VILNIAUS UNIVERSITETAS

JUSTAS KALPOKAS

RIEMANN'O DZETA FUNKCIJOS IR DIRICHLET L-FUNKCIJŲ DISKRETIEJI MOMENTAI

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2012

Disertacija rengta 2008–2012 m. Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas
Prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Konsultantas
Prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto matematikos mokslo krypties taryboje.

Taryba

Pirmininkas

- Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Nariai:

- Prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)
- Prof. dr. Roma Kačinskaitė (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)
- Prof. dr. Aleksandras Krylovas (Mykolo Romerio universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)
- Prof. dr. Gediminas Stepanauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Oponentai:

- Prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)
- Doc. dr. Darius Šiaučiūnas (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2012 m. lapkričio 16 d. 14 val. VU Matematikos ir informatikos fakultete, Šaltinių g. 4.
Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva.
Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2012 m. spalio 15 d.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

JUSTAS KALPOKAS

DISCRETE MOMENTS OF THE RIEMANN ZETA FUNCTION AND DIRICHLET L-FUNCTIONS

Summary of doctoral dissertation
Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2012

The scientific work was carried out in 2008 – 2012 at Vilnius University.

Scientific supervisor
Prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

Scientific adviser
Prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

The thesis is defended in the council of Mathematics of Vilnius University.

The council

Chairman

- Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

Members:

- Prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)
- Prof. dr. Roma Kačinskaitė (Šiauliai University, Physical sciences, Mathematics - 01P)
- Prof. dr. Aleksandras Krylovas (Mykolas Romeris University, Physical sciences, Mathematics - 01P)
- Prof. dr. Gediminas Stepanauskas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

Opponents:

- Prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)
- Doc. dr. Darius Šiaučiūnas (Šiauliai University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on November 16, 2012 at 2pm at Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, Šaltinių st. 4.
Address: Naugarduko st. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania.
The summary of the dissertation was distributed on 15 October, 2012.
The dissertation is available at Vilnius University's library.

Disertacinio darbo aprašymas

Trumpa mokslinės problemos istorija ir tyrimo objektai

Analizinė skaičių teorija yra skaičių teorijos dalis, kurioje naudojantis matematinės analizės ir kompleksinio kintamojo funkcijų tyrimo metodais, sprendžiami uždaviniai susiję su sveikaisiais skaičiais. Manoma, kad analizinės skaičių teorijos pradžią žymi Dirichlet eilučių ir Dirichlet L-funkcijų taikymai. Tegu $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis. Apibrėžkime Dirichlet L-funkciją

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \qquad (\sigma > 1).$$

Čia $\chi(n)$ yra Dirichlet charakteris – visiškai multiplikatyvi funkcija, kuri įgyja reikšmes iš vienetinio apskritimo, esančio kompleksinėje plokštumoje (vienetinio apskritimo centras sutampa su koordinačių pradžios tašku). Dirichlet L-funkcijos buvo panaudotos įrodant Dirichlet teoremą apie pirminius skaičius aritmetinėse progresijose.

Teorema (Dirichlet teorema, 1837)**.** *Tegu a ir q yra tarpusavyje pirminiai (t. y. (a,q)=1) sveikieji skaičiai. Tada aritmetinėje progresijoje*

$$a + qn, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

yra be galo daug pirminių skaičių.

Analizinė skaičių teorija gali būti padalyta į dvi dalis. Viena jų yra vadinama adityviąja skaičių teorija. Pagrindiniai šioje teorijos tyrimų įrankiai yra Hardy-Littlewood'o apskritimo metodas ir rėčio metodas. Svarbiausia adityviosios skaičių teorijos problema yra vadinama Goldbach'o hipoteze. Ji suformuluota 18 a. viduryje: *Kiekvienas lyginis skaičius, didesnis už du, gali būti užrašytas dviejų pirminių skaičių suma.*

Kita analizinės skaičių teorijos dalis yra vadinama multiplikatyviąja skaičių teorija. Svarbiausias šios srities rezultatas yra pirminių skaičių teorema. Apibrėžkime pirminius skaičius skaičiuojančią funkciją

$$\pi(x) = \#\{p \mid p - \text{pirminis},\ p \le x\} = \sum_{p \le x} 1.$$

Teorema (pirminių skaičių teorema, 1896)**.**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Čia ir toliau $\log x = \ln x$.

Pirminių skaičių teorema buvo publikuota 1896 m.. Ją nepriklausomai vienas nuo kito įrodė J. Hadamard'as ir C. J. de la Vallée Poussin'as.

Pirminių skaičių teorema yra glaudžiai susijusi su Riemann'o dzeta funkcija. B. Riemann'as 1859 m. paskelbė straipsnį, kuriame parodė sąryšį tarp pirminių skaičių ir Riemann'o dzeta funkcijos nulių. Riemann'o dzeta funkcija yra apibrėžiama Dirichlet eilute

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (\sigma > 1)$$

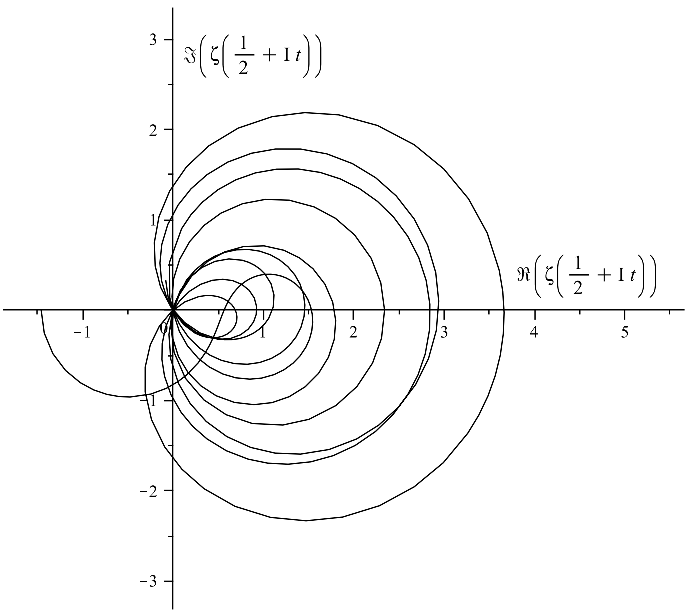
ir gali būti išreikšta Euler'io sandauga

$$\zeta(s) = \prod_{p-\text{pirminis}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \qquad (\sigma > 1). \tag{1}$$

Iš Euler'io sandaugos gauname, kad $\zeta(s) \neq 0$, kai $\sigma > 1$. Riemann'o dzeta funkciją galima analiziškai pratęsti į visą kompleksinių skaičių plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$. Riemann'o dzeta funkcija tenkina funkcinę lygtį

$$\zeta(s) = \Delta(s)\zeta(1-s), \qquad \text{čia} \quad \Delta(s) := 2^s \pi^{s-1} \Gamma(1-s) \sin(\tfrac{\pi s}{2}). \tag{2}$$

Nuliai, kurie atsiranda iš daugiklio $\Delta(s)$, yra vadinami trivialiaisiais nuliais ($\Delta(s) = 0$ tada ir tik tada, kai $s = -2n$ visiems $n = 1, 2, \ldots$). Iš Euler'io sandaugos (1) ir funkcinės lygties (2) gauname, kad netrivialieji nuliai (jie žymimi $\rho = \beta + i\gamma$) yra kritinėje juostoje $0 \leq \sigma \leq 1$. Tiesė $\sigma = \frac{1}{2}$ yra vadinama kritine tiese. Riemann'o hipotezė teigia, kad *visi netrivialieji nuliai yra ant kritinės tiesės*. Jeigu Riemann'o hipotezė yra teisinga, tada funkcijos $\pi(x)$ asimptotinės formulės paklaida yra mažiausia.



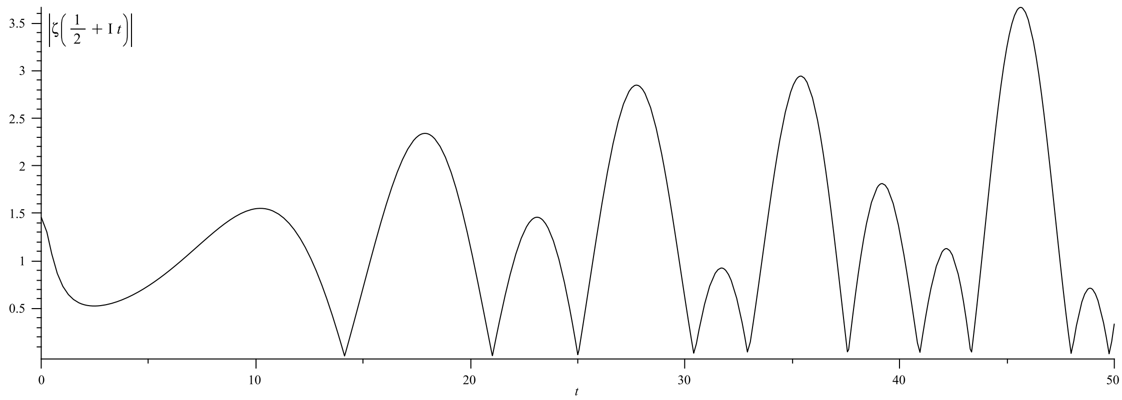
1 pav.: Pavaizduota kreivė $t \mapsto \zeta(\frac{1}{2} + it)$, čia t kinta nuo 0 iki 50. Čia ir kitur $I = i = \sqrt{-1}$.

