VILNIAUS UNIVERSITETAS

LINA DINDIENĖ

SUNKIAUODEGIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SUMŲ ASIMPTOTINĖ ANALIZĖ

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2016 metai

Disertacija rengta 2011–2016 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas – prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Mokslinis konsultantas – prof. dr. Jonas Šiaulys (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto Matematikos krypties taryboje:

Pirmininkas – prof. habil. dr. Alfredas Račkauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Nariai:
doc. dr. Marijus Radavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P);
prof. habil. dr. Vygantas Paulauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P);
prof. habil. dr. Jonas Kazys Sunklodas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P);
dr. Dongya Cheng (Soochow universitetas, Kinija, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Disertacija bus ginama viešame Matematikos krypties tarybos posėdyje 2016 m. lapkričio 18 d. 15 val. Matematikos ir informatikos fakulteto prof. Jono Kubiliaus (102) auditorijoje.

Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2016 m. spalio 18 d.

Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir VU interneto svetainėje adresu: *www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius*

VILNIUS UNIVERSITY

LINA DINDIENĖ

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE SUMS OF HEAVY-TAILED RANDOM VARIABLES

Summary of doctoral dissertation
Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2016

The scientific work was carried out in 2011–2016 at Vilnius University.

Scientific supervisor – prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P).

Scientific adviser – prof. dr. Jonas Šiaulys (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)

Dissertation will be defended at Vilnius University Mathematics research council:

Chairman – prof. habil. dr. Alfredas Račkauskas (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P);

Members:
doc. dr. Marijus Radavičius (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P);
prof. habil. dr. Vygantas Paulauskas (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P);
prof. habil. dr. Jonas Kazys Sunklodas (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P);
dr. Dongya Cheng (Soochow University, China, physical sciences, mathematics – 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the council in prof. Jonas Kubilius lecture room (room 102), Faculty of Mathematics and Informatics on 18 November 2016.

Address: Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius.

The dissertation summary was distributed on 18 October 2016.

The dissertation is available at the library of Vilnius University and VU website: *www.vu.lt/naujienos/ivykiu-kalendorius*

Disertacijos aprašymas

1 Įžanga

Disertacijoje tiriamos atsitiktinių dydžių sumos $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, kuomet dėmenų pasiskirstymo funkcijų uodegos yra lėtai gęstančios ir sunkesnės už eksponentinio skirstinio uodegą. Tokios pasiskirstymo funkcijas (p. f.) vadinamos sunkiauodegėmis. Sunkiauodegių dydžių sumos yra svarbios finansų ir draudos matematikos bei kitose srityse. Pavyzdžiui, draudimo kompanijos bankroto tikimybė gali būti vertinama kaip atsitiktinių dydžių (a. d.) sumos maksimumo skirstinio uodegos reikšmė taške x, kuris bankroto teorijoje žymi pradinį kapitalą. Asimptotiniai a. d. sumų bei jų maksimumų rezultatai taikomi diskretaus ir tolydaus laiko rizikos procesuose.

Kita vertus, dažnai natūralu laikyti, kad dėmenys $X_1, \ldots, X_n$ yra tarpusavyje priklausomi. Disertacijos antroje dalyje nagrinėjami asimptotiniai sąryšiai tarp minėtų sumų, jų maksimumų $S_{(n)} := \max\{S_1, \ldots, S_n\}$ bei maksimalaus elemento $X_{(n)} := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ skirstinių uodegų, kai maksimalaus elemento skirstinys priklauso tam tikrai sunkiauodegių skirstinių klasei. Rezultatai iliustruojami kai kurių jungčių pavyzdžiais.

Kitos sumos, kurios nagrinėjamos darbe – tai svorinės sumos $S_n^{\Theta} := \sum_{i=1}^{n} \Theta_i X_i$ su teigiamais svoriais $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ ir priklausomais realiaisiais sunkiauodegiais a. d. $X_1, \ldots, X_n$. Parodoma, kad su tam tikra priklausomybės struktūra, sumų S_n^{Θ} ir $S_n^{\Theta+} := \sum_{i=1}^{n} \Theta_i X_i^{+}$ skirstinių uodegos asimptotiškai sutampa. Pateikiamas pavyzdys, kai atsitiktinių dydžių priklausomybę nusako jungtis. Be to, tikrinama ar iš to, kad priklausomų a. d. skirstiniai priklauso ilgauodegių skirstinių klasei (žr. 7 skyrių), išplaukia, kad tai klasei priklauso ir visos sumos skirstinys.

Taip pat darbe analizuojamos atsitiktinai sustabdytos (atsitiktiniu momentu τ) svorinės sumos $S_\tau^{\Theta} := \sum_{k=1}^{\tau} \Theta_k X_k$ bei jų maksimumai $S_{(\tau)}^{\Theta} := \max_{k\le\tau} S_k^{\Theta}$, kai a. d. $X_1, X_2 \ldots$ yra sunkiauodegiai ir priklausomi, o svoriai $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ yra neneigiami aprėžti a. d. ir nepriklauso nuo $X_1, X_2 \ldots$. Įrodoma, kad su tam tikromis sąlygomis, atsitiktinių svorių sumos $Z_\tau := \Theta_1 + \cdots + \Theta_\tau$ tikimybės uodega yra asimptotiškai nereikšminga lyginant su vienodai pasiskirsčiusių a. d. $X_1, X_2 \ldots$ tikimybės uodega.

Tuomet maksimumų $S_{(\tau)}^{\Theta}$ skirstinio uodega gali būti asimptotiškai iš viršaus ir apačios aprėžta dydžiu $\mathrm{E}\sum_{i=1}^{\tau}\mathrm{P}(\Theta_i X_i > x)$.

2 Mokslinė problema ir tyrimo objektas

Disertacijos tyrimo objektas – priklausomų atsitiktinių dydžių su sunkiauodegėmis pasiskirstymo funkcijomis sumos. Mokslinė problema – sumų, jų maksimumų, maksimalaus elemento, teigiamų dydžių sumų skirstinių uodegų sąryšiai.

3 Tikslas ir pagrindiniai uždaviniai

Darbo tikslas – gauti asimptotinius sąryšius priklausomų sunkiauodegių atsitiktinių dydžių sumoms.

