^\infty\left[e^{-t}+\frac{e^{-t}-e^{-\beta_1 t}-e^{-\beta_2 t}+e^{-(\beta_1+\beta_2)t}}{1-e^{-t}}\right]\frac{dt}{t}-\ln\sqrt{\frac{1}{2\pi}\frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1+\beta_2}}-\ln\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\right)^{-\beta_1}-\ln\left(\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\right)^{-\beta_2}.$$

Įrodymas. Lemos įrodymas išplaukia iš teoremos 3.1.1 ir teoremos 3.1.2 bei lemos 3.2.1. Mūsų atveju $\theta \sim Be(\beta_1,\beta_2)$, tuomet gauname parametrų $\tilde{\alpha}$ ir n reikšmes:

$$\begin{cases}\tilde{\alpha}(n+1)=\beta_1,\\(1-\tilde{\alpha})(n+1)=\beta_2.\end{cases}$$

Iš čia išplaukia

$$\tilde{\alpha}(n+1)+(1-\tilde{\alpha})(n+1)=\beta_1+\beta_2,$$

$$(n+1)=\beta_1+\beta_2,$$

$$\tilde{\alpha}(n+1)-(1-\tilde{\alpha})(n+1)=\beta_1-\beta_2,$$

$$2\tilde{\alpha}(\beta_1+\beta_2)=\beta_1-\beta_2+\beta_1+\beta_2.$$

Gavome, kad

$$\tilde{\alpha}=\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2} \quad (3.3.3)$$

Čia tariame, kad β_1 ir β_2 yra sveiki skaičiai.

$$n=\beta_1+\beta_2-1 \quad (3.3.4)$$

Yra būtini apribojimai

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}(n+1) > 0, \\ (1-\tilde{\alpha})(n+1) > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\alpha} > 0, \\ \tilde{\alpha} < 1. \end{cases}$$

Kadangi $0 < \dfrac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} < 1$, tai iš čia išplaukia, kad $\beta_1 > 0$, $\beta_1 < \beta_1 + \beta_2$, tai $\beta_2 > 0$.

Tokie apribojimai yra ir GZD($\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta, \mu$) apibrėžime [4].

Pasinaudoję teorema 3.1.1 gausime, kad

$$P\left\{ \frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1 - \mu)\right\}}{1 + \exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1 - \mu)\right\}} \geq y(x) \right\} = \Psi^{(n)}\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}, y(x) \right) = \exp\left\{ S^{(\beta_1+\beta_2)}\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \right) \right\} \times$$

$$\times \int_{y(x)}^{1} \sqrt{\frac{(\beta_1+\beta_2)\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}}{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{\beta_1+\beta_2}{2} A^2\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}, u \right) \right\} \frac{du}{u(u-1)} =$$

$$= \exp\left\{ S^{(\beta_1+\beta_2)}\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \right) \right\} \int_{y(x)}^{1} \sqrt{\frac{\beta_1\beta_2}{2\pi(\beta_1+\beta_2)}} \exp\left\{ -\frac{\beta_1+\beta_2}{2} A^2\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}, u \right) \right\} \frac{du}{u(u-1)}.$$

Iš 3.1.2 teoremos išplaukia antroji teoremos lygybė:

$$P\left\{ \frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1 - \mu)\right\}}{1 + \exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1 - \mu)\right\}} \geq y(x) \right\} = \exp\left\{ S^{(\beta_1+\beta_2)}\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \right) \right\} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{A\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}, y(x)\right)} \sqrt{\frac{\beta_1+\beta_2}{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{\beta_1+\beta_2}{2} u^2 \right\} D\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}, u \right) du.$$

Iš (3.1.3) gauname, kad

$$S^{(\beta_1+\beta_2)}\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \right) = \int_0^{\infty} \left[e^{-t} + \frac{e^{-t} - e^{-\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}(\beta_1+\beta_2)t} - e^{-\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}(\beta_1+\beta_2)t} + e^{-(\beta_1+\beta_2)t}}{1-e^{-t}} \right] \frac{dt}{t} -$$

$$-\ln\sqrt{\frac{(\beta_1+\beta_2)\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}}{2\pi}} - \ln\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2} \right)^{-(\beta_1+\beta_2)\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}} - \ln\left(\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2} \right)^{-(\beta_1+\beta_2)\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}} =$$

$$= \int_0^{\infty} \left[e^{-t} + \frac{e^{-t} - e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t} + e^{-(\beta_1+\beta_2)t}}{1-e^{-t}} \right] \frac{dt}{t} - \ln\sqrt{\frac{1}{2\pi}\frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1+\beta_2}} - \ln\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2} \right)^{-\beta_1} - \ln\left(\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2} \right)^{-\beta_2}.$$

□

3.3.1 išvada. *Teisinga lygybė*

$$A\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}, y(x)\right)=\sqrt{-\frac{2\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\left(\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right)+\frac{2}{\beta_1+\beta_2}\ln\frac{\beta_1^{\beta_1}\beta_2^{\beta_2}}{(\beta_1+\beta_2)^{\beta_1+\beta_2}}+\ln\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}\right)^2}\ . \tag{3.3.5}$$

Įrodymas. Turime, kad

$$y(x)=\frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}.$$

Logaritmuojame $y(x)$ ir $1-y(x)$ išraišką:

$$\ln y(x)=\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)-\ln\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}\right);$$

$$\ln(1-y(x))=\ln\left(1-\frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}\right)=-\ln\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}\right).$$

