VILNIAUS UNIVERSITETAS

RAIVYDAS ŠIMĖNAS

APIE DZETA FUNKCIJŲ a REIKŠMES

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2016

Disertacija rengta 2012–2016 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas – prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).
Mokslinis konsultantas – prof. habil. dr. Rimas Norvaiša (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Disertacija ginama Vilniaus universiteto Matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas – prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Nariai:

prof. dr. Jay Jorgenson (Niujorko miesto koledžas, fiziniai mokslai, matematika – 01P);
prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P);
prof. habil. dr. Rimas Norvaiša (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P);
prof. dr. Jonas Šiaulys (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Disertacija bus ginama viešame disertacijos gynimo tarybos posėdyje 2016 m. lapkričio mėn. 25 d., 16 val., 102 auditorijoje, VU Matematikos ir informatikos fakultete, Naugarduko g. 24, Vilniuje.
Adresas: VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225, Vilnius.
Disertacijos santrauka išsiuntinėta: 2016 m. spalio 20 d.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir VU interneto svetainėje adresu: www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius

VILNIUS UNIVERSITY

RAIVYDAS ŠIMĖNAS

ON a-VALUES OF ZETA-FUNCTIONS

Summary of doctoral dissertation
Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2016

Doctoral dissertation was written in 2012–2016 at Vilnius University.
Scientific supervisor – Prof. Dr. Ramūnas Garunkštis (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).
Scientific adviser – Prof. Habil. Dr. Rimas Norvaiša (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

The dissertation will be defended at the Council of Mathematical Sciences, Vilnius University:

Chairman – Prof. Habil. Dr. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

Members:

Prof. Dr. Jay Jorgenson (City College of New York, USA, Physical sciences, Mathematics – 01P);
Prof. Habil. Dr. Eugenijus Manstavičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P);
Prof. Habil. Dr. Rimas Norvaiša (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P);
Prof. Dr. Jonas Šiaulys (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the council at 16:00, November 25th, 2016, lecture room 102, Department of Mathematics and Informatics, Vilnius University, Naugarduko 24, Vilnius, Lithuania.
Address: Department of Mathematics and Informatics, Vilnius University, Naugarduko 24, LT-03225, Vilnius, Lithuania.
The summary of the dissertation was distributed on October 20th, 2016.
The dissertation is available at the Vilnius University library and on the Vilnius University website: www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius

Turinys

1 Įžanga 1

2 Disertacijos tematika 3

3 Metodika 4

4 Disertacijos aktualumas bei struktūra 5

5 Rezultatai 6

6 Publikacijos, konferencijos, mokslinės išvykos 12

7 Išvados 14

8 Summary 15

9 Žinios apie autorių 16

*

1 Įžanga

Mus dominantis objektas šioje disertacijoje yra tam tikrų dzeta funkcijų a reikšmių pasiskirstymas. Tarkime, kad $s = \sigma + it$ yra kompleksinis skaičius, o σ ir t yra realieji. Funkcijos, kurias nagrinėjame, yra kompleksinės, t. y. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, kur $\mathbb{C}$ yra kompleksinių skaičių aibė. Funkcijos f a reikšmės, kur a kompleksinis, yra tokie kompleksiniai skaičiai s, kad galioja $f(s) = a$. Kitaip tariant, funkcijos f a reikšmės yra skaičiaus a pirmvaizdžiai. Analizinėje skaičių teorijoje ypač aktualu yra tirti atskirą atvejį, kai $a = 0$. Tokiu būdu mes kalbame apie funkcijų nulius.

Viena svarbiausių funkcijų analizinėje skaičių teorijoje yra *Riemann'o dzeta funkcija* ζ. Ji apibrėžiama Dirichlet eilute

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Ši eilutė konverguoja absoliučiai kompleksinėje pusplokštumėje $\sigma > 1$, turi paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1 bei meromorfiškai pratęsiama į likusią kompleksinės plokštumos dalį.

