ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
FIZIKOS IR MATEMATIKOS FAKULTETAS

INGA ČAKAITĖ

Matematikos studijų programa

DALINIŲ IŠVESTINIŲ SISTEMOS SU KVAZIREGULIARIUOJU IŠSIGIMIMU SPRENDIMAS

MAGISTRO DARBAS

Darbo vadovas:
prof. D.Jurgaitis

Šis darbas yra originalus ir nebuvo teikiamas kuriam nors laipsniui ar kvalifikacijai įgyti …………………………….

Šiauliai, 2006

Turinys :

1. Įvadas

Aktualumas. Šiuolaikinių uždavinių sprendimo metodų plėtrą įvairiose srityse daugiausia lemia naujų efektyvių metodikų taikymas. Paprastųjų diferencialinių lygčių sprendimo metodų pritaikymo dalinių išvestinių diferencialinėms lygtims labai svarbi, reikalinga ir aktuali problema.

Diferencialinėmis lygtimis aprašomi realūs fizikos, mechanikos, technikos, chemijos, biologijos reiškiniai bei procesai. Taip, kad tirdami gamtos, socialinius reiškinius, fizikos, technikos, biomedicinos uždavinius turime sudaryti matematinį modelį, kuris būtų išreiškiamas ieškomųjų funkcijų ir jų išvestinių lygtimis.

Diferencialine lygtimi vadiname lygybę, siejančią nepriklausomus kintamuosius, nežinomą tų kintamųjų funkciją ir jos išvestines. Jei diferencialinėje lygtyje yra tik vienas nepriklausomas kintamasis, ją vadiname paprastąja diferencialine lygtimi, priešingu atveju – diferencialine dalinių išvestinių lygtimi [4]. Pradininkai Lietuvoje laikomi M. Sapagovas, kuris nagrinėjo elipsinių lygčių sprendimą baigtinių skirtumų metodais ir kuris pirmasis 1965 metais apsigynė disertacija. Taip pat ir B. Kvedaras – paprastųjų diferencialinių lygčių kraštinius uždavinius [19].

Paprastosios diferencialinės lygtys, kurių koeficientai prie aukščiausios išvestinės virsta nuliumi arba turi ypatingumų vadinamos išsigimstančiomis.

Neišsigimstančių diferencialinių lygčių (Fukso klasės diferencialinės lygtys) [12] sprendiniai yra tolydžiosios (analizinės) funkcijos. Išsigimstančių diferencialinių lygčių sprendinių struktūra priklauso nuo išsigimimo laipsnio, o tokių lygčių sprendiniai gali turėti ypatingumų. Dažniausiai diferencialines lygtis bandoma suintegruoti baigtiniu pavidalu, t.y. jų sprendinius užrašyti analizine formule, kuri yra ir tik retais atvejais elementariųjų funkcijų kombinacija. Ši diferencialinių lygčių teorijos dalis vadinama analizine diferencialinių lygčių teorija [17].

Analizinę išsigimstančių diferencialinių lygčių teoriją sudaro dvi dalys:

1) reguliariai išsigimstančių diferencialinių lygčių teorija;
2) ireguliariai arba stipriai išsigimstančių diferencialinių lygčių teorija.

Reguliaraus paprastųjų diferencialinių lygčių išsigimimo apibendrinimas dalinių išvestinių diferencialinėms lygtims arba sistemoms [10], kada diferencialinių lygčių sistemos ar diferencialinės lygties koeficientų dėstiniai laipsnine x laipsnių eilute priklauso nuo kintamųjų pagal kuriuos nėra diferencialinių lygčių sistemos ar diferencialinės lygties eilės išsigimimo, vadinamas kvazireguliariu dalinių išvestinių diferencialinių lygčių išsigimimu [16].

Paprastųjų diferencialinių lygčių, kurių eilė stipriai išsigimsta tam tikros daugdavos taškuose, analizinis sprendimas – sunkus ir sudėtingas uždavinys. Analizinėje išsigimstančių dalinių išvestinių sistemų teorijoje svarbu rasti analizinius išsigimimo daugdarų taškų aplinkoje sprendinius. [4]

Dabar sparčiai vystosi diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis teorija. Kaip ir analizinėje diferencialinių lygčių teorijoje, čia galima nagrinėti išsigimstančias lygtis ir jų sistemas. Diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis išsigimimo situacija sudėtingesnė.

Problemos:

1. Diferencialinių lygčių sistemos supaprastinimas;
2. Apibendrintų laipsninių eilučių metodo taikymas diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistemos sprendimui;
3. Analizinėje išsigimstančių dalinių išvestinių sistemų analizinių sprendinių radimas.

Tyrimo objektas: keturių tiesinių pirmos eilės diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistema.

Hipotezė: taikant laipsninių eilučių metodą iš paprastųjų diferencialinių lygčių analizinės teorijos diferencialinėms lygtims dalinėmis išvestinėmis spręsti galima rasti tokių lygčių ar sistemų sprendinius išsigimimo taškų aplinkose ir išreikšti juos laipsninėmis eilutėmis, konverguojančiomis išsigimimo taškų aplinkoje.

Tikslas: Sukonstruoti dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos atskirųjų sprendinių šeimas, nustatyti jų skaičių ir pagrindines savybes.

Uždaviniai:

1. Modifikuoti laipsninių eilučių metodą ir pritaikyti dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemai spręsti;
2. Išanalizuoti ir pritaikyti laipsninių eilučių konvergavimo tyrimui mažorantų metodą;
3. Diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistemai spręsti naudoti matricų teoriją;
4. Numatyti galimybes išnagrinėtus metodus pritaikyti konkrečioms matricinėms diferencialinėms lygtims spręsti.

Tyrimo metodai: literatūros studijavimas, naudojamų metodų panašiems uždaviniams spręsti analizė, konstantų variavimo metodas, laipsninių eilučių metodas, mažorantų metodas.

Tyrimo etapai:

Pirmame etape (2004 – 2005m.) buvo analizuojama literatūra, interneto duomenų bazės. Atitinkamos literatūros studijos ir analizė leido tiksliau suformuluoti tyrimo problemą, tikslus ir uždavinius.

Antrame etape (2005m.) keturių tiesinių diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistema buvo tiriama įvairiais metodais atliktas žvalgomasis tyrimas, kurio metu buvo nuspręsta taikyti laipsninių eilučių metodą.

Trečiame etape (2005 – 2006m.) buvo išspręsta diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistema ir gauti pagrindiniai sprendiniai.

Ketvirtame etape (2006m.) atliktas diferencialinės lygties dalinėmis išvestinėmis sistemos sprendimas atskiru atveju ir gautas rezultatas. Išanalizuoti galutiniai rezultatai ir suformuluotos išvados.

Darbo naujumas: gauti rezultatai apie tai, kad bendruoju atveju nagrinėjamos sistemos sprendiniai išreiškiami laipsninėmis eilutėmis. Sprendiniai išsigimimo taškų aplinkoje gali turėti laipsninius ir logaritminius ypatingumus. Pastarojo efekto nėra išsigimusių paprastųjų diferencialinių lygčių analizinėje teorijoje.

Darbo struktūra: magistro darbą sudaro įvadas, 4 skyriai, išvados, literatūros sąrašas, santrauka.

2. Teorinė dalis

2.1 Uždavinio formulavimas

Darbe nagrinėjama tokia keturių tiesinių pirmos eilės diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistema [18]:

$$\begin{cases} x^{p+1}\left(b\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x} + c\cdot\frac{\partial u_3}{\partial y} + a\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x} + b\cdot\frac{\partial u_2}{\partial y} + A\frac{\partial u_4}{\partial z} \right) + \sum_{j=1}^{4} a_{1j}(x,y,z)\cdot u_j = 0 \\ x^{p+1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_4}{\partial y} - \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + \sum_{j=1}^{4} a_{2j}(x,y,z)\cdot u_j = 0 \\ x^{p+1}\left(-\frac{\partial u_4}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) + \sum_{j=1}^{4} a_{3j}(x,y,z)\cdot u_j = 0 \\ x^{p+1}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + \sum_{j=1}^{4} a_{4j}(x,y,z)\cdot u_j = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Šiose lygtyse x, y, z – nepriklausomi apskritai kompleksiniai kintamieji, $a_{ij}(x,y,z)$ i=1,2,3,4, j=1,2,3,4 – žinomos apskritai kompleksinės funkcijos, a, b, c, d – konstantos, $u_1(x,y,z), u_2(x,y,z), u_3(x,y,z), u_4(x,y,z)$ - ieškomosios funkcijos.