Uždaviniai:

- įrodyti silpnąjį maksimumų-sumų ekvivalentumą

$$C_1\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(X_i > x) \lesssim \mathrm{P}(S_{(n)} > x) \lesssim C_2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(X_i > x)$$

  su teigiamomis konstantomis C_1 ir C_2;

- įrodyti sąryšį $\mathrm{P}(S_n^{\Theta} > x) \sim \mathrm{P}(S_n^{\Theta+} > x)$, kai $x \to \infty$ ir sumos $\mathrm{P}(S_n^{\Theta} > x)$ uždarumo savybę priklausomiems sunkiauodegiams a. d.;

- Įrodyti asimptotinį sąryšį

$$C_3\mathrm{E}\sum_{i=1}^{\tau}\mathrm{P}(\Theta_i X_i > x) \ \lesssim \ \mathrm{P}(S_{(\tau)}^{\Theta} > x) \ \lesssim \ C_4\mathrm{E}\sum_{i=1}^{\tau}\mathrm{P}(\Theta_i X_i > x),$$

  kai sunkiauodegiai dydžiai priklausomi ir vienodai pasiskirstę, C_3 ir C_4 – teigiamos konstantos.

  Taip pat nustatyti sąlygas, su kuriomis $\mathrm{P}(Z_\tau > x) = o(\overline{F_X}(x))$, kai $x \to \infty$, kai a. d. priklauso įvairioms sunkiauodegių skirstinių klasėms.

4 Aktualumas

Sunkiauodegių atsitiktinių dydžių sumų asimptotinė analizė yra sparčiai besiplėtojanti finansų ir draudos matematikos sritis. Tokių sumų tyrimas šiomis dienomis yra svarbus nagrinėjant įvairias draudimo kompanijų finansines situacijas: įvertinant bankroto tikimybę, modeliuojant didelius nuostolius, kuriant rizikos modelius ir kt.

Mokslininkai, atsižvengdami į rinkos pokyčius, analizuoja įvairias atsitiktinių sumų modifikacijas (skirtingos priklausomybės tarp turimų a. d., atsitiktinai sustabdytos tam tikru laiku sumos, svorinės sumos, įvairios a. d. skirstinių klasės).

Lietuvoje šią temą plėtoja profesoriai R. Leipus ir J. Šiaulys. Užsienyje a. d. sumas nagrinėja kinų matematikai Q. Tang, Y. Yang, K. Wang, J. Li, L. Liu, K. W. Ng, Q. Gao, Y. Chen, Y. Wang ir kt, o taip pat P.Embrechts, C. Klüppelberg, D. Korshunov, S. Foss, J. Geluk ir kt.

5 Naujumas

Visi disertacijoje pateikti rezultatai yra nauji ir originalūs. Jie paremti keturiomis mokslinėmis publikacijomis (viena iš jų įteikta žurnalui, kitos – atspausdintos ([1],[2] ir [3])).

6 Tyrimo metodika

Tyrime remiamės žinomomis matematinės analizės ir tikimybių teorijos teoremomis ir rezultatais (dominuojamo konvergavimo teorema, Fatou lema, Kolmogorov trijų eilučių teorema, Bonferroni nelygybė, Markov nelygybė, stiprusis didžiųjų skaičių dėsnis ir kt.). Empiriniams skaičiavimams Monte Carlo metodu naudojame Matlab programą.

7 Pagrindiniai rezultatai

7.1 Apibrėžimai

Žemiau pateikiami darbe naudojamų savokų apibrėžimai.

7.1 APIBRĖŽIMAS. *a. d. $X_1, \ldots, X_n$ yra: iš viršaus išplėstai neigiamai priklausomi (UEND – upper extended negative dependent), jeigu egzistuoja tokia teigiama konstanta M_1, kad kiekvienam $x_1, \ldots, x_n$*

$$\mathrm{P}(X_1 > x_1, \ldots, X_n > x_n) \ \leq \ M_1 \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i > x_i); \tag{7.1}$$

iš apačios išplėstai neigiamai priklausomi (LEND – lower extended negative dependent), jeigu egzistuoja tokia teigiama konstanta M_2, kad kiekvienam $x_1, \ldots, x_n$

$$\mathrm{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) \ \leq \ M_2 \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i \leq x_i); \tag{7.2}$$

išplėstai neigiamai priklausomi (END – extended negative dependent), jei jie yra kartu UEND ir LEND.

Kai (7.1) ir (7.2) nelygybėse $M_1 = 1$ ir $M_2 = 1$, a. d. $X_1, \dots, X_n$ yra, atitinkamai, iš viršaus neigiamai priklausomi (UND) ir iš apačios neigiamai priklausomi (LND). Jei dydžiai yra ir UND, ir LND, tai jie yra neigiamai priklausomi (ND).

7.2 APIBRĖŽIMAS. *a. d. $X_1, \dots, X_n$ yra poromis iš viršaus išplėstai neigiamai priklausomi (pUEND), jei*

$$\mathrm{P}\big(X_i > x, X_j > y\big) \ \leq \ M_3 \mathrm{P}(X_i > x)\mathrm{P}(X_j > y) \tag{7.3}$$

visiems $x, y \in \mathbb{R}$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, ir kažkokiam $M_3 > 0$. Jei visiems $x, y \in \mathbb{R}$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, ir kažkokiam $M_4 > 0$

$$\mathrm{P}\big(X_i \leq x, X_j \leq y\big) \ \leq \ M_4 \mathrm{P}(X_i \leq x)\mathrm{P}(X_j \leq y), \tag{7.4}$$

tuomet sakome, kad dydžiai yra poromis iš apačios išplėstai neigiamai priklausomi (pLEND). Jei dydžiai yra ir pUEND ir pLEND, tai jie yra poromis išplėstai neigiamai priklausomi (pEND).

7.3 APIBRĖŽIMAS. *a. d. $X_1, \dots, X_n$ yra poromis neigiamai priklausomi (pND), jei* (7.3) *ir* (7.4) *galioja su $M_3 = 1$ ir $M_4 = 1$. Šiuo atveju* (7.3) *ir* (7.4) *yra ekvivalenčios.*

Analogiškai gaunamos ir teigiamos priklausomybės (PD) struktūros, tik (7.1)–(7.4) nelygybėse ženklas keičia kryptį.