Įstatome šias išraiškas į (3.3.2) formulę ir gauname

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}A^2\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}, y(x)\right)&=\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\ln\left[\frac{\beta_1}{y(x)(\beta_1+\beta_2)}\right]+\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\ln\left[\frac{\beta_2}{(1-y(x))(\beta_1+\beta_2)}\right]=\\
&=\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\ln\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}+\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\ln\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}-\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\left[\left(\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right)-\ln\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}\right)\right]+\\
&+\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\ln\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}\right)=\\
&=\frac{1}{\beta_1+\beta_2}\ln\left[\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\right)^{\beta_1}\cdot\left(\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\right)^{\beta_2}\right]-\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\left(\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right)+\frac{1}{\beta_1+\beta_2}\ln\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}\right)^{\beta_1+\beta_2}=\\
&=-\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\left(\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right)+\frac{1}{\beta_1+\beta_2}\ln\frac{\beta_1^{\beta_1}\beta_2^{\beta_2}}{(\beta_1+\beta_2)^{\beta_1+\beta_2}}+\ln\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}\right)
\end{aligned}$$

Iš čia gauname, kad

$$A\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}, y(x)\right)=\sqrt{-\frac{2\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\left(\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right)+\frac{2}{\beta_1+\beta_2}\ln\frac{\beta_1^{\beta_1}\beta_2^{\beta_2}}{(\beta_1+\beta_2)^{\beta_1+\beta_2}}+\ln\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}\right)^2}\ .$$

□

3.3.2 išvada. *Tarkime* $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ *, tuomet teisingos lygybės:*

$$P\{\xi_1 > x\} = -e^{-\frac{1}{8}\beta} \cdot \int_{y(x)}^{1} \sqrt{\frac{\beta}{4\pi}} 4^{\beta} u^{\beta-1}(1-u)^{\beta-1} du,$$

$$P\{\xi_1 > x\} = e^{-\frac{1}{8}\beta} \cdot \int_{-\infty}^{A\left(\frac{1}{2}, y(x)\right)} \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} e^{-\beta u^2} \frac{|u|}{\sqrt{1-e^{-u^2}}} \frac{du}{u(u-1)}.$$

Įrodymas. Kai $\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2} = \frac{1}{2}$, tai iš lemos 3.3.1 gauname, kad

$$S^{(2\beta)}\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{24\beta}\left(1 - \frac{4\beta^2}{\beta^2}\right) = -\frac{1}{8}\beta,$$

$$\frac{1}{2} A^2\left(\frac{1}{2}, u\right) = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1}{2u}\right] + \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1}{2(1-u)}\right].$$

Iš čia

$$A^2\left(\frac{1}{2}, u\right) = \ln\left[\frac{1}{4u(1-u)}\right].$$

Tada pirmoji lemos 3.3.1 lygybė užsirašo

$$P\{\xi_1 > x\} = e^{-\frac{1}{8}\beta} \cdot \int_{y(x)}^{1} \sqrt{\frac{\beta}{4\pi}} \exp\left\{-\beta \cdot A^2\left(\frac{1}{2}, u\right)\right\} \frac{du}{u(u-1)} =$$

$$= e^{-\frac{1}{8}\beta} \cdot \int_{y(x)}^{1} \sqrt{\frac{\beta}{4\pi}} \exp\left\{-\beta \cdot \ln\left(\frac{1}{4u(1-u)}\right)\right\} \frac{du}{u(u-1)} =$$

$$= e^{-\frac{1}{8}\beta} \cdot \int_{y(x)}^{1} \sqrt{\frac{\beta}{4\pi}} \exp\left\{\ln\left(\frac{1}{4u(1-u)}\right)^{-\beta}\right\} \frac{du}{u(u-1)} =$$

$$= e^{-\frac{1}{8}\beta} \cdot \int_{y(x)}^{1} \sqrt{\frac{\beta}{4\pi}} \left(\frac{1}{4u(1-u)}\right)^{-\beta} \frac{du}{u(u-1)} =$$

$$= -e^{-\frac{1}{8}\beta} \cdot \int_{y(x)}^{1} \sqrt{\frac{\beta}{4\pi}} 4^{\beta} u^{\beta-1}(1-u)^{\beta-1} du.$$

Kai parametras $\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2} = \frac{1}{2}$, *tai funkcija* $D\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}, u\right)$ *yra simetrinė ir*

$$D\left(\frac{1}{2}, u\right) = \frac{|u|}{\sqrt{1-e^{-u^2}}}.$$

Iš formulės (3.3.5) turime, kad

$$A\left(\frac{1}{2}, y(x)\right) = \sqrt{-\left(\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right) + \frac{1}{\beta}\ln\frac{\beta^{2\beta}}{\left(4\beta^2\right)^{\beta}} + \frac{1}{\beta}\ln\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}\right)^{2\beta}} =$$

$$= \sqrt{-\left(\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right) + \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{1}{4}\right)^{\beta} + \frac{1}{\beta}\ln\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}\right)^{2\beta}} =$$

$$= \sqrt{-\left(\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right) + \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}\right)^{2}} =$$

$$= \sqrt{-\left(\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right) + \ln\left(\frac{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{2}\right)^{2}}. \tag{3.3.6}$$

Tuomet antroji 3.3.1 lemos lygybė užsirašo

$$P\{\xi_1 > x\} = e^{-\frac{1}{8}\beta} \cdot \int_{-\infty}^{A\left(\frac{1}{2}, y(x)\right)} \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} e^{-\beta u^2} \frac{|u|}{\sqrt{1-e^{-u^2}}} \frac{du}{u(u-1)}.$$

