VILNIAUS UNIVERSITETAS

AIVARAS NOVIKAS

SUDĖTINIAI SKAIČIAI SVEIKŲJŲ SKAIČIŲ SEKOSE

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2012 metai

Disertacija rengta 2008–2012 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas:

prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Konsultantas:

prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas:

prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Nariai:

prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. dr. Gediminas Stepanauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

doc. dr. Virginija Garbaliauskienė (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

doc. dr. Darius Šiaučiūnas (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Oponentai:

prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

doc. dr. Renata Macaitienė (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2012 m. spalio mėn. 5 d. 15 val. 45 min., VU Nuotolinių studijų centre, Šaltinių 1A.

Adresas: Naugarduko 24, 03225 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2012 m. liepos mėn.

Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

AIVARAS NOVIKAS

COMPOSITE NUMBERS IN THE SEQUENCES OF INTEGERS

Summary of doctoral dissertation

Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2012

The scientific work was carried out in 2008–2012 at Vilnius University.

Scientific supervisor:

prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)

Scientific adviser:

prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)

The council:

Chairman:

prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)

Members:

prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)

prof. dr. Gediminas Stepanauskas (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)

doc. dr. Virginija Garbaliauskienė (Šiauliai University, physical sciences, mathematics – 01P)

doc. dr. Darius Šiaučiūnas (Šiauliai University, physical sciences, mathematics – 01P)

Opponents:

prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01P)

doc. dr. Renata Macaitienė (Šiauliai University, physical sciences, mathematics – 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on October 5, 2012, in VU Nuotolinių studijų centras, Šaltinių 1A, at 3:45 pm.
Address: Naugarduko 24, 03225 Vilnius, Lithuania.
The summary of the dissertation was distributed in July, 2012.
The dissertation is available at the library of Vilnius University.

Disertacinio darbo aprašymas

Mokslinė problema ir tyrimo objektas

Tyrimo objektas yra tam tikros sveikųjų skaičių sekos (racionaliojo skaičiaus laipsnių sveikųjų dalių seka, antros eilės tiesinė rekurentinė seka). Pagrindinė nagrinėjama mokslinė problema yra tų sekų narių priklausymas sudėtinių skaičių aibei.

Tikslai ir uždaviniai

Pagrindinis disertacijos tikslas yra ištirti sudėtinių skaičių egzistavimą ir savybes tam tikrose sveikųjų skaičių sekose bei sukonstruoti specialaus pavidalo sekas, sudarytas vien iš sudėtinių skaičių. Bandoma atsakyti į šiuos klausimus:

- Kuriems racionaliesiems skaičiams $a > 1$ ir realiesiems skaičiams $\xi > 0$ sveikųjų dalių sekoje
$$[\xi a^n], n = 1, 2, \ldots,$$
yra be galo daug sudėtinių skaičių?
- Jei sekoje
$$[\xi a^n], n = 1, 2, \ldots,$$
yra be galo daug sudėtinių skaičių, tai ar įmanoma nurodyti baigtinę pirminių skaičių, kurių bent vienas dalija be galo daug tų sudėtinių skaičių, aibę?
- Kurioms „paslinktoms" sekoms
$$[\xi a^n + \nu], n = 1, 2, \ldots,$$
čia $\nu \in \mathbb{R}$, galima atsakyti į pirmuosius du klausimus? Ar galima rasti be galo daug tokių skaičiaus ν reikšmių, kad sekoje būtų be galo daug sudėtinių skaičių fiksuotam racionaliajam skaičiui a, nepriklausomai nuo skaičiaus $\xi > 0$ parinkimo?
- Kada rekurentinei lygčiai
$$x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1},$$
čia $a, b \in \mathbb{Z}$, egzistuoja ją tenkinanti antros eilės tiesinė rekurentinė iš sveikųjų skaičių sudaryta seka, kurios pirmieji du nariai yra teigiami ir tarpusavyje pirminiai, o visų narių moduliai yra sudėtiniai skaičiai?

- Tegu t yra natūralusis skaičius. Kokie skaičiai priklauso (tik nuo skaičiaus t priklausančiai) aibei $E(t) = \{n \in \mathbb{N} : n = tM - d\}$, kurios elementų išraiškoje esantis natūralusis skaičius M dalijasi iš dviejų natūraliųjų skaičių a ir b sandaugos, o natūralusis skaičius d dalija tų pačių skaičių sumą $a + b$?

