ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

MATEMATIKOS KATEDRA

Ingrida Tunaitytė

# Rymano dzeta funkcijos Melino transformacija kritinėje tiesėje

Magistro darbas

Darbo vadovas

Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas

Šiauliai, 2010

# TURINYS

# ĮVADAS

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis. Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}.$$

Ji yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra paprastasis polius su reziduumu, lygiu 1.

Svarbią vietą funkcijos $\zeta(s)$ teorijoje užima momentų problema. Tegul

$$I_k(T, \sigma) = \int_0^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt, \qquad k \geq 0,\ \sigma \geq \frac{1}{2}.$$

Momentų problema reikalauja rasti momentų $I_k(T, \sigma)$ asimptotiką, kai $T \to \infty$, arba bent gauti jų įverčius. Įdomiausias atvejis yra $\sigma = \frac{1}{2}$. Egzistuoja hipotezė, kad

$$I_k\left(T, \frac{1}{2}\right) \sim C_k T (\log T)^{k^2}, \qquad T \to \infty,$$

su kuria nors teigiama konstanta $C_k$. Šią hipotezę atveju $k = 1$, įrodė Hardis (Hardy) ir Litlvudas (Litllwood) 1918 metais. Jie gavo, kad $C_1 = 1$. Kai $k = 2$, dydžio $I_2(T, \frac{1}{2})$ asimptotinę formulę rado Ingamas (Ingham) 1924 metais. Yra žinoma, kad $C_2 = \frac{1}{2\pi^2}$. Dar viena $k$ reikšmė, su kuria yra žinoma momento $I_k(T, \frac{1}{2})$ asimptotika, yra lygi

$$\frac{C}{\sqrt{\log \log T}}.$$

Ši reikšmė yra glaudžiai susijusi su Rymano dzeta funkcijos ribine teorema apie konvergavimą į logaritmiškai normalųjį dėsnį ir buvo išnagrinėta [3] monografijoje.

Momentų $I_k(T, \sigma)$ tyrimui yra naudojami įvairūs metodai. 1995 m. japonų matematikas Motochašis (Motohashi) pastebėjo, kad šiam tikslui gali būti pritaikomas Rymano dzeta funkcijos modifikuotosios Melino (Mellin) transformacijos. Šios transformacijos paprastai žymimos $\mathcal{Z}_k(s)$ ir turi pavidalą

$$\mathcal{Z}_k(s) = \int_1^{\infty} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + ix\right) \right|^{2k} x^{-s} dx, \qquad \sigma > \sigma_0(k) > 1.$$

Motochašis pirmasis apibrėžė transformaciją $\mathcal{Z}_2(s)$ ir pritaikė ją ketvirtojo momento $I_2(T, \frac{1}{2})$ tyrimui. Funkcija $\mathcal{Z}_2(s)$ yra pakankamai sudėtinga. Pavyzdžiui, taškas $s = 1$ yra jos penktosios eilės polius, o Rymano dzeta funkcijos kompleksiniai nuliai $s = \frac{\rho}{2}$, $\rho$ yra $\mathcal{Z}_2(s)$ poliai. Funkcija $\mathcal{Z}_2(s)$ turi ir daugiau ypatingų taškų, kurie yra susiję su sudėtinga modulinių formų teorija.

Magistrinio darbo tikslas yra išnagrinėti paprastesnę funkciją $\mathcal{Z}_1(s)$. Darbe yra gaunamas funkcijos $\mathcal{Z}_1(s)$ analizinis pratęsimas į pusplokštumę $\sigma > -\frac{3}{4}$ ir įverčiai.

# 1. PAGALBINIAI REZULTATAI

Mums bus reikalinga antrojo momento $I_1(T,\frac{1}{2})$ asimptotinė formulė. Tegul $\gamma_0$ yra Oilerio (Euler) konstanta, tai yra,

$$\gamma_0 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\log n\right) = 0,577215... \ .$$

Tarkime, kad

$$I_1\left(T,\frac{1}{2}\right) = T\log\left(\frac{T}{2\pi}\right) + (2\gamma_0 - 1)T + E_1(T). \tag{1.1}$$

**1.1 lema.** *Tegul $T\to\infty$, tuomet*

$$E_1(T) \ll T^{\frac{1}{3}}.$$

Lemos įrodymą galima rasti [4] monografijoje. Čia žymuo $f(x)\ll g(x), x\in\mathcal{X}$, reiškia, kad egzistuoja tokia konstanta $C>0$, jog visiems $x\in\mathcal{X}$ yra teisinga nelygybė $|f(x)|\leq Cg(x)$. Taigi, šis žymuo yra žymens $f(x)=O(g(x)), x\in\mathcal{X}$, sinonimas. Dažnai jį naudoti patogiau, nes yra nereikalingi skliausteliai.

**1.2 lema.** *Egzistuoja tokia konstanta $C>0$, kad*

$$\int\limits_0^T E_1^2(t)dt \sim CT^{\frac{3}{2}}, \qquad T\to\infty.$$

Lemos įrodymas yra duotas [2] monografijoje.