□

3.3.1 teorema. *Tarkime, kad atsitiktinio dydžio* ξ_1 *tikimybinis skirstinys yra* $G_1(x) = \int_{-\infty}^{x} g_1(u)du$ *, kurio parametrai* $\beta_1 = \beta_{1\tau}$ ir $\beta_2 = \beta_{2\tau}$ *(*$\beta_{1\tau}$ ir $\beta_{2\tau}$ *yra sveiki skaičiai) priklauso nuo* τ ir $\tau \to \infty$. *Tarkime, kad*

$$\frac{\beta_{1\tau}}{\beta_{1\tau} + \beta_{2\tau}} \to \frac{1}{2}, \quad \beta_{1\tau} + \beta_{2\tau} \to \infty, \ \ kai \ \ \tau \to \infty.$$

Tuomet

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{P\{\xi_1 \geq x\}}{\Phi\left(\sqrt{\beta_{1\tau} + \beta_{2\tau}}\, A\left(\frac{\beta_{1\tau}}{\beta_{1\tau} + \beta_{2\tau}}, \frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}\right)\right)} = \frac{\dfrac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}}{\sqrt{1-e^{-y^2(x)}}},$$

čia $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$

Įrodymas. Teoremos įrodymas išplaukia iš 1 teiginio ir 3.2.1 lemos. Atsitiktinis dydis θ yra pasiskirstęs pagal beta pasiskirstymą su parametrais β_1, β_2, t.y. $\theta \sim Be(\beta_1, \beta_2)$. 3.3.1 lemoje esame įrodę [žr. (3.3.3) ir (3.3.4) formules], kad

$$\tilde{\alpha} = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2},$$

$$\tilde{\alpha}_\tau = \frac{\beta_{1\tau}}{\beta_{1\tau} + \beta_{2\tau}},$$

$$n = \beta_{1\tau} + \beta_{2\tau} - 1.$$

Todėl pritaikę 1 teiginį gauname, kad

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{P(\theta_\tau \geq y(x))}{P\left(Z \leq \sqrt{\beta_{1\tau} + \beta_{2\tau}} A\left(\frac{\beta_{1\tau}}{\beta_{1\tau} + \beta_{2\tau}}, y(x) \right)\right)} = D\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}, y(x) \right),$$

čia $y(x) = \frac{\exp\left\{ \frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu) \right\}}{1 + \exp\left\{ \frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu) \right\}}.$

Kadangi $\frac{\beta_{1\tau}}{\beta_{1\tau} + \beta_{2\tau}} \to \frac{1}{2}$, reiškia $\frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} = \frac{1}{2}$. Taigi gauname, kad

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{P\left(\theta_\tau \geq \frac{\exp\left\{ \frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu) \right\}}{1 + \exp\left\{ \frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu) \right\}} \right)}{P\left(X \leq \sqrt{\beta_{1\tau} + \beta_{2\tau}} A\left(\frac{\beta_{1\tau}}{\beta_{1\tau} + \beta_{2\tau}}, \frac{\exp\left\{ \frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu) \right\}}{1 + \exp\left\{ \frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu) \right\}} \right)\right)} = D\left(\frac{1}{2}, \frac{\exp\left\{ \frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu) \right\}}{1 + \exp\left\{ \frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu) \right\}} \right).$$

Pagal 2 apibrėžimą turime, kad $D\left(\frac{1}{2}, y(x) \right) = \frac{|y(x)|}{\sqrt{1 - e^{-y(x)^2}}}.$

Pasinaudoję lema 3.2.1 gauname teoremos tvirtinimą:

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{P\{\xi_1\ge x\}}{\Phi\left(\sqrt{\beta_{1\tau}+\beta_{2\tau}}\,A\left(\frac{\beta_{1\tau}}{\beta_{1\tau}+\beta_{2\tau}},\frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}\right)\right)}=\frac{\frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}}{\sqrt{1-e^{-y^2(x)}}}.$$

□

3.3.3 išvada. *Tarkime* $\beta_1=\beta_2=\beta$ *, tai* $\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}=\frac{1}{2}$*. Esame įrodę, kad*

$$A\left(\frac{1}{2},\frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}\right)=\sqrt{-\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)+\ln\left(\frac{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{2}\right)^2},$$

[žr. (3.3.6) formulę].

Šią išraišką įstatome į teoremos 3.3.1 formuluotę ir gauname:

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{P\{\xi_1\ge x\}}{\Phi\left(\sqrt{2\beta_\tau}\sqrt{-\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)+\ln\left(\frac{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{2}\right)^2}\right)}=\frac{\frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}}{\sqrt{1-e^{-y^2(x)}}},$$

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{P\{\xi_1\ge x\}}{\Phi\left(\sqrt{\ln\left(\frac{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{2}\right)^{4\beta_\tau}-2\beta_\tau\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)}\right)}=\frac{\frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}}{\sqrt{1-e^{-y^2(x)}}}.$$

□

3.3.2 lema. *Tarkime, kad* $\beta_1 \to \infty$ ir $\beta_2 \to \infty$. *Tuomet*

$$P\left\{A\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}, \left(\frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}\right)\right) < x\right\} \sim \Phi\left(\mathrm{x}\sqrt{\beta_1+\beta_2}\right)$$

arba tai ekvivalentu

$$P\{\xi_1 > x\} \sim \Phi\left(\sqrt{\beta_1+\beta_2}\,A\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}, \frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}\right)\right).$$