Svarbi Riemann'o dzeta funkcijos savybė—jos ryšys su *pirminių skaičių teorema*. Tarkime, p yra pirminis skaičius. Apibrėžkime funkciją $\pi(x)$ suma

$$\pi(x) := \sum_{p \le x} 1.$$

Kitaip sakant, funkcija $\pi(x)$ parodo, kiek iš viso yra pirminių skaičių iki x imtinai, kur x yra realusis skaičius. Pirminių skaičių teorema teigia

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}s}{\log s} + R(x).$$

Čia $R(x)$ yra liekamasis narys. Iki šiol neįrodyta *Riemann'o hipotezė* teigia, kad visi netrivialieji Riemann'o dzeta funkcijos nuliai yra išsidėstę and kritinės tiesės $\sigma = 1/2$. Jei Riemann'o hipotezė yra tesinga, tai liekamasis narys $R(x)$ įgyja mažiausią reikšmę

$$R(x) = O(\sqrt{x} \log x).$$

Vertėtų paminėti, kad trivialieji Riemann'o dzeta funkcijos nuliai yra išsidėstę ties lyginiais neigiamais sveikaisiais skaičiais. Šis faktas išplaukia iš funkcinės lygties, kurią Riemann'o dzeta funkcija tenkina

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

Čia Γ yra *Euler'io gama funkcija*, kuri apibendrina faktorialą

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \, \mathrm{d}x.$$

Dar viena svarbi Riemann'o dzeta funkcijos savybė yra *Euler'io sandauga*

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Dešinėja šios lygybės pusėje p perbėga visus pirminius skaičius. Šias trys Riemann'o dzeta funkcijos savybes, t. y. išraišką Dirichlet eilute, funkcinę lygtį ir Euler'io sandaugą, dažnai tenkina ir kitos dzeta funkcijos.

2 Disertacijos tematika

Mes savo disertacijoje nagrinėjame Selberg'o dzeta funkcijas, susietas su kompaktiniais bei baigtinio tūrio Riemann'o paviršiais. Mus domina, kaip yra pasiskirsčiusios šių funkcijų a reikšmės. Akivaizdu, kad su fiksuotu a, šių funkcijų a reikšmės yra taškai kompleksinėje plokštumoje. Taigi yra prasmė kalbėti apie horizontalų ir vertikalų šių taškų pasiskirstymą. Horizontalus pasiskirstymas atitinka šitų funkcijų a reikšmių realiųjų dalių, o vertikalus—menamųjų dalių išsidėstymą. Mūsų pagrindiniai rezultatai rodo, kad dauguma Selberg'o dzeta funkcijų realiųjų dalių yra susispietusios apie 1/2, o menamosios dalys yra tolygiai pasiskirsčiusios moduliu 1.

Disertacijos pabaigoje mes tyrinėjame plačią dzeta funkcijų klasę, vadinamą *išplėstine Selbeg'o klase*. Mes parodome, kad tiek funkcijos, priklausančios šiai klasei, tiek jų išvestinės turi apytikriai tokį pat netrivialių nulių skaičių į kairę nuo kritinės tiesės $\sigma = 1/2$.

3 Metodika

Disertacijoje remiamasi standartiniais rezultatais iš kompleksinės analizės. Naudajamės reziduumų teorema. Ši teorema susieja funkcijos integralą uždaru kontūru su funkcjos reziduumų suma kontūro viduje. Skaičiuojant funkcijos a reikšmių skaičių tam tikroje srityje praverčia Littlewood'o teorema. Taip pat naudojama Hadamard'o faktorizacijos teorema bei Jensen'o teorema.

4 Disertacijos aktualumas bei struktūra

Šioje disertacijoje pristatomi rezultatai remiasi originaliomis mokslinėmis publikacijomis. Jos praplečia kai kuriuos klasikinius rezultatus, ypač pasiektus tyrinėjant Riemann'o dzeta funkciją. Disertacijos pradžioje pateikiami svarbūs klasikiniai pasiekimai iš analizinės skaičių teorijos, būtent Speiser'io rezultatas apie Riemann'o dzeta funkcijos bei jos išvestinių nulių sąryšį į kairę nuo kritinės tiesės $\sigma = 1/2$, taip pat Lindelöf'o hipotezė apie Riemann'o dzeta funkcijos augimą ant kritinės tiesės $\sigma = 1/2$ bei jos ekvivalentus, Selberg'o pėdsako formulė apie tam tikro operatoriaus tikrines reikšmes, Weyl'o kriterijus apie sekos tolygų konvergavimą moduliu 1, Littlewood'o lema ir Jensen'o teorema.