Darbe nagrinėsime (1) diferencialinių lygčių sistemą, kai p=1 t.y. x laipsnis sutampa su aukščiausia išvestinės pagal nepriklausomą kintamąjį x eile sistemoje, kuri yra taip pat lygi 1. Atvejas, kada x laipsnis yra didesnis už aukščiausios išvestinės pagal nepriklausomą kintamąjį x eilę yra žymiai sudėtingesni ir šiame darbe nebus nagrinėjamas.

(1) sistemą nagrinėsime policilindre P = $\{|x| \le r, |y - y_0| \le r_1, |z - z_0| \le r_2\}$

Ieškosime (1) sistemos sprendinių, kurie yra analiziniai visur išskyrus gal būt išsigimimo hiperplokštumos x=0 taškus. Reikalausime, kad sistemos koeficientams galiotų dėstiniai konverguojančiomis nulinio taško aplinkoje laipsninėmis x laipsnių eilutėmis. Sistemos sprendinių ieškosime apibendrintųjų laipsninių eilučių metodu, t.y. sprendinius konstruosime laipsninėmis nepriklausomojo kintamojo x laipsnių eilutėmis.

2.2 Diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistemos suvedimas į matricinę diferencialinę lygtį

Tam, kad užrašymai būtų trumpesni dalinių išvestinių diferencialinė sistemą užrašysime matriciniu pavidalu. Tam tikslui naudosime tiesines algebros žinias. [7]

(1) diferencialinių lygčių sistemą užrašysime matricine forma. Tam naudokime tokius žymenis:

$$u(x,\ y,\ z) = \begin{pmatrix} u_1(x,\ y,\ z) \\ u_2(x,\ y,\ z) \\ u_3(x,\ y,\ z) \\ u_4(x,\ y,\ z) \end{pmatrix}$$

keturmatis vektorius stulpelis, sudarytas iš ieškomųjų funkcijų, todėl (1) sistemą užrašant matriciniu pavidalu jis bus nežinomasis vektorius stulpelis [6].

$A(x,y,z)=\{ a_{ij}(x,y,z)=const\}$, i=1,2,3,4, j=1,2,3,4 - tai ketvirtos eilės kvadratinė matrica, sudaryta iš mums žinomų funkcijų (joms galioja dėstiniai konverguojančiomis išsigimimo taško aplinkoje x laipsnių eilutėmis). Šios funkcijų matricos atskiru atveju gali būti konstantos.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrica, sudaryta iš koeficientų, esančių prie ieškomųjų funkcijų išvestinių pagal nepriklausomąjį kintamąjį x, t.y. prie $\frac{\partial u_i}{\partial x}$, i =1,2,3,4.

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrica, sudaryta iš koeficientų, esančių prie ieškomųjų funkcijų dalinių išvestinių pagal nepriklausomąjį kintamąjį y, o

$$I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrica, sudaryta iš koeficientų, esančių prie ieškomųjų funkcijų dalinių išvestinių pagal nepriklausomąjį kintamąjį z.

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nulinis vektorius stulpelis.

Pasinaudoję aukščiau minėtais žymenimis (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą galime užrašyti kaip matricinę dalinių išvestinių diferencialinę lygtį

$$X^{p+1} \cdot \left(E\frac{\partial u}{\partial x} + I_1\frac{\partial u}{\partial y} + I_2\frac{\partial u}{\partial z}\right) + A(x,y,z) \cdot u(x,y,z) = O \qquad (2)$$

Akivaizdu, jog atlikus veiksmus su matricomis (2) gausime (1) diferencialinių lygčių sistemą.

3. Matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties sprendimas apibendrintu laipsninių eilučių metodu

3.1 Kvazireguliarusis išsigimimas, bendrasis atvejas

Bet kadangi nagrinėsiu atvejį, kada x-o laipsnis p=0, tai (2) matricinę diferencialinę lygtį užrašysiu tokiu pavidalu [1]

$$x(E\frac{\partial u}{\partial x}+I_1\frac{\partial u}{\partial y}+I_2\frac{\partial u}{\partial z})+A(x,y,z)\cdot u(x,y,z)=0 \tag{3}$$

(3) matricinės diferencialinės lygties eilė taškuose x=0 išsigimsta, ir lygtis iš pirmos eilės dalinių išvestinių diferencialinės lygties tampa tokia algebrine lygtimi: A(x,y,z)*u(x,y,z)=O. Ieškosime (3) matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties sprendinių, kurie būtų analiziniai visur išskyrus gal būt eilės išsigimimo taškus. Todėl (3) matricinę diferencialinę lygtį spręsime apibendrintu laipsninių eilučių metodu t.y. ieškomąją funkciją u(x,y,z) dėstome x laipsnių eilute.

Priimame reikalavimą, kad (3) matricinės diferencialinės lygties koeficientų matricos A(x,y,z) elementams galioja dėstinys x -ų laipsnių eilute [13]

$$A(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k(y,z)x^k\ . \tag{4}$$

Jei (3) matricinės diferencialinės lygties koeficientų matricos A(x, y, z) dėstinio laipsnine eilute visi koeficientai priklauso nuo kintamųjų y ir z, tai tos lygties sprendiniai išreiškiami tokia apibendrinta laipsnine x-ų laipsnių eilute

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(y,z,s)x^{k+\rho(y,z)}\ . \tag{5}$$

čia x, y, z – nepriklausomi apskritai kompleksiniai kintamieji, ρ – nežinoma kintamųjų y ir z funkcija, s=lnx – naujas kintamasis, kurį laikysime nepriklausomu.

(3) matricinėje diferencialinėje lygtyje yra ieškomosios funkcijos dalinės išvestinės pagal kintamuosius x, y ir z, todėl randame tas išvestines [5]. Diferencijuodami (5) pagal nepriklausomus kintamuosius x, y, z gauname tokias lygybes

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho-1}((k+\rho)u_k+\frac{\partial u_k}{\partial s}); \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}(s\cdot\frac{\partial \rho}{\partial y}u_k+\frac{\partial u_k}{\partial s})\ ; \tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}(s\cdot\frac{\partial \rho}{\partial z}u_k+\frac{\partial u_k}{\partial s})\ . \tag{8}$$

Įrašome (4),(5),(6),(7) ir (8) į (3) ir gauname

$$x\{E\cdot\sum_{k=0}^{\infty}((k+\rho)\cdot u_k+\frac{\partial u_k}{\partial s})\cdot x^{k+\rho-1}+I_1\sum_{k=0}^{\infty}(s\cdot\frac{\partial\rho}{\partial y}u_k+\frac{\partial u_k}{\partial y})\cdot x^{k+\rho}+I_2\sum_{k=0}^{\infty}(s\cdot\frac{\partial\rho}{\partial z}u_k+\frac{\partial u_k}{\partial z})\cdot x^{k+\rho}\}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}A_k x^k\cdot\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}u_k=0. \tag{9}$$

Pertvarkę (9), gauname

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(E(k+\rho)u_k x^{k+\rho}+\frac{\partial u_k}{\partial s}x^{k+\rho}+s\left(I_1\cdot\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\cdot\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\cdot u_k x^{k+\rho+1}+\left(I_1\cdot\frac{\partial u_k}{\partial y}+I_2\cdot\frac{\partial u_k}{\partial z}\right)\cdot x^{k+\rho+1}\right)+\sum_{l=0}^{k}A_l u_{k-l}x^{k+\rho}=0. \tag{10}$$