Apibrėžiame funkcijas

$$f(T,n) = 2T\mathrm{arsinh}\sqrt{\frac{\pi n}{2T}} + \sqrt{2\pi nT+\pi^2n^2} - \frac{\pi}{4},$$

$$g(T,n) = T\log\left(\frac{T}{2\pi n}\right) - T + \frac{\pi}{4},$$

$$\mathrm{arsinh}x = \log(x+\sqrt{x^2+1}),$$

ir sumas

$$S_1(T;N) = 2^{-\frac{3}{2}}\sum_{n\leq N}(-1)^n d(n) n^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\mathrm{arsinh}\sqrt{\frac{\pi n}{2T}}\right)^{-2}\left(\frac{T}{2\pi n}+\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}\sin(f(T,n)),$$

$$S_2(T;N) = \sum_{n\le N_1} d(n) n^{-\frac{1}{2}} \left( \log \frac{T}{2\pi n} \right)^{-2} \sin(g(T,n)),$$

kuriose

$$C_1 T < N < C_2 T, \quad 0 < C_1 < C_2,$$

$$N_1 = \frac{T}{2\pi} + \frac{N}{2} - \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{NT}{2\pi}},$$

ir

$$d(n) = \sum_{d|n} 1.$$

Be to, tegul

$$G(T) = \int_1^T E_1(t)dt - \pi T.$$

Mums bus reikalinga funkcijos $G(T)$ išraiška baigtinėmis sumomis. Toks rezultatas buvo gautas [1] straipsnyje.

**1.3 lema.** *Tegul $T \to \infty$. Tuomet yra teisingas įvertis*

$$G(T) = S_1(T;N) - S_2(T;N) + O(T^{\frac{1}{4}}).$$

Funkcijos $G(T)$ išraiška yra gana sudėtinga, nes į ją įeina sudėtingos sumos $S_1(T;N)$ ir $S_2(T;N)$. Pasirodo, kad pritaikius iš analizės gerai žinoma Teiloro formulę, funkciją $G(T)$ galima užrašyti paprastesniu pavidalu. Tai buvo padaryta [2] monografijoje.

**1.4 lema.** *Tegul $T \to \infty$ , tuomet yra teisingas įvertis*

$$G(T) = 2^{-\frac{1}{4}} \pi^{-\frac{3}{4}} T^{\frac{3}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n d(n) n^{-\frac{5}{4}} \sin\left( \sqrt{8\pi n T} - \frac{\pi}{4} \right) + O(T^{\frac{2}{3}} \log T).$$

Funkcijos $G(t)$ vidurkio

$$\int_1^T G(t)dt$$

įverčiui yra reikalinga klasikinė išvestinių testo lema.

**1.5 lema.** *Tarkime, kad $g(x)$ yra teigiama monotoninė funkcija intervale $[a,b]$, $|g(x)| \le G$, o funkcija $f(x)$ intervale $[a,b]$ turi monotoninę išvestinę ir $f'(x) \ge a > 0$ arba $f'(x) \le -a < 0$. Tuomet yra teisingas įvertis*

$$\int_a^b g(x)e^{if(x)}dx \ll Ga^{-1}.$$

*Jeigu funkcija* $f(x)$ *inervale* $[a, b]$ *turi antrąją išvestinę ir* $f''(x) \geq b > 0$ *arba* $f''(x) \leq -b < 0$, *tai tuomet*

$$\int_a^b g(x)e^{if(x)}dx \leq Gb^{-\frac{1}{2}}.$$

Lemos įrodymas yra duotas [2] monografijoje.

Naudodami 1.4 lemą, gausime funkcijos $G(T)$ įvertį.

**1.6 lema.** *Tarkime*, kad $T \to \infty$. Tuomet yra teisingas įvertis

$$G(T) \ll T^{\frac{3}{4}}.$$

*Įrodymas.* Kadangi funkcijai $d(n)$ su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisingas įvertis [4] $d(n) \ll n^{\varepsilon}$, ir

$$\left| \sin\left(\sqrt{8\pi nT} - \frac{\pi}{4}\right) \right| \leq 1,$$

tai eilutė 1.4 lemoje absoliučiai konverguoja. Todėl

$$G(T) \ll T^{\frac{3}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}-\varepsilon}} + T^{\frac{2}{3}} \log T \ll T^{\frac{3}{4}} + T^{\frac{2}{3}} \log T \ll T^{\frac{3}{4}}.$$

**1.7 lema**. *Tarkime, kad* $T \to \infty$. *Tuomet yra teisingas įvertis*

$$G_1(T) \ll T^{\frac{5}{4}}.$$

*Įrodymas.* Pirmiausia įvertinsime integralą

$$I_1 \overset{def}{=} \int_T^{2T} S_1(t; N)dt.$$

Imame $N = cT$ su pakankamai maža konstanta $c$. Kadangi

$$e^{if(t,N)} = \cos(f(t, n)) + i\sin(f(t, n)),$$

tai

$$\sin(f(t,n)) = \frac{e^{if(t,n)} - e^{-if(t,n)}}{2i}.$$

Todėl integralo $I_1$ įverčiui gauti pakanka įvertinti sumą

$$\sum_{n\le cT} (-1)^n d(n) n^{-\frac{1}{2}} \int_T^{2T} \left( \operatorname{arcsin}\sqrt{\frac{\pi n}{2t}}\right)^{-2} \left(\frac{t}{2\pi n} + \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} e^{if(t,n)} dt.$$

Iš funkcijos $f(t,n)$ apibrėžimo randame, kad

$$f'(t,n) = 2\operatorname{arcsin}\sqrt{\frac{\pi n}{2t}} + 2t\left(\operatorname{arcsin}\sqrt{\frac{\pi n}{2t}}\right)' + \left(\sqrt{2\pi n t + \pi^2 n^2}\right)' =$$

$$= 2\log\left(\sqrt{\frac{\pi n}{2t}} + \sqrt{\frac{\pi n}{2t} + 1}\right) + 2t\left(\log\left(\sqrt{\frac{\pi n}{2t}} + \sqrt{\frac{\pi n}{2t} + 1}\right)\right)' +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(2\pi n t + \pi^2 n^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2\pi n = 2\log\left(\sqrt{\frac{\pi n}{2t}} + \sqrt{\frac{\pi n}{2t} + 1}\right) +$$

$$+ 2t \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi n}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\pi n}{2t^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi n}{2t} + 1\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\pi n}{2t^2}}{\sqrt{\frac{\pi n}{2t}} + \sqrt{\frac{\pi n}{2t} + 1}} + \left(2\pi n t + \pi^2 n^2\right)^{-\frac{1}{2}} \pi n =$$

$$= 2\log\left(\sqrt{\frac{\pi n}{2t}} + \sqrt{1 + \frac{\pi n}{2t}}\right).$$

Todėl

$$f'(t,n) \gg \sqrt{\frac{n}{T}}.$$

Vadinasi, pagal 1.5 lemą

$$\int_T^{2T} \left( \operatorname{arcsin}\sqrt{\frac{\pi n}{2t}}\right)^{-2} \left(\frac{t}{2\pi n} + \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} e^{if(t,n)} dt \ll T^{\frac{5}{4}} n^{-\frac{3}{4}}.$$