Įrodymas. Lemos įrodymas išplaukia iš 2 teiginio ir 3.2.1 lemos.
Mūsų atveju atsitiktinis dydis θ turi beta pasiskirstymą:

$$\theta = \frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}, \qquad \theta \sim Be(\beta_1, \beta_2).$$

Anksčiau esame gavę tokias išraiškas:

$$y(x) = \frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}},$$

$$n = \beta_1 + \beta_2 - 1,$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}.$$

Įstatome šias gautas išraiškas į 2 teiginio (3.1.9) formulę ir gauname:

$$P\left\{A\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}, \left(\frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}\right)\right) < x\right\} \sim \Phi\left(x\sqrt{\beta_1+\beta_2}\right).$$

Įrodysime antrą lemos dalį. Įstatome išraiškas į 2 teiginio (3.1.10) formulę ir gauname:

$$P\left\{\theta > \frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}\right\} \sim \Phi\left(\sqrt{\beta_1+\beta_2}\,A\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}, \frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}\right)\right).$$

Pasinaudojus 3.2.1 lema gauname teoremos tvirtinimą:

$$P\{\xi_1 > x\} \sim \Phi\left(\sqrt{\beta_1+\beta_2}\,A\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}, \frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}\right)\right).$$

Iš čia galima gauti

$$P\{\xi_1 < x\} = 1\text{-}P\{\xi_1 > x\} \sim 1\text{-}\Phi\left(\sqrt{\beta_1+\beta_2}\,A\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}, \frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}\right)\right).$$

□

3.3.4 išvada. Tarkime $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, tai $\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2} = \frac{1}{2}$. Pagal formulę (3.3.6) analogiškai įrodoma

$$A\left(\frac{1}{2}, \theta\right) = \sqrt{-\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu) + \frac{1}{\beta}\ln\frac{\beta^{2\beta}}{(4\beta^2)^\beta} + \frac{1}{\beta}\ln\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}\right)^{2\beta}} =$$

$$= \sqrt{-\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu) + \ln\left(\frac{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}{2}\right)^2}.$$

Istatome į 3.3.2 lemos formulę ir gauname

$$P\left\{\sqrt{-\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu) + \ln\left(\frac{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}{2}\right)^2} < x\right\} \sim \Phi\left(\mathrm{x}\sqrt{2\beta}\right).$$

Įstatę į kitą formulę turime

$$P\{\xi_1 > x\} \sim \Phi\left(\sqrt{-2\beta\left(\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right) + \ln\left(\frac{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{2}\right)^{4\beta}}\right).$$

□

3.3.3 lema. *Kai* $\beta_2 > 1,$ *tuomet*

$$P\{\,\xi_1 < x\} = \exp\left\{S^{(\beta_1+\beta_2-1)}\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2-1}\right)\right\}\times$$

$$\times \int\limits_{A\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2-1},\ \left(\frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}\right)\right)}^{\infty} \sqrt{\frac{\beta_1+\beta_2-1}{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\beta_1+\beta_2-1}{2}u^2\right\}\times\left[D\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2-1},u\right)+\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2-1}}u\right]du,$$

arba visiems $x \in R^1$

$$P\left\{A\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2-1},\left(\frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}\right)\right)\ge x\right\} = 1-\Phi\left(x\sqrt{\beta_1+\beta_2-1}\right).$$

Įrodymas. Lemos įrodymas išplaukia iš 3 teiginio ir lemos 3.2.1. Kadangi θ yra pasiskirstęs pagal beta pasiskirstymą su parametrais (β_1,β_2), t.y. $\theta \sim Be(\beta_1,\beta_2)$ turime, kad

$$\begin{cases} k=\beta_1, \\ n+1-k=\beta_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=\beta_1, \\ n=\beta_1+\beta_2-1, \end{cases}$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{k}{n} < 1 \Rightarrow \tilde{\alpha} = \frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2-1} < 1 \Rightarrow \beta_2 > 1.$$

Tuomet gauname:

$$P\{\,\xi_1 < x\} = \exp\left\{S^{(\beta_1+\beta_2-1)}\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2-1}\right)\right\}\times \int\limits_{A\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2-1},\ y(x)\right)}^{\infty}\sqrt{\frac{\beta_1+\beta_2-1}{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\beta_1+\beta_2-1}{2}u^2\right\}\times$$

$$\times\left[D\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2-1},u\right)+\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2-1}}u\right]du.$$

Čia $y(x)=\dfrac{\exp\left\{\dfrac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\dfrac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}$.

Iš 3 teiginio (3.1.11') formulės išplaukia, kad

$$P\left\{A\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2-1},\left(\frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}\right)\right)\ge x\right\}=1-\Phi\left(x\sqrt{\beta_1+\beta_2-1}\right).$$

$$\frac{1}{2}A^2\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2-1},y(x)\right)=\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2-1}\ln\left[\frac{\beta_1}{y(x)(\beta_1+\beta_2-1)}\right]+\frac{\beta_2-1}{\beta_1+\beta_2-1}\ln\left[\frac{\beta_2-1}{(1-y(x))(\beta_1+\beta_2-1)}\right].$$

Logaritmuojame $y(x)$ ir $1-y(x)$ išraišką:

$$\ln y(x)=\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)-\ln\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}\right),$$

$$\ln(1-y(x))=\ln\left(1-\frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}\right)=-\ln\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}\right).$$