Aktualumas

Skaičių teorijoje pirminio ir sudėtinio skaičiaus sąvokos atlieka itin reikšmingą vaidmenį. Tai buvo suvokta dar senovėje, o su laiku šios reikšmės supratimas tik augo, naujaisiais laikais skaičių teorijai besivystant į atskirą plačią matematikos šaką. Pirminių ir sudėtinių skaičių savybės buvo tirtos sveikųjų skaičių dalumo kontekste (pvz., Euklido ir daug vėliau Fermat, Euler'io bei kitų).

Tuo pačiu metu matematikai ėmė domėtis atskiromis sveikųjų skaičių klasėmis ir bandė nustatyti pirminių bei sudėtinių skaičių egzistavimą jose. Fermat hipotezė, kad visi pavidalo $2^{2^n} + 1$ skaičiai yra pirminiai, buvo netrukus Euler'io paneigta. Tačiau daug šios rūšies klausimų yra labai sudėtingi ir net liko neatsakyti iki šių dienų dėl "netaisyklingo" pirminių bei sudėtinių skaičių išsibarstymo natūraliųjų skaičių sekoje (pvz., keturi Landau uždaviniai). Tokie uždaviniai užima reikšmingą vietą šiuolaikinėje skaičių teorijoje.

Disertacijoje ieškome sudėtinių skaičių fiksuoto skaičiaus laipsnių sveikųjų dalių sekoje. Nors klausimai, susiję su šiomis sekomis bei su atitinkamomis trupmeninių dalių sekomis, buvo nagrinėti daugelio mokslininkų, kai kurie reikšmingi uždaviniai neišspręsti: pvz., trupmeninių dalių pasiskirstymas net tais atvejais, kurie atrodo paprasčiausi, ir be galo daug pirminių narių egzistavimas sveikųjų dalių sekose. Trupmeninių dalių pasiskirstymo klausimas iš vienos pusės susijęs su sveikųjų dalių sekų savybėmis, o iš kitos pusės su tokiomis įžymiomis temomis kaip (skaičiaus 3/2 laipsnių atveju) Waring'o uždavinys.

(Konkrečių disertacijos temų aktualumas detaliau aptartas skyriuje „Problemos struktūra ir svarbiausi rezultatai".)

Tyrimų metodika

Disertacijoje taikomi įvairūs metodai. Mes pageriname Forman'o ir Shapiro pasiekimus apie sudėtinius skaičius racionaliųjų skaičių laipsnių sveikųjų dalių sekose ne vien sutrumpindami jų įrodymus, bet ir įrodydami eilę naujų rezultatų, pagrįstų ne tik racionaliųjų skaičių laipsnių sveikųjų dalių, bet ir trupmeninių dalių elgesio bei tarpusavio sąryšių tyrimu, tokiu būdu išvengdami pradinės prieštaros metodo prielaidos. Tai suteikia galimybę įrodyti sudėtingiausią Teoremos 1.1 atvejį, atrastas sekos narių dalumo savybes panaudojant kombinatorinėms tam tikros operacijų sekos, interpretuojamos kaip formali simbolių seka, savybėms nustatyti. Tiriant tiesines rekurentines sekas, panaudojama Erdős'o įvesta (visus sveikuosius skaičius) dengiančios liekanų sistemos (covering system) koncepcija. Taip pat disertacijoje naudojamos tokios klasikinės skaičių teorijos temos kaip Kinų teorema apie liekanas, Dirichlė teorema apie aritmetines progresijas ir Jakobio simbolis.

(Detaliau tyrimų metodai aptarta skyriuje „Problemos struktūra ir svarbiausi rezultatai".)

Naujumas ir praktinė vertė

Disertacijoje pateikiami originalūs tyrimai bei (teorinio pobūdžio) rezultatai. Pagrindiniai rezultatai paskelbti recenzuojamuose užsienio žurnaluose (žr. skyrių „Publikacijų sąrašas") ir pristatyti konferencijose (žr. skyrių „Aprobacija").

Darbo struktūra

Disertacija parašyta anglų kalba. Ją sudaro įvadas, trys skyriai, išvados ir literatūros sąrašas. Disertacijos apimtis yra 67 puslapiai.