Iš čia išplaukia, jog

$$I_1 \ll T^{\frac{5}{4}} \sum_{n\le cT} d(n) n^{-\frac{5}{4}} \ll T^{\frac{5}{4}}. \tag{1.2}$$

Tegul dabar

$$I_2 \stackrel{def}{=} \int_T^{2T} S_2(t;N)dt.$$

Tuomet [4] monografijoje yra įrodyta, kad $I_2 \ll T\log^4 T$. Iš čia ir (1.2) gauname, kad

$$\int_T^{2T} G(t)dt \ll T^{\frac{5}{4}}.$$

Kadangi

$$G_1(T) = \int_1^T G(t)dt = \sum_{j=1}^{\left[\frac{\log T}{\log 2}\right]} \int_{T\cdot 2^{-j}}^{T\cdot 2^{-j+1}} G(t)dt \ll$$

$$\ll \sum_{j=1}^{\left[\frac{\log T}{\log 2}\right]} (T\cdot 2^{-j})^{\frac{5}{4}} \ll T^{\frac{5}{4}} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-\frac{5}{4}j} \ll T^{\frac{5}{4}},$$

nes eilutė

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-\frac{5}{4}j}$$

konverguoja kaip geometrinė progresija. Lema įrodyta.

Mums bus dar reikalinga Atkinsono formulė.

**1.8 lema.** *Yra teisingas įvertis*

$$E_1(x) = S_1(x;N) + S_2(x;N) + R(x), \qquad R(x) = O(\log^2 x).$$

Lemos įrodymas yra duotas [2] monografijoje.

# 2. FUNKCIJOS $\mathcal{Z}_1(\mathbf{s})$ ANALIZINIS PRATĘSIMAS

Iš apibrėžimo turime, kad pusplokštumėje $\sigma > 1$

$$\mathcal{Z}_1(s) = \int_1^\infty \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + ix\right)\right|^2 x^{-s} dx.$$

**2.1 teorema.** *Funkcija $\mathcal{Z}_1(s)$ yra analizinė pusplokštumėje $\sigma > 1$.*

*Įrodymas.* Funkcija

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + ix\right)\right|^2 x^{-s}$$

yra analizinė visoje kompleksinėje plokštumoje, nes kai $x \geq 1$, funkcija $x^{-s}$ yra sveikoji funkcija. Todėl teoremos įrodymui pakanka įrodyti, kad integralas, apibrėžiantis funkciją $\mathcal{Z}_1(s)$, konverguoja tolygiai srityje $\sigma \geq 1+\varepsilon$ su kiekvienu teigiamu $\varepsilon$. Tuomet, remdamiesi Vejerštraso teorema integralams, turėsime, jog funkcija $\mathcal{Z}_1(s)$ yra analizinė srityje $\sigma > 1$.

Tolygiam minėto integralo konvergavimui įrodyti pakanka parodyti, kad integralas yra mažoruojamas absoliučiai konverguojančiu integralu, kuris nepriklauso nuo $s$. Kadangi srityje $\sigma \geq 1 + \varepsilon$ yra teisingas įvertis

$$|x^{-s}| = |x^{-\sigma-it}| = x^{-\sigma}|x^{-it}| = x^{-\sigma} \leq x^{-1-\varepsilon},$$

tai įrodysime integralo

$$\int_1^\infty \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + ix\right)\right|^2 x^{-1-\varepsilon} dx \tag{2.1}$$

konvergavimą. Iš (1.1) įverčio ir 1.1 lemos gauname, kad yra teisingas įvertis

$$I_1\left(T, \frac{1}{2}\right) \ll T \log T. \tag{2.2}$$

Integruodami dalimis, randame

$$\int_1^\infty \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + ix\right)\right|^2 x^{-1-\varepsilon} dx = \int_1^\infty x^{-1-\varepsilon} d\left(\int_1^x \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 dt\right) =$$

$$= x^{-1-\varepsilon} \int_1^x \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 dt\bigg|_1^\infty + (1+\varepsilon)\int_1^\infty \left(\int_1^x \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 dt\right) x^{-2-\varepsilon} dx.$$

Todėl iš įverčio (2.2) išplaukia, kad

$$\int_1^\infty \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + ix\right)\right|^2 x^{-1-\varepsilon} dx \ll$$

$$\ll x^{-1-\varepsilon} I_1\Big(x, \frac{1}{2}\Big)\Big|_1^\infty + \int\limits_1^\infty x^{-2-\varepsilon} I_1\Big(x, \frac{1}{2}\Big) dx \ll$$

$$\ll x^{-1-\varepsilon} x \log x\Big|_1^\infty + \int\limits_1^\infty x^{-2-\varepsilon} x \log x dx =$$

$$= x^{-\varepsilon} \log x\Big|_1^\infty + \int\limits_1^\infty x^{-1-\varepsilon} \log x dx \ll$$

$$\ll \int\limits_1^\infty \log x d(x^{-\varepsilon}) \ll x^{-\varepsilon} \log x\Big|_1^\infty + \int\limits_1^\infty x^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} =$$

$$= \int\limits_1^\infty x^{-1-\varepsilon} dx = \frac{x^{-\varepsilon}}{-\varepsilon}\Big|_1^\infty = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Taigi, gavome, kad (2.1) integralas konverguoja tolygiai pusplokštumėje $\sigma > 1+\varepsilon$, su kiekvienu $\varepsilon$, todėl jis apibrėžia funkciją, analizinę srityje $\sigma > 1$.