Iš paveikslo matome, kad pirmieji netrivialieji Riemann'o dzeta funkcijos nuliai yra ant kritinės tiesės. Šiuo metu žinoma, kad tokių nulių yra $10^{22} + 10^4$. Iš grafiko matyti, kad Riemann'o dzeta funkcija plečiasi I ir IV ketvirčiuose. Panašu, kad funkcija retai įgyja neigiamas reikšmes.

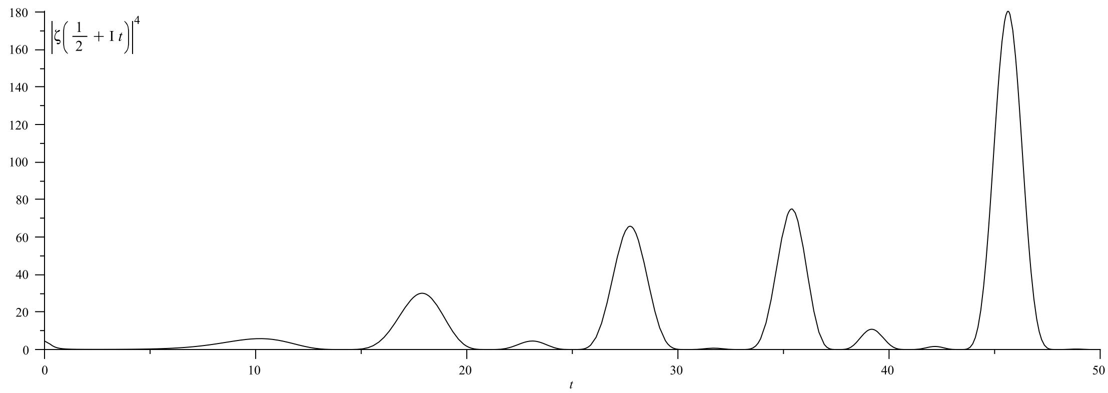
Toliau pristatysime uždavinius, susijusias su Riemann'o dzeta funkcija, Dirichlet L-funkcija, ir disertacijos rezultatus.

Riemann'o dzeta funkcija

Tolydieji momentai



(a)



(b)

2 pav.: Didėjant laipsniui, ryškėja vietos, kur Riemann'o dzeta funkcija įgyja didžiausias reikšmes.

Yra daug neišspręstų uždavinių, suformuluotų Riemann'o dzeta funkcijai. Vienas iš uždavinių yra susijęs su viršutiniais ir apatiniais rėžiais, kurie aprėžia tolydžius Riemann'o dzeta funkcijos momentus

$$I_k(T) = \int_0^T \left|\zeta\Big(\frac{1}{2} + it\Big)\right|^{2k} dt$$

(2 pav. pavaizduota: (a) $|\zeta(\frac{1}{2} + it)|$ grafikas, (b) $|\zeta(\frac{1}{2} + it)|^4$ grafikas). Apatinių ir viršutinių rėžių paieška yra svarbi, nes šiuo metu yra žinomos tik dvi asimptotinės momentų $I_k(T)$, kai $k = 1$ ir $k = 2$, formulės. Hardy-Littlewood'as [21] 1918 m. įrodė atvejį $k = 1$ ir Ingham'as [24] 1928 m. įrodė atvejį $k = 2$.

Tam tikrais atvejais apatiniai ir viršutiniai rėžiai $I_k(T)$ yra žinomi. Ramachandra [38], remdamasis Riemann'o hipoteze, 1978 m. visiems neneigiamiems realiesiems skaičiams k įrodė, kad

$$I_k(T) \gg T(\log T)^{k^2}.$$

Heath-Brown'as [23] 1981 m. minėtą rezultatą gavo visiems neneigiamiems racionaliesiems k, nesiremdamas Riemann'o hipoteze.

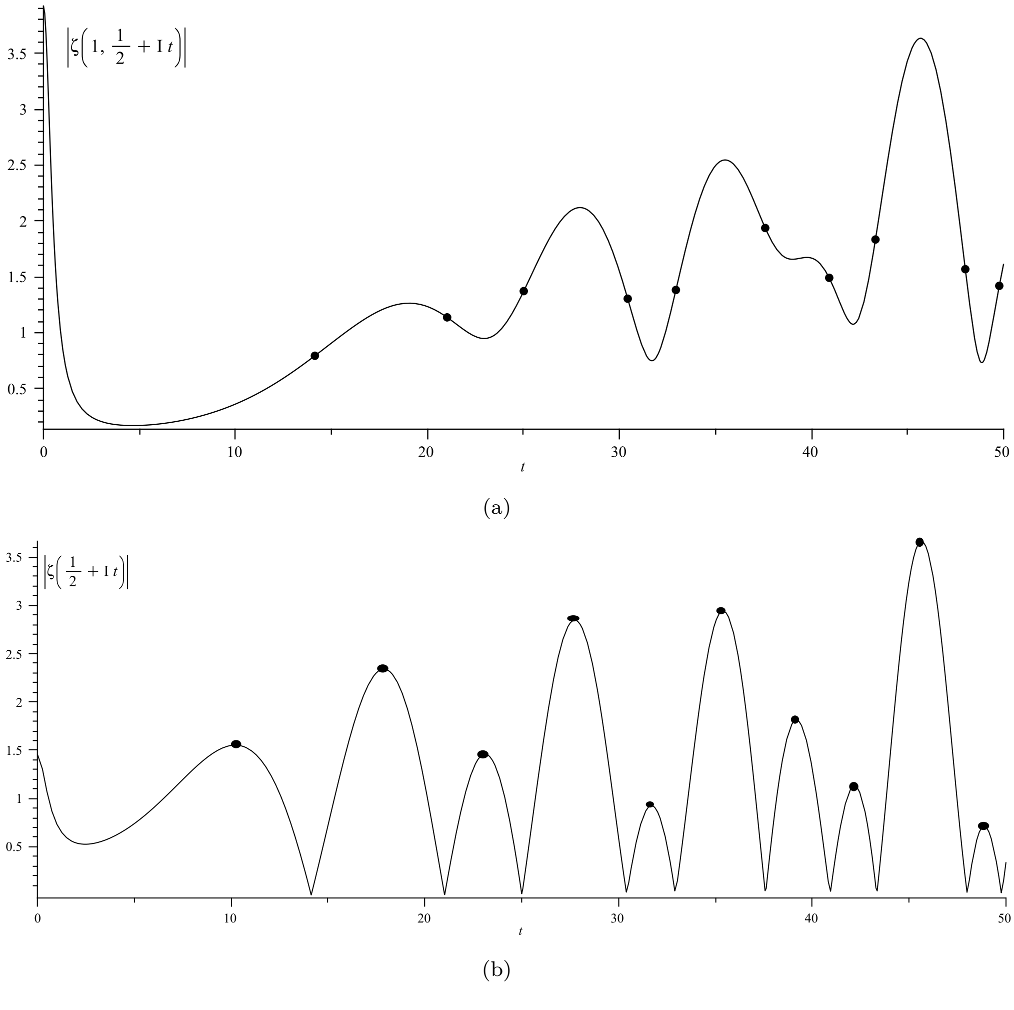
Neseniai Soundararajan'as [41], remdamasis Riemann'o hipoteze, rado viršutinius rėžius. Jeigu Riemann'o hipotezė teisinga, tai visiems neneigiamiems realiesiems k teisinga

$$I_k(T) \ll T(\log T)^{k^2+\epsilon}.$$

Čia ir toliau ϵ yra fiksuota, kiek norima maža, teigiama konstanta.

Viršutiniai $I_k(T)$ rėžiai yra susiję su viena garsia analizinės skaičių teorijos hipoteze, kuri vadinama Lindelöf'o hipoteze. *Lindelöf'o hipotezė teigia, kad* $|\zeta(\frac{1}{2}+it)| \ll t^{\epsilon}$, $t > 1$. Hipotezė yra ekvivalenti teiginiui $I_k(T) \ll T^{1+\epsilon}$. Akivaizdu, kad iš Riemann'o hipotezės išplaukia Lindelöf'o hipotezė.

Diskretieji momentai



3 pav.: (a) Pavaizduotas Riemann'o dzeta funkcijos išvestinės, t. y. $\zeta(1, \frac{1}{2}+It) = \zeta'(\frac{1}{2}+It)$, modulis, o juodi taškai žymi reikšmes, kurias funkcija įgyja Riemann'o dzeta funkcijos nuliuose. (b) Pavaizduotas Riemann'o dzeta funkcijos modulis, o juodi taškai žymi lokaliuosius maksimumus.

Tegu $\rho = \beta + i\gamma$ yra netrivialieji Riemann'o dzeta funkcijos nuliai. Diskretieji momentai

$$S_k(T) = \sum_{0<\gamma\le T} |\zeta'(\rho)|^{2k}$$

yra laikomi svarbiu uždaviniu, tačiau tik remiantis Riemann'o hipoteze yra pasiekta teigiamų rezultatų (žr. 3 pav., a). Gonek'as [19] 1984 m. (aš gimiau tais metais), remdamasis Riemann'o hipoteze, įrodė asimptotinę formulę $S_k(T)$, kai $k = 1$.