Kad rastume (5) apibendrintos laipsninės x-ų laipsnių eilutės koeficientus, (10) lygybėje lyginame nuliui koeficientus prie vienodų x-o laipsnių .Mažiausias x-o laipsnis (5) eilutėje yra ρ. Koeficientas prie x^ρ yra

$$(E\rho+A_0)\cdot u_0+\frac{\partial u_0}{\partial s}=0. \tag{11}$$

Tęsdami toliau gauname, kad koeficientas prie $x^{\rho+1}$ yra

$$\left(E(\rho+1)+A_0\right)u_1+\frac{\partial u_1}{\partial s}+I_1\frac{\partial u_0}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_0}{\partial z}+s\left(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)u_0+A_1u_0=0. \tag{12}$$

O prie $x^{\rho+2}$ koeficientas yra

$$\left(E(\rho+2)+A_0\right)u_2+\frac{\partial u_2}{\partial s}+I_1\frac{\partial u_1}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_1}{\partial z}+s\left(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)u_1+A_1u_1+A_2u_0=0. \tag{13}$$

Iš (11), (12), (13) seka, kad koeficientas bet kokio laipsnio ρ+k , k=0,1,2,... yra randamas iš šios rekurentinės formulės

$$\left(E(\rho+k)+A_0\right)u_k+\frac{\partial u_k}{\partial s}+I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+s\left(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)u_{k-1}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l=0. \tag{14}$$

Šioje lygybėje visi $u_k\equiv 0$, kai k<0.

Iš (14), kai k=0 gauname

$$\left(E\rho+A_0\right)\cdot u_0+\frac{\partial u_0}{\partial s}=0. \tag{15}$$

Iš (15) turime rasti pirmąjį laipsninės eilutės (5) koeficientą ir nežinomą funkciją ρ. Pareikalaukime, kad u_0 nepriklausytų nuo kintamojo s, t.y. $u_0=u_0(y,z)$. Tuomet iš (15) gauname

$$(E\rho+A_0)\cdot u_0=0. \tag{16}$$

Gavome tiesinių algebrinių lygčių homogeninę sistemą [3], kurioje u_0 yra nežinomųjų vektorius stulpelis. Iš tiesinės algebros kurso žinoma, kad tiesinių homogeninių lygčių sistema turi nenulinį sprendinį tada ir tik tada kai

$$\det\left(E\rho+A_0\right)=0. \tag{17}$$

(17) lygybė funkcijos ρ atžvilgiu yra ketvirtojo laipsnio algebrinė lygtis. Bendruoju atveju ši lygtis turi keturias šaknis. Pareikalaukime, kad šaknų skaičius nesikeistų visiems $(y,z)\in P$. (17) lygybę, analogiškai kaip ir paprastųjų diferencialinių lygčių teorijoje, pavadinkime (3) lygčių sistemos nusakančiąją lygtimi.

Iš (17) lygybės gauname $\rho_i(y,z)$, i=1,2,3,… . Pasirinktam ρ_i laisvai parenkame u_0.

Belieka surasti visus kitus laipsninės eilutės (5) koeficientus u_k, k=1,2,3,… . Tuo tikslu (14) lygybę pertvarkome išreikšdami u_k per u_{k-1}, $u_{k,}$ ..., u_0.

$$\left(E(\rho+k)+A_0\right)u_k+\frac{\partial u_k}{\partial s}=-(s\left(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)u_{k-1}+I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-1}u_l) \tag{18}$$

(18) lygybė u_k ir kintamojo s atžvilgiu yra pirmos eilės paprastoji diferencialinė lygtis, jeigu fiksuotume nepriklausomus kintamuosius y ir z. Mus domina ne bendrasis šios diferencialinės lygties sprendinys, o tik vienas konkretus sprendinys, kurio pagalba rekurentiškai rastume (5) laipsninės eilutės koeficientus. Tada ieškomoji funkcija u priklauso tik nuo kintamojo s, t.y. u=u(s). u(s) atžvilgiu (18) yra tiesinė paprastoji pirmos eilės diferencialinė lygtis, kurią spręsime konstantos varijavimo metodu. Pirmiausia kairiąją diferencialinės lygties (18) pusę prilyginame nuliui ir gauname tokią pirmos eilės paprastąją diferencialinę lygtį:

$$\left(E(\rho+k)+A_0\right)u_k+\frac{\partial u_k}{\partial s}=0\,. \tag{19}$$

Atskyrę kintamuosius, gauname

$$\frac{du_k}{u_k}=-\left(E(\rho+k)+A_0\right)ds\,. \tag{20}$$

Abi (20) lygybės puses suintegravę, gauname

$$\ln u_k=-s\left(E(\rho+k)+A_0\right)+C(s)\,. \tag{21}$$

Iš (21) randame u_k jo išraiška yra tokia:

$$u_k=e^{-s\left(E(\rho+k)+A_0\right)}C(s)\,. \tag{22}$$

Šioje lygybėje nežinoma yra funkcija C(s). Kad ją rastume (22) lygybę diferencijuojame pagal kintamąjį s ir gauname

$$u'_k=C'e^{-s\left(E(\rho+k)+A_0\right)}-C\left(E(\rho+k)+A_0\right)e^{-s\left(E(\rho+k)+A_0\right)}. \tag{23}$$

(22) ir (23) įrašę į (18), gauname

$$\left(E(\rho+k)+A_0\right)\cdot C\cdot e^{-s\left(E(\rho+k)+A_0\right)}+C'e^{-s\left(E(\rho+k)+A_0\right)}-C\left(E(\rho+k)+A_0\right)e^{-s\left(E(\rho+k)+A_0\right)}=$$
$$=-(s\left(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)u_{k-1}+I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-1}u_l)\,. \qquad \ldots\ldots..(24)$$

(24) sutraukę panašius narius, gauname

$$C' e^{-s(E(\rho+k)+A_0)} = -(s\left(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) u_{k-1} + I_1 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-1} u_l). \tag{25}$$

Ši diferencialinė lygtis C(s) atžvilgiu yra tiesinė diferencialinė lygtis su atskirtaisiais kintamaisiais. Atskyrę kintamuosius gauname

$$dC = -e^{s(E(\rho+k)+A_0)} \cdot (s\left(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) u_{k-1} + I_1 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-1} u_l)\, ds. \tag{26}$$

Abi puses suintegravę, gauname

$$C = -\int e^{s(E(\rho+k)+A_0)} \cdot (s\left(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) u_{k-1} + I_1 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-1} u_l)\, ds + C. \tag{27}$$

C parenkame patys, tada C=0.

(27) įrašę į (22) gauname, kam lygūs u_k, kai k=1,2,...

$$u_k = -e^{s(E(\rho+k)+A_0)} \cdot \int e^{s(E(\rho+k)+A_0)} \cdot (s\left(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) u_{k-1} + I_1 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-1} u_l)\, ds. \tag{28}$$

Iš (28) lygybės visi (5) laipsninės eilutės koeficientai $u_k(y,z,s)$, kai k=1,2,...nustatomi vienareikšmiškai pagal laisvai pasirinktą pirmąjį koeficientą $u_0(y,z)$, kada galioja tokios sąlygos:

1. (3) matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties koeficientų dėstinio (4) matrica $A_0(y,z)$ yra paprastosios struktūros matrica, t.y. jos visos tikrinės reikšmės yra realios ir skirtingos;
2. matricos $A_0(y,z)$ tikrinių reikšmių skirtumai nėra sveikieji skaičiai;
3. matricos $A_0(y,z)$ tikrinių reikšmių skaičius ir jų savybės nesikeičia policilindre $|y-y_0| \le r_1, |z-z_0| \le r_2$, t.y. jeigu kažkuriame policilindro taške tikrinės reikšmės yra tokios, tai jos yra tokios ir visame policilindre.