Tolesniuose disertacijos skyriuose pateikiami originalūs rezultatai. Pirma, tyrinėjame Selberg'o dzeta funkcijas, susietas su kompaktiniais Riemann'o paviršiais. Parodome, kad dauguma tokių funkcijų a reikšmių yra susispietusios aplink kritinę tiesę $\sigma = 1/2$. Paskui nagrinėjame Selberg'o dzeta funkciją, susietą su baigtinio tūrio Riemann'o paviršiais, o būtent tokių funkcijų a reikšmių realiųjų dalių pasiskirstymą. Įrodome, kad jos yra susispietusios aplink $1/2$, t.y. pačios a reikšmės yra susispietusios aplink kritinę tiesę. Vėliau parodome, kad Selberg'o dzeta funkcijų, susietų su kompaktiniais Riemann'o paviršiais, menamosios dalys yra tolygiai pasiskirsčiusios moduliu 1. Galiausiai pereiname prie Speiser'io kriterijaus. Pats Speiser'is nagrinėjo tik Riemann'o dzeta funkcijos atvejį. Mes praplečiame jo rezultatą visai išplėstinei Selberg'o klasei, įrodydami, kad funkcijos, priklausančios šiai klasei bei jų išvestinės turi apytikriai tokį pat nulių skaičių į kairę nuo kritinės tiesės $\sigma = 1/2$.

5 Rezultatai

Panagrinėkime Selberg'o dzeta funkcijas. Šios funkcijos siejamos su *Riemann'o paviršiais.* Apibrėžkime juos. Riemann'o paviršius X yra vienmatis kompleksinis manifoldas. Tai reiškia, kad lokaliai kiekviename Riemann'o paviršiaus X taške turime struktūrą, analogišką kompleksinės plokštumos taško aplinkai. Tačiau globaliai Riemann'o paviršius nebūtinai elgiasi kaip kompleksinė plokštuma. Pavyzdžiui, sfera ar toras yra Riemann'o paviršiai.

Iš topologijos mes turime *paprasto jungumo* sąvoką. Topologinė erdvė yra paprastai jungi tada ir tik tada, kai kiekvienas takas tarp dviejų fiksuotų taškų gali būti tolydžiai deformuotas į bet kokį kitą tokį taką neišeinant už erdvės ribų bei paliekant tuos pačius tako galus. *Uniformizacijos teorema* teigia, kad paprastai jungūs Riemann'o paviršiai yra konformaliai ekvivalentūs vienam iš trijų Riemann'o paviršių: vienetiniam atviram diskui, kompleksinei plokštumai ar Riemann'o sferai. Pastaroji gali būti įsivaizduojama kaip kompleksinė plokštuma su prijungtu tašku ∞. Atitinkamai, Riemann'o paviršiai klasifikuojami į hiperbolinius, parabolinius bei elipsinius.

Mus dominantys Riemann'o paviršiai yra kompaktiniai, kurių eilė yra didesnė arba lygi 2 bei baigtinio tūrio Riemann'o paviršiai. Kompaktinio Riemann'o paviršiaus eilė gali būti suvokiama kaip skylių skaičius paviršiuje. Pavyzdžiui, Riemann'o sferos eilė yra 0, toro—1 ir pan. Tokių Riemann'o paviršių, t. y. kompaktinių su eile daugiau arba lygu 2, tipas yra hiperboliniai paviršiai. Vienas būdas juos įsivaizduoti yra kaip Fuchs'o grupės $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ veikimą į viršutinę kompleksinę pusplokšumę $H = \{\sigma + it : t > 0\}$. Čia $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ yra projektyvinė specialioji tiesinė grupė, grupės $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ tam tikras pogrupis. Grupę $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sudaro 2×2 matricos su realiaisiais koeficientais bei determinantu 1. Grupė $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ yra gaunama prafaktorizavus $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ pagal aibę $\{I, -I\}$, kur I yra vienetinė matrica, t.y. šios faktorgrupės ekvivalentumo klasės yra sudarytos iš dviejų elemetų: $A \in SL(2,\mathbb{R})$ bei $-A$. Apibrėžkime matricos A veikimą į viršutinę kompleksinę pusplokštumę