Įstatome šias išraiškas į auksčiau esančią formulę ir gauname

$$\frac{1}{2}A^2\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2-1},y(x)\right)=\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2-1}\ln\left[\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2-1}\right]+\frac{\beta_2-1}{\beta_1+\beta_2-1}\ln\left[\frac{\beta_2-1}{\beta_1+\beta_2-1}\right]-$$
$$-\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2-1}\left[\left(\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right)-\ln\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}\right)\right]+\frac{\beta_2-1}{\beta_1+\beta_2-1}\ln\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}\right)=$$
$$=\frac{1}{\beta_1+\beta_2-1}\ln\frac{\beta_1^{\beta_1}(\beta_2-1)^{\beta_2-1}}{(\beta_1+\beta_2-1)^{\beta_1+\beta_2-1}}-\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2-1}\left(\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right)+\ln\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}\right).$$

(3.3.7)

□

3.3.5 išvada. *Tarkime* $\beta_1=\beta_2=\beta$ *, tai* $\dfrac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2-1}=\dfrac{\beta}{2\beta-1}$*, tuomet iš 3.3.3 lemos turime:*

$$P\{\xi_1<x\}=\exp\left\{S^{(2\beta-1)}\left(\frac{\beta}{2\beta-1}\right)\right\}\times\int\limits_{A\left(\frac{\beta}{2\beta-1},\,y(x)\right)}^{\infty}\sqrt{\frac{2\beta-1}{2\pi}}\exp\left\{-\frac{2\beta-1}{2}u^2\right\}\times$$
$$\times\left[D\left(\frac{\beta}{2\beta-1},u\right)+\sqrt{\frac{\beta}{\beta-1}}u\right]du.$$

Čia $y(x) = \dfrac{\exp\left\{\dfrac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\dfrac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}$,

Iš (3.3.7) formulės gauname, kad

$$A\left(\frac{\beta}{2\beta-1}, y(x)\right) = \sqrt{\frac{2}{2\beta-1}\left\{\ln\left[\left(\frac{\beta}{(2\beta-1)}\right)^{\beta}\cdot\left(\frac{\beta-1}{(2\beta-1)}\right)^{\beta-1}\right]\right\} - \frac{2\beta}{2\beta-1}\left(\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right) + 2\ln\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}\right)}.$$

□

3.3.6 išvada. *Tarkime* $\beta_1 = \beta$, $\beta_2 - 1 = \beta$, *tai* $\dfrac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2-1} = \dfrac{\beta}{2\beta} = \dfrac{1}{2}$, *tuomet iš 3.3.3 lemos turime:*

$$P\{\,\xi_1 < y(x)\} = \exp\left\{S^{(2\beta)}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\times \int\limits_{A\left(\frac{1}{2},\, y(x)\right)}^{\infty} \sqrt{\frac{2\beta}{2\pi}}\exp\left\{-\frac{2\beta}{2}u^2\right\}\times\left[\frac{|u|}{\sqrt{1-e^{-u^2}}}+u\right]du.$$

Čia $S^{(2\beta)}\left(\dfrac{1}{2}\right) \approx \dfrac{1}{24\beta}\left(1-\dfrac{4\beta^2}{\beta^2}\right) = -\dfrac{1}{8}\beta$,

$$A\left(\frac{1}{2}, y(x)\right) = \sqrt{-\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu) + \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}\right)^2}.$$

Iš kitos lemos formulės išplaukia

$$P\left\{\sqrt{-\left(\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right) + \ln\left(\frac{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}{2}\right)^2} \geq x\right\} = 1-\Phi\left(x\sqrt{2\beta}\right).$$

□

3.3.4 lema. *Kai* $\beta_1 > 1,$ *tuomet*

$$P\{\xi_1 > x\} = \exp\left\{ S^{(\beta_1+\beta_2-1)}\left(\frac{\beta_1-1}{\beta_1+\beta_2-1}\right)\right\}\times$$

$$\times \int_{-\infty}^{A\left(\frac{\beta_1-1}{\beta_1+\beta_2-1},\left(\frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}\right)\right)} \sqrt{\frac{\beta_1+\beta_2-1}{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\beta_1+\beta_2-1}{2}u^2\right\}\times$$

$$\times\left[D\left(\frac{\beta_1-1}{\beta_1+\beta_2-1},u\right)+\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1-1}}u\right]du,$$

arba visiems $x \in R^1$

$$P\left\{A\left(\frac{\beta_1-1}{\beta_1+\beta_2-1},\left(\frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}\right)\right)\geq x\right\}\geq\Phi\left(x\sqrt{\beta_1+\beta_2-1}\right).$$

Įrodymas. Lemos įrodymas išplaukia iš 4 teiginio ir 3.2.1 lemos. Kadangi θ yra pasiskirstęs pagal beta pasiskirstymą su parametrais (β_1, β_2), t.y. $\theta \sim Be(\beta_1, \beta_2)$ turime, kad

$$\begin{cases} k+1=\beta_1, \\ n-k=\beta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=\beta_1-1, \\ n=\beta_1+\beta_2-1 \end{cases},$$

$$\tilde{\alpha}=\frac{k}{n}>0 \Rightarrow \tilde{\alpha}=\frac{\beta_1-1}{\beta_1+\beta_2-1}>0 \Rightarrow \beta_1>1,$$

tuomet gauname

$$P\{\xi_1 > x\} = \exp\left\{ S^{(\beta_1+\beta_2-1)}\left(\frac{\beta_1-1}{\beta_1+\beta_2-1}\right)\right\}\times$$

$$\times \int_{-\infty}^{A\left(\frac{\beta_1-1}{\beta_1+\beta_2-1},\, y(x)\right)} \sqrt{\frac{\beta_1+\beta_2-1}{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\beta_1+\beta_2-1}{2}u^2\right\}\times\left[D\left(\frac{\beta_1-1}{\beta_1+\beta_2-1},u\right)+\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1-1}}u\right]du.$$

Kur $y(x)=\dfrac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}$.