Dabar lieka ištirti (5) laipsninės eilutės konvergavimą. Tai atliksime mažorantų metodu, išdėstytu monografijoje [11]. Tarkime, kad $u_k(y,z,s)$ mažorantė yra

$$u_k(y,z,s) << Q^k\left(|y-y_0| \cdot |z-z_0|\right)^{-\alpha(k)} \cdot |s|^{\beta(k)}\, I. \tag{29}$$

kur Q – kažkokia konstanta, I – ktevirtos eilės vektorius stulpelis, kurio visi elementai vienetai, $\alpha(k)$ ir $\beta(k)$ – kažkokie tai dydžiai, kuriuos nustatysime vėliau. Čia ir toliau „<<“ žymėsime mažoravimo operaciją. Kadangi $A_k(y,z)$ yra holomorfinės funkcijos, tai jų mažorantės yra

$$A_k(y,z) << M^k\left(|y-y_0| \cdot |z-z_0|\right)^{-1}.\text{k= 1, 2, 3, …} \tag{30}$$

čia M –pastovi ketvirtos eilės kvadratinė matrica. Iš $\rho(y,z,)$ apibrėžimo seka, kad šios funkcijos mažorantę galima imti tokią

$$\rho(y,z) << P\left(|y-y_0| \cdot |z-z_0|\right)^{-1}, \tag{31}$$

čia P – konstanta.

(29), (30), (31) įrašę į rekurentinę formulę (14) gauname, kad $u_k(y,z,s)$ mažorantė yra

$$
\begin{aligned}
u_k(y,z,s) << & \left(E(\rho+k)+A_0\right)^{-1}\Big(EQ^k|\beta(k)|\,|y-y_0|\cdot|z-z_0|\Big)^{-\alpha(k)}\cdot|s|^{\beta(k)-1}\cdot I+ \\
& + s\cdot P\cdot L\Big(|y-y_0|^{-2}\cdot|z-z_0|^{-1}+|y-y_0|^{-1}\cdot|z-z_0|^{-2}\Big)\cdot Q^{k-1}\cdot\Big(|y-y_0|\cdot|z-z_0|\Big)^{\alpha(k-1)}\cdot|s|^{\beta(k)-1}\cdot I+ \\
& + LQ^{k-1}|\alpha(k-1)|\cdot|s|^{\beta(k)-1}\cdot\Big(|y-y_0|^{-\alpha(k-1)-1}\cdot|z-z_0|^{-\alpha(k-1)}+|y-y_0|^{-\alpha(k-1)}\cdot|z-z_0|^{-\alpha(k-1)-1}\Big)+ \\
& + \sum_{l=0}^{k-1} M^{k-1}Q^l\cdot\Big(|y-y_0|\cdot|z-z_0|\Big)^{-\alpha(l)-1}|s|^{\beta(l)}\cdot I),
\end{aligned}
\tag{32}
$$

čia L – ketvirtos eilės kvadratinė matrica, kurios elementai vienetai. Nesiaurindami bendrumo iš (32) parenkame $\alpha(k)=2k$ ir $\beta(k)=k$. Tuomet $u_k(y,z,s)$ mažorantė yra

$$
u_k(y,z,s) << Q^k\Big(|y-y_0|\cdot|z-z_0|\Big)^{-2k}\cdot|s|^k . \tag{33}
$$

Įrašę $\alpha(k)=2k$ ir $\beta(k)=k$ išraiškas į (32), gauname

$$
u_k(y,z,s) << \left(E(\rho+k)+A_0\right)^{-1}\Big(Q^k(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{-2k}\Big)\cdot|s|^k\cdot \quad \ldots..
$$

$$
\left(E|s|^{-1}\cdot I+P\Big(|z-z_0|+|y-y_0|\Big)\cdot\frac{1}{Q}|2k-2|\cdot|y-y_0|\cdot|z-z_0|\cdot\Big(|y-y_0|+|z-z_0|\Big)\cdot L+\sum_{l=0}^{k-1}M^{k-1}Q^{l-k}\cdot\Big(|y-y_0|\cdot|z-z_0|\Big)^{2k-2l-1}\cdot|s|^{l-k}\right)\cdot I . \tag{34}
$$

Į (34) įeina $|s|^{-1}$ arba $\frac{1}{\ln x}$. Kadangi ieškome sprendinių, kai $x\to 0$ tai $|\ln x|\to\infty$. Iš to seka, kad $|s|^{-1}\langle\varepsilon$, kur $\varepsilon\to 0$. Kadangi $|y-y_0|\langle\frac{r_1}{2}$; $|z-z_0|\langle\frac{r_2}{2}$, tai iš (34) gauname

$$
\begin{aligned}
|u_k(y,z,s)|\langle & Q^k\Big(|y-y_0|\cdot|z-z_0|\Big)^{-2k}|s|^k\cdot[(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot k\cdot\varepsilon+(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot\frac{P(r_1+r_2)}{2Q}\cdot L+ \\
& +(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot\frac{|2k-2|r_1r_2(r_1+r_2)}{8Q}\cdot L+(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot r_1r_2(4QM^{-1}-r_1r_2L)^{-1}]\cdot I .
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Laužtiniuose skliaustuose antrasis ir ketvirtasis dėmenys k augant į begalybę artėja į nulį. Konstantą Q parinkime taip, kad (35) lygybės laužtiniuose skliaustuose esančių pirmojo ir trečiojo dėmenų suma nebūtų didesni už 1. Tuomet (5) eilutės koeficientams galioja šis įvertis

$$
|u_k(y,z)|\langle Q^k\Big(|y-y_0|\cdot|z-z_0|\Big)^{-2k}|s|^k\cdot I . \tag{36}
$$

(36) įvertis garantuoja (5) laipsninės eilutės konvergavimą, kai:

$$
|x|\langle\frac{(r_1r_2)^2\cdot\varepsilon}{16Q};\ |y-y_0|\langle\frac{r_1}{2};\ |z-z_0|\langle\frac{r_2}{2}.
$$

ε artėjant į nulį gautoji sprendinio konvergavimo spindulys yra labai mažas.

Apibendrindami gautuosius rezultatus suformuluojame teoremą:

1 teorema. Jeigu matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties (3) koeficientų matricos A(x,y,z) dėstinio (5) laipsnine eilute visi koeficientai priklauso nuo kintamųjų y ir z ir matrica A_0(y, z) yra paprastosios struktūros, t.y. jos tikrinės reikšmės yra realios, skirtingos ir jų skirtumai nėra sveikieji skaičiai, visoms galimoms kintamųjų y ir z reikšmėms, tenkinančioms nelygybes $|y - y_0| \langle \frac{r_1}{2}$ ir $|z - z_0| \langle \frac{r_2}{2}$, tai (3) matricinės dalinių išvestinių diferencialinė lygtis turi 4 atskirųjų sprendinių šeimas, išreiškiamas apibendrinta laipsnine eilute (5), kurioje funkcija $\rho(y,z)$ randame iš (11) lygties , $u_k(y, z, s)$, k=0,1,2,... randamas iš (28) lygybės, o $u_0(y, z)$ parenkamas laisvai ir taip, kad nepriklausytų nuo kintamojo s, o priklausytų tik nuo kintamųjų y, z ir būtų analizinė pastarųjų kintamųjų funkcija, be to gautųjų šeimų atstovai yra tiesiškai nepriklausomos funkcijos.

Jeigu teoremos sąlygos nėra išpildytos, tai negalima sukonstruoti 4 atskirųjų sprendinių šeimų ir tokių, kad jų atstovai būtų tiesiškai nepriklausomi. Jeigu tikrinių reikšmių skirtumai yra sveikieji skaičiai, tai galima sukonstruoti tik vieną duotosios matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties sprendinį, o trūkstamus 3 reikia konstruoti kitais metodais, nes šiame darbe išdėstytas metodas yra netinkamas.

Reikalavimas, kad nagrinėjamos matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties koeficientų dėstinio laipsnine eilute pirmojo koeficiento tikrinės reikšmės turėtų tas pačias savybes visoms galimoms kintamųjų, pagal kuriuos neišsigimsta duotosios matricinės diferencialinės lygties eilė yra labai griežtas ir bandymas jo atsisakyti kelia daug rimtų ir nenagrinėtų problemų.