$$A(s) = \frac{a_{11}s + a_{12}}{a_{21}s + a_{22}},$$

kur a_{11}, a_{12}, a_{21} ir a_{22} yra matricos A koeficientai bei $s \in H$. Fuchs'o grupės Γ yra diskretūs $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ pogrupiai. Padalinkime viršutinę kompleksinę pusplokšumę $\mathbb{H}$ į ekvivalentumo klases, kur x ekvivalentu y tada ir tik tada, jei egzistuoja tokia $A \in \Gamma$, kad galiotų $A(x) = y$. Paviršius, gautas pasirinkus lygiai po vieną atstovą iš kiekvienos ekvivalentumo klasės, ir yra norimas Riemann'o paviršius.

Baigtinio tūrio Riemann'o paviršiaus pavyzdys—Riemann'o paviršius, susietas su moduline grupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Jis atsiranda iš modulinės grupės veikimo į viršutinę kompleksinę pusplokšumę $\mathbb{H}$. Modulinių formų teorijoje įrodoma, kad šios grupės generuota *fundamentalioji sritis*, t. y. sritis, susidedanti paėmus lygiai po vieną elementą iš kiekvienos $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ ekvivalentumo klasės, yra vertikalus "strypas." Pavadinkime jį $\mathcal{F}$. Tada $s = \sigma + it \in \mathcal{F}$ tada ir tik tada, jei $|s| > 1$, $-1/2 \leq \sigma < 1/2$ bei dalis vienetinio apskritimo lanko $|s| = 1$ su $-1/2 \leq \sigma \leq 0$.

Selberg'o dzeta funkcijos Z, susietos su Riemann'o paviršiais, yra apibrėžiamos Euler'io sandauga

$$Z(s) := \prod_{\{P_0\}} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N(P_0)^{s+k}}\right).$$

Šioje lygybėje P_0 yra pirminės geodezės, o $N(P_0)$ yra jų normos. Pirminės geodezės gali būti įsivaizduojamos kaip pirminiai skaičiai natūraliųjų skaičių aibėje. Ši lygybė galioja, kai $\sigma > 1$. Į likusią kompleksinės plokštumos dalį ji yra gaunama iš taip vadinamos *Selberg'o pėdsako* formulės, su kuria skaitytojas gali susipažinti disertacijoje. Selberg'o dzeta funkcijos taip pat tenkina funkcinę lygtį. Selberg'o dzeta funkcijų, susietų su baigtinio tūrio Riemann'o paviršiais, funkcinė lygtis yra gerokai sudėtingesnė negu kompaktiniu atveju.

Mums taip pat prireiks *tolygaus pasiskirstymo moduliu* 1 sąvokos. Tarkime, turime realių skaičių seką (a_n). Tarkime, x yra realus skaičius. Pažymėkime $[x]$ didžiausią sveikąjį skaičių, kad galiotų $[x] \leq x$. Skaičių $[x]$ vadiname skačiaus x *sveikąja dalimi.* Apibrėžkime $\{x\} := x - [x]$. Skaičių $\{x\}$ pavadinkime skaičiaus x *trupmenine dalimi.* Akivaizdu, kad $\{x\} \in [0, 1)$. Tarkime, kad funkcija $A(E; N; (x_n))$ parodo, kiek sekos (x_n) narių patenka į aibę E, čia $1 \leq n \leq N$. Seka $\omega = (x_n)$ yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1 tada ir tik tada, jei

$$\frac{A([a,b); N; \omega_1)}{n} \to b - a, \;\; N \to \infty.$$

Čia ω_1 yra sekos ω narių trupmeninių dalių seka.

Paskutinėje disertacijos dalyje tyrinėjame išplėstinę Selberg'o klasę $S^{\#}$. Jai priklausančios funkcijos F tenkina sąlygas

- F galima išreikšti Dirichlet eilute
$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$
kuri absoliučiai koverguoja pusplokštumėje $\sigma > 1$.

- Egzistuoja toks $k \in \mathbb{N}$, kad $(s-1)^k F$ yra sveikoji funkcija visoje kompleksinėje plokštumoje.