Neseniai Ng'as ir Milinovich'ius [31], remdamiesi Riemann'o hipoteze, visiems teigiamiesiems sveikiesiems k atrado apatinį rėžį

$$S_k(T) \gg T(\log T)^{k^2+2k+1}.$$

Milinovich'ius [32], remdamasis Riemann'o hipoteze, visiems teigiamiesiems sveikiesiems k atrado viršutinį rėžį

$$S_k(T) \ll T(\log T)^{k^2+2k+1+\epsilon}.$$

Daug autorių tyrinėjo kitokio tipo diskrečiuosius momentus (žr. 3 pav., b). Tegu γ ir γ^+ žymi netrivialiųjų Riemann'o dzeta funkcijos nulių ordinates, kurios eina viena po kitos. Riemann'o dzeta funkcijos diskretieji momentai lokaliuose maksimumo taškuose yra apibrėžiami taip:

$$M_k(T) = \sum_{0<\gamma\leq T} \max_{\gamma\leq\tau_\gamma\leq\gamma^+} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+i\tau_\gamma\right)\right|^{2k}.$$

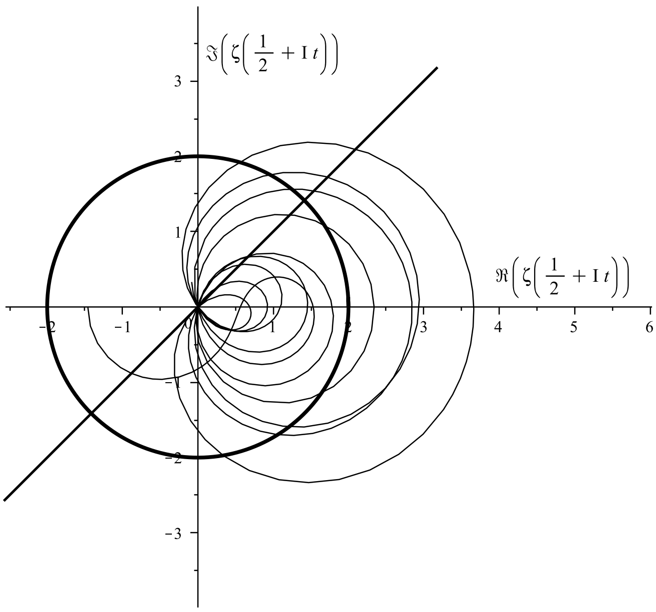
Conrey ir Ghosh'as [6], remdamiesi Riemann'o hipoteze, 1985 m. įrodė $M_k(T)$ asimptotinę formulę atveju $k = 1$:

$$M_1(T) \sim \frac{e^2-5}{2}\frac{T}{2\pi}(\log T)^2.$$

Neseniai Milinovich'ius [33], remdamasis Riemann'o hipoteze, visiems teigiamiesiems sveikiesiems k įrodė, kad

$$T(\log T)^{k^2+1-\epsilon} \ll M_k(T) \ll T(\log T)^{k^2+1+\epsilon}.$$

Ekstremaliosios reikšmės



4 pav.: Pavaizduota kreivė $t \mapsto \zeta(\frac{1}{2}+it)$, kai t kinta nuo 0 iki 50. Apskritimo spindulys lygus 2, o tiesė su realiąja ašimi sudaro 45° kampą.

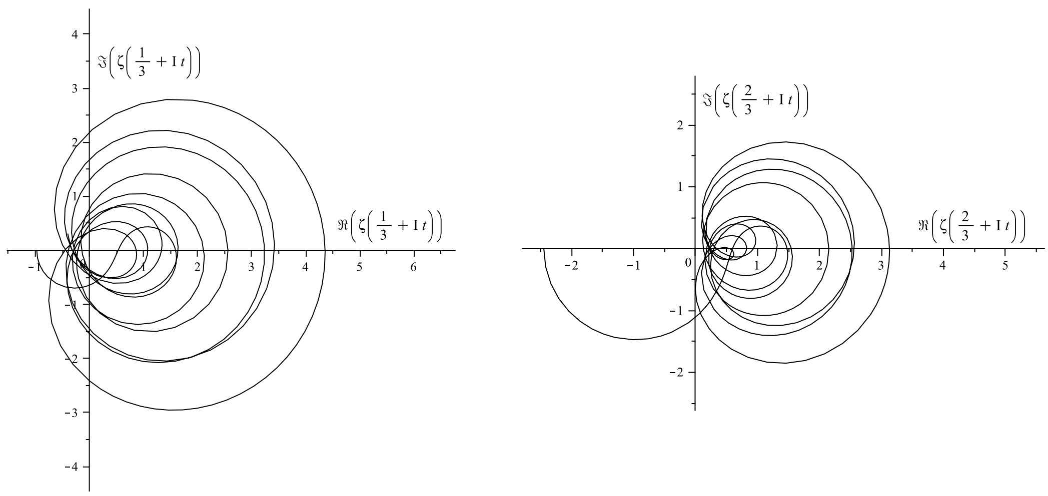
Neseniai Soundararajan'as [40], tyrinėdamas Riemann'o dzeta funkcijos reikšmes ant kritinės tiesės, atrado, kad

$$\max_{t\in[T,2T]} \left|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)\right| \gg \exp\left((1+o(1))\sqrt{\frac{\log T}{\log\log T}}\right), \quad \text{kai} \quad T\to\infty. \tag{3}$$

Šis rezultatas sako, kad jeigu nubrėšime apskritimą, kurio centras yra koordinačių pradžioje ir spindulys lygus $C\exp(\sqrt{\frac{\log T}{\log\log T}})$, čia C fiksuota teigiama konstanta, tai egzistuos bent vienas taškas už apskritimo ribų, kuris priklausys kreivei (žr. 4 pav.).

Šis rezultatas, kaip ir Riemann'o dzeta funkcijos Ω įverčiai, nesuteikia jokios papildomos informacijos apie vietą, kur yra ekstremali reikšmė. Papildoma informacija galėtų būti atsakymas į klausimą, ar kiekviena kryptimi yra kreivės taškas už minėto apskritimo ribų arba ar yra ant tiesės, kertančios koordinačių pradžią, taškas, priklausantis kreivei ir esantis už apskritimo ribų (žr. 4 pav.).

Tirštumas

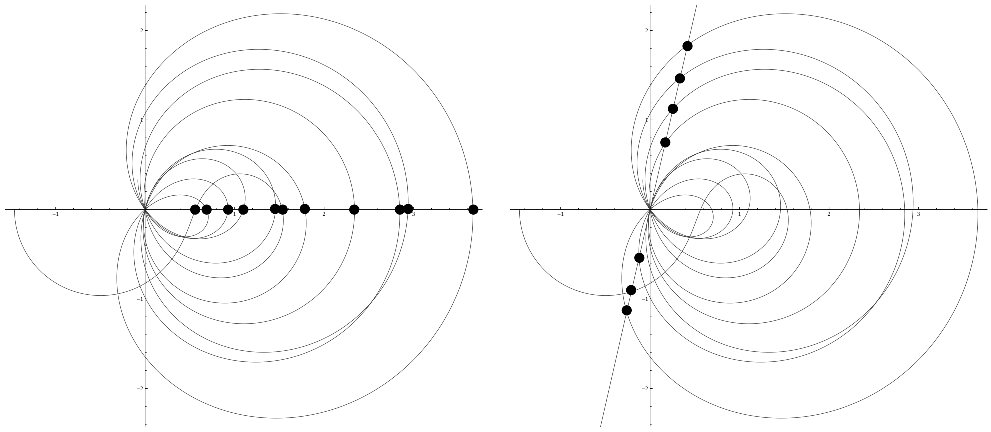


(a) (b)

5 pav.: Pavaizduoti kreivių $t\mapsto\zeta(\frac{1}{3}+it)$ (a) ir $t\mapsto\zeta(\frac{2}{3}+it)$ (b) grafikai, kai t kinta nuo 0 iki 50.

Bohr'as ir Courant'as [2] 1914 m. įrodė, kad Riemann'o dzeta funkcijos reikšmių aibė ant bet kurios vertikalios tiesės, esančios juostoje $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}s < 1$, yra visur tiršta aibėje $\mathbb{C}$ (žr. 5 pav., b). Garunkštis ir Steuding'as [17], remdamiesi Riemann'o hipoteze, įrodė, kad Riemann'o dzeta funkcijos reikšmių aibė ant vertikalios tiesės, kuri guli pusplokštumėje $\mathrm{Re}s < \frac{1}{2}$, nėra tiršta aibėje $\mathbb{C}$ (žr. 5 pav., a). Į klausimą, *ar Riemann'o dzeta funkcijos reikšmių aibė ant kritinės tiesės yra visur tiršta aibėje* $\mathbb{C}$ nėra atsakyta (žr. 1 pav.). Atkreipkite dėmesį, kad 5 paveikslo (a) ir (b) dalyse kreivė nutolusi nuo koordinačių pradžios. Jeigu Riemann'o hipotezė teisinga, tai 5 paveiksle pavaizduotos kreivės niekada nekerta koordinačių pradžios visiems realiesiems t.

Disertacijos rezultatai, susiję su Riemann'o dzeta funkcija (pirmojo disertacijos skyriaus apžvalga)



(a) (b)

6 pav.: Pavaizduota kreivė $t \mapsto \zeta(\frac{1}{2} + it)$, kai t kinta nuo 0 iki 50: (a) juodi taškai yra Gram'o taškai $t_n(0)$, (b) juodi taškai yra apibendrintieji Gram'o taškai $t_n(\frac{3}{7}\pi)$.