3.2 Reguliarusis išsigimimas atskiras atvejas

Ištirkime kitą atvejį. Kuomet diferencialinės lygties koeficientų matricos dėstinio laipsnine eilute koeficientai nepriklauso [14] nuo kintamųjų. Patogumo dėlei nagrinėkime matricinę dalinių išvestinių diferencialinę lygtį

$$x(E\frac{\partial u}{\partial x}+I_1\frac{\partial u}{\partial y}+I_2\frac{\partial u}{\partial z})+A(x)u(x,y,z)=0, \tag{3}$$

ir pareikalaukime, kad matricinės diferencialinės lygties koeficientų matricos A(x,y,z) elementams galioja dėstinys laipsnine x laipsnių eilute

$$A(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k x^k . \tag{37}$$

t.y. visi (37) eilutės, t.y. visos matricinės diferencialinės lygties (3) koeficientų matricos yra tik nepriklausomo kintamojo x funkcijos.

Jei (3) matricinės diferencialinės lygties koeficientų matricos A(x) dėstinio laipsnine eilute koeficientai nepriklauso nuo kintamųjų y ir z, tai tos lygties sprendiniai bus išreiškiami tokia apibendrinta laipsnine x laipsnių eilute

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(y,z)x^{k+\rho}, \tag{38}$$

kur $k\in Z_0$, ρ – kažkoks parametras, kurį nustatysime vėliau.

(3) matricinėje diferencialinėje lygtyje yra ieškomosios funkcijos dalinės išvestinės pagal kintamuosius x, y ir z, todėl randame tas išvestines. Diferencijuodami (38) pagal kintamuosius x, y, z gauname tokias lygybes

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)\,x^{k+\rho-1}u_k , \tag{39}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial y}, \tag{40}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}\,\frac{\partial u_k}{\partial z}. \tag{41}$$

Kaip ir ankstesniu atveju, įrašome (37),(38),(39),(40) ir (41) į (3) ir gauname

$$x\{E\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)\cdot u_k\cdot x^{k+\rho-1}+I_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial u_k}{\partial y}\cdot x^{k+\rho}+I_2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial u_k}{\partial z}\cdot x^{k+\rho}\}+\sum_{k=0}^{\infty}A_k x^k\cdot\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}u_k=0. \tag{42}$$

Atlikę (42) lygtyje elementariuosius pertvarkymus, gauname

$$\sum_{k=0}^{\infty} E(k+\rho)\,u_k x^{k+\rho} + \left(I_1 \frac{\partial u_k}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_k}{\partial z} \right) x^{k+\rho+1} + \sum_{l=0}^{k} A_l u_{k-l} x^{k+\rho} = 0 . \tag{43}$$

Kad rastume (38) eilutės koeficientus $u_k(y,z)$, lyginame nuliui koeficientus prie vienodų x-o laipsnių (43) lygybėje.

Mažiausias x-o laipsnis (38) eilutėje yra ρ. Koeficientas prie x^{ρ} yra

$$(E\rho + A_0)\cdot u_0 = 0 . \tag{44}$$

Prie $x^{\rho+1}$ koeficientas yra

$$\left(E(\rho+1) + A_0\right) u_1 + I_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_0}{\partial z} + A_1 u_0 = 0 . \tag{45}$$

O prie $x^{\rho+2}$ koeficientas yra

$$\left(E(\rho+2) + A_0\right) u_2 + I_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} + A_1 u_1 + A_2 u_0 = 0 . \tag{46}$$

Iš (44), (45), (46) matome, kad koeficientas $u_k(y,z)$ skaičiuoti galioja tokia rekurentinė formulė ieškomosios laipsninės eilutės koeficientams rasti

$$\left(E(\rho+k) + A_0\right) u_k + I_1 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l} u_l = 0 . \tag{47}$$

kurioje $u_k(y,z) \equiv 0$, kai k<0.

Iš (47) kai k=0, gauname

$$(E\,\rho + A_0)\,u_0 = 0 . \tag{48}$$

(48) sistema yra tiesinių homogeninių lygčių sistema. Iš tiesinės algebros kurso yra žinoma, kad tiesinių homogeninių lygčių sistema turės nenulinį sprendinį tada ir tik tada kai

$$\det\left(E\rho + A_0\right) = 0 . \tag{49}$$

(49) lygybė funkcijos – parametras ρ atžvilgio yra ketvirtojo laipsnio algebrinė lygtis, kuri bendruoju atveju ši lygtis turi keturias ρ_i, i=1,2,3,4 šaknis. Tarkime, kad visos šaknys yra skirtingos, o jų skirtumai nėra sveikieji skaičiai.

(49) lygybę, analogiškai kaip ir paprastųjų diferencialinių lygčių teorijoje, pavadinkime (3) sistemos nusakančiąja lygtimi.

Iš (48) formulės vienareikšmiškai nustatome u_0 atitinkantį konkretų ρ_i pasirinkimą.

Kitiems $u_k(y,z)$ rasti, kai k=1,2,3,… . (47) gauname tokią formulę

$$u_k = -\left(E(\rho+k) + A_0\right)^{-1} \cdot \left(\left(I_1 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}\right) + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l} u_l\right) . \tag{50}$$

Tačiau ši sprendinio išraiška yra formali. Neišspręstas klausimas, ar eilutė (38) įeinanti į sprendinio išraišką konverguoja [8].

Dabar nagrinėsime (47) rekurentinę formulę. Eilutės konvergavimą tirsime mažorantų metodu.

Iš (37) lygybės seka, kad koeficientams A_k mažorantė yra tokio pavidalo

$$A_k \langle\langle M^k, \tag{51}$$

kur M – kažkokia tai ketvirtos eilės kvadratinė matrica.

Tarkime, kad $u_k(y,z)$ mažorantė yra

$$u_k(y,z) << Q^k\left(|y-y_0|\cdot|z-z_0|\right)^{-\alpha(k)}\cdot I, \tag{52}$$

kur Q – kažkokia konstanta, I – ketvirtos eilės vektorius stulpelis, kurios visi elementai vienetai, $\alpha(k)$ – kažkoks tai dydis, kurį nustatysime vėliau.

(51) ir (52) įrašę į (47) gauname

$$u_k(y,z) << Q^k(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{-\alpha(k)}\cdot((E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot\frac{1}{Q}|\alpha(k-1)|\cdot(|y-y_0|^{\alpha(k)-\alpha(k-1)-1}\cdot|z-z_0|^{\alpha(k)-\alpha(k-1)}+$$

$$+|y-y_0|^{\alpha(k)-\alpha(k-1)}\cdot|z-z_0|^{\alpha(k)-\alpha(k-1)-1})\cdot L+(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot\sum_{l=0}^{k-1}M^{k-l}Q^{l-k}\cdot(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{\alpha(k)-\alpha(l)})\cdot I, \tag{53}$$

kur L – ketvirtos eilės kvadratinė matrica, kurios visi elementai vienetai. Iš (53) nesiaurindami bendrumo parenkame $\alpha(k)=2k$. Tuomet (52) išraiška yra

$$u_k(y,z) << Q^k\left(|y-y_0|\cdot|z-z_0|\right)^{-2k}\cdot I. \tag{54}$$

Įrašę $\alpha(k)=2k$ į (53) išraišką gauname

$$u_k(y,z) << Q^k(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{-2k}\cdot((E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot\frac{1}{Q}|2k-2|\cdot(|y-y_0|\cdot|z-z_0|^2+|y-y_0|^2\cdot|z-z_0|)\cdot L+$$

$$+(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot\sum_{l=0}^{k-1}M^{k-l}Q^{l-k}\cdot(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{2k-2l})\cdot I. \tag{55}$$

(55) lygybėje įvertinę skirtumus $|y-y_0|\langle\frac{r_1}{2}$; $|z-z_0|\langle\frac{r_2}{2}$ gauname

$$|u_k(y,z)|\langle Q^k\left(|y-y_0|\cdot|z-z_0|\right)^{-2k}\cdot[(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot\frac{1}{Q}|2k-2|\cdot\frac{r_1r_2(r_1+r_2)}{8Q}+$$

$$+(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot r_1r_2(4QM^{-1}-r_1r_2L)^{-1}]\cdot I. \tag{56}$$

(56) lygybėje, kai $k\to\infty$ antroji išraiška artėja į nulį. Konstanta Q parinkime taip, kad (56) formulės pirmoji išraiška būtų mažesnė už 1. Tuomet (38) eilutės koeficientams galioja šis įvertis

$$|u_k(y,z)|\langle Q^k\left(|y-y_0|\cdot|z-z_0|\right)^{-2k}\cdot I. \tag{57}$$

(57) įvertis garantuoja (38) eilutės konvergavimą, kai:

$$|x|\langle\frac{(r_1r_2)^2}{16Q}\ ;|y-y_0|\langle\frac{r_1}{2}\ ;\ |z-z_0|\langle\frac{r_2}{2}.$$

Apibendrinant suformuluojame teoremą:

2 teorema. Matricinės diferencialinės lygties (3) sprendiniai, kuomet diferencialinės lygties koeficientų matricos A(x) dėstinio laipsnine eilute koeficientai nepriklauso nuo kintamųjų y ir z, yra

(38) pavidalo, kur ρ randamas iš (49) lygties, u_k randami iš (50) lygybės, k=0,1,2,..., o u_0 parenkamas laisvai.