Šio skyrelio tikslas yra analiziškai pratęsti $\mathcal{Z}_1(s)$ į kairę nuo pusplokštumės $\sigma > 1$.

**2.2 teorema.** *Funkcija $\mathcal{Z}_1(s)$ yra meromorfiškai pratęsiama į pusplokštumę $\sigma > -\frac{3}{4}$. Taškas $s = 1$ yra antrosios eilės polius. Be to, yra teisinga lygybė*

$$\mathcal{Z}_1(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2\gamma_0 - \log(2\pi)}{s-1} - E(1) +$$

$$+ \pi(s+1) + s(s+1)(s+2) \int\limits_1^\infty G_1(x) x^{-s-3} dx.$$

*Įrodymas.* Naudosime (1.1) formulę. Iš funkcijos $\mathcal{Z}_1(s)$ apibrėžimo turime, kad

$$\mathcal{Z}_1(s) = \int\limits_1^\infty \Big|\zeta\Big(\frac{1}{2} + ix\Big)\Big|^2 x^{-s} dx = \int\limits_1^\infty x^{-s} d\Big(\int\limits_1^x \Big|\zeta\Big(\frac{1}{2} + it\Big)\Big|^2 dt\Big).$$

Todėl iš (1.1) formulės randame, kad

$$\mathcal{Z}_1(s) = \int\limits_1^\infty x^{-s} d\Big(x \log\Big(\frac{x}{2\pi}\Big) + (2\gamma_0 - 1)x + E_1(x)\Big) =$$

$$= \int\limits_1^\infty \big(\log x + 2\gamma_0^{-1} - \log 2\pi + 1 + E_1'(x)\big) x^{-s} dx =$$

$$= \int\limits_1^\infty \big(\log x + 2\gamma_0 - \log 2\pi\big) x^{-s} dx + \int\limits_1^\infty E_1'(x) x^{-s} dx. \tag{2.3}$$

Kai $\sigma > 1$, integruodami dalimis, gauname

$$\int_1^\infty x^{-s} \log x dx = \frac{1}{1-s} \int_1^\infty \log x d(x^{-s+1}) =$$

$$= \frac{1}{1-s} \log x \cdot x^{-s+1} \Big|_1^\infty - \frac{1}{1-s} \int_1^\infty x^{-s+1} d(\log x) =$$

$$= \frac{1}{-1+s} \int_1^\infty x^{-s} dx = \frac{1}{-1+s} \cdot \frac{1}{1-s} x^{-s+1} \Big|_1^\infty = \frac{1}{(s-1)^2}. \tag{2.4}$$

Aišku, kad

$$\int_1^\infty (2\gamma_0 - \log 2\pi) x^{-s} dx = (2\gamma_0 - \log 2\pi) \frac{1}{1-s} x^{-s+1} \Big|_1^\infty =$$

$$= -\frac{2\gamma_0 - \log 2\pi}{-1+s}. \tag{2.5}$$

Be to, remdamiesi 1.1 lema, turime

$$\int_1^\infty E_1'(x) x^{-s} dx = \int_1^\infty x^{-s} d(E_1(x)) = E_1(x) x^{-s} \Big|_1^\infty + s \int_1^\infty E_1(x) x^{-s-1} dx =$$

$$= -E_1(1) + s \int_1^\infty E_1(x) x^{-s-1} dx. \tag{2.6}$$

Intergalo

$$I = \int_1^\infty E_1(x) x^{-s-1} dx$$

konvergavimui nustatyti panaudosime 1.2 lemą. Pritaikę Koši nelygybę, turime, kad

$$I \le \left( \int_1^\infty x^{-2\sigma - 2\alpha} dx \int_1^\infty E_1^2(x) x^{2\alpha - 2} dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.7}$$

Čia $\alpha$ yra pagalbinė konstanta, kurią parinksime vėliau. Antrąjį integralą (2.7) nelygybėje integruojame dalimis ir taikome 1.2 lemą. Gauname

$$\int_1^\infty E_1^2(x)x^{2\alpha-2}dx = \int_1^\infty x^{2\alpha-2}d\Big(\int_1^x E_1^2(u)du\Big) =$$

$$= x^{2\alpha-2}\int_1^x E_1^2(u)du\Big|_1^\infty - (3-2\alpha)\int_1^\infty \Big(\int_1^x E_1^2(u)du\Big)x^{2\alpha-3}dx \ll$$

$$\ll x^{2\alpha-2+\frac{3}{2}}\Big|_1^\infty + \int_1^\infty x^{\frac{3}{2}+2\alpha-3}dx. \qquad (2.8)$$

Dabar parenkame konstantą $\alpha$ taip, kad kairioji (2.8) įverčio pusė būtų aprėžta. Taigi, turi būti $2\alpha - \frac{1}{2} < 0$.

Gauname, kad $\alpha < \frac{1}{4}$. Sugrįžę prie (2.7) įverčio, matome, kad $\sigma$ reikia pasirinkti taip, kad

$$-2\sigma - 2\alpha < -1, \text{ arba } \sigma > \frac{1}{2} - \alpha.$$

Kadangi $\alpha$ yra bet koks skaičius mažesnis už $\frac{1}{4}$, tai iš čia randame, kad $\sigma > \frac{1}{4}$. Taigi gavome, kad integralas $I$ konverguoja absoliučiai srityje $\sigma > \frac{1}{4}$.