Iš paveikslo matyti, kad kreivės $t \mapsto \zeta(\frac{1}{2}+it)$ realioji dalis linkusi būti teigiama. Tai pastebėjo Edwards'as ir savo monografijoje [12] rašė *"...the real part of $\zeta(s)$ has a strong tendency to be positive"* [1] (p. 121). Kritinė tiesė yra riba, skirianti kreives $t \mapsto \zeta(\sigma + it)$, $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, kurios yra visur tirštos aibėje $\mathbb{C}$, nuo kreivių $t \mapsto \zeta(\sigma + it)$, $\sigma < \frac{1}{2}$, kurios nėra visur tirštos aibėje $\mathbb{C}$ (jeigu galioja Riemann'o hipotezė). Klausimas, ar kreivė $t \mapsto \zeta(\frac{1}{2} + it)$ yra visur tiršta aibėje $\mathbb{C}$, yra sunkus ir neišspręstas uždavinys. Pagrindinis disertacijos rezultatas yra išvada (1.5.1), kuri teigia, kad kreivė $t \mapsto \zeta(\frac{1}{2} + it)$ plečiasi į visas puses, t. y. jeigu mes nubrėšime apskritimą, kurio centras yra koordinačių pradžioje ir spindulys lygus T, bei nubrėšime spindulį einantį iš apskritimo centro, tai kreivė $t \mapsto \zeta(\frac{1}{2}+it)$ kirs nubrėžtą spindulį be galo daug kartų už apskritimo ribų (žr. 4 pav.). Atskiras išvados (1.5.1) atvejis gali būti formuluojamas taip: *Riemann'o dzeta funkcija ant kritinės tiesės įgyja be galo daug neigiamų reikšmių ir jos yra neaprėžtos.* Vėliau griežtai suformuluosime aptartą rezultatą.

Pradėkime nuo Riemann'o dzeta funkcijos funkcinės lygties

$$\zeta(s) = \Delta(s)\zeta(1-s), \qquad \text{čia} \quad \Delta(s) := 2^s \pi^{s-1}\Gamma(1-s)\sin(\tfrac{\pi s}{2}). \tag{4}$$

Iš karto turime, kad $\Delta(s)\Delta(1-s) = 1$. Taigi $\Delta(\frac{1}{2} + it)$ įgyja reikšmes visiems realiems t iš vienetinio apskritimo, esančio kompleksinėje plokštumoje (vienetinio apskritimo centras sutampa su koordinačių pradžios tašku). Pasirinkime kampą $\phi \in [0, \pi)$. Lygties

$$e^{2i\phi} = \Delta(\tfrac{1}{2} + it)$$

teigiamuosius sprendinius sudėliokime didėjimo tvarka ir pažymėkime $t_n(\phi)$ visiems $n \in \mathbb{N}$. Gauta seka yra kreivės $t \mapsto \zeta(\frac{1}{2} + it)$ ir tiesės $e^{i\phi}\mathbb{R}$ susikirtimo taškai (žr. 6 pav.: (a) $\phi = 0$, (b) $\phi = \frac{3}{7}\pi$).

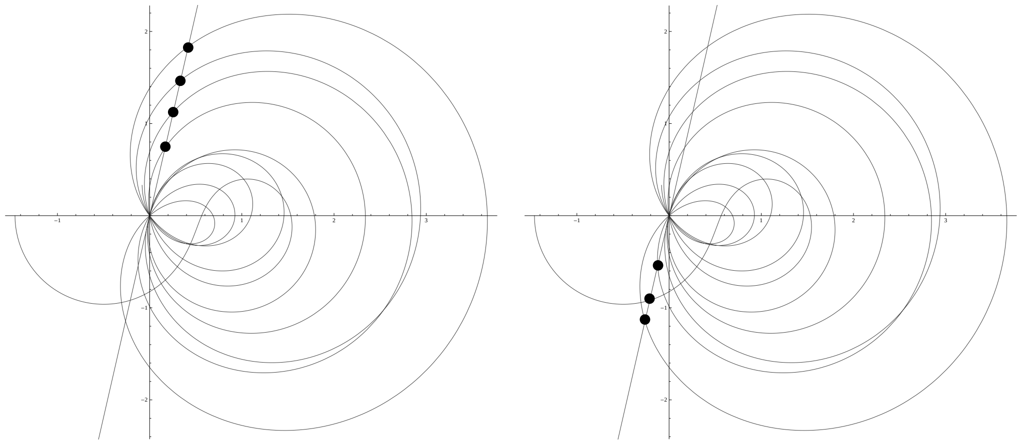
Sprendiniai $t_n(0)$ yra vadinami Gram'o taškais. Jais naudodamasis Gram'as [20] 1903 m. įrodė, kad pirmieji 15 netrivialiųjų nulių yra ant kritinės tiesės. Gram'as įrodyme naudojosi Gram'o dėsniu, kuris teigia, kad *tarp dviejų Gram'o taškų yra vienas netrivialusis nulis.* Šis

[1] "...realioji $\zeta(s)$ dalis linkusi būti teigiama".

dėsnis neteisingas. Titchmarsh'as [44] įrodė, kad Gram'o dėsnis turi be galo daug išimčių.

Iki šiol buvo tik žinoma, kaip rasti Gram'o taškus $t_n(0)$ (žr. 6 pav., a). Disertacijoje pristatomas metodas, padedantis rasti apibendrintuosius Gram'o taškus $t_n(\phi)$, kai $\phi \in [0, \pi)$ (žr. 6 pav., b).

Tarkime, kad $e^{-i\phi}\zeta(\frac{1}{2}+it_n(\phi))$ yra realus. Tada rašysime $t_n^+(\phi)$ vietoj $t_n(\phi)$, jeigu $e^{-i\phi}\zeta(\frac{1}{2}+it_n(\phi)) \geqslant 0$, ir $t_n^-(\phi)$, jeigu $e^{-i\phi}\zeta(\frac{1}{2}+it_n(\phi)) < 0$ (žr. 7 pav., a ir b).



(a) (b)

7 pav.: Pavaizduotos kreivės $t \mapsto \zeta(\frac{1}{2}+it)$, kai t kinta nuo 0 iki 50: (a) juodi taškai žymi $\zeta(\frac{1}{2}+it_n^+(\frac{3}{7}\pi))$ reikšmes taškuose $t_n^+(\frac{3}{7}\pi)$, (b) juodi taškai žymi reikšmes $\zeta(\frac{1}{2}+it_n^-(\frac{3}{7}\pi))$ taškuose $t_n^-(\frac{3}{7}\pi)$.

Dabar suformuluosime svarbiausią disertacijos rezultatą.

Išvada (1.5.1). *Bet kuriam $\phi \in [0, \pi)$ egzistuoja kiek norima didelės teigiamos ir neigiamos reikšmės $e^{-i\phi}\zeta(\frac{1}{2}+it_n(\phi))$. Tiksliau,*

$$\max_{0<t_n^{\pm}(\phi)\leqslant T} \left|\zeta(\tfrac{1}{2}+it_n^{\pm}(\phi))\right| \gg (\log T)^{\frac{5}{4}}.$$

Jeigu Riemann'o hipotezė yra teisinga, tai kiek norima mažam teigiamam dydžiui $\delta > 0$

$$\max_{0<t_n^{\pm}(\phi)\leqslant T} \left|\zeta(\tfrac{1}{2}+it_n^{\pm}(\phi))\right| \gg (\log T)^{\frac{3}{2}-\delta}.$$

Suformuluota išvada leidžia geriau suprasti, kaip elgiasi kreivė $t \mapsto \zeta(\frac{1}{2}+it)$, ir suteikia naujų įžvalgų, kurios gali padėti išspręsti uždavinį, susijusį su šios kreivės visur tirštumu aibėje $\mathbb{C}$. Išvada įrodoma naudojantis beveik visomis disertacijoje įrodytomis teoremomis. Metodas buvo pristatytas Kalpoko, Korolev'o ir Steuding'o [29].

Kita išvada suteikia daugiau informacijos apie ekstremaliąsias reikšmes. Nubrėžę tiesę, kuri kerta koordinačių pradžios tašką, galime įrodyti, kad ant šios tiesės yra bent viena ekstremali reikšmė (žr. 4 pav.).

Išvada (1.5.2). *Tegu $\phi \neq \frac{\pi}{2}$ ir $\phi \in [0, \pi)$ Tada*

$$\max_{0<t_n(\phi)\leq T} \left|\zeta(\tfrac{1}{2}+it_n(\phi))\right| \gg \exp\left(\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\sqrt{\frac{\log T}{\log\log T}}\right).$$

Šią išvadą įrodysime taikydami Soundararajan'o [40] metodą. Nors (3) įvertis yra stipresnis už mūsų gautą įvertį, tačiau mūsų įvertis lokalizuoja ekstremaliąsias reikšmes.

Toliau išdėstytos teoremos, kurios reikalingos išvadoms (1.5.1) ir (1.5.2) įrodyti bei pateikiamos trys papildomos išvados.

Pradėkime nuo teoremos, kuri parodo, kiek yra apibendrintųjų Gram'o taškų intervale $(0, T]$.

Teorema (1.2.1). *Tolygiai visiems $\phi \in [0, \pi)$, kai $T \to \infty$,*

$$\sum_{0 < t_n(\phi) \leqslant T} 1 = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi e} + O(\log T).$$

Toliau mes įrodome asimptotines formules pirmajam, absoliučiajam antrajam ir trečiajam momentams.

Teorema (1.2.2). *Tolygiai visiems $\phi \in [0, \pi)$, kai $T \to \infty$,*

$$\sum_{0 < t_n(\phi) \leqslant T} \zeta\left(\tfrac{1}{2} + it\right) = 2e^{i\phi} \cos\phi \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi e} + O\left(T^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right) \tag{5}$$

ir

$$\begin{aligned}\sum_{0 < t_n(\phi) \leqslant T} \left|\zeta\left(\tfrac{1}{2} + it\right)\right|^2 &= \frac{T}{2\pi}\left(\log \frac{T}{2\pi e}\right)^2 + (2c + 2\cos(2\phi))\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi e} \\ &\quad + \frac{T}{2\pi} + O\left(T^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Čia $c := \lim_{N\to\infty}(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N) = 0,577\ldots$ yra Euler-Mascheroni konstanta.