- Funkcija F tenkina funkcinę lygtį
$$\Phi(s) = \omega\overline{\Phi(1-\overline{s})}. \tag{1}$$
Čia
$$\Phi(s) := F(s)Q^s \prod_{j=1}^{r} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j),$$
kur $Q > 0$, $\lambda_j > 0$, $\Re(\mu_j) \geq 0$ ir $|\omega| = 1$.

Jei funkcinę lygtį (1) duotai funkcijai $F \in S^{\#}$ galima parinkti nebūtinai vieninteliu būdu, skaičius $d_F := \sum_{j=1}^{r} \lambda_j$ yra invariantas bei natūralus.

Pagrindiniai disertacijos rezultatai yra šie

- Tarkime, $N(a,T)$ yra netrivialių Selberg'o dzeta funkcijos Z, susietos su kompaktiniu eilės $g \geq 2$ Riemann'o paviršiumi, a reikšmių skaičius srityje $0 < \tau < t < T$. Čia τ yra toks, kad Z neturi netrivialių a reikšmių srityje $\tau < t$. Jei $a \neq 1$, turime
$$N(a,T) = (g-1)T^2 + o(T).$$
Jei $a = 1$, turime
$$N(1,T) = (g-1)T^2 - \frac{T}{2\pi}\log N(P_{00}) + o(T).$$
Čia $N(P_{00})$ yra tam tikro pirminio elemento iš atitinkamos Fuchs'o grupės Γ norma.

- Tarkime, $N^{-}(a,\delta,T)$ yra netrivialių Selberg'o dzeta funkcijos Z, susietos su kompaktiniu eilės $g \geq 2$ Riemann'o paviršiumi, a reikšmių skaičius srityje $\tau < t < T$, $\sigma < 1/2 - \delta$. Atitinkamai, $N^{+}(a,\delta,T)$ yra Z netrivialių a reikšmių skaičius srityje $\tau < t < T$, $\sigma > 1/2 + \delta$, o $N_0(a,\delta,T)$ yra netrivialių a reikšmių skaičius srityje $\tau < t < T$, $1/2 - \delta < \sigma < 1/2 + \delta$. Čia

$$\delta := \frac{(\log\log T)^2}{\log T}.$$

  Tada

$$N^{-}(a,\delta,T) + N^{+}(a,\delta,T) \ll \frac{T^2}{\log\log T}$$

  ir

$$N_0(a,\delta,T) = (g-1)T^2 + O\left(\frac{T^2}{\log\log T}\right).$$

- Tarkime, Z yra Selberg'o dzeta funkcija, susieta su baigtinio tūrio Riemann'o paviršiumi. Tarkime, $N(a,T)$ yra netrivialių šios funkcijos a reikšmių skaičius, kurių menamosios dalys priklauso intervalui $[0,T]$ ir $a \neq 1$. Tada galioja

$$N(a,T) = \frac{\mathrm{vol}(M)}{4\pi}T^2 - \frac{n_1}{\pi}T\log T + \frac{n_1 - \log \mathfrak{g}_1 - n_1\log 2}{\pi}T + o(T).$$

  Jei $a = 1$, tada galioja

$$\begin{aligned} N(1,T) =& \frac{\mathrm{vol}(M)}{4\pi}T^2 - \frac{n_1}{\pi}T\log T + \frac{n_1 - \log \mathfrak{g}_1 - n_1\log 2}{\pi}T \\ & - \frac{T}{2\pi}\log N(P_{00}) + o(T). \end{aligned}$$

  Čia n_1 yra Riemann'o paviršiaus parabolinių taškų skaičius. Konstantos $\mathfrak{g}_1$ apibrėžimas sudėtingas. Skatytojas turėtų žiūrėti disertacijos 4.1 skyrelį.

- Tarkime, $N^{-}(a,\delta,T)$ yra netrivialių Selberg'o dzeta funkcijos Z, susietos su baigtinio tūrio Riemann'o paviršiumi, a reikšmių skaičius srityje $\tau < t < T$, $\sigma < 1/2 - \delta$. Atitinkamai, $N^{+}(a,\delta,T)$ yra Z netrivialių a reikšmių skaičius srityje $\tau < t < T$, $\sigma > 1/2 + \delta$, o $N_0(a,\delta,T)$ yra netrivialių a reikšmių skaičius srityje $\tau < t < T$, $1/2 - \delta < \sigma < 1/2 + \delta$.