Iš 4 teiginio (3.1.12') formulės gauname, kad

$$P\left\{A\left(\frac{\beta_1-1}{\beta_1+\beta_2-1},\left(\frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}\right)\right)\geq x\right\}\geq\Phi\left(x\sqrt{\beta_1+\beta_2-1}\right).$$

Analogiškai kaip (3.3.7) įrodoma

$$\frac{1}{2}A^2\left(\frac{\beta_1-1}{\beta_1+\beta_2-1},y(x)\right)=$$
$$=\frac{1}{\beta_1+\beta_2-1}\ln\frac{(\beta_1-1)^{\beta_1-1}\beta_2^{\beta_2}}{(\beta_1+\beta_2-1)^{\beta_1+\beta_2-1}}-\frac{\beta_1-1}{\beta_1+\beta_2-1}\left(\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right)+\ln\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}\right).$$

(3.3.8)

□

2.3.7 išvada. *Tarkime* $\beta_1=\beta_2=\beta$ *, tai* $\frac{\beta_1-1}{\beta_1+\beta_2-1}=\frac{\beta-1}{2\beta-1}$*, tuomet iš 3.3.4 lemos turime:*

$$P\{\xi_1\geq x\}=\exp\left\{S^{(2\beta-1)}\left(\frac{\beta-1}{2\beta-1}\right)\right\}\times\int_{-\infty}^{A\left(\frac{\beta-1}{2\beta-1},\,y(x)\right)}\sqrt{\frac{2\beta-1}{2\pi}}\exp\left\{-\frac{2\beta-1}{2}u^2\right\}\times$$
$$\times\left[D\left(\frac{\beta-1}{2\beta-1},u\right)+\sqrt{\frac{\beta}{\beta-1}}u\right]du,$$

čia $y(x)=\dfrac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}$.

Iš formulės (3.3.8) gauname

$$A\left(\frac{\beta-1}{2\beta-1},y(x)\right)=\sqrt{-\frac{2(\beta-1)}{2\beta-1}\left(\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right)+\frac{2}{2\beta-1}\ln\frac{(\beta-1)^{\beta-1}\beta^{\beta}}{(2\beta-1)^{2\beta-1}}+\ln\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}\right)}.$$

Analogiškai gauname

$$P\left\{\sqrt{-\frac{2(\beta-1)}{2\beta-1}\left(\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right)+\frac{2}{2\beta-1}\ln\frac{(\beta-1)^{\beta-1}\beta^{\beta}}{(2\beta-1)^{2\beta-1}}+\ln\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}\right)}\geq x\right\}\geq\Phi\left(x\sqrt{2\beta-1}\right).$$

□

2.3.8 išvada. *Tarkime* $\beta_1 - 1 = \beta$, $\beta_2 = \beta$, *tai* $\dfrac{\beta_1 - 1}{\beta_1 + \beta_2 - 1} = \dfrac{1}{2}$, *tuomet iš 3.3.4 lemos gauname:*

$$P\{\xi_1 > x\} = \exp\left\{S^{(2\beta)}\left(\frac{1}{2}\right)\right\} \times \int_{-\infty}^{A\left(\frac{1}{2}, y(x)\right)} \sqrt{\frac{2\beta}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{2\beta}{2}u^2\right\} \times \left[\frac{|u|}{\sqrt{1-e^{-u^2}}} + \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1 - 1}}u\right] du.$$

Kur $A\left(\frac{1}{2}, y(x)\right) = \sqrt{-\left(\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right) + \ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln\left(1 + \exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}\right)^2}$.

□

Išvados

Neaprėžtai dalių atsitiktinių dydžių $\xi_{2\delta} \sim \mathrm{GZD}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta, \mu)$ ir Gauso atsitiktinių dydžių $\eta \sim N(\kappa_1, \kappa_2)$ su baigtine dispersija charakteristines funkcijas užrašėme Kolmogorovo charakteristinės funkcijos kanoniniu išdėstymu:

$$Me^{it\xi_{2\delta}} = \hat{Q}_{2\delta}(x) = \left(\frac{B\left(\beta_1 + \frac{i\alpha t}{2\pi}, \beta_2 - \frac{i\alpha t}{2\pi}\right)}{B(\beta_1, \beta_2)} \right)^{2\delta} e^{it\mu} = \exp\left\{ it\kappa_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \frac{dK_G(x)}{x^2} \right\} =$$

$$= \exp\left\{ it\kappa_1 + \int_{-\infty}^{0} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \frac{1}{x^2} \frac{2\delta |x| \exp\left\{-\frac{2\pi\beta_1}{\alpha} x\right\}}{1 - \exp\left\{-\frac{2\pi}{\alpha} x\right\}} dx + \int_{0}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \frac{1}{x^2} \frac{2\delta x \exp\left\{-\frac{2\pi\beta_2}{\alpha} x\right\}}{1 - \exp\left\{-\frac{2\pi}{\alpha} x\right\}} dx \right\},$$

$$Me^{it\eta} = \hat{Q}_N(x) = \exp\left\{ it\kappa_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \frac{dK_N(x)}{x^2} \right\}.$$

Kur $K_N(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \le 0, \\ \kappa_2, & \text{kai } x > 0. \end{cases}$