Teorema (1.2.3). *Tolygiai visiems $\phi \in [0, \pi)$, kai $T \to \infty$,*

$$\begin{aligned}&\sum_{0 < t_n^{\phi} \leq T} \left(\zeta\left(\tfrac{1}{2} + it\right)\right)^3 \\ &\quad = 2e^{i\phi} \cos\phi \frac{T}{2\pi} P_3\left(\log \frac{T}{2\pi}\right) + e^{2i\phi} \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi e} + O(T).\end{aligned}$$

Čia $P_3(\log T)$ yra suskaičiuojamas 3-ojo laipsnio polinomas.

Įrodymuose naudojamės kontūriniu integravimu kartu su Cauchy teorema bei balno taško technika. Paprastuosius polius, kurių rezidiumai lygūs vienetui, apibendrintuose Gram'o taškuose randame naudodamiesi Kalpoko ir Steuding'o [28] atrastu metodu.

Kita teorema nagrinėja absoliučiųjų Riemann'o dzeta funkcijos (ir jos išvestinių) reikšmių apibendrintuose Gram'o taškuose sumas.

Teorema (1.3.7). *Visiems racionaliesiems $k \geqslant 1$ ir visiems neneigiamiems sveikiesiems l, tolygiai visiems $\phi \in [0, \pi)$, kai $T \to \infty$,*

$$\sum_{0 < t_n(\phi) \leqslant T} \left|\zeta^{(l)}\left(\tfrac{1}{2} + it_n(\phi)\right)\right|^{2k} \gg T(\log T)^{k^2+2kl+1}.$$

Tikslųjį apatinių rėžių įvertinimo metodą atrado Rudnick'as ir Soundararajan'as [39]. Norėdami juo remtis, taikome Kalpoko ir Steuding'o [28] metodą ir apibendrintąją daliklio funkciją, naudotą Heath-Brown'o [23].

Toliau nagrinėjame viršutinius rėžius. Pagrindinė idėja yra pristatyta Soundararajan'o [41], o diskretusis atvejis nagrinėtas Milinovich'iaus [32].

Teorema (1.4.1). *Tarkime, Riemann'o hipotezė yra teisinga. Visiems neneigiamiems sveikiesiems k ir l, tolygiai visiems $\phi \in [0,\pi)$, kai $T \to \infty$,*

$$\sum_{0<t_n(\phi)\leqslant T} \left|\zeta^{(l)}\left(\tfrac{1}{2}+it_n(\phi)\right)\right|^{2k} \ll_{k,l,\varepsilon} T(\log T)^{k^2+2kl+1+\epsilon}.$$

Visiems neneigiamiems realiesiems k, tolygiai visiems $\phi \in [0,\pi)$, kai $T \to \infty$,

$$\sum_{0<t_n(\phi)\leqslant T} \left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it_n(\phi)\right)\right|^{2k} \ll_{k,\varepsilon} T(\log T)^{k^2+1+\epsilon}.$$

Paskutinės trys išvados parodo diskrečiųjų ir tolydžiųjų momentų sąryšį. Diskrečiuosius momentus su tolydžiaisiais susiejame integruodami diskrečiuosius momentus kampo ϕ, $\phi \in [0,\pi)$, atžvilgiu. Būdas buvo atrastas Christ'aus ir Kalpoko [4, 5].

Išvada (1.5.4). *Kai $T \to \infty$,*

$$\begin{aligned}
\int_0^T \zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right) d(\theta(t)) &= \frac{T}{2}\log\frac{T}{2\pi e} + O\left(T^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),\\
\int_0^T \left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right|^2 d(\theta(t)) &= \frac{T}{2}\left(\log\frac{T}{2\pi e}\right)^2 + 2c\frac{T}{2}\log\frac{T}{2\pi e} + \frac{T}{2} + O\left(T^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),\\
\int_0^T \zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)^3 d(\theta(t)) &= \frac{T}{2}\log\frac{T}{2\pi e} + O\left(T^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right).
\end{aligned}$$

Čia $\theta(t)$ yra Riemann-Siegel'io funkcija.

Iš Išvados (1.5.4) gauname jau žinomus apatinius ir viršutinius tolydžiųjų momentų rėžius (žr. 2 pav.).

Išvada (1.5.5). *Visiems racionaliesiems $k \geqslant 1$ ir visiems neneigiamiems sveikiesiems l, kai $T \to \infty$,*

$$\int_1^T \left|\zeta^{(l)}\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} \gg T(\log T)^{k^2+2kl}.$$

Išvada (1.5.6). *Tarkime, Riemann'o hipotezė yra teisinga.*
Visiems neneigiamiems realiesiems k, kai $T \to \infty$,

$$\int_1^T \left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} \ll T(\log T)^{k^2+\epsilon}.$$

Visiems neneigiamiems realiesiems k ir visiems teigiamiems sveikiesiems l, kai $T \to \infty$,

$$\int_1^T \left|\zeta^{(l)}\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} \ll T(\log T)^{k^2+2kl+\epsilon}.$$

Šia išvada baigiame pirmojo disertacijos skyriaus apžvalgą.

Dirichlet L-funkcijos

Nors Dirichlet L-funkcijos pirmą kartą buvo panaudotos ankščiau už Riemann'o dzeta funkciją, tačiau jos vadinamos Riemann'o dzeta funkcijos apibendrinimu. Viena suformuluotų Dirichlet L-funkcijoms hipotezių teigia, kad *skirtingos primityviosios Dirichlet L-funkcijos neturi bendrų netrivialiųjų nulių* (Fujii [15, Conjecture 3], Perelli [35]). Siekdamas išspręsti šį uždavinį, Fujii [13] įrodė, kad jeigu χ_1 ir χ_2 yra skirtingi primityvieji charakteriai, kurių moduliai yra

q, tai funkcijų $L(s,\chi_1)$ ir $L(s,\chi_2)$ teigiamoji nulių proporcija neturi bendrųjų nulių. Funkcijos $L(s,\chi_1)$ ir $L(s,\chi_2)$ turi bendrąjį nulį ρ, jeigu $L(\rho,\chi_1) = L(\rho,\chi_2) = 0$ esant tam pačiam multiplikatyvumui. Tarę, kad Riemann'o hipotezė yra teisinga, Conrey, Ghosh'as ir Gonek'as [8] įrodė, kad daugiausia dvi trečiosios Riemann'o dzeta funkcijos nulių sutampa su $L(s,\chi)$ nuliais, kai χ yra neprincipinis charakteris. Conrey, Ghosh'as ir Gonek'as [8] pastebėjo, kad naudojantis jų metodu ir tarus, jog galioja apibendrinta Riemann'o hipotezė (Riemann'o hipotezės analogas Dirichlet L-funkcijoms), galima įrodyti, kad dvi Dirichlet L-funkcijos turi daugiausia dvi trečiąsias sutampančių nulių, kai Dirichlet L-funkcijų charakteriai yra skirtingi. Daugiau apie tai galima sužinoti iš Raghunathan'o [37] straipsnio.

Disertacijos rezultatai, susiję su Dirichlet L-funkcijomis (antrojo disertacijos skyriaus apžvalga)

Tegu $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis. Apibrėžkime Dirichlet L-funkciją

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \quad (\sigma > 1).$$

Čia $\chi(n)$ yra Dirichlet charakteris moduliu q. Kai χ mod 1, gauname Riemann'o dzeta funkciją $L(s,\chi) = \zeta(s)$. Apibendrintoji Riemann'o hipotezė teigia, kad *kritinėje juostoje* $0 < \sigma < 1$ *kiekvienos Dirichlet L-funkcijos netrivialieji nuliai yra ant kritinės tiesės* $\sigma = \frac{1}{2}$. Nuliai, esantys kritinėje juostoje, vadinami netrivialiaisiais nuliais. Juos žymime $\rho_\chi = \beta_\chi + i\gamma_\chi$. Dirichlet charakteris χ mod q vadinamas primityviuoju, jeigu jis nėra padarytas iš kito charakterio, kurio modulis yra griežtai mažesnis už q. Kiekvienam q vienintelis principinis charakteris yra žymimas χ_0. Charakteris χ_0 mod 1 yra vienintelis principinis ir primityvusis charakteris. Su Dirichlet charakteriu χ mod q susijusi Gauss suma apibrėžiama

$$G(n,\chi) = \sum_{a=1}^{q} \chi(a) \exp\left(2\pi i \frac{an}{q}\right).$$

Jeigu $n = 1$, žymime $\tau(\chi) = G(1,\chi)$. Primityviajam charakteriui $\chi \bmod q$ galioja lygybė $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$ ir principiniam charakteriui χ_0 galioja lygybė $\tau(\chi_0) = \mu(q)$, čia $\mu(q)$ yra Möbius funkcija. Pradėkime nuo pirmosios teoremos.

Teorema (2.2.1). *Tegu A ir B yra teigiamos konstantos. Tegu ψ mod Q ir χ mod q yra primityvieji Dirichlet charakteriai ir $\chi \neq \psi$. Tada tolygiai visiems $Q \ll \log^A T$ ir visiems $q \ll \log^B T$*

$$\sum_{0<\gamma_\chi\leq T} L(\rho_\chi,\psi)L(1-\rho_\chi,\overline{\psi}) = \frac{\phi(Q)}{Q}\frac{T}{2\pi}\log^2\frac{T}{2\pi} + a_1\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} + a_2\frac{T}{2\pi} + O\left(T^{1-\frac{c}{\log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} T}}\right), \tag{7}$$

čia realiosios konstantos a_1, a_2 priklauso tik nuo q, Q ir yra apibrėžtos (8) formulėje.