Problemos struktūra ir svarbiausi rezultatai

Pradėkime nuo kelių esminių apibrėžimų. Realiojo skaičiaus x sveikąja dalimi vadinamas didžiausias sveikasis skaičius, neviršijantis x. Ji žymima $[x]$. Skaičius $\{x\} = x - [x]$ vadinamas skaičiaus x trupmenine dalimi. Pirminiu skaičiumi vadinamas natūralusis skaičius, turintis lygiai du natūraliuosius daliklius, o sudėtiniu skaičiumi – turintis bent tris natūraliuosius daliklius (t.y., nepirminis ir nelygus 1). Pažymėkime $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ atitinkamai sveikųjų, natūraliųjų, racionaliųjų, realiųjų, kompleksinių skaičių aibes.

Toliau pristatomi tyrimai ir mūsų rezultatai, susiję su

- sudėtiniais skaičiais racionaliųjų skaičių laipsnių sveikųjų dalių sekose,
- sudėtiniais skaičiais antros eilės tiesinėse rekurentinėse sekose,
- egiptietiškomis trupmenomis.

Racionaliųjų skaičių laipsnių sveikosios dalys

Yra daug neatsakytų klausimų apie racionalaus skaičiaus $a > 1$ laipsnių trupmeninių dalių pasiskirstymą. Seką $\{a^n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, ir jos apibendrinimą $\{\xi a^n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, čia ξ yra fiksuotas teigiamas skaičius, tyrė Vijayaraghavan'as. Jis įrodė tokį teiginį:

Sekos $\{(p/q)^n\}, n = 1, 2, \ldots,$ *čia* $p > q > 1$ *yra natūralieji skaičiai, tenkinantys lygybę* $\mathrm{DBD}(p, q) = 1$, *ribinių taškų aibė yra begalinė.*

Šio teiginio apibendrinimas buvo įrodytas Pisot (o vėliau Dubicko, kitu būdu). Prieš suformuluodami šį apibendrinimą, apibrėžkime, kas yra *Pisot-Vijayaraghavan'o skaičius* (arba *PV skaičius*). Visų pirma, skaičius $\alpha \in \mathbb{C}$ vadinamas *sveikuoju algebriniu* skaičiumi, jei jis yra neredukuojamo daugianario su sveikaisiais koeficientais ir koeficientu prie didžiausio laipsnio, lygiu 1, šaknis. Kitos to daugianario šaknys vadinamos skaičiais, *jungtiniais* skaičiui α. Skaičius $\alpha \in \mathbb{C}$ vadinamas *Pisot-Vijayaraghavan'o skaičiumi*, jei jis yra realusis sveikasis algebrinis skaičius, didesnis už 1, kuriam jungtiniai skaičiai yra visi moduliu mažesni už 1. Teiginio apibendrinimas skamba taip:

Tegu $\alpha > 1$ *yra realusis algebrinis skaičius ir tegu* $\xi > 0$ *yra realusis skaičius. Aibė* $\{\xi\alpha^n\}, n \in \mathbb{N}$, *turi tik baigtinį ribinių taškų kiekį tada ir tik tada, kai* α *yra PV skaičius ir* $\xi \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

(Čia $\mathbb{Q}(\alpha)$ žymi racionaliųjų skaičių kūno plėtinį.)

Nepaisant šių rezultatų, iki šiol neįrodyta, kad seka $\{(3/2)^n\}, n = 1, 2, \ldots,$ turi be galo daug ribinių taškų intervale $[0, 1/2)$ arba $[1/2, 1]$. Flatto, Lagarias ir Pollington'as pasistūmėjo į priekį, įrodydami nelygybę

$$\limsup_{n\to\infty} \{(3/2)^n\} - \liminf_{n\to\infty} \{(3/2)^n\} \geqslant 1/3.$$

Pakaktų įrodyti, kad $\limsup_{n\to\infty} \{(3/2)^n\} - \liminf_{n\to\infty} \{(3/2)^n\} > 1/2$. Nagrinėkime bendresnį atvejį: seką $\{(\xi/2)a^n\}$, $n \in \mathbb{N}$, čia $\xi > 0$ bei $a \in \mathbb{Q}, a > 1$, yra tam tikri fiksuoti skaičiai. Žinoma, jei pavyktų įrodyti, kad atstumas tarp didžiausio ir mažiausio aibės $\{(\xi/2)a^n\}$, $n \in \mathbb{N}$, ribinių taškų viršija 1/2, tai aibė turėtų ribinį tašką, mažesnį už 1/2. Šis faktas reikštų, kad aibėje $[\xi a^n]$, $n \in \mathbb{N}$, yra be galo daug lyginių skaičių, o tai yra mums šioje disertacijoje rūpintis klausimas. Tačiau tėra žinoma, kad tas atstumas yra ne mažesnis už $1/b$, čia b yra laipsniu keliamo skaičiaus $a = b/c \in \mathbb{Q}$, $b > c > 1$, $(b, c) = 1$, skaitiklis. Nors tai yra pažymėtinas rezultatas, mums jis yra per silpnas.