Dabar iš (2.3)–(2.7) turime, kad pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{4}$ yra teisinga lygybė

$$\mathcal{Z}_1(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2\gamma_0 - \log(2\pi)}{s-1} - E_1(1) + s\int_1^\infty E_1(x)x^{-s-1}dx. \qquad (2.9)$$

Lieka parodyti, kad funkcija $\mathcal{Z}_1(s)$ galima analiziškai pratęsti į sritį $\sigma > -\frac{3}{4}$. Tarkime, kad $\sigma > \frac{1}{4}$. Tuomet

$$\int_1^\infty E_1(x)x^{-s-1}dx = \int_1^\infty x^{-s-1}d\Big(\int_1^x E_1(u)du\Big) =$$

$$= x^{-s-1}\Big(\int_1^x E_1(u)du\Big)\Big|_1^\infty + (s+1)\int_1^\infty \Big(\int_1^x E_1(u)du\Big)x^{-s-2}dx. \qquad (2.10)$$

Pasinaudoję dar kartą 1.2 lema, gauname įvertį

$$x^{-s-1}\Big(\int_1^x E_1(u)du\Big) \ll x^{-\sigma-1}\Big(\int_1^x dx\int_1^x E_1^2(u)du\Big)^{\frac{1}{2}} \ll x^{-\sigma-1+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} = x^{-\sigma+\frac{1}{4}}.$$

Kadangi $\sigma > \frac{1}{4}$, tai iš čia randame, kad

$$x^{-s-1}\Big(\int\limits_1^x E_1(u)du\Big)\Big|_1^\infty = 0.$$

Taigi, sugrįžę prie (2.10) lygybės, matome, kad

$$\int\limits_1^\infty E_1(x)x^{-s-1}dx = (s-1)\int\limits_1^\infty\Big(\int\limits_1^x E_1(u)du\Big)x^{-s-2}dx. \tag{2.11}$$

Iš funkcijos $G(T)$ apibrėžimo randame, kad

$$\int\limits_1^x E_1(u)du = \pi x + G(x).$$

Vadinasi,

$$\int\limits_1^\infty\Big(\int\limits_1^x E_1(u)du\Big)x^{-s-2}dx = \int\limits_1^\infty(\pi x^{-s-1} + G(x)x^{-s-2})dx =$$

$$= \frac{\pi}{-s}x^{-s}\Big|_1^\infty + \int\limits_1^\infty G(x)x^{-s-2}dx = \frac{\pi}{s} + \int\limits_1^\infty x^{-s-2}d\Big(\int\limits_1^\infty G(u)du\Big) =$$

$$= \frac{\pi}{s} + x^{-s-2}\Big(\int\limits_1^x G(u)du\Big)\Big|_1^\infty + (s+2)\int\limits_1^\infty G_1(x)x^{-s-3}dx =$$

$$= \frac{\pi}{s} + x^{-s-2}G_1(x)\Big|_1^\infty + (s+2)\int\limits_1^\infty G_1(x)x^{-s-3}dx, \tag{2.12}$$

nes

$$G_1(x) = \int\limits_1^x G(u)du.$$

Iš 1.7 lemos išplaukia, kad

$$x^{-s-2}G_1(x)\Big|_1^\infty = 0,$$

nes $\sigma > \frac{1}{4}$. Be to, 1.7 lemos įvertis

$$G_1(x) \ll x^{\frac{5}{4}}$$

rodo, kad integralas

$$\int_1^\infty G_1(x)x^{-s-3}dx \ll \int_1^\infty x^{-\sigma-\frac{7}{4}}dx$$

konverguoja, kai

$$-\sigma - \frac{7}{4} < -1,$$

tai yra, kai $\sigma > -\frac{3}{4}$.

Įrašę (2.11) ir (2.12) į (2.9), gauname, kad pusplokštumėje $\sigma > -\frac{3}{4}$ yra teisinga lygybė

$$\mathcal{Z}_1(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2\gamma_0 - \log(2\pi)}{s-1} - E(1) +$$
$$+\pi(s+1) + s(s+1)(s+2)\int_1^\infty G_1(x)x^{-s-3}dx,$$

kuri rodo, kad funkcija $\mathcal{Z}_1(s)$ yra analizinė pusplokštumėje $\sigma > -\frac{3}{4}$, o taškas $s = 1$ yra antrosios eilės polius su reziduumu $2\gamma_0 - \log(2\pi)$.

# 3. FUNKCIJOS $\mathcal{Z}_1(s)$ ĮVERTIS

Šiame skyrelyje įvertinsime funkciją $\mathcal{Z}_1(s)$ juostoje $0 \le \sigma \le 1$. Šiam tikslui naudosime (2.9) formulę. Kadangi šioje formulėje nariai

$$\frac{1}{s-1}, \quad \frac{2\gamma_0 - \log(2\pi)}{s-1}, \quad E_1(1)$$

yra aprėžti, tai lieka įvertinti integralą

$$s\int_1^\infty E_1(x)x^{-s-1}dx. \tag{3.1}$$

**3.1 teorema.** *Tarkime, kad $0 \le \sigma \le 1$ ir $t \ge t_0 > 0$. Tuomet yra teisingas įvertis*

$$\mathcal{Z}_1(\sigma+it) \ll_\varepsilon t^{\frac{4}{3}-\sigma+\varepsilon}.$$

*Įrodymas.* Pastebime, kad (2.9) formulę mes įrodėme tiktai srityje $\sigma > \frac{1}{4}$, tačiau 2.2 teorema leidžia tvirtinti, kad (2.9) formulę galime pratęsti į sritį $\sigma \ge 0$.