Jeigu tarsime, kad apibendrintoji Riemann'o hipotezė yra teisinga, tada (7) *lygybės dešiniosios pusės reiškinys turi būti pakeistas į*

$$\sum_{0<\gamma_\chi\leq T} |L(\tfrac{1}{2} + it_\chi,\psi)|^2,$$

o paklaida bus lygi $O(q^{1+\varepsilon}Q^\varepsilon T^{\frac{1}{2}+\varepsilon} + qQ^{\frac{9}{2}+\varepsilon}T^\varepsilon + (QT)^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ tolygiai visiems Q ir q.

Pateikiame Teoremos (2.2.1) rezultatą su suskaičiuotomis konstantomis a_1 ir a_2.

$$\sum_{0<\gamma_\chi\le T} L(\rho_\chi,\psi)L(1-\rho_\chi,\overline{\psi}) = \frac{\phi(Q)}{Q}\frac{T}{2\pi}\left(\log\frac{Tq}{2\pi e}\log\frac{TQ}{2\pi e}+2\log\frac{Tq}{2\pi e}\left(\gamma+\sum_{p|Q}\frac{\log p}{p-1}\right)+1\right)$$
$$+\frac{\phi(Q)}{Q}\frac{T}{2\pi}\left[\left(\log\frac{TQ}{2\pi e}+2\left(\gamma+\sum_{p|Q}\frac{\log p}{p-1}\right)\right)\left(\frac{L'}{L}(1,(\chi\overline{\psi}))+\frac{L'}{L}(1,(\overline{\chi}\psi))\right)\right. \tag{8}$$
$$\left.+\frac{L'}{L}\cdot\left(\frac{L''}{L'}-\frac{L'}{L}\right)\big((1,\chi\overline{\psi})+(1,\overline{\chi}\psi)\big)\right]$$
$$-\delta(q,Q)\left(\tau(\chi\psi_0)\tau(\overline{\psi})L(1,(\chi\overline{\psi}))^2+\tau(\overline{\chi}\psi_0)\tau(\psi)L(1,(\overline{\chi}\psi))^2\right)\frac{(\chi\psi_0)(-1)}{\phi(Q)}\frac{T}{2\pi}$$
$$+O\left(T^{1-\frac{c}{\log^{\frac{3}{4}+\varepsilon}T}}\right).$$

Įrodinėdami teoremą (2.2.1) naudojamės kontūriniu integravimu kartu su Cauchy teorema, balno taško technika ir įvairiais rezultatais susijusiais su Dirichlet charakteriais.

Kita teorema apskaičiuoja pirmąjį diskretų momentą, kai yra sumuojama Dirichelt L-funkcija kitos Dirichlet L-funkcijos nuliuose.

Teorema (2.3.1). *Tegu A ir B yra teigiamos konstantos. Tegu $\psi \bmod Q$ ir $\chi \bmod q$ yra primityvieji Dirichlet charakteriai ir $\chi\neq\psi$. Tada tolygiai visiems $Q\ll\log^A T$ ir $q\ll\log^B T$*

$$\sum_{0<\gamma_\chi\le T} L(\rho_\chi,\psi) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{Tq}{2\pi e}-\delta(q,Q)L(1,\chi\overline{\psi})\psi(-1)\tau(\psi)\frac{\tau(\overline{\chi}\psi_0)}{\phi(Q)}\frac{T}{2\pi}$$
$$+\frac{L'}{L}(1,\psi\overline{\chi})\frac{T}{2\pi}+O\left(T\exp(-c\log^{\frac{1}{4}-\varepsilon}T)\right),$$

čia $\delta(q,Q)=1$, jeigu $q|Q$, ir $\delta(q,Q)=0$ kitu atveju; ψ_0 yra principinis Dirichlet charakteris $\bmod Q$ *ir c yra teigiama absoliučioji konstanta.*

Jeigu apibendrintoji Riemann'o hipotezė yra teisinga, tai paklaida bus lygi $O\left((TQ)^{1/2+\varepsilon}q^\varepsilon\right)$ tolygiai visiems Q ir q.

Toliau pateikiamoje išvadoje yra rastas apatinis rėžis, kuris parodo, kiek mažiausiai nesutampančių nulių turi dvi skirtingos Dirichlet L-funkcijos.

Išvada (2.4.1). *Tarkime, apibendrintoji Riemann'o hipotezė yra teisinga. Tegu A yra bet koks teigiamas skaičius. Tegu $\psi \bmod Q$ ir $\chi \bmod q$ yra primityvieji Dirichlet charakteriai ir $\chi\neq\psi$. Tada tolygiai visiems $q\ll(\log T)^A$ ir $Q\ll(\log T)^{2-\varepsilon}$*

$$\sum_{\substack{0<\gamma_\chi\le T\\ L(1/2+\gamma_\chi,\psi)\neq 0}} 1 \gg \frac{Q}{\phi(Q)}T.$$

Šia išvada baigiame antrojo disertacijos skyriaus apžvalgą.

Disertacijos aktualumas

Pirmajame disertacijos skyriuje pristatomi nauji rezultatai, susiję su Riemann'o dzeta funkcija. Autorius sprendžia uždavinius, kurie yra susiję su klasikiniais klausimais apie Riemann'o dzeta funkciją: kreivės $t \mapsto \zeta(\frac{1}{2}+it)$ visur tirštumas aibėje $\mathbb{C}$, ekstremaliosios reikšmės. Šių uždavinių istorija siekia daugiau nei 100 metų. Disertacijoje pateikiami rezultatai, kurie padeda lokalizuoti ekstremaliąsias reikšmes ir parodo, kad kreivė $t \mapsto \zeta(\frac{1}{2}+it)$ plečiasi į visas puses kompleksinių skaičių plokštumoje. Sprendžiant minėtus uždavinius, disertacijoje pristatomi ir išnagrinėjami naujo tipo Riemann'o dzeta funkcijos diskretieji momentai.

Antrajame disertacijos skyriuje pateikiami nauji rezultatai, susiję su Dirichlet L-funkcijomis. Sumuojama Dirichlet L-funkcija kitos Dirichelt L-funkcijos netrivialiuosiuose nuliuose. Randami pirmasis ir antrasis momentai. Disertacijoje pagerinama pirmojo momento paklaida ir randamas antrasis momentas. Iš gautų rezultatų padaroma išvada, kuri yra žinoma, tačiau yra tolydi Dirichlet charakterių modulių atžvilgiu.

Disertacija yra aktuali ir joje taikomi metodai bei gauti rezultatai turi išliekamąją vertę.

Disertacijos tikslai ir uždaviniai

Riemann'o dzeta funkcijos diskretieji momentai

Pagrindinis disertacijos tikslas buvo nagrinėti Riemann'o dzeta funkcijos reikšmių pasiskirstymą, kuris yra glaudžiai susijęs su kreivės $t \mapsto \zeta(\frac{1}{2}+it)$ elgesiu. Ieškant būdų, kaip tyrinėti kreivės elgesį, buvo apibendrinti Gram'o taškai ir atrasti naujo tipo diskretieji Riemann'o dzeta funkcijos momentai

$$S_k(T,\phi) = \sum_{0<t_n(\phi)\le T} \zeta\left(\frac{1}{2}+it_n(\phi)\right)^k$$

ir

$$S_{k,l}(T,\phi) = \sum_{0<t_n(\phi)\le T} \left|\zeta^{(l)}\left(\frac{1}{2}+it_n(\phi)\right)\right|^{2k}.$$

Mes ieškome sprendimų šiems uždaviniams:

1. Rasti asimptotines formules $S_0(T,\phi)$, $S_1(T,\phi)$, $S_3(T,\phi)$, $S_{1,0}(T,\phi)$.

2. Rasti apatinius rėžius $S_{k,l}(T,\phi)$, kai $k \ge 1$ yra racionalusis skaičius ir l yra neneigiamas sveikasis skaičius.

3. Tarus, kad Riemann'o hipotezė teisinga, rasti viršutinius rėžius $S_{k,0}(T,\phi)$, kai k yra neneigiamas realusis skaičius.

4. Tarus, kad Riemann'o hipotezė teisinga, rasti viršutinius rėžius $S_{k,l}(T,\phi)$, kai k ir l teigiami sveikieji skaičiai.

Naudojantis išvardytų uždavinių rezultatais gauti kiek galima daugiau informacijos apie Riemann'o dzeta funkcijos reikšmių pasiskirstymą.

Dirichlet L-funkcijų sumos

Kitas disertacijos uždavinys ištirti Dirichlet L-funkcijos reikšmių kitos Dirichlet L-funkcijos netrivialiuosiuose nuliuose sumą ir rasti šios sumos pirmąjį ir antrąjį momentus

$$\sum_{0<\gamma_\chi\le T} L(\rho_\chi,\psi), \qquad \sum_{0<\gamma_\chi\le T} L(\rho_\chi,\psi)L(1-\rho_\chi,\overline{\psi}).$$

Metodai

Mes taikome neseniai paskelbtus Rudznik'o ir Soundararajan'o [39], Soundararajan'o [40, 41] metodus, taip pat gerai žinomus Conrey, Gosh'o ir Gonek'o [7, 8, 9, 10] metodus. Dažnai naudojamos teoremos iš matematinės analizės ir kompleksinio kintamojo funkcijų teorijos (kontūrinis integravimas, Cauchy teorema, aproksimavimo metodai, įverčių skaičiavimas), Dirichlet charakterių savybės. Taikomi nauji metodai, atrasti Christ'aus, Kalpoko, Korolev'o ir Steuding'o [4, 5, 28, 29].