Darbe nagrinėjame kelias sunkiauodegių skirstinių klases. a. d. X pasiskirstymo funkcija yra sunkiauodegė, jei visiems $\delta > 0$ vidurkis $\mathrm{E}e^{\delta X} = \infty$. p. f.
$F = 1 - \overline{F}$ priklauso:
suderintai kintančių skirstinių klasei $F \in \mathscr{C}$, jei

$$\lim_{y \nearrow 1} \limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1;$$

dominuojamai kintančių skirstinių klasei $\mathscr{D}$, jei

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} < \infty, \quad 0 < y < 1;$$

ilgauodegių skirstinių klasei $\mathscr{L}$, jei

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)} = 1, \quad y \in \mathbb{R};$$

stipriai subeksponentinių skirstinių klasei $\mathscr{S}^*$, jei $m := \int_{[0,\infty)} x \mathrm{d}F(x) < \infty$ ir

$$\int_0^x \overline{F}(x-y)\overline{F}(y)\mathrm{d}y \sim 2m\overline{F}(x), \quad x \to \infty;$$

subeksponentinių skirstinių klasei ($F \in \mathscr{S}$), jei

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2,$$

čia F^{*2} žymi funkcijos sąsūką. Kai $m < \infty$, ryšys tarp minėtų klasių nusakomas tokia įdėtimi:

$$\mathscr{C} \subset \mathscr{L} \cap \mathscr{D} \subset \mathscr{S}^* \subset \mathscr{S} \subset \mathscr{L}.$$

Pažymėkime

$$\overline{F}_*(y) := \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}, \quad \overline{F}^*(y) := \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}, \quad y > 1,$$

ir apibrėžkime p. f.
F, atitinkamai, viršutinį ir apatinį Matuszewska indeksus:

$$J_F^+ := -\lim_{y\to\infty} \frac{\log \overline{F}_*(y)}{\log y}, \quad J_F^- := -\lim_{y\to\infty} \frac{\log \overline{F}^*(y)}{\log y}.$$

Svarbus p. f.
parametras yra

$$L_F := \lim_{y\searrow 1} \overline{F}_*(y).$$

Teiginiai

$$\text{(i) } F \in \mathscr{D}, \quad \text{(ii) } \overline{F}_*(y) > 0 \text{ visiems } y > 1, \quad \text{(iii) } L_F > 0, \quad \text{(iv) } J_F^+ < \infty$$

pasiskirstymo funkcijai F yra ekvivalentūs. Be to, $F \in \mathscr{C}$ tada ir tik tada, jei $L_F = 1$.

Teigiamoms funkcijoms $a(x)$ ir $b(x)$ žymėsime:
$a(x) \sim b(x)$ jei $\lim_{x\to\infty} a(x)/b(x) = 1$;
$a(x) \lesssim b(x)$ jei $\limsup_{x\to\infty} a(x)/b(x) \le 1$;
$a(x) \gtrsim b(x)$ jei $\liminf_{x\to\infty} a(x)/b(x) \ge 1$;
$a(x) \asymp b(x)$ jei $0 < \liminf_{x\to\infty} \frac{a(x)}{b(x)} \le \limsup_{x\to\infty} \frac{a(x)}{b(x)} < \infty$ (silpnasis ekvivalentumas);
$a(x) = o(b(x))$ jei $\lim_{x\to\infty} a(x)/b(x) = 0$.
Visi ribiniai sąryšiai galioja, kai $x \to \infty$.

7.2 Silpnasis maksimumų–sumų ekvivalentumas

Pažymėkime pasiskirstymo funkcijas $S_n^{(+)} := X_1^+ + \cdots + X_n^+$, $G_n(x) := \mathrm{P}(X_{(n)} < x)$ ir $H_n(x) := n^{-1}(F_1(x) + \cdots + F_n(x))$ ir tarkime, kad $\overline{H_n}(x) > 0$ visiems x. Pagrindiniame rezultate bus reikalaujama, kad visiems

$$\sum_{1\le k<l\le n} \mathrm{P}(X_k > x, X_l > x) = o(1)\overline{H}_n(x), \quad x \to \infty, \tag{7.5}$$

arba, ekvivalenčiai,

$$\mathrm{P}(X_k > x, X_l > x) = o(1)\overline{H}_n(x).$$

$\forall k, l \ = \ 1, \ldots, n, \ k < l.$

Nesunku pastebėti, kad dydžiai, kurie yra pND arba pUEND, taip pat tenkina (7.5) sąryšį.

Suformuluosime pagrindinį šio skyriaus rezultatą.

7.1 teorema. *Tegul a. d.* $X_1, \ldots, X_n$ *tenkina* (7.5) *sąlygą. Jei* $H_n \in \mathscr{D}$ *(arba, ekvivalenčiai,* $G_n \in \mathscr{D}$*), tuomet*

$$\mathrm{P}(S_{(n)} > x) \ \leq \ \mathrm{P}(S_n^{(+)} > x) \ \lesssim \ L_{H_n}^{-1} n\overline{H_n}(x).$$

Jei, papildomai, $H_n(-x) = o(\overline{H_n}(x))$*, tada*

$$\mathrm{P}(S_{(n)} > x) \ \geq \ \mathrm{P}(S_n > x) \ \gtrsim \ L_{H_n} n\overline{H_n}(x).$$

Be to,

$$L_{H_n} \ = \ L_{G_n} \quad ir \quad n\overline{H_n}(x) \ \sim \ \overline{G_n}(x).$$

7.1 PASTABA. Jei 7.1 teoremos formuluotėje visi $F_k \in \mathscr{C} \subset \mathscr{D}$, $k = 1, \ldots, n$, tuomet $H_n \in \mathscr{C}$ ir $L_{H_n} = 1$.

Žemiau pateiksime keletą pavyzdžių, kai priklausomybę tarp a. d. $X_1, \ldots, X_n$ nusako jungtis ir yra tenkinama (7.5) sąlyga.

Nagrinėkime gerai žinomą apibendrintą FGM jungtį:

$$C^{\mathrm{GFGM}}(u_1, \ldots, u_n) = \prod_{l=1}^{n} u_l \left(1 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \theta_{ij}(1 - u_i^\alpha)(1 - u_j^\alpha)\right)^m, \tag{7.6}$$

čia $(u_1, \ldots, u_n) \in [0,1]^n$, $\alpha > 0$, $m > 0$, o parametrai θ_{ij} yra tokie, kad C^{GFGM} būtų n-matė jungtis.