Tarkime, kad $X \ge 1$. Intervalą $[1,\infty]$ padalijame į dalinius intervalus $[X, 2X]$, ir nagrinėjame funkciją

$$s\int_X^{2X} E_1(x)x^{-s-1}dx.$$

Turėdami pastarojo integralo įvertį ir sumuodami, gausime ir (3.1) funkcijos įvertį.

Atskirai nagrinėsime tris atvejus:

1) $X < t$;

2) $t \le X \le t^2$;

3) $X > t^2$.

1) atvejis. Integruodami dalimis, randame

$$s\int_X^{2X} E_1(x)x^{-s-1}dx = -\int_X^{2X} E_1(x)dx^{-s} =$$

$$= -E_1(x)x^{-s}\Big|_X^{2X} + \int_X^{2X} x^{-s}dE_1(x). \tag{3.2}$$

Iš 1.1 lemos įverčio išplaukia, kad

$$-E_1(x)x^{-s}\Big|_X^{2X} \ll X^{\frac{1}{3}-\sigma}. \tag{3.3}$$

Iš funkcijos $E_1(x)$ išraiškos turime, jog

$$\int\limits_X^{2X} x^{-s}dE_1(x) = \int\limits_X^{2X} x^{-s}d\bigg(I_1\bigg(x,\frac{1}{2}\bigg) - x\log\bigg(\frac{x}{2\pi}\bigg) - (2\gamma_0-1)x\bigg) =$$

$$= \int\limits_X^{2X} x^{-s}\bigg|\zeta\bigg(\frac{1}{2}+ix\bigg)\bigg|^2 dx - \int\limits_X^{2X} x^{-s}\bigg(\log\frac{x}{2\pi}+1\bigg)dx -$$

$$-\int\limits_X^{2X} x^{-s}(2\gamma_0-1)dx. \tag{3.4}$$

Kadangi Rymano dzeta funkcijai galioja klasikinis įvertis [4]

$$\zeta\bigg(\frac{1}{2}+it\bigg) \ll t^{\frac{1}{6}},$$

tai iš (3.4) randame

$$\int\limits_X^{2X} x^{-s}dE_1(x) \ll X^{\frac{4}{3}-\sigma} + X^{1-\sigma}\log X + X^{1-\sigma} \ll X^{\frac{4}{3}-\sigma}.$$

Iš čia, (3.2) ir (3.3) gauname įvertį

$$s\int\limits_X^{2X} E_1(x)x^{-s-1}dx \ll X^{\frac{4}{3}-\sigma}.$$

Iš čia randame, kad

$$s\int\limits_1^{t} E_1(x)X^{-s-1}dx = -\sum_{0\le j\le \frac{\log t}{\log 2}-1} \int\limits_{t\cdot 2^{-j-1}}^{t\cdot 2^{-j}} E_1(x)x^{-s-1}dx \ll$$

$$\ll \sum_{0\le j\le \frac{\log t}{\log 2}-1} (t\cdot 2^{-j})^{\frac{4}{3}-\sigma} \ll t^{\frac{4}{3}-\sigma}. \tag{3.5}$$

3) atvejis. Šiuo atveju integralo

$$s\int\limits_X^{2X} E_1(x)x^{-s-1}dx$$

įverčiui naudosime Atkinsono formulę, kuri duoda funkcijos $E_1(x)$ išraišką elementarioσioms funkcijoms. Jos tvirtinimas yra 1.8 lema.

Pritaikę Koši nelygybę, turime, kad

$$\int\limits_X^{2X} R(x)x^{-s-1}dx \ll \Big(\int\limits_X^{2X} R^2(x)dx \int\limits_X^{2X} X^{-2\sigma-2}dx\Big)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(X\log^4 X \cdot X^{-2\sigma-1}\right)^{\frac{1}{2}} = X^{-\sigma}\log^2 X. \tag{3.6}$$

Panašiai yra įvertinamas ir integralas

$$\int\limits_X^{2X} S_2(x,N)x^{-s-1}dx.$$

Čia mes parenkame $N = cX$ su pakankamai maža teigiama konstanta.

Kadangi galioja įvertis [4]

$$\int\limits_X^{2X} |S_2(x,N)|^2 dx \ll X\log^4 X,$$

tai pritaikę Koši nelygybę randame, kad

$$\int\limits_X^{2X} S_2(x,N)x^{-s-1}dx \ll \Big(\int\limits_X^{2X} \big|S_2(x,N)\big|^2 dx \int\limits_X^{2X} x^{-2\sigma-2}dx\Big)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \big(x\log^4 X \cdot X^{-2\sigma-1}\big)^{\frac{1}{2}} = x^{-\sigma}\log^2 X.$$

Iš čia ir (3.6)

$$s\int\limits_t^{\infty} \big(S_2(x,N) + R(x)\big)x^{-s-1}dx =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{t^2 \cdot 2^j}^{t^2 \cdot 2^{j+1}} \big(S_2(x,N) + R(x)\big) x^{-s-1} dx \ll$$

$$\ll t \sum_{j=0}^{\infty} (t^2 \cdot 2^j)^{-\sigma} \log^2 (t^2 \cdot 2^j) \ll t^{1-2\sigma} \log^2 t. \tag{3.7}$$

Dabar įvertinsime integralą su $S_1(x,N)$. Pastebime, kad iš funkcijos $S_1(x,N)$ apibrėžimo gauname

$$s \int\limits_{X}^{2X} S_1(x,N) x^{-s-1} dx \ll$$

$$\ll t \sum_{m \leq cX} \left| (-1)^m d(m) m^{-\frac{3}{4}} \right| \left| \int\limits_{X}^{2X} x^{-\frac{3}{4-\sigma}} e(x,m) e^{iF_{\pm}(x)} dx \right|,$$

čia

$$e(x,m) = \left(1 + \frac{\pi m}{2x}\right)^{-\frac{1}{4}} \left(\sqrt{\frac{2x}{\pi m}} \operatorname{arsinh} \sqrt{\frac{\pi m}{2x}}\right)^{-1} = 1 + O\left(\frac{m}{x}\right), \tag{3.8}$$

o

$$F_{\pm}(x) = f(x,m) \pm t \log x$$

ir

$$f(x,m) = 2x \cdot \operatorname{arsinh} \sqrt{\frac{xm}{2x}} + \sqrt{2\pi m x + \pi^2 m^2} - \frac{\pi}{4}.$$

Užtenka nagrinėti $F_-(x)$, kadangi $F'_+(x) \neq 0$.