Tad net paprasčiausiu atveju $a = 3/2$ trupmeninių dalių pasiskirstymas lieka neišnagrinėtas; jo svarba paprastai motyvuojama ryšiu tarp $\{(3/2)^n\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ pasiskirstymo bei Waring'o uždavinio. Waring'o uždavinys buvo iš esmės išspręstas Hilbert'o, kuris įrodė tokį teiginį:

Kiekvienas natūralusis skaičius gali būti užrašytas kaip fiksuoto skaičiaus $g(n)$ *neneigiamų sveikųjų skaičių* n*-ųjų laipsnių suma, čia* n *yra bet koks duotas natūralusis skaičius, o* $g(n)$ *priklauso tik nuo* n.

Tačiau lieka klausimas dėl $g(n)$ (kaip minimalios reikšmės, tenkinančios teiginį) užrašymo formule, atsakymas į kurį priklauso nuo trupmeninių dalių $\{(3/2)^n\}$ savybių, vis dar laukiančių įrodymo.

Yra pasiekta tam tikrų gerai žinomų metrinių rezultatų apie skaičiaus laipsnių trupmeninių dalių pasiskirstymą. Koksma įrodė, kad

Seka $\{\xi a^n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *čia* $\xi > 0$, *yra tolygiai pasiskirsčiusi intervale* $[0, 1]$ *beveik visiems realiesiems skaičiams* $a > 1$.

Tai įrodo, kad beveik visiems $a > 1$ sveikosios dalys $[a^n]$ yra sudėtiniai skaičiai begaliniam natūraliųjų skaičių n kiekiui. Deja, šio ir panašaus į jį Baker'io ir Harman'o metrinių rezultatų negalima pritaikyti racionaliųjų skaičių aibei, kuri yra nulinio mato. Nurodyti konkrečių skaičiaus a reikšmių, su kuriomis sveikosios dalys $[a^n]$ yra sudėtiniai skaičiai begaliniam natūraliųjų skaičių n kiekiui, taip pat yra iššūkis.

Mahler'is iškėlė tokį klausimą:

Ar egzistuoja toks teigiamas skaičius α*, kad visi skaičiai* $\{\alpha(3/2)^n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *yra mažesni už* $1/2$*?*

Šis klausimas ekvivalentus tokiam: ar egzistuoja toks teigiamas skaičius $\xi(= 2\alpha)$, kad skaičiai $[\xi(3/2)^n]$, $n \in \mathbb{N}$, *visi* yra lyginiai? Mahler'io klausimas lieka neatsakytas. Mūsų 1.1 teorema teigia, kad *kiekvienam* $\xi > 0$ aibėje $[\xi(3/2)^n]$, $n \in \mathbb{N}$, yra be galo daug elementų, dalių iš bent vieno iš skaičių $2, 5, 7, 11$.

Nėra žinoma daug informacijos apie skaičius $a > 1$, kuriems sveikoji dalis $[a^n]$ yra pirminis skaičius su be galo daug natūraliųjų n reikšmių. Baker'is ir Harman'as įrodė, kad

Sekoje $[a^n], n = 1, 2, \ldots$, *yra be galo daug pirminių skaičių beveik visiems realiesiems skaičiams* $a > 1$.

Nepaisant to, jie nenurodo konkrečių a reikšmių. Mills'as įrodė tokio skaičiaus A, kad sveikoji dalis $[A^{3^n}]$ yra pirminis skaičius kiekvienam $n \in \mathbb{N}$, egzistavimą. Whiteman'as iškėlė hipotezę, kad sekoje $[a^n]$, $n = 1, 2, \ldots$, čia $a > 1$ yra racionalusis, bet ne natūralusis skaičius, visada yra be galo daug pirminių skaičių. Šis tvirtinimas kol kas nėra paremtas rezultatais.

Mes nagrinėjame klausimą, kurio atvejai $a = 3/2$ bei $a = 4/3$ buvo sėkmingai įveikti prieš daugiau nei keturiasdešimt metų Forman'o