7.1 teiginys. *Tegul vektoriaus* $(X_1, \ldots, X_n)$ *skirstinį generuoja* (7.6) *jungtis. Tuomet*

$$\mathrm{P}(X_k > x, X_l > y) \quad \leq \quad C_{kl}\overline{F_k}(x)\overline{F_l}(y), \tag{7.7}$$

čia $C_{kl} := 1 + \max\{\alpha, 1\}((|\theta_{kl}| + 1)^m - 1)$, $k \neq l$.

Iš 7.1 teiginio matome, kad kad a. d., surišti (7.6) FGM jungtimi, yra pUEND dydžiai. Iš (7.7) nelygybės gauname, kad galioja (7.5) sąryšis. Be to, jei (7.6) išraiškoje visi θ_{ij} yra neneigiami, tai a. d. $X_1, \ldots, X_n$ yra ir iš apačios teigiamai priklausomi, ir poromis teigiamai priklausomi.

Tuo atveju, kai vektoriaus $(X_1, \ldots, X_n)$ komponenčių priklausomybę nusako Ali–Mikhail–Haq jungtis, priklausomai nuo parametro reikšmės, gauname pND ir pEND struktūras. Frank ir Clayton jungčių atveju gauname, kad a. d. taip pat yra ir pUEND. Taigi visų minėtų jungčių atveju gavome, kad galioja (7.5) asimptotinis sąryšis.

7.3 Svorinių sumų asimptotika ir uždarumo savybė

Tegul $n \geq 2$ yra sveikasis skaičius. Nagrinėkime realiuosius a. d. $X_1, \ldots, X_n$ su atitinkamais skirstiniais $F_1, \ldots, F_n$, tokiais, kad $\overline{F_k}(x) > 0$, $k = 1, \ldots, n$. Naudosime dvi struktūras, kurios nusakys priklausomybę tarp atsitiktinių dydžių.

A PRIELAIDA. Kiekvienam $k = 2, \ldots, n$ tolygiai pagal $(y_1, \ldots, y_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}$ galioja sąryšis

$$\mathrm{P}(X_k > x | X_1 = y_1, \ldots, X_{k-1} = y_{k-1}) \ \sim \ g_k(y_1, \ldots, y_{k-1})\overline{F_k}(x), \tag{7.8}$$

t.y.

$$\lim_{x\to\infty} \sup_{(y_1,\ldots,y_{k-1})\in\mathbb{R}^{k-1}} \left| \frac{\mathrm{P}(X_k > x | X_1 = y_1, \ldots, X_{k-1} = y_{k-1})}{g_k(y_1, \ldots, y_{k-1})\overline{F_k}(x)} - 1 \right| = 0,$$

kur $g_k \colon \mathbb{R}^{k-1} \mapsto \mathbb{R}_+ := (0, \infty)$, $k = 2, \ldots, n$, yra mačios funkcijos.

B PRIELAIDA. Kiekvienam $k = 2, \ldots, n$ tolygiai pagal $y \in \mathbb{R}$ ir $\overline{w}_{k-1} := (w_1, \ldots, w_{k-1}) \in [a, b]^{k-1}$, su teigiamomis konstantomis $0 < a \leq b < \infty$, galioja sąryšis

$$\mathrm{P}\biggl(\sum_{i=1}^{k-1} w_i X_i > x | X_k = y\biggr) \ \sim \ h_k^{(w)}(y)\mathrm{P}\biggl(\sum_{i=1}^{k-1} w_i X_i > x\biggr), \tag{7.9}$$

t.y.

$$\lim_{x\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} \sup_{\overline{w}_{k-1}\in[a,b]^{k-1}} \left| \frac{\mathrm{P}\bigl(\sum_{i=1}^{k-1} w_i X_i > x | X_k = y\bigr)}{h_k^{(w)}(y)\mathrm{P}\bigl(\sum_{i=1}^{k-1} w_i X_i > x\bigr)} - 1 \right| = 0,$$

kur $h_k^{(w)} \colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$, $k = 1, \ldots, n$, yra mačios funkcijos ir gali būti priklausomos nuo $\overline{w}_{k-1}$.

Jei (7.8) sąryšyje kažkuriems $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, $y_i = y_i^*$ yra negalima X_i reikšmė, tai sąlyginė tikimybė čia suprantama kaip besąlyginė ir todėl tokiems y_i^* $g_k(y_1, \ldots, y_i^*, \ldots, y_{k-1}) = 1$. Tas pats galioja ir (7.9) sąryšiui.

Iš (7.8) ir (7.9) sąryšių tolygumo išplaukia, kad visiems $k = 2, \ldots, n$ $\mathrm{E}g_k(X_1, \ldots, X_{k-1}) = \mathrm{E}h_k^{(w)}(X_k) = 1$.

7.2 teorema. *Tegul $X_1, \ldots, X_n$ yra realieji a. d., tenkinantys A ir B prielaidas, ir tarkime $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ yra atsitiktiniai svoriai, nepriklausantys nuo $X_1, \ldots, X_n$ ir tokie, kad $\mathrm{P}(a \leq \Theta_k \leq b) = 1$ visiems $k = 1, \ldots, n$, $0 < a \leq b < \infty$. Jei $F_k \in \mathscr{L}$, $k = 1, \ldots, n$, tuomet pasiskirstymo funkcija $\mathrm{P}(S_n^{\Theta} \leq x)$ priklauso klasei $\mathscr{L}$.*

Kitam šio skyriaus rezultatui reikalinga papildoma sąlyga.