Iš funkcijos $F_-(x)$ apibrėžimo gauname, kad

$$F'_-(x) = 2 \log \left( \sqrt{\frac{\pi m}{2x}} + \sqrt{1 + \frac{\pi m}{2x}} \right) - \frac{t}{x}.$$

Kadangi $X > t^2$ ir $N = cX$ su pakankamai maža konstanta $c$, tai iš čia randame, kad

$$F'(x) \gg \sqrt{\frac{m}{X}}.$$

Pasinaudoje šiuo įverčiu ir 1.5 lema, iš (3.8) gauname, kad

$$s\int_X^{2X} S_1(x,N)x^{-s-1}dx \ll$$

$$\ll t\sum_{m\ll X} d(m)m^{-\frac{3}{4}}X^{-\frac{3}{4}-\sigma}m^{-\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}} \ll tX^{-\frac{1}{4}-\sigma}.$$

Vadinasi,

$$s\int_{t^2}^{\infty} S_1(x,N)x^{-s-1}dx \ll t\sum_{j=0}^{\infty}\left|\int_{t^2\cdot 2^j}^{t^2\cdot 2^{j+1}} S_1(x,N)x^{-s-1}dx\right| \ll$$

$$\ll t\sum_{j=0}^{\infty}(t^2\cdot 2^j)^{-\frac{1}{4}-\sigma} \ll^{1-\frac{1}{2}-2\sigma} = t^{\frac{1}{2}-2\sigma}.$$

Iš čia ir (3.7) galutinai turime, kad

$$s\int_{t^2}^{\infty} E_1(x)x^{-s-1}dx \ll t^{1-2\sigma}\log^2 t. \tag{3.9}$$

Atvejis $t \le X \le t^2$ yra pats sudėtingiausias. Jį dar dalijame į tris atskirus atvejus: a) $m \ge \frac{c_1t^2}{X}$, su pakankamai didele konstanta $c_1$. Šiuo atveju vėl turime, kad

$$F'_-(x) \gg \sqrt{\frac{m}{X}},$$

todėl, pakartoję tuos pačius samprotavimus kaip ir atveju $X \gg t^2$, gauname

$$s\int_X^{2X} S_1(x,N)x^{-s-1}dx \ll$$

$$\ll t\sum_{\frac{c_1t^2}{X}\le m\le c_1X} d(m)m^{-\frac{3}{4}}X^{-\frac{3}{4}-\sigma}m^{-\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}} \ll t^{1+\varepsilon}X^{-\frac{1}{4}-\sigma}.$$

Taigi vėl randame, kad

$$s\int_t^{t^2} S_1(x,N)x^{-s-1}dx \ll t^{1+\varepsilon}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\int_{t\cdot 2^j}^{t\cdot 2^{j+1}} S_1(x,N)x^{-s-1}dx\right| \ll$$

$$\ll t^{1+\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} (t \cdot 2^j)^{-\frac{1}{4}-\sigma} \ll t^{\frac{1}{2}-\sigma+\varepsilon}. \tag{3.10}$$

b) $m \le \frac{c_2 t^2}{X}$ su pakankamai maža teigiama konstanta $c_2$. Šiuo atveju iš funkcijos $F_-(x)$ išvestinės pavidalo randame, kad $F'_-(x) \gg \frac{t}{X}$.

Vėl pasinaudoję 4.2 lema, gauname

$$s \int_X^{2X} S_1(x, N) x^{-s-1} dx \ll \sum_{m \le \frac{c_2 t^2}{X}} d(m) m^{-\frac{3}{4}} X^{-\frac{3}{4}-\sigma} X^1 t^{-1} =$$

$$= X^{\frac{1}{4}-\sigma} \sum_{m \le \frac{c_2 t^2}{X}} d(m) m^{-\frac{3}{4}} \ll$$

$$\ll X^{\frac{1}{4}-\sigma} \left(\frac{t^2}{X}\right)^{\frac{1}{4}} t^{\varepsilon} = t^{\frac{1}{2}+\varepsilon} X^{-\sigma}. \tag{3.11}$$

Todėl

$$s \int_t^{t^2} S_1(x, N) x^{-s-1} dx \ll t \sum_{j=0}^{\infty} \left| \int_{t \cdot 2^j}^{t \cdot 2^{j+1}} S_1(x, N) x^{-s-1} dx \right| \ll$$

$$\ll t \sum_{j=0}^{\infty} (t \cdot 2^j)^{-\frac{1}{4}-\sigma} \ll t^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} (t \cdot 2^j)^{-\sigma} \ll$$

$$\ll t^{\frac{1}{2}-\sigma+\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\sigma} \ll t^{\frac{1}{2}-\sigma+\varepsilon}.$$

c) Liko sunkiausias atvejis – kai $F'_-(x)$ kuriame nors taške $x_0 \in [X, 2X]$ virsta nuliu, arba, kai yra daug mažesnė už trupmeną $\frac{t}{X}$. Skaičiuojame funkcijos $F_-(x)$ antrąją išvestinę. Randame, kad