Čia

$$\delta := \frac{(\log\log T)^2}{\log T}.$$

Tada

$$N^-(a,\delta,T) + N^+(a,\delta,T) \ll \frac{T^2}{\log\log T}$$

ir

$$N_0(a,\delta,T) = \frac{\mathrm{vol}(M)}{4\pi}T^2 + O\left(\frac{T^2}{\log\log T}\right).$$

- Tarkime, $\rho_a = \beta_a + i\gamma_a$ yra Selberg'o dzeta funkcijos, susietos su baigtiniu Riemann'o paviršiumi, a reikšmė. Netrivialioms $0 < \gamma_a \leq T$ ir $a \neq 1$, mes turime

$$\sum_{0<\gamma_a\leq T}\left(\frac{1}{2}-\beta_a\right) = \frac{n_1}{4\pi}T\log T - \frac{T}{2\pi}\left(\frac{n_1}{2}+\frac{n_1}{2}\log\pi + \log|d(1)| - \log\mathfrak{g}_1\right)$$
$$-\frac{T}{2\pi}\log|1-a| + o(T).$$

Jei atitinkamai $a = 1$, tada

$$\sum_{0<\gamma_a\leq T}\left(\frac{1}{2}-\beta_a\right) = \frac{n_1}{4\pi}T\log T - \frac{T}{2\pi}\left(\frac{n_1}{2}+\frac{n_1}{2}\log\pi + \log|d(1)| - \log\mathfrak{g}_1\right)$$
$$-\frac{T}{2\pi}\log m_0 + \frac{T}{4\pi}\log N(P_{00}) + o(T).$$

Dėl konstantų d_1 ir $\mathfrak{g}_1$, skaitytojas turėtų žiūrėti disertacijos 4.1 skyrelį. Konstantos m_0 ir $N(P_{00})$ yra kaip aukščiau.

- Selberg'o dzeta funkcijų, susietų su kompaktiniais Riemann'o paviršiais, netrivialių a reikšmių menamosios dalys yra tolygiai pasiskirsčiusios moduliu 1.

- Tarkime, F priklauso išplėstinei Selberg'o klasei, jos laipsnis yra griežtai didesnis už 0 bei $\sigma_0 > \sigma_F$. Čia $\sigma_F \geq 0$ yra mažiausias skaičius toks, kad F neturi netrivialių nulių srityje $\sigma > \sigma_F$. Tarkime τ yra toks , kad F' neturi nulių srityje $t > \tau$ ir $\sigma < 1 - \sigma_F$. Tarkime, $N(T)$ ir $N_1(T)$ atitinkamai yra F ir F' nulių skaičiai srityje $\tau < t < T$, $\sigma < 1/2$. Tada

$$N(T) = N_1(T) + O(\log T).$$

Jei taip pat galioja $N(T) < T/(2\sigma_0 - 1) + O(1)$, tai egzistuoja monotoninė seka (T_j), $T_j \to \infty$, $j \to \infty$, su kuria turime

$$N(T_j) - N(T_1) = N_1(T_j) - N_1(T_1).$$

- Tarkime, F yra nelygi konstantai ir priklausanti išplėstinei Selberg'o klasei $S^{\#}$ funkcija, kurios laipsnis yra 0. Tarkime, $N(T)$ ir $N_1(T)$ yra atitinkamai funkcijų F ir F' nulių skaičius srityje $0 < t < T$, $\sigma < 1/2$. Tada galioja
$$N(T) = N_1(T) + O(1).$$

6 Publikacijos, konferencijos, mokslinės išvykos

Disertacijoje pasiekti rezultatai buvo publikuoti šiuose straipsniuose:

- On the Speiser equivalent for the Riemann hypothesis. *European Journal of Mathematics*, 1(2):337-350, 2015 (su Ramūnu Garunkščiu).
- The a-points of the Selberg zeta-function are distributed uniformly modulo one. *Illinois J. Math.*, 58(1):207-218, 2014 (su Ramūnu Garunkščiu ir Jörn'u Steuding'u).
- The a-values of the Selberg zeta-Function. *Lith. Math. J.*, 52(2):145-154, April 2012 (su Ramūnu Garunkščiu).