C PRIELAIDA. Visoms netuščioms nesikertančioms indeksų aibėms $I = \{k_1, \ldots, k_m\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ ir $J = \{r_1, \ldots, r_p\} \subset \{1, 2, \ldots, n\} \backslash I$ tolygiai pagal $(y_{r_1}, \ldots, y_{r_p}) \in \mathbb{R}^p$ ir $(w_{k_1}, \ldots, w_{k_m}) \in [a, b]^m$, $0 < a \leq b < \infty$, galioja sąryšis

$$\mathrm{P}\biggl(\sum_{k\in I} w_k X_k > x \big| X_r = y_r \text{ with } r \in J\biggr) \ \sim \ h_{I,J}^{(w)}(y_{r_1}, \ldots, y_{r_p})\mathrm{P}\biggl(\sum_{k\in I} w_k X_k > x\biggr),$$

čia $h_{I,J}^{(w)}\colon \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}_+$ yra mačios funkcijos, tokios, kad $h_{I,J}^{(w)}(y_{r_1},\dots,y_{r_p})$ yra aprėžtos tolygiai pagal $w_k \in [a,b], k \in I$ ir $(y_{r_1},\dots,y_{r_p}) \in \mathbb{R}^p$.

Iš C prielaidos išplaukia abi A ir B prielaidos su $g_k(y_1,\dots,y_{k-1}) \equiv h^{(w)}_{\{k\},\{1,\dots,k-1\}}(y_1,\dots,y_{k-1})$ ir $h_k^{(w)}(y) \equiv h^{(w)}_{\{1,\dots,k-1\},\{k\}}(y)$, $k=2,\dots,n$.

7.3 teorema. *Tegul realieji a. d.* $X_1,\dots,X_n$ *tenkina C sąlygą ir tegul* $\Theta_1,\dots,\Theta_n$ *yra atsitiktiniai svoriai, nepriklausantys nuo* $X_1,\dots,X_n$*, tokie, kad* $\mathrm{P}(a \le \Theta_k \le b) = 1$*,* $k=1,\dots,n$*,* $0<a\le b<\infty$*. Jei* $F_k \in \mathscr{L}$ *visiems* $k=1,\dots,n$*, tuomet*

$$\mathrm{P}(S_n^{\Theta} > x) \;\sim\; \mathrm{P}(S_n^{\Theta+} > x) \;\sim\; \mathrm{P}(S_{(n)}^{\Theta} > x),$$

čia $S_{(n)}^{\Theta} := \max\{S_1^{\Theta},\dots,S_n^{\Theta}\}$ *ir* $S_n^{\Theta+} := \Theta_1 X_1^+ + \dots + \Theta_n X_n^+$*.*

Tarkime, kad vektoriaus $(X_1,\dots,X_n)$ skirstinį generuoja absoliučiai tolydi jungtis $C(u_1,\dots,u_n)$, $(u_1,\dots,u_n) \in [0,1]^n$, su teigiamu jungties tankiu $c(u_1,\dots,u_n)$, t.y.

$$\mathrm{P}(X_1 \le x_1,\dots,X_n \le x_n) = C(F_1(x_1),\dots,F_n(x_n)), \quad (x_1,\dots,x_n) \in [-\infty,\infty]^n. \tag{7.10}$$

Tarkime $F_1,\dots,F_n$ yra absoliučiai tolydžios pasiskirstymo funkcijos su atitinkamais teigiamais tankiais $f_1,\dots,f_n$.

Tegul $C_k(u_1,\dots,u_k) := C(u_1,\dots,u_k,1,\dots,1)$, $k=2,\dots,n$, yra k-matė marginalioji jungtis su atitinkamu tankiu $c_k(u_1,\dots,u_k)$, $C_1(u_1)=u_1$. Pažymėkime $\widetilde{C}_k(u_1,\dots,u_k) := C_{k-1}(u_1,\dots,u_{k-1}) - C_k(u_1,\dots,u_k)$ ir

$$\widetilde{c}_k(u_1,\dots,u_k) \;:=\; \frac{\partial^{k-1}\widetilde{C}_k(u_1,\dots,u_k)}{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1}}.$$

Reikalausime, kad tolygiai pagal $(u_1,\dots,u_{k-1}) \in [0,1]^{k-1}$, $k=2,\dots,n$, egzistuotų riba

$$\bar{c}_k(u_1,\dots,u_{k-1},1-) \;:=\; \lim_{u\searrow 0} \frac{\widetilde{c}_k(u_1,\dots,u_{k-1},1-u)}{u}. \tag{7.11}$$

Tegul $X_1^*,\dots,X_n^*$ yra atitinkamos a. d. $X_1,\dots,X_n$ nepriklausomos kopijos ir $S_k^{w*} := w_1X_1^* + \dots + w_kX_k^*$, $k=1,\dots,n$.

7.2 teiginys. *Tarkime, kad atsitiktinio vektoriaus* $(X_1,\dots,X_n)$ *skirstinys yra nusakytas* (7.10) *su absoliučiai tolydžia jungtimi* $C(u_1,\dots,u_n)$ *ir absoliučiai tolydžiais marginaliaisiais skirstiniais* $F_1,\dots,F_n$*. Tuomet A prielaida yra ekvivalenti* (7.11) *ribos egzistavimui ir tokiu atveju funkcijos* g_k*,* $k=2,\dots,n$ *yra*

$$g_k(y_1,\dots,y_{k-1}) \;=\; \frac{\bar{c}_k(F_1(y_1),\dots,F_{k-1}(y_{k-1}),1-)}{c_{k-1}(F_1(y_1),\dots,F_{k-1}(y_{k-1}))}.$$

Be to, tolygiai pagal $\overline{w}_{k-1} \in [a,b]^{k-1}$*,* $y \in \mathbb{R}$*,* $k=2,\dots,n$*, B prielaida yra ekvivalenti ribos*

$$h_k^{(w)}(y) \;:=\; \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{E}c_k(F_1(X_1^*),\dots,F_{k-1}(X_{k-1}^*),F_k(y))\mathbb{1}_{\{S_{k-1}^{w*}>x\}}}{\mathrm{E}c_{k-1}(F_1(X_1^*),\dots,F_{k-1}(X_{k-1}^*))\mathbb{1}_{\{S_{k-1}^{w*}>x\}}}$$

egzistavimui.