Apibrėžėme atsitiktinius dydžius X_1 ir X_2, kurių pasiskirstymo funkcijos yra $P\{X_1 < x\} = \frac{K_G(x)}{\kappa_2}$, $P\{X_2 < x\} = \frac{K_N(x)}{\kappa_2}$. Atsitiktiniai dydžiai X_1 ir X_2 vaidina svarbų pagalbinį vaidmenį. Pagrindinių atsitiktinių dydžių $\xi_{2\delta}$ ir η momentus išreiškėme atsitiktinių dydžių X_1 ir X_2 momentais. Šių atsitiktinių dydžių cherakteristinės funkcijos yra susijusios taip:

$$Me^{itX_1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dP\{X_1 < x\} = -\frac{d^2}{dt^2} \frac{\ln Me^{it\xi_{2\delta}}}{\kappa_2},$$

$$Me^{itX_2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dP\{X_2 < x\} = -\frac{d^2}{dt^2} \frac{\ln Me^{it\eta}}{\kappa_2}.$$

Iš čia išplaukia, kad $MX_1 = \frac{\kappa_3}{\kappa_2}$, $MX_2 = \frac{\bar{\kappa}_3}{\kappa_2}$, kur κ_3 yra atsitiktinio dydžio $\xi_{2\delta}$ trečios eilės semiinvariantas, o $\bar{\kappa}_3$ yra atsitiktinio dydžio η trečios eilės semiinvariantas. Taigi ne visuomet $MX_1 = MX_2$.

Mes priėmėme, kad atsitiktinių dydžių $\xi_{2\delta}$ ir η du pirmieji momentai sutampa, t.y. $\kappa_1 = M\xi_{2\delta} = M\eta$, $\kappa_2 = D\xi_{2\delta} = D\eta$, $\kappa_2 > 0$, $K_G(+\infty) = K_N(+\infty) = \kappa_2$.

Pasinaudoję pagalbiniais atsitiktiniais dydžiais X_1 ir X_2 mes suradome atsitiktinių dydžių Br. Grigelionio $\xi_{2\delta} \sim \text{GZD}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta, \mu)$ ir Gauso $\eta \sim N(\kappa_1, \kappa_2)$, kurio pasiskirstymo funkcija yra $P\{\eta < x\} = \frac{1}{\sqrt{\kappa_2 2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\kappa_1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^2} du$, charakteristinių funkcijų skirtumo formalų asimptotinį skleidinį. Atsitiktinio dydžio $\xi_{2\delta}$ charakteristinę funkciją aproksimavome normalaus atsitiktinio dydžio η charakteristine funkcija Kalinin pasiūlytais Apelio daugianariais. Gavome tokią formalią lygybę, kai $\left|\frac{\hat{Q}_G(t) - \hat{Q}_N(t)}{\hat{Q}_N(t)}\right| < 1, \kappa_2 \to \infty$, tai t mažoms reikšmėms:

$$\left(\hat{Q}_G(t)\right)^{\kappa_2} = \left(\hat{Q}_N(t)\right)^{\kappa_2} e^{\kappa_2 \cdot \frac{\hat{Q}_G(t) - \hat{Q}_N(t)}{\hat{Q}_N(t)}} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa_2}\right)^m A_m\left(\kappa_2 \frac{\hat{Q}_G(t) - \hat{Q}_N(t)}{\hat{Q}_N(t)}\right)\right),$$

žymėjimai 16 psl.

Charakteristinių funkcijų skirtumą skleidžiant $\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}$ laipsniais, kai $\kappa_2 \to \infty$, galime užrašyti lygybe:

$$\frac{\hat{Q}_G\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right) - \hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)}{\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)} = \exp\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{itx}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^l \cdot \frac{1}{l!} \cdot \frac{1}{x^2} d\left[P\{X_1 < x\} - P\{X_2 < x\}\right]\right\} - 1.$$

$\text{GZD}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta, \mu)$ dėsnių charakteristines funkcijas aproksimavome Gauso dėsnio charakteristinėmis funkcijomis, laikydami, kad dėsnių vidurkiai, dispersijos sutampa ir dispersija κ_2 neribotai didėja. Skleidiniai yra gauti eilučių pavidalu ir išdėstyti $\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}$ laipsniais:

$$\left(\hat{Q}_G\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\right)^{\kappa_2} = \left(\hat{Q}_N\left(\frac{t}{\sqrt{\kappa_2}}\right)\right)^{\kappa_2} \left(1 + \sum_{g=1}^{\infty} c_g \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^g\right),$$

žymėjimai 21-22 psl.

Į koeficiento c_g sudėtį įeina pagalbinių atsitiktinių dydžių X_1 ir X_2 l-os eilės pseudomomentai

$$\gamma_l = \int_{-\infty}^{\infty} x^l d\left(P\{X_1 < x\} - P\{X_2 < x\}\right).$$

Kadangi mūsų nagrinėjami skirstiniai turi aprėžtus tankius, tai pasinaudoję charakteristinių funkcijų asimptotiniu skleidiniu, užrašėme tankių asimptotinį skleidinį [žr. 2.2.1 teorema]:

$$p_G(x) = p_N(x) + \sum_{g=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa_2}}\right)^g \sum_{h=0}^{H} a_h (-1)^h \frac{d^h p_N(x)}{dx^h}.$$

Čia *H* baigtinis skaičius [žr. 28 psl].

Remiantis D. Alfers ir H. Dinges įrodytais teiginiais apie beta ir su juo susijusių skirstinių aproksimavimą normaliuoju skirstiniu, mes savo darbe aproksimavome *ZD* skirstinį Gauso dėsniu. Tuo tikslu įrodyta lygybė [žr. 3.2.1 lema]

$$P\{\xi_1 < x\} = P\left\{\theta < \frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}\right\}.$$

Atsitiktinį dydį ξ_1 išreiškėme beta atsitiktiniu dydžiu θ:

$$\xi_1 = \mu + \frac{\alpha}{2\pi}\ln\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right).$$

Iš čia išplaukia, kad $\theta = \dfrac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}$.