Naujumas

Dauguma disertacijoje gautų rezultatų yra nauji. Seniau žinomi rezultatai gauti naudojant naujus metodus.

Teiginiai, pristatomi gynimui

Pagrindiniai teiginiai:

- Kreivė $t\mapsto\zeta(\frac{1}{2}+it)$ plečiasi į visas puses kompleksinių skaičių plokštumoje (išvada (1.5.1)).
- Riemann'o dzeta funkcijos ekstremaliąsias reikšmes galima lokalizuoti ant tiesių kertančių koordinačių pradžią (išvada (1.5.2)).

Apibrėžkime Riemann'o dzeta funkcijos diskrečiuosius momentus

$$S_k(T,\phi)=\sum_{0<t_n(\phi)\le T}\zeta\left(\frac{1}{2}+it_n(\phi)\right)^k \quad \text{ir} \quad S_{k,l}(T,\phi)=\sum_{0<t_n(\phi)\le T}\left|\zeta^{(l)}\left(\frac{1}{2}+it_n(\phi)\right)\right|^{2k}.$$

Papildomi teiginiai, iš kurių išplaukia pagrindiniai teiginiai:

1. Rastos asimptotinės formulės $S_0(T,\phi)$, $S_1(T,\phi)$, $S_3(T,\phi)$ ir $S_{1,0}(T,\phi)$.
2. Rasti apatiniai rėžiai $S_{k,l}(T,\phi)$, kai $k\ge 1$ yra racionalusis skaičius ir l yra neneigiamas sveikasis skaičius.
3. Tarus, kad Riemann'o hipotezė teisinga, rasti viršutiniai rėžiai $S_{k,0}(T,\phi)$, kai k yra neneigiamas realusis skaičius.
4. Tarus, kad Riemann'o hipotezė teisinga, rasti viršutiniai rėžiai $S_{k,l}(T,\phi)$, kai k ir l teigiami sveikieji skaičiai.
5. Rastos asimptotinės formulės sumoms

$$\sum_{0<\gamma_\chi\le T} L(\rho_\chi,\psi), \qquad \sum_{0<\gamma_\chi\le T} L(\rho_\chi,\psi)L(1-\rho_\chi,\overline{\psi}).$$

Aprobacija

Konferencijos

- 2011. Penktoji tarptautinė konferencija Jono Kubiliaus garbei "Analiziniai ir tikimybiniai metodai skaičių teorijoje" (rugsėjo 4–10), Palanga.
- 2011. 27th Journees Arithmetiques (birželio 26–liepos 1), Vilniaus universitetas.
- 2008. New Directions in the Theory of Universal Zeta and L Functions (spalio 6–10), Würzburg'o universitetas (Vokietija).
- 2008. International Conference on Number Theory dedicated to the 60th birthday of Professor Antanas Laurinčikas (rugpjūčio 11–15), Šiaulių universitetas.
- 2008. 49-oji Lietuvos matematikų draugijos konferencija (birželio 25–26), Kaunas.

Vizitai

- 2011. Vizitas pas prof. Jörn'ą Steuding'ą Würzburg'o universitete (kovas), Würzburg'as (Vokietija).
- 2010. Vizitas pas prof. Jerzy Kaczorowski Adam'o Mickiewicz'iaus universitete (vasaris), Poznan'ė (Lenkija).
- 2009. Vizitas pas prof. Jörn'ą Steuding'ą Würzburg'o universitete (2009 rugsėjo 1–2010 sausio 31), Würzburg'as (Vokietija).
- 2009. Vizitas pas prof. Jörn'ą Steuding'ą Würzburg'o universitete (balandžio 24–birželio 24), Würzburg'as (Vokietija).
- 2008. Vizitas pas prof. Alberto Perelli Genova universitete (gruodžio 1–14), Genova (Italija).

Mokyklos

- 2009. Winter school on explicit methods in Number Theory (sausio 26–30), Debrecen'o universitete (Vengrija).

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti visose konferencijose ir visų vizitų metu. Pagrindiniai disertacijos rezultatai buvo pristatyti Vilniaus universiteto matematikos ir informatikos fakulteto Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedros seminaruose.

Pagrindinės publikacijos

Pagrindiniai disertacijos rezultatai yra publikuoti išvardytuose straipsniuose:

Išspausdinti straipsniai

1. T. Christ, J. Kalpokas, Upper bounds of Discrete moments of the derivatives of the Riemann zeta function on the critical line, *Lithuanian Math. Journal*, **52**, No. 3 (2012), 233 - 248.
2. J. Kalpokas, J. Steuding, On the value-distribution of the Riemann zeta function on the critical line, Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory, **1**, No. 1 (2011), 23-38.
3. T. Christ, J. Kalpokas, J. Steuding, New results on the value distribution of the Riemann zeta function on the critical line. (Neue Resultate über die Wertverteilung der Riemannschen Zetafunktion auf der kritischen Geraden.) (German) *Math. Semesterber.* **57**, No. 2 (2010), 201-229.
4. R. Garunkštis, J. Kalpokas, J. Steuding, Sum of the Dirichlet L-function over nontrivial zeros of another Dirichlet L-function, *Acta Math. Hungar.* **128**, No. 3 (2010), 287-298.
5. J. Kalpokas, Sum of the periodic zeta function over the nontrivial zeros of the Riemann zeta function, R. Steuding (ed.) et al., *New directions in value-distribution theory of zeta and L-functions. Proceedings of the conference, Würzburg, Germany, October 6–10, 2008.* Shaker Verlag. (2009), 121-130.
6. R. Garunkštis, J. Kalpokas, Sum of the periodic zeta function over the nontrivial zeros of the Riemann zeta function, *Analysis, München*, **28**, No. 2 (2008), 209-217.

Įteikti straipsniai

1. T. Christ, J. Kalpokas, Lower bounds of Discrete moments of the derivatives of the Riemann zeta function on the critical line, submitted.
2. J. Kalpokas, M. Korolev, J. Steuding, Negative values of the Rieman zeta function on the critical line, submitted.
3. R. Garunkštis, J. Kalpokas, The discrete mean square of the Dirihclet L-function at nontrivial zeros of another Dirihclet L-function, submitted.

Išvados

Disertacijoje įrodyti pagrindiniai teiginiai:

- Kreivė $t \mapsto \zeta(\frac{1}{2}+it)$ plečiasi į visas puses kompleksinių skaičių plokštumoje (išvada (1.5.1)).
- Riemann'o dzeta funkcijos ekstremaliąsias reikšmes galima lokalizuoti ant tiesių, kertančių koordinačių pradžią (išvada (1.5.2)).

Apibrėžkime Riemann'o dzeta funkcijos diskrečiuosius momentus

$$S_k(T,\phi) = \sum_{0<t_n(\phi)\le T} \zeta\left(\frac{1}{2}+it_n(\phi)\right)^k \quad \text{ir} \quad S_{k,l}(T,\phi) = \sum_{0<t_n(\phi)\le T} \left|\zeta^{(l)}\left(\frac{1}{2}+it_n(\phi)\right)\right|^{2k}.$$

Įrodyti papildomi teiginiai, iš kurių išplaukia pagrindiniai teiginiai:

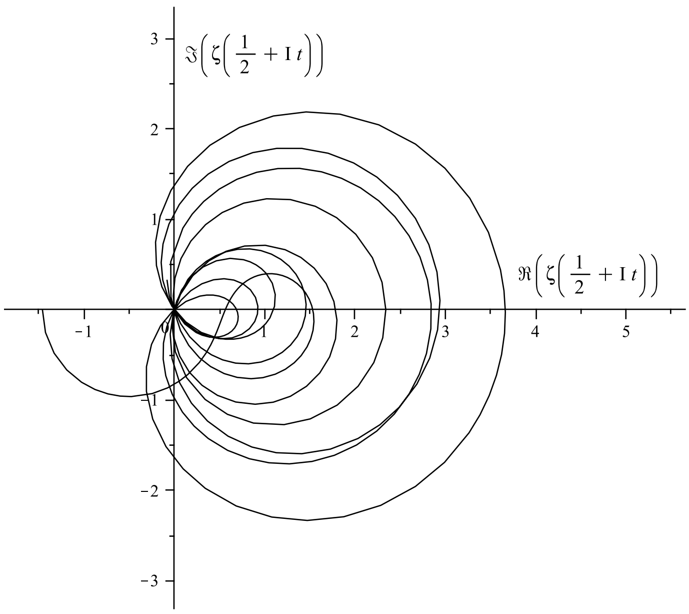
1. Rastos asimptotinės formulės $S_0(T,\phi)$, $S_1(T,\phi)$, $S_3(T,\phi)$ ir $S_{1,0}(T,\phi)$.
2. Rasti apatiniai rėžiai $S_{k,l}(T,\phi)$, kai $k \ge 1$ yra racionalusis skaičius ir l yra neneigiamas sveikasis skaičius.
3. Tarus, kad Riemann'o hipotezė teisinga, rasti viršutiniai rėžiai $S_{k,0}(T,\phi)$, kai k yra neneigiamas realusis skaičius.
4. Tarus, kad Riemann'o hipotezė teisinga, rasti viršutiniai rėžiai $S_{k,l}(T,\phi)$, kai k ir l teigiami sveikieji skaičiai.
5. Rastos asimptotinės formulės

$$\sum_{0<\gamma_\chi\le T} L(\rho_\chi,\psi), \qquad \sum_{0<\gamma_\chi\le T} L(\rho_\chi,\psi)L(1-\rho_\chi,\overline{\psi}).$$

Summary

In mathematics, analytic number theory is a branch of number theory that uses methods from mathematical analysis to solve problems that concern the integers. It is often said to have begun with Dirichlet's introduction of Dirichlet L-functions.