$$F''_{\pm}(x) = \frac{\left(\left(\frac{\pi m}{2x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{\pi m}{2x^2}\right) + \left(1 + \frac{\pi m}{2x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{\pi m}{2x^2}\right)\right)}{\sqrt{\frac{\pi m}{2x}} + \sqrt{1 + \frac{\pi m}{2x}}} \mp \frac{t}{x^2} =$$

$$= \frac{-\frac{\pi m}{2x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi m}{2x}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\pi m}{2x}}}\right)}{\sqrt{\frac{\pi m}{2x}} + \sqrt{1 + \frac{\pi m}{2x}}} \mp \frac{t}{x^2} =$$

$$= -\frac{\pi m}{2x^2} \frac{\frac{\sqrt{\frac{\pi m}{2x}} + \sqrt{1+\frac{\pi m}{2x}}}{\sqrt{\frac{\pi m}{2x}} \cdot \sqrt{1+\frac{\pi m}{2x}}}}{\sqrt{\frac{\pi m}{2x}} + \sqrt{1 + \frac{\pi m}{2x}}} \mp \frac{t}{x^2} =$$

$$= -\frac{\pi m}{2x^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi m}{2x}}+\sqrt{1+\frac{\pi m}{2x}}} \mp \frac{t}{x^2}.$$

Kadangi pagal mūsų parinkimą santykis $\frac{m}{X}$ yra mažas, tai iš čia išplaukia, kad taško $x_0$ aplinkoje yra teisingi įverčiai $\frac{c_4 t}{X^2} \le F''(x) \le c_3\frac{t}{X^2}$.

Pritaikę 1.5 lemą su antrąja išvestine, gauname, kad

$$\int_X^{2X} S_1(x,N)x^{-s-1}dx \ll \sum_{\frac{c_6t^2}{X}\le m\le\frac{c_5t^2}{X}} d(m)m^{-\frac{3}{4}}X^{-\frac{3}{4}-\sigma}\left(\frac{t}{X^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll t^{-\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{4}-\sigma}\sum_{\frac{c_6t^2}{X}\le m\le\frac{c_5t^2}{X}} d(m)m^{-\frac{3}{4}} \ll$$

$$\ll t^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}X^{\frac{1}{4}-\sigma}\left(\frac{t^2}{X}\right)^{\frac{1}{4}} = t^{\varepsilon}X^{-\sigma}.$$

Iš čia randame

$$s\int_t^{t^2} S_1(x,N)x^{-s-1}dx \ll t\sum_{j=0}^{\infty}\left|\int_{t\cdot 2^j}^{t\cdot 2^{j+1}} S_1(x,N)x^{-s-1}dx\right| \ll$$

$$t^{1+\varepsilon}\sum_{j=0}^{\infty}(t\cdot 2^j)^{-\sigma} \ll t^{1-\sigma+\varepsilon}\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j-\sigma} \ll t^{1-\sigma+\varepsilon}. \tag{3.12}$$

Iš (3.10)–(3.12) įverčių galutinai gauname, kad

$$s\int_t^{t^2} S_1(x,N)x^{-s-1}dx \ll t^{1-\sigma+\varepsilon}.$$

3.1 teoremos tvirtinimas dabar išplaukia iš (3.5), (3.7), (3.9) ir (3.13) įverčių.

# IŠVADOS

Magistro darbe išnagrinėta funkcija $\mathcal{Z}_1(s)$ . Pagrindiniai darbo rezultatai yra tokios teoremos:

**2.2 teorema.** *Funkcija $\mathcal{Z}_1(s)$ yra meromorfiškai pratęsiama į pusplokštumę $\sigma > -\frac{3}{4}$. Taškas $s = 1$ yra antrosios eilės polius. Be to, yra teisinga lygybė*

$$\mathcal{Z}_1(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2\gamma_0 - \log(2\pi)}{s-1} - E(1)+$$

$$+\pi(s+1) + s(s+1)(s+2)\int\limits_1^\infty G_1(x)x^{-s-3}dx$$

ir

**3.1 teorema.** *Tarkime, kad $0 \le \sigma \le 1$ ir $t \ge t_0 > 0$. Tuomet yra teisingas įvertis*

$$\mathcal{Z}_1(\sigma + it) \ll_\varepsilon t^{\frac{4}{3}-\sigma+\varepsilon}.$$

# LITERATŪRA


1. HAFNER, J. L.; IVIČ, A. *On the mean-square of the Riemann zeta-function on the critical line.* J. Number Theory 32, 151–191 (1989).

2. IVIČ, A. *The Riemann Zeta-Function.* Wiley, New York, 1985.

3. LAURINČIKAS, A. *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function.* Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 1996.

4. TITCHMATSH, E. C. *The Theory of the Riemann Zeta-Function.* Clarendon Press, Oxford, 1986.

**The Mellin transform of the Riemann zeta - function on the critical line**


## SUMMARY

Let $\zeta(s), s = \sigma + it$, denote the Riemann zeta - function. We consider the modified Mellin transform $\mathcal{Z}_1(s)$ of $|\zeta(\frac{1}{2} + it)|^{\frac{1}{2}}$ defined, for $\sigma > 1$, by

$$\mathcal{Z}_1(s) = \int\limits_1^\infty \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 x^{-s} dx.$$

We prove that the function $\mathcal{Z}_1(s)$ is analytically continuable to the halfplane $\sigma > -\frac{3}{4}$, except for a simple pole $s = 1$ with residue

$$2\gamma_0 - \log(2\pi),$$

where $\gamma_0$ is the Euler constant.

Moreover, we obtain that, for $0 \leq \sigma \leq 1$ and $t \geq t_0 > 1$, the estimate

$$\mathcal{Z}_1(\sigma + it) \ll_\varepsilon t^{\frac{4}{3} - \sigma + \varepsilon}$$

is true with arbitrary $\varepsilon > 0$.