3.3 Reguliarusis išsigimimas ypatingas atvejas

Nagrinėjame (3) matricinę diferencialinę lygčių sistemą, kada koeficientų dėstinio laipsnine eilute A(x,y,z) pirmasis koeficientas nepriklauso nuo kintamųjų y ir z, o kiti koeficientai gali priklausyti nuo kintamųjų y ir z [15].

$$x(E\frac{\partial u}{\partial x}+I_1\frac{\partial u}{\partial y}+I_2\frac{\partial u}{\partial z})+A(x,y,z)\cdot u(x,y,z)=0 \tag{3}$$

kurioje

$$A(x,y,z)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k(y,z)x^k \tag{58}$$

t.y. tik pirmasis matricinės diferencialinės lygties (3) koeficientų matricos koeficientas nepriklauso nuo nepriklausomų kintamųjų y ir z, o kiti koeficientai apskritai gali priklausyti nuo nepriklausomų kintamųjų y ir z.

Jei (3) matricinės diferencialinės lygties koeficientų matricos A(x) dėstinio laipsnine eilute koeficientai nepriklauso nuo kintamųjų y ir z, tai tos lygties sprendiniai bus išreiškiami tokia apibendrinta laipsnine x laipsnių eilute

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(y,z,s)\,x^{k+\rho}\ , \tag{59}$$

kur $k\in Z_0$, ρ – parametras, kurį nustatysime vėliau.

Kuo šis atvejas skiriasi nuo pirmųjų dviejų. ρ yra parametras t.y. skaičius ir išsigimimas nepriklauso nuo kintamųjų y ir z, priklauso tik nuo x laipsniu ρ ir taškas. Toks išsigimimas reguliarus ir jis atitinka išsigimimą, kuris yra paprastosiose diferencialinėse lygtyse, kurių eilė išsigirsta.

(3) matricinėje diferencialinėje lygtyje yra ieškomosios funkcijos dalinės išvestinės pagal kintamuosius x, y ir z, todėl randame tas išvestines. Diferencijuodami (59) pagal kintamuosius x, y, z gauname tokias lygybes

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{k=0}^{\infty}((k+\rho)\,x^{k+\rho-1}u_k+x^{k+\rho}\frac{\partial u_k}{\partial s}\left(1+\ln x\right)), \tag{60}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial y}, \tag{61}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}\frac{\partial u_k}{\partial z}. \tag{62}$$

Kaip ir ankstesniu atveju, įrašome (58),(59),(60),(61) ir (62) į (3) ir gauname

$$x\{E\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)\cdot u_k\cdot x^{k+\rho-1}+x^{k+\rho}\frac{\partial u_k}{\partial s}(1+\ln x)+I_1\sum_{k\check{z}0}^{\infty}\frac{\partial u_k}{\partial y}\cdot x^{k+\rho}+I_2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial u_k}{\partial z}\cdot x^{k+\rho}\}+ \\ +\sum_{k=0}^{\infty}A_k x^k\cdot\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}u_k=0 \quad . \tag{63}$$

(63) lygybėje perėję prie vienos sumos, gauname

$$\sum_{k=0}^{\infty}(E(k+\rho)\,u_k x^{k+\rho}+\frac{\partial u_k}{\partial s}x^{k+\rho+1}+s\frac{\partial u_k}{\partial s}x^{k+\rho}+\left(I_1\frac{\partial u_k}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_k}{\partial z}\right)x^{k+\rho+1}+\sum_{l=0}^{k}A_l u_{k-1}x^{k+\rho})=0\,. \tag{64}$$

Kad rastume (59) eilutės koeficientus $u_k(y,z)$, (64)lygybėje lyginame nuliui koeficientus prie vienodų x-o laipsnių [9].

Mažiausias x-o laipsnis (59) eilutėje yra ρ. Koeficientas prie x^{ρ} yra

$$(E\rho+A_0)\cdot u_0+s\frac{\partial u_0}{\partial s}=0\,. \tag{65}$$

pratęsus skaičiavimus gauname, kad koeficientas prie $x^{\rho+1}$ koeficientas yra

$$\left(E(\rho+1)+A_0\right)u_1+s\frac{\partial u_1}{\partial s}+\frac{\partial u_0}{\partial s}+I_1\frac{\partial u_0}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_0}{\partial z}+A_1u_0=0\,. \tag{66}$$

O prie $x^{\rho+2}$ koeficientas yra

$$\left(E(\rho+2)+A_0\right)u_2+s\frac{\partial u_2}{\partial s}+\frac{\partial u_1}{\partial s}+I_1\frac{\partial u_1}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_1}{\partial z}+A_1u_1+A_2u_0=0\,. \tag{67}$$

Iš (65), (66), (67) matome, kad koeficientas prie bet kokio x-o laipsnio $x^{k+\rho}$, kai k=0, 1,…. Randama iš šios rekurentinės formulės

$$\left(E(\rho+k)+A_0\right)u_k+s\frac{\partial u_k}{\partial s}+\frac{\partial u_{k-1}}{\partial s}+I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-1}u_l=0\,. \tag{68}$$

Kurioje $u_k(y,z)\equiv 0$, kai k<0.

Iš (68) kai k=0, gauname

$$(E\,\rho+A_0)\,u_0+s\frac{\partial u_0}{\partial s}=0\,. \tag{69}$$

Reikalaukime, kad u_0 nepriklausytų nuo s, t.y. $u_0= u_0(y,z)$. Tuomet iš (69) gauname

$$(E\,\rho+A_0)\,u_0=0 \tag{70}$$

Tai tiesinių homogeninių lygčių sistema, kurioje u_0 nežinomųjų vektorius stulpelis. Tarkime, kad (70) sistema turėtų nenulinį sprendinį būtina ir pakankama,

$$\det\left(E\rho+A_0\right)=0\,. \tag{71}$$

(71) lygybė funkcijos – parametras ρ atžvilgio yra ketvirtojo laipsnio algebrinė lygtis, kuri bendruoju atveju ši lygtis turi keturias ρ_i, i=1,2,3,4 šaknis. Tarkime, kad visos šaknys yra skirtingos, o jų skirtumai nėra sveikieji skaičiai.

Iš (71) lygybės gauname ρ_i , i=1,2,3,4. pagal pasirinktą ρ_i , iš (70) lygybės vienareikšmiškai nustatome u_0.