Suformuluosime panašų rezultatą C prielaidos atveju. Bet kuriems poaibiams (nebūtinai netuštiems) $I=\{k_1,\dots,k_m\}$, $J=\{r_1,\dots,r_p\}\subset\{1,\dots,n\}\backslash I$ pažymėkime vektoriaus $(X_{k_1},\dots,X_{k_m},X_{r_1},\dots,X_{r_p})$ jungties tankį $c_{I,J}(u_k,k\in I,u_r,r\in J)$. Tuomet

$$\begin{aligned}&f_{X_{k_1},\dots,X_{k_m},X_{r_1},\dots,X_{r_p}}(y_{k_1},\dots,y_{k_m},y_{r_1},\dots,y_{r_p})\\ &= c_{I,J}\big(F_k(y_k),k\in I,F_r(y_r),r\in J\big)\prod_{k\in I}f_k(y_k)\prod_{r\in J}f_r(y_r),\end{aligned}$$

ir $c_I(v_{k_1},\dots,v_{k_m}):=c_{I,\varnothing}(v_{k_1},\dots,v_{k_m})$, $c_J(v_{r_1},\dots,v_{r_p}):=c_{\varnothing,J}(v_{r_1},\dots,v_{r_p})$.

7.3 teiginys. *Tarkime, kad atsitiktinio vektoriaus* $(X_1,\dots,X_n)$ *skirstinys yra nusakytas* (7.10) *su absoliučiai tolydžia jungtimi* $C(u_1,\dots,u_n)$ *ir absoliučiai tolydžiais marginaliaisiais skirstiniais* $F_1,\dots,F_n$. *Tuomet, visoms netuščioms indeksų aibėms* $I=\{k_1,\dots,k_m\}\subset\{1,2,\dots,n\}$ *ir* $J=\{r_1,\dots,r_p\}\subset\{1,2,\dots,n\}\backslash I$, *tolygiai pagal* $w_k\in[a,b]$, $k\in I$, $y_r\in\mathbb{R}$, $r\in J$, *C prielaida yra ekvivalenti teigiamos, tolygiai aprėžtos ribos*

$$\begin{aligned}&h^{(w)}_{I,J}(y_{r_1},\dots,y_{r_p})\\ &:= \frac{1}{c_J(F_r(y_r),r\in J)}\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{E}c_{I,J}(F_k(X_k^*),k\in I,F_r(X_r^*),r\in J)\mathbb{1}_{\{\sum_{k\in I}w_kX_k^*>x\}}}{\mathrm{E}c_I(F_k(X_k^*),k\in I)\mathbb{1}_{\{\sum_{k\in I}w_kX_k^*>x\}}}\end{aligned}$$

egzistavimui.

Tarkime, kad $C(u_1,\dots,u_n)$ yra n-matė Farley–Gumbel–Morgenstern (FGM) jungtis

$$C(u_1,\dots,u_n) = \prod_{l=1}^n u_l\bigg(1+\sum_{1\le i<j\le n}\theta_{ij}(1-u_i)(1-u_j)\bigg), \tag{7.12}$$

kur $(u_1,\dots,u_n)\in[0,1]^n$ ir θ_{ij} yra realieji skaičiai, parinkti taip, kad $C(u_1,\dots,u_n)$ būtų n-matė jungtis.

Norėdami parodyti, kaip FGM jungties atveju atrodo funkcija h_k, esanti B prielaidoje, reikalausime, kad egzistuotų žemiau esanti riba.

D PRIELAIDA. Kiekvienam $k=1,\dots,n-1$ tolygiai pagal $\overline{w}_{n-1}\in[a,b]^{n-1}$ egzistuoja riba

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}_k(x/w_k)}{\overline{F}_1(x/w_1)+\dots+\overline{F}_{n-1}(x/w_{n-1})} =: a_k^{(w)}\in(0,1].$$

7.4 teiginys. *Tarkime* $n\ge 2$ *ir* $X_1,\dots,X_n$ *yra realieji a. d., kurių skirstinį generuoja* (7.12) *FGM jungtis, marginaliosios p. f.*
$F_1,\dots,F_n$ *yra absoliučiai tolydžios ir* $F_i\in\mathscr{L}\cap\mathscr{D}$, $i=1,\dots,n$. *Tuomet*

$$g_k(y_1,\dots,y_{k-1}) = 1-\frac{\sum_{1\le i\le k-1}\theta_{ik}(1-2F_i(y_i))}{c_{k-1}(F_1(y_1),\dots,F_{k-1}(y_{k-1}))},\quad k=2,\dots,n.$$

Jei $n \geq 3$ ir galioja D prielaida, tuomet

$$h_k^{(w)}(y) \;=\; 1 - \widetilde{F}_k(y) \sum_{1 \leq i \leq k-1} \theta_{ik} a_{i,k-1}^{(w)}, \quad k = 3, \dots, n,$$

kur $a_{i,k-1}^{(w)} := a_i^{(w)}/(a_1^{(w)} + \cdots + a_{k-1}^{(w)})$, $\widetilde{F} := 1 - 2F = 2\overline{F} - 1$

7.5 teiginys. *Tegul $n \geq 2$ ir $X_1, \dots, X_n$ yra realieji a. d. su atitinkamais skirstiniais $F_1, \dots, F_n$, tokiais, kad $F_i \in \mathscr{L} \cap \mathscr{D}$, $i = 1, \dots, n$. Tarkime vektoriaus $(X_1, \dots, X_n)$ skirstinį generuoja (7.12) FGM jungtis. Jei $\mathrm{P}(0 < \Theta_k \leq b) = 1$, $k = 1, \dots, n$, tuomet*

$$\mathrm{P}(S_n^{\Theta} > x) \sim \mathrm{P}(S_n^{\Theta+} > x) \;\sim\; \mathrm{P}(S_{(n)}^{\Theta} > x) \sim \;\mathrm{P}\Big(\max_{k=1,\dots,n} \Theta_k X_k > x\Big) \;\sim\; \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\Theta_k X_k > x).$$

7.4 Atsitiktinai sustabdytų sumų asimptotika

Pirmiausia pateiksime sąlygas nagrinėjamiems dydžiams.

E PRIELAIDA. Tegul $X, X_1, X_2, \dots$ yra realiųjų UEND a. d. seka su bendra p. f. $F_X \in \mathscr{D}$, tokia, kad $J_{F_X}^- > 0$ ir $F_X(-x) = o(\overline{F_X}(x))$; tegul $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \dots$ yra neneigiamų a. d. seka (nebūtinai nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę) ir tegul τ neneigiamas neišsigimęs nulyje sveikareikšmis a. d. su p. f. F_τ. $\{X, X_1, X_2, \dots\}$, $\{\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \dots\}$ ir τ yra tarpusavyje nepriklausomi.