Dar nepaskelbtas straipsnis:

- On the distribution of the a-values of the Selberg zeta-function associated to finite volume Riemann surfaces (su Ramūnu Garunkščiu).

Sudalyvauta šiose konferencijose bei mokslinėse išvykose:

- On the distribution of the a-values of the Selberg zeta-function, *5th International Conference on Uniform Distribution Theory*, Vakarų Vengrijos universitetas, Sopronas, Vengrija, 2016 m. liepos mėn. 5–-8 d.
- On the distribution of the a-values of the Selberg zeta-function, *57-oji Lietuvos Matematikų Draugijos konferencija*, Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Vilnius, Lietuva, 2016 m. birželio mėn. 20–-21 d.
- Tyrėjų stovykla *L-Functions and Automorphic Forms*, Heidelbergo universitetas, Heidelbergas, Vokietija, 2016 m. vasario mėn. 17–-26 d.
- Tyrėjų stovykla *Analytic Number Theory and Diophantine Geometry*, Hanoverio universitetas, Hanoveris, Vokietija, 2015 m. rugsėjo mėn. 7–-11 d.
- Tyrėjų stovykla *Galois Theory and Number Theory*, Konstancos universitetas, Konstanca, Vokietija, 2015 m. liepos mėn. 18–24 d.

- On the zeros of the extended Selberg class functions and of their derivatives *56-oji Lietuvos Matematikų Draugijos konferencija*, Kauno technologijos universitetas, Kaunas, Lietuva, 2015 m. birželio mėn. 16–17 d.

- Stažuotė Viurcburgo universitete, Viurcburgas, Vokietija, 2014 m. lapkričio mėn. 24–30 d.

- On the zeros of the extended Selberg class functions and of their derivatives *27th Journées Arithmétiques*, Vilniaus universitetas, Vilnius, Lietuva, 2011 m. birželio mėn. 27 d.–liepos mėn. 1 d.

7 Išvados

Disertacijoje gautos išvados:

- Selbeg'o dzeta funkcijų, susietų su kompaktiniais Riemann'o paviršiais, dauguma a reikšmių yra susispietusios aplink kritinę tiesę $\sigma = 1/2$.
- Selberg'o dzeta funkcijų, susietų su moduline grupe, dauguma a reikšmių yra susispietusios aplink kritinę tiesę, t.y. jų realiosios dalys yra arti 1/2.
- Selberg'o dzeta funkcijų, susietų su kompaktiniais Riemann'o paviršiais, menamosios dalys yra tolygiai pasiskirsčiusios moduliu 1.
- Funkcijų, priklausančių išplėstinei Selberg'o klasei, bei jų išvestinių nulių skaičius į kairę nuo kritinės tiesės $\sigma = 1/2$ beveik sutampa.

8 Summary

In this dissertation, we study certain topics in Analytic Number Theory. In particular, we investigate Selberg zeta functions and the extended Selberg class. Selberg zeta functions arise when we study the action of some Fuchsian group on the upper complex half-plane. That is, such functions are attached to Riemann surfaces. The functions we study are attached to compact and finite volume Riemann surfaces. We are interested in the distribution of the a-values of Selberg zeta-functions. The results we obtain are that the a-values of the Selberg zeta-functions attached to compact Riemann surfaces are clustered around the critical line $\sigma = 1/2$. Then we proceed to the horizontal distribution of the a-values of the Selberg zeta-functions attached to finite volume Riemann surfaces. We get that the real parts of the a-values of these functions are clustered around the critical axis. Finally, we analyze the extended Selberg class. Our result is that the functions belonging to this class and their respective derivatives have approximately the same number of zeros left of the critical line $\sigma = 1/2$.

9 Žinios apie autorių

Išsilavinimas

2012 Vilniaus universitetas, matematikos magistras, *Magna Cum Laude*

2010 Vilniaus universitetas, matematikos bakalauras, *Cum Laude*

2004 Kreitono universitetas, informatikos ir filosofijos bakalauras, *Summa Cum Laude*

2000 Vilniaus jėzuitų gimnazija, su pagyrimu

Darbo patirtis

2012– Vilniaus universiteto, Matematikos ir informatikos instituto specialistas

2014– Vilniaus universiteto, Matematikos ir informatikos fakulteto asistentas