Kitiems (59) eilutės koeficientus rasti u_k, kai k=1,2,3,… . Tuo tikslu (68) lygybę pertvarkome išreikšdami u_k per u_{k-1}

$$u_k = -\left(E(\rho+k)+A_0\right)^{-1}\cdot((I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\frac{\partial u_{k-1}}{\partial s}+s\frac{\partial u_k}{\partial s})+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l). \tag{72}$$

Gavome pirmos eilės tiesinę diferencialinę lygtį dalinėmis išvestinėmis. Kadangi mus domina tik paprasčiausi šios lygties sprendiniai, tai tarkime, kad $u_k=u_k(s)$. Tada ši lygtis virsta paprastąją pirmos eilės tiesine diferencialine lygtimi, kurią spręsime konstantų variavimo metodu. Kairiąją lygties pusę prilyginę nuliui gauname

$$\left(E(\rho+k)+A_0\right)u_k + s\frac{\partial u_k}{\partial s} = 0. \tag{73}$$

Atskyrę kintamuosius, gauname tokią lygtį

$$\frac{du_k}{u_k} = -\left(E(\rho+k)+A_0\right)\frac{ds}{s}. \tag{74}$$

Suintegravę abi (74) lygybės puses, gauname

$$\ln u_k = -\left(E(\rho+k)+A_0\right)\cdot\ln s + C(s). \tag{75}$$

Iš (75) randame u_k jo išraiška yra tokia:

$$u_k = e^{-\left(E(\rho+k)+A_0\right)\cdot\ln s}C(s). \tag{76}$$

Šioje lygybėje nežinoma yra funkcija C(s). Kad ją rastume (76) lygybę diferencijuojame pagal kintamąjį s ir gauname

$$u'_k = C'e^{-\left(E(\rho+k)+A_0\right)\cdot\ln s} - \frac{1}{s}C\left(E(\rho+k)+A_0\right)e^{-\left(E(\rho+k)+A_0\right)\cdot\ln s}. \tag{77}$$

(76) ir (77) įrašę į (72), gauname

$$\frac{dC}{ds}\cdot s = -e^{\ln s\cdot\left(E(\rho+k)+A_0\right)}\cdot(I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l). \tag{78}$$

Abi puses suintegravę, gauname

$$C = -\int\frac{1}{s}\cdot e^{\left(E(\rho+k)+A_0\right)\cdot\ln s}\cdot(I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\frac{\partial u_{k-1}}{\partial s}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l)\,ds. \tag{79}$$

(79) įrašę į (76) gauname rekurentinę formulę

$$u_k = -e^{\left(E(\rho+k)+A_0\right)\cdot\ln s}\cdot\int\frac{1}{s}\cdot e^{\left(E(\rho+k)+A_0\right)\cdot\ln s}\cdot(I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\frac{\partial u_{k-1}}{\partial s}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l)\,ds. \tag{80}$$

Gautasis sprendinys yra tik formalus. Kad jis virstų tikruoju sprendiniu reikia parodyti kad (59) eilutė, kurios koeficientai randami iš (80) formulės, konverguoja. Tai atliksime mažorantų metodu.

Tarkime, kad $A_k(y,z)$ - tojo mažorantė yra tokio pavidalo

$$A_k \langle\langle M^k\left(|y-y_0|\cdot|z-z_0|\right)^{-1},\tag{81}$$

kur M – kažkokia tai ketvirtos eilės kvadratinė matrica. $u_k(y, z, s)$ mažorantę pasirinksime tokią

$$u_k(y,z,s) << Q^k\left(|y-y_0|\cdot|z-z_0|\right)^{-\alpha(k)}\cdot|s|^{\beta(k)}\cdot I,\tag{82}$$

kur Q – kažkokia konstanta, I – ketvirtos eilės vektorius stulpelis, kurios visi elementai vienetai, $\alpha(k)$, $\beta(k)$ – kažkokie tai dydžiai, kuriuos nustatysime vėliau.

(81) ir (82) įrašę į (68) gauname $u_k(y, z, s)$ mažorantė yra

$$\begin{aligned}&u_k(y,z,s) << Q^k(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{-\alpha(k)}\cdot|s|^{\beta(k)}\cdot(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot[|\beta(k)|\cdot E+\\&+\frac{1}{Q}\left(|y-y_0|\cdot|z-z_0|\right)^{-\alpha(k)-\alpha(k-1)}|s|^{-\beta(k)+\beta(k-1)}E+\frac{1}{Q}|\alpha(k-1)|\cdot|s|^{\beta(k)+\beta(k-1)}\cdot(|y-y_0|^{\alpha(k)-\alpha(k-1)-1}\cdot|z-z_0|^{\alpha(k)-\alpha(k-1)}+\\&+|y-y_0|^{\alpha(k)-\alpha(k-1)}\cdot|z-z_0|^{\alpha(k)-\alpha(k-1)-1})L++\sum_{l=0}^{k-1}M^{k-l}Q^{l-k}\cdot(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{\alpha(k)-\alpha(l-1)}\cdot|s|^{\beta(l)+\beta(k)}]\cdot I\end{aligned}\tag{83}$$

kur L – ketvirtos eilės kvadratinė matrica, kurios visi elementai vienetai.

Nesiaurindami bendrumo parenkame $\alpha(k)=2k$, $\beta(k)=k$.. Tuomet (82) išraiška yra

$$u_k(y,z,s) << Q^k\left(|y-y_0|\cdot|z-z_0|\right)^{-2k}\cdot|s|^{k}\cdot I.\tag{84}$$

Įrašę $\alpha(k)=2k$, $\beta(k)=k$ į (83) išraišką gauname

$$\begin{aligned}&u_k(y,z,s) << Q^k(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{-2k}\cdot|s|^{k}\cdot(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot\left(k\cdot E+\frac{|k-1|}{Q}\cdot|y-y_0|\cdot|z-z_0|^2\right)\cdot|s|^{-2}+\\&\frac{|2k-2|}{Q}\cdot|s|^{-1}\left(|y-y_0|\cdot|z-z_0|^2+|y-y_0|^2\cdot|z-z_0|\right)\cdot L+\sum_{l=0}^{k-1}M^{k-l}Q^{l-k}\cdot\left(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{2k-2l-1}\cdot|s|^{2l-2k}\right)\cdot I\end{aligned}\tag{85}$$

Šiame paragrafe $s=x\ln x$. Kai $x\to0$, tai $s\to0$.

Vadinasi $|s|\langle\varepsilon$, $\frac{1}{|s|}\langle N$, $\left(\frac{1}{|s|}\right)^2\langle N^2$, kur $\varepsilon\to0$, o $N\to\infty$. Kadangi $|y-y_0|\langle\frac{r_1}{2}$; $|z-z_0|\langle\frac{r_2}{2}$, tai iš (85) gauname

$$\begin{aligned}&|u_k(y,z,s)|\langle Q^k\left(|y-y_0|\cdot|z-z_0|\right)^{-2k}\cdot|s|^{k}\cdot[(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot k+(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot\frac{|k-1|(r_1r_2)^2N^2}{16Q}+\\&(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot\frac{|2k-2|r_1r_2(r_1+r_2)N}{8Q}\cdot L+(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot r_1r_2(16QM^{-1}\varepsilon^2-(r_1r_2)^2L)^{-1}]\cdot I\end{aligned}\tag{86}$$

(86) lygybėje laužtiniuose skliaustuose ketvirtasis dėmuo, kai $k\to\infty$ Konstanta Q parinkime taip, kad (86) lygybės laužtiniuose skliautuose esančių pirmojo, antrojo ir trečiojo dėmenų suma nebūtų didesnė už 1. Tuomet (59) eilutės koeficientams galioja šis įvertis

$$|u_k(y,z,s)|\langle Q^k\left(|y-y_0|\cdot|z-z_0|\right)^{-2k}\cdot|s|^{k}\cdot I.\tag{87}$$

(87) įvertis garantuoja (38) eilutės konvergavimą, kai:

$$|x|\langle\frac{(r_1r_2)^2N^3}{16Q};|y-y_0|\langle\frac{r_1}{2};\ |z-z_0|\langle\frac{r_2}{2}.$$

Apibendrinant suformuluojame teoremą:

3 teorema. Jei matricinės diferencialinės lygties (3) sprendiniai, kuomet diferencialinės lygties koeficientų matricos A(x,y,z) dėstinio laipsnine eilute koeficientai priklauso nuo kintamųjų y ir z, čia ρ randame iš (71), u_k randamas iš (80) lygybės, k=0,1,2,..., o u_0 parenkamas laisvai toks, kad nepriklausytų nuo s ir priklausytų tik nuo kintamųjų y, z.