Tarkime, kad egzistuoja toks $\epsilon \in (0, J_{F_X}^-)$, kad

$$\mathrm{E}(X^+)^{1+\epsilon} < \infty. \tag{7.13}$$

Suformuluosime pagrindinius šio skyriaus rezultatus.

7.4 teorema. *Tegul a. d. $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \dots$ yra vienodai pasiskirstę ir yra tenkinama E prielaida. Tarkime galioja (7.13) ir $\mathrm{E}\Theta^{J_{F_X}^+ + \epsilon} < \infty$.*

(i) *Jei $F_\Theta \in \mathscr{D}$ ir, arba $\overline{F_\Theta}(x) \sim c^* \overline{F_\tau}(x)$ kažkokiam $c^* > 0$, arba $\overline{F_\tau}(x) = o(\overline{F_\Theta}(x))$, tai $\mathrm{P}(Z_\tau > x) = o(\overline{F_X}(x))$ ir galioja sąryšis*

$$L_{F_X} \mathrm{E} \sum_{i=1}^{\tau} \mathrm{P}(\Theta_i X_i > x) \;\lesssim\; \mathrm{P}(S_{(\tau)}^{\Theta} > x) \;\lesssim\; L_{F_X}^{-1} \mathrm{E} \sum_{i=1}^{\tau} \mathrm{P}(\Theta_i X_i > x); \tag{7.14}$$

(ii) *jei $F_\tau \in \mathscr{D}$, $\mathrm{E}\tau < \infty$ ir $\overline{F_\Theta}(x) = o(\overline{F_\tau}(x))$, $\overline{F_\tau}(x) = o(\overline{F_X}(x))$, tuomet $\mathrm{P}(Z_\tau > x) = o(\overline{F_X}(x))$ ir galioja (7.14) sąryšis.*

Kitoje teoremoje pateikiame rezultatą stipriai subeksponentiniams a. d.

7.5 teorema. *Tegul $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \dots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a. d. ir yra tenkinama E prielaida. Tarkime galioja (7.13) ir $\mathrm{E}\Theta^{J_{F_X}^+ + \epsilon} < \infty$. Jei $F_\Theta \in \mathscr{S}^*$ ir egzistuoja toks $c > \mathrm{E}\Theta$, kad $\overline{F_\tau}(x) = o(\overline{F_\Theta}(cx))$, tuomet galioja (7.14) sąryšis.*

Toliau nagrinėkime uodegos skirstinį $\mathrm{P}(Z_\tau > x)$, kai $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ yra vienodai pasiskirstę a. d. Žemiau esančiame teiginyje suformuluotos sąlygos išpildo 7.4 teoremos reikalavimus.

7.6 teiginys. *Tegul* $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \ldots$ *yra neneigiami END a. d. su bendra p. f.* F_Θ *ir baigtiniu teigiamu vidurkiu* $\mathrm{E}\Theta$. *Tegul* τ *yra neneigiamas sveikareikšmis a. d. nepriklausantis nuo* $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \ldots$.
(i) *Jei* $F_\Theta \in \mathscr{D}$ *ir* $\overline{F_\Theta}(x) \asymp \overline{F_\tau}(x)$, *tuomet* $F_\tau \in \mathscr{D}$, $\mathrm{E}\tau < \infty$ *ir*

$$L_{F_\Theta}\mathrm{E}\tau\overline{F_\Theta}(x) + L_{F_\tau}\overline{F_\tau}\Big(\frac{x}{\mathrm{E}\Theta}\Big) \ \lesssim\ \mathrm{P}(Z_\tau > x) \ \lesssim\ L_{F_\Theta}^{-1}\mathrm{E}\tau\overline{F_\Theta}(x) + L_{F_\tau}^{-1}\overline{F_\tau}\Big(\frac{x}{\mathrm{E}\Theta}\Big); \quad (7.15)$$

(ii) *jei* $F_\Theta \in \mathscr{D}$, $\overline{F_\tau}(x) = o(\overline{F_\Theta}(x))$, *tai* $\mathrm{E}\tau < \infty$ *ir*

$$L_{F_\Theta}\mathrm{E}\tau\overline{F_\Theta}(x) \ \lesssim\ \mathrm{P}(Z_\tau > x) \ \lesssim\ L_{F_\Theta}^{-1}\mathrm{E}\tau\overline{F_\Theta}(x); \quad (7.16)$$

(iii) *jei* $F_\tau \in \mathscr{D}$, $\mathrm{E}\tau < \infty$ *ir* $\overline{F_\Theta}(x) = o(\overline{F_\tau}(x))$, *tuomet*

$$L_{F_\tau}\overline{F_\tau}\Big(\frac{x}{\mathrm{E}\Theta}\Big) \ \lesssim\ \mathrm{P}(Z_\tau > x) \ \lesssim\ L_{F_\tau}^{-1}\overline{F_\tau}\Big(\frac{x}{\mathrm{E}\Theta}\Big). \quad (7.17)$$

(7.15), (7.16) *ir* (7.17) *asimptotiniams sąryšiams iš viršaus, prielaida, kad* $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ *yra END, gali būti pakeista silpnesne prielaida, kad* $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ *yra UEND.*

Kitas teiginys, kuris įrodytas Denisov et al. (2010)[1] darbe, yra pagalbinis, įrodant 7.5 teoremą subeksponentiniams a. d.

7.7 teiginys. *Tegul* $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \ldots$ *yra neneigiamų nepriklausomų a. d. seka su bendra p. f.* $F_\Theta \in \mathscr{S}^*$ *ir baigtiniu teigiamu vidurkiu* $\mathrm{E}\Theta$. *Tegul* τ *– neneigiamas, neišsigimęs taške nulis, sveikareikšmis a. d., nepriklausantis nuo* $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \ldots$. *Jei egzistuoja toks* $c > \mathrm{E}\Theta$, *kad* $\overline{F_\tau}(x) = o(\overline{F_\Theta}(cx))$, *tuomet* $\mathrm{E}\tau < \infty$ *ir*

$$\mathrm{P}(Z_\tau > x) \sim \mathrm{E}\tau\overline{F_\Theta}(x).$$

8 Išvados

1. Sunkiauodegių atsitiktinių dydžių $X_1, \ldots, X_n$ sumoms S_n galioja silpnojo ekvivalentumo sąryšis tarp šių dydžių skirstinių uodegų: teigiamų dydžių sumos, sumos maksimumo ir marginaliųjų skirstinių sumos. Šis rezultatas galioja, kai priklausomybę tarp a. d. nusako konkreti struktūra, o marginaliųjų skirstinių aritmetinis vidurkis priklauso tam tikrai sunkiauodegių skirstinių klasei.

[1]D. Denisov, S. Foss, D. Korshunov. Asymptotic of randomly stopped sums in the presence of heavy tails. *Bernoulli*, 16:971–994, 2010

2. Priklausomų (pagal sudarytas prielaidas) atsitiktinių dydžių $X_1, \ldots, X_n$ svorinės sumos S_n^{Θ} skirstinys priklauso klasei $\mathscr{L}$, jei marginaliosios p. f. $F_1, \ldots, F_n$ yra iš šios ilgauodegių skirstinių klasės. Be to, tokiems a. d., S_n^{Θ}, $S_n^{\Theta+}$ ir $S_{(n)}^{\Theta}$ skirstinių uodegos yra asimptotiškai ekvivalenčios, kai atsitiktiniai svoriai yra aprėžti ir nepriklauso nuo $X_1, \ldots, X_n$. Pateikiamas pavyzdys, iliustruojantis šį rezultatą kuomet a. d. priklausomybė nusakoma jungtimi.

3. Atsitiktinai sustabdytų sumų atveju, darant prielaidą, kad priklausomi (UEND) vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, X_3, \ldots,$ svoriai $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ ir stabdymo momentas τ yra sunkiauodegiai, su papildomais reikalavimais gavome, kad atsitiktinių svorių sumos uodegos skirstinys yra asimptotiškai nereikšmingas lyginant su atsitiktinio dydžio X uodegos skirstiniu. Tokiu atveju sumų S_τ^{Θ} maksimumų uodegos skirstinys yra iš viršaus bei apačios asimptotiškai aprėžtas dydžiu $\mathrm{E}\sum_{i=1}^{\tau} \mathrm{P}(\Theta_i X_i > x)$ su atitinkamomis konstantomis.

9 Rezultatų sklaida

- Publikacijos, kurios atspausdintos disertacijos autoriaus kartu su bendraautoriais:

[1] Yang, Y., Leipus, R. and Dindienė, L. (2015). On the max-sum equivalence in presence of negative dependence and heavy tails. *Information Technology and Control*, 2:215–220.

[2] Dindienė, L., Leipus, R. (2015). A note on the tail behavior or randomly weighted and stopped dependent sums. *Nonlinear Analysis: Modeling and Control*, 20:263–273.

[3] Dindienė, L., Leipus, R. (2015). Weak max-sum equivalence for dependent heavy-tailed random variables. *Lithuanian Mathematical Journal*, 20:263–273.

- Įteikta žurnalui publikacija:

  1. Dindienė, L., R. Leipus and J. Šiaulys (2016). Closure property and tail probability asymptotics for randomly weighted sums of dependent random variables with heavy tails. *Submitted.*

- Konferencijos, kuriose pristatyti pranešimai disertacijos tema:

  1. 53-oji LMD konferencija, Klaipėda, 2012 m. birželio 26 d. *Apie maksimumų sumų ekvivalentumą esant neigiamam priklausomumui.*

2. 55-oji LMD konferencija, Vilnius, 2014 m. liepos 1 d. *On the max-sum equivalence in presence of negative dependence and heavy tails.*
3. 11-oji tarptautinė Vilniaus tikimybių teorijos ir matematinės statistikos konferencija, Vilnius, 2014 m. birželio 30–liepos 4 d. *Max-sum equivalence for dependent nonidentically distributed random variables.*
4. 56-oji LMD konferencija, Kaunas, 2015 m. birželio 17 d. *Atsitiktinių dydžių sumų uždarumo savybė.*
5. 8-oji tarptautinė skaičiuojamosios ir metodologinės statistikos konferencija, Londonas, 2015 m. gruodžio 12–14 d. *Closure property of randomly weighted sums with long-tailed increments.*
6. 57-oji LMD konferencija, Kaunas, 2016 m. birželio 20 d. *Closure property and tail probability asymptotics for randomly weighted sums.*
7. 10-oji Tartu daugiamatės statistikos konferencija, Tartu, 2016 m. birželio 28–liepos 1 d. *Closure property and tail probability asymptotics for randomly weighted sums of dependent random variables with heavy tails.*

10 Summary

In the thesis the sums of dependent nonidentically distributed heavy-tailed random variables $X_1, \ldots, X_n$ are investigated. With some conditions for the (heavy-tailed) distribution of maximal element, the weak max-sum equivalence is proved. Some copula-based examples of dependence structures are given.

The sums S_n^Θ with dependent nonidentically distributed r.v.s and positive random weights are discussed. The closure property of weighted sums is proved. That is, given that distributions $F_1, \ldots, F_n$ are from the long-tailed distribution class, the distribution of sum S_n^Θ belongs to the same class $\mathscr{L}$. Moreover, asymptotic equivalence of the tail probabilities of the sum S_n^Θ and the sum $S_n^{\Theta+}$ is shown. It is shown that this result holds if dependence of random variables $X_1, \ldots, X_n$ is generated by the well-known FGM copula.

Finally, the randomly weighted and stopped dependent sums with identically distributed dependent heavy-tailed r.v.s $X_1, \ldots, X_n$ are discussed. The asymptotic lower and upper bounds for the tail distributions of maximum of such randomly stopped sums are derived. Furthermore, the conditions for this result are shown for the wide class of heavy tailed distribution functions and dependence structures.

11 Apie autorę

Išsilavinimas ir kvalifikacija

1993–2005 m.: Žiežmarių vidurinė mokykla.
2005–2009 m.: Kauno technologijos universitetas, taikomosios matematikos bakalauras.
2009–2011 m.: Kauno technologijos universitetas, taikomosios matematikos magistras, su pagyrimu.
2011–2016 m.: Vilniaus universitetas, matematikos doktorantūra.

Akademinis darbas:

nuo 2012 m.: Kauno technologijos universitetas, asistentė (Tikimybių teorijos ir statistikos pratybų užsiėmimai).