Remiantis šiomis savybėmis buvo įrodytos lemos, susijusios su atsitiktinio dydžio $\xi_{2\delta}$ aproksimavimu Gauso skirstiniu. Šis metodas remiasi dviem elementariom funkcijom, kurių pagalba iš tankio funkcijos išskiriamas Gauso tankis. Tos funkcijos apibrėžiamos taip:

$$\frac{1}{2}A^2\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}, y(x)\right) = \frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\ln\left[\frac{\beta_1}{y(x)(\beta_1+\beta_2)}\right] + \frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\ln\left[\frac{\beta_2}{(1-y(x))(\beta_1+\beta_2)}\right],$$

ir funkcija $D\left(\dfrac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}, u\right)$ [žr. (3.1.8) formulę], kuri turi paprastesnį pavidalą, kai ji simetrinė, t.y. kai $\dfrac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2} = \dfrac{1}{2}$, tai $D\left(\dfrac{1}{2}, u\right) = \dfrac{|u|}{\sqrt{1-e^{-u^2}}}$.

Kai β_1 ir β_2 yra sveiki skaičiai $(\beta_1+\beta_2 \geq 2)$, tuomet teisingos lygybės

$$P\{\xi_1 > x\} = \exp\left\{S^{(\beta_1+\beta_2)}\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\right)\right\} \cdot \int_{y(x)}^{1} \sqrt{\frac{\beta_1\beta_2}{2\pi(\beta_1+\beta_2)}} \exp\left\{-\frac{\beta_1+\beta_2}{2}A^2\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}, u\right)\right\} \frac{du}{u(u-1)}$$

$$P\{\xi_1 > x\} = \exp\left\{S^{(\beta_1+\beta_2)}\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\right)\right\} \cdot \int_{-\infty}^{A\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2},\, y(x)\right)} \sqrt{\frac{\beta_1+\beta_2}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\beta_1+\beta_2}{2}u^2\right\} D\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}, u\right) du.$$

Kai $\beta_1 \to \infty$ ir $\beta_2 \to \infty$, tuomet teisinga

$$P\left\{A\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}, \left(\frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(\xi_1-\mu)\right\}}\right)\right) < x\right\} \sim \Phi\left(\mathrm{x}\sqrt{\beta_1+\beta_2}\right)$$

arba tai ekvivalentu

$$P\{\xi_1 > x\} \sim \Phi\left(\sqrt{\beta_1+\beta_2}\, A\left(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}, \frac{\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi}{\alpha}(x-\mu)\right\}}\right)\right).$$

Summary

In mathematical statistics there are often used normal approximations for many distributions. Classical problem is being solved by using normal approximations employed a few well-known methods. In this paper normal approximations are developed for Br. Grigelionis GZD$(\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta, \mu)$ distributions.

We show that normal approximations used for beta distributions are applied for GZD$(\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta, \mu)$ distributions. In this paper we apply D. Alfers ir H. Dinges [6] statements about beta distributions asymptotical treatments.

It is written down formal characteristic function and density for infinite divisible distributions asymptotical expansion used Apelis polynomial.

The results will be useful mathematical statistics specialists and cea who are researching problems in finance theory, i.e. to analyze mathematical models in finance mathematics.

Literatūra

1. J. Kubilius *Ribinės teoremos*, Vilniaus universiteto leidykla, 1998 m., 192 psl.
2. J. Turkuvienė *Imčių iš baigtinių visumų statistikų skirstinių analizė*, 2007 m. 86 psl.
3. В. М. Калинин *Специальные функции и предельные свойства вероятностных распределений*, 1969 m., 13, 5-137.
4. B. Grigelionis *Generalized z-distributions and related stochastic processes*, Liet. matem. rink., 2001 m., 41(3), 303-319.
5. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гос. изд. физ.-мат. литературы*, Москва, 1962 m., 28-29.
6. D. Alfers, H. Dinges, A Normal Approximation for Beta and Gamma Tail probabilities, *Probability Theory and Related Fields*, 1984 m., 65, 399 – 420.
7. М. Абрамовиц, И. *Стиган Справочник по специалным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Москва Наука, 1979 m., 84 psl.
8. E. Misevičius *Matematinė analizė I dalis*, Vilnius, 1998m., 74 psl.

Darbo pasiskirstymas

Nagrinėjamų temų pasiskirstymas:

1. 1 Skyrius – N. Giedrytė ir R. Stankevičiūtė,
2. 2.1.3 lema – N. Giedrytė,
3. 2.1.4 lema – N. Giedrytė,
4. 2.1.5 lema – R. Stankevičiūtė,
5. 2.1.1 teorema – N. Giedrytė ir R. Stankevičiūtė,
6. 2.2.1 teorema – R. Stankevičiūtė,
7. 3.1.1 teorema – N. Giedrytė ir R. Stankevičiūtė,
8. 3.1.2 teorema – R. Stankevičiūtė,
9. 3.2.1 lema – N. Giedrytė,
10. 3.3.1 lema – R. Stankevičiūtė,
11. 3.3.1 teorema – N. Giedrytė,
12. 3.3.2. lema – R. Stankevičiūtė,
13. 3.3.4 lema – R. Stankevičiūtė,
14. 3.3.3 lema – N. Giedrytė,
15. 3.3.4 lema – N. Giedrytė.