4. Tyrimo rezultatai

Išvados

1. Dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistema

$$\begin{cases} x^{p+1}\left(b\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x}+c\cdot\frac{\partial u_3}{\partial y}+a\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x}+b\cdot\frac{\partial u_2}{\partial y}+A\frac{\partial u_4}{\partial z}\right)+\sum_{j=1}^{4}a_{1j}(x,y,z)\cdot u_j=0 \\ x^{p+1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_4}{\partial y}-\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)+\sum_{j=1}^{4}a_{2j}(x,y,z)\cdot u_j=0 \\ x^{p+1}\left(-\frac{\partial u_4}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)+\sum_{j=1}^{4}a_{3j}(x,y,z)\cdot u_j=0 \\ x^{p+1}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}-\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)+\sum_{j=1}^{4}a_{4j}(x,y,z)\cdot u_j=0 \end{cases}$$

suvesta į matricinę dalinių išvestinių diferencialinę lygtį.

2. Matricinės diferencialinės lygties

$$x(E\frac{\partial u}{\partial x}+I_1\frac{\partial u}{\partial y}+I_2\frac{\partial u}{\partial z})+A(x,y,z)\cdot u(x,y,z)=0.$$

sprendiniai, kuomet diferencialinės lygties koeficientų matricos A(x,y,z) dėstinio laipsnine eilute koeficientai priklauso nuo kintamųjų y ir z, yra pavidalo

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(y,z,s)x^{k+\rho(y,z)},$$

čia ρ randamas iš lygties

$$(E\rho+A_0)\cdot u_0+\frac{\partial u_0}{\partial s}=0\ ,$$

u_k randami iš lygybės

$$u_k=-e^{s(E(\rho+k)+A_0)}\cdot\int e^{s(E(\rho+k)+A_0)}\cdot(s\left(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)u_{k-1}+I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l)\,ds$$

k=0,1,2,..., o u_0 parenkamas laisvai taip, kad nepriklausytų nuo kintamojo s ir priklausytų tik nuo kintamųjų y, z.

Gautoji laipsninė eilutė konverguoja , kada

$$|x|\langle\frac{(r_1r_2)^2\cdot\varepsilon}{16Q};|y-y_0|\langle\frac{r_1}{2};\ |z-z_0|\langle\frac{r_2}{2}.$$

3. Matricinės diferencialinės lygties

$$x(E\frac{\partial u}{\partial x}+I_1\frac{\partial u}{\partial y}+I_2\frac{\partial u}{\partial z})+A(x,y,z)\cdot u(x,y,z)=0$$

sprendiniai, kuomet diferencialinės lygties koeficientų matricos A(x) dėstinio laipsnine eilute koeficientai nepriklauso nuo kintamųjų y ir z, yra tokio pavidalo

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(y,z)x^{k+\rho},$$

čia ρ randamas iš lygties

$$\det(E\rho+A_0)=0,$$

u_k randami iš lygybės

$$u_k=-(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\cdot((I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z})+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-1}u_1)$$

k=0,1,2,..., o u_0 parenkamas laisvai.

Gautoji laipsninė eilutė konvertuoja , kada

$$|x|\langle\frac{(r_1r_2)^2\cdot\varepsilon}{16Q}\ ;|y-y_0|\langle\frac{r_1}{2}\ ;\ |z-z_0|\langle\frac{r_2}{2}.$$

4. Matricinės diferencialinės lygties

$$x(E\frac{\partial u}{\partial x}+I_1\frac{\partial u}{\partial y}+I_2\frac{\partial u}{\partial z})+A(x,y,z)\cdot u(x,y,z)=0$$

sprendiniai, kuomet diferencialinės lygties koeficientų matricos A(x) dėstinio laipsnine eilute koeficientai nepriklauso nuo kintamųjų y ir z, yra tokio pavidalo

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(y,z,s)\,x^{k+\rho},$$

čia ρ randamas iš lygties

$$\det(E\rho+A_0)=0,$$

u_k randami iš lygybės

$$u_k=-e^{(E(\rho+k)+A_0)\cdot\ln s}\cdot\int\frac{1}{s}\cdot e^{(E(\rho+k)+A_0)\cdot\ln s}\cdot(I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\frac{\partial u_{k-1}}{\partial s}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-1}u_1)ds$$

k=0,1,2,..., o u_0 parenkamas laisvai.

Gautoji laipsninė eilutė konvertuoja , kada

$$|x|\langle\frac{(r_1r_2)^2\cdot\varepsilon}{16Q};|y-y_0|\langle\frac{r_1}{2};\ |z-z_0|\langle\frac{r_2}{2}.$$

5. Darbe išdėstytas metodas gali būti sėkmingai taikomas analogiškų pirmos eilės dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemų sprendimui.

SANTRAUKA

Inga Čakaitė

Dalinių išvestinių sistemos su kvazireguliariuoju išsigimimu sprendimas

Analizinėje išsigimstančių dalinių išvestinių sistemų teorijoje svarbu rasti analizinius išsigimimo daugdarų taškų aplinkoje sprendinius.

Paprastosioms diferencialinėms lygtims su reguliariu išsigimimu dažnai taikomas apibendrintas laipsninių eilučių metodas. Minėtąjį metodą pritaikiau dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemai su eilės išsigimimu.

Darbe išdėstytas metodas gali būti sėkmingai taikomas analogiškų pirmos eilės dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sprendimui.

SUMMARY

The working out of partial derivations with the quaziregular malformation

The system of the four partial fluxions of the primary row of differential equations the row of which dwindles at the points of plane has been analysed.

The systems of the expressions of families of the detached solutions have been derived by converging degree rows at the environment of malformation rows through the technique of summation of degree rows.

The solutions at the malformation points are particular for having degree particularities. Still, the particularities depend on the other to variables, in conformity to which there are no system malformation weigh. The effect is not evident in the analytical theory of malformed vulgar differential equation.

Key words: partial derivation, quaziregular degenerate differential equation, formal series

Literatūra

1. Čakaitė I. (2000). Dalinių išvestinių su kvazireguliariu išsigimimu sprendimas. Diplominis darbas. Šiauliai.
2. Čakaitė I. ir Jurgaitis D. (2004). Jaunųjų mokslininkų darbai. Šiauliai
3. Čakaitė I., Čiučkytė R., Giedraitytė R. Jokubauskaitė N. (2004). Jaunųjų mokslininkų darbai. Šiauliai
4. Golokvosčius P. (2000). Diferencialinės lygtys. Vilnius.
5. Kačinskaitė R.(1994). Išsigimusios diferencialinės lygties sprendiniai. Diplominis darbas. Šiauliai.
6. Kvedaras B. (1999). Matricų teorija I dalis. Kaunas.
7. Mickevičius G., Pincevičius A., Rakauskas R.J, Eidukevičius R. (1999). Aukštoji matematika, Vilnius.
8. Šiaučiūnas D. (1999). Stipriai išsigimstančių pirmos eilės diferencialinių lygčių sistemų dalinėmis išvestinėmis sprendiniai. Šiauliai.
9. Вазов В. (1968). Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциалных уравнений. Москва.
10. Гедвилайте А., Каклаускас А.. Л. (1988). Об одной зллиптической системе первово порядка с полурегулярным вырождением. Liet. Matem. Rink.
11. Коддингтон Э. А. и Левинсон Н. (1958). Теория обыкновенных дифференциалъных уравненийю Иностранная литература.
12. Фроим.В.Х. (1972). Представление аналитических решений некоторых матричных уравнений с частными производными Дифференциалъные уравнения
13. Фуксю Б. А. (1963). Специалъные главы теории аналитияеских функций многих комплексных переменных.Москва.
14. Юргайтис Д. (1982). О решениях вырождающейся эллиптической системы первого порядка.
15. Юргайтис Д. (1982). Решение одной вырождающейся эллиптической системы первого порядка. Liet. Matem. Rink.
16. Юргайтис Д. (1988). Об одной зллиптической системе первово порядка с полурегулярным вырождением. Liet. Matem. Rink.
17. Янушаускас А. И.(1979). Аналитическая теория эллиптических уравнений. Глава 6. Новосибирс, Издателнъство „Наука“.
18. Янушаускас. А. И. (1990). Многомерные эллиптические системы с переменными коффициентами. Вилънюс. Мокслас.
19. http://www.mii.lt/index.php?siteaction=pages.browse&page=istorija_skerus.