In analytic number theory one of the main investigation objects is the Riemann zeta function. Let $s=\sigma+it$ be a complex variable. In Figure we find the curve $t\mapsto\zeta(\frac{1}{2}+it)$. The curve crosses the origin, i.e. $\zeta(\frac{1}{2}+it)=0$ for some t. The Riemann hypothesis states that all non-trivial zeros of the Riemann zeta function lie on the critical line $\sigma=\frac{1}{2}$.



8 pav.: Curve $t\mapsto\zeta(\frac{1}{2}+it)$, where t varies from 0 to 50.

In Figure we see that the curve $t\mapsto\zeta(\frac{1}{2}+it)$ is positive. It was noticed by Edwards [12]. In his monography he wrote *"...the real part of $\zeta(s)$ has a strong tendency to be positive."* (page 121).

The critical line is the limit that separates a curve $t\mapsto\zeta(\sigma+it)$, $\frac{1}{2}<\sigma<1$ that is dense in $\mathbb{C}$ from a curve $t\mapsto\zeta(\sigma+it)$, $\sigma<\frac{1}{2}$ that is not dense in $\mathbb{C}$ (under the Riemann hypothesis). The question *whether the curve $t\mapsto\zeta(\frac{1}{2}+it)$ is dense in $\mathbb{C}$ is open.* The main result of the thesis Corollary (1.5.1) states that the curve $t\mapsto\zeta(\frac{1}{2}+it)$ expands to all direction on the complex plane. The separate case could be stated in this way *the Riemann zeta function obtains infinetely many unbounded negative values on the critical line.*

Literatūra

[1] T.M. Apostol, *Introduction to analytic number theory, 5th edition*, Springer, New York, 1998.

[2] H. Bohr, R. Courant, Neue Anwendungen der Theorie der diophantischen Approximationen auf die Riemannsche Zetafunktion, *J. reine angew. Math.*, **144** (1914), 249-274.

[3] V.I. Bogachev, *Measure Theory*, Vol. I and II, Springer, 2007.

[4] T. Christ, J. Kalpokas, Lower bounds of Discrete moments of the derivatives of the Riemann zeta function on the critical line, submitted.

[5] T. Christ, J. Kalpokas, Upper bounds of Discrete moments of the derivatives of the Riemann zeta function on the critical line, *Lithuanian Math. Journal*, **52**, no. 3 (2012), 233 - 248.

[6] J.B. Conrey, A. Ghosh, A mean value theorem for the Riemann zeta function at its relative extrema on the critical line, *J. London Math. Soc.* (2), **32** (1985), no. 2, 193-202.

[7] J.B. Conrey, A. Ghosh, S.M. Gonek, Simple zeros of the zeta function of a quadratic number field, I,*Invent. Math.*, **86** (1986), 563-576.

[8] J.B. Conrey, A. Ghosh, S.M. Gonek, Simple zeros of the zeta function of a quadratic number field, II, in:*Analytic Number Theory and Dioph. Probl.*, A. C. Adolphson *et al.* (eds.), Birkhäuser, 1987, 87-114.

[9] J.B. Conrey, A. Ghosh, S. M. Gonek, Simple zeros of zeta functions, *Publ. Math. Orsay*, 88/02 (1988), 77-83.

[10] J.B. Conrey, A. Ghosh, S.M. Gonek, Simple zeros of the Riemann zeta function, *Proc. London Math. Soc.*, **76** (3) (1998), 497-522.

[11] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, 2nd ed. Rev. by Hugh L. Montgomery, Springer-Verlag, 1980.

[12] H.M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Academic Press 1974.

[13] A. Fujii, On the zeros of Dirichlet L-functions. V., *Acta Arith.*, **28** (1976), 395-403.

[14] A. Fujii, Some Observations Concerning the Distribution of the Zeros of the Zeta Functions (II), *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, **40** (1991), 125-231.

[15] A. Fujii, *Explicit formulas and oscillations*, Hejhal, Dennis A. (ed.) et al., Emerging applications of number theory. Based on the proceedings of the IMA summer program, Minneapolis, MN, USA, July 15-26, 1996. New York, NY: Springer. IMA Vol. Math. Appl., **109** (1999), 219-267.

[16] R. Garunkštis, On the Backlund equivalent for the Lindelof hypothesis, *Adv. Stud. Pure Math.*, **49** (2007), 91-104.

[17] R. Garunkštis, J. Steuding, On the roots of the equation $\zeta(s) = a$, submitted.

[18] R. Garunkštis, J. Kalpokas, J. Steuding, Sum of the Dirichlet L-Functions over nontrivial zeros of another Dirichlet L-Function, *Acta Math. Hungar.*, **128**, No.3 (2010), 287-298.

[19] S.M. Gonek, Mean values of the Riemann zeta function and its derivatives, *Invent. Math.*, **75**:1 (1984), 123-141.

[20] J. Gram, Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, *Acta Math.*, **27** (1903), 289-304.

[21] Hardy–Littlewood, 1918. (Check - E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, 2nd ed., revised by D.R. Heath-Brown, Oxford University Press, 1986).

[22] D.R. Heath-Brown, Hybrid bounds for Dirichlet L-Functions II, *Q. J. Math.*, **31** (1980), 157-167.

[23] D. R. Heath-Brown, Fractional Moments of the Riemann Zeta-Function *J. London Math. Soc.*, **2-24** (1981) 65-78.

[24] A.E. Ingham, Mean value theorems in the theory of the Riemann zeta function, *Proc. London Math. Soc.*, **27** (2) (1928).

[25] J.I. Hutchinson, On the roots of the Riemann zeta function, *Trans. A.M.S.*, **27** (1925), 49-60.

[26] A. Ivić, *The Riemann Zeta Function*, John Wiley & Sons, New York, 1985.

[27] M.I.Israilov, On the Laurent expansion of the Riemann zeta function, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **158** (1983), 105-112.

[28] J. Kalpokas, J. Steuding On the Value-Distribution of the Riemann Zeta-Function on the Critical Line, *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, **1** (2011), 26-42.

[29] J. Kalpokas, M. Korolev, J. Steuding, Negative values of the Riemann Zeta-Function on the Critical Line, *arXiv:1109.2224v3.*

[30] X. Li, Upper bounds on L-functions at the edge of the critical strip, *IMRN*, **2010**, No. 4, (2010), 727-755.

[31] M.B. Milinovich, N. Ng, Lower bound for the moments of $\zeta'(\rho)$, *arXiv:0706.2321v1.*

[32] M.B. Milinovich Upper bounds for moments of $\zeta'(\rho)$, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **42**, No. 1, 28-44 (2010).

[33] M.B. Milinovich, Moments of the Riemann zeta function at its relative extrema on the critical line, *arXiv:1106.1154v1.*

[34] N. Ng, A discrete mean value of the derivative of the Riemann zeta function, *Mathematika*, **54** (2007), 113-155.

[35] A. Perelli, A Survey of the Selberg Class of L-Functions, Part II, *Riv. Mat. Univ. Parma*, (7) 3* (2004), 83-118.

[36] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Springer-Verlag, Wien, 1957.

[37] R. Raghunathan, A comparison of zeros of L-functions, *Math. Res. Lett.*, **6**, No.2 (1999), 155-167.

[38] K. Ramachandra, Some remarks on the mean value of the Riemann zeta function and other Dirichlet series, I, *Hardy-Ramanujan J.*, **1** (1978), 115.

[39] Z. Rudnick and K. Soundararajan, Lower bounds for moments of L-functions, *Proc. Natl. Sci. Acad. USA*, **102** (2005), 6837-6838.

[40] K. Soundararajan, Extreme values of zeta and L-functions, *Math. Ann.*, **342** (2008), 467-486.

[41] K. Soundararajan, Moments of the Riemann zeta function, *Ann. Math. (2)*, **170**, No. 2, 981-993 (2009).

[42] J. Steuding, Dirichlet series associated to periodic arithmetic functions and the zeros of Dirichlet L-functions, *Anal. Probab. Methods Number Theory*, 282-296, TEV, Vilnius (2002).

[43] E.C. Titchmarsh, On van der Corput's method and the zeta function of Riemann, IV, *Quart. J. Math.*, **5** (1934), 98-105.

[44] E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, 2nd ed., revised by D.R. Heath-Brown, Oxford University Press, 1986.

[45] T. Trudgian, On the success and failure of gram's law and the rosser rule, *Acta Arith.*, **148**, No. 3 (2011), 225-256.

Trumpos žinios apie autorių

Gimimo data ir vieta

1984 metų gegužės 10 diena, Vilnius.

Išsilavinimas

- 2006-2008. Matematikos magistro diplomas, Vilniaus universitetas.
- 2002-2006. Matematikos bakalauro diplomas, Vilniaus universitetas.

Akademinio darbo patirtis

- 2012-dabar. Jaunesnysis mokslo darbuotojas, Vilniaus universitetas.
- 2010-2011. Asistentas, Vilniaus universitetas.
- 2009-2010. Lektorius, Würzburg'o universitetas (Vokietija).
- 2008-2009. Lektorius, Mykolo Romerio universitetas.

Short information about the author

Birth date and place

1984 10th of May, Vilnius.

Education

- 2006-2008. Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, master of mathematics.
- 2002-2006 Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, bachelor of mathematics.

Working experience

- 2012-now. Junior scientific researcher, Vilnius University.
- 2010-2011. Tteaching assistant, Vilnius University.
- 2009-2010. Teaching assistant, Würzburg University (Germany).
- 2008-2009. Teaching assistant, Mykolas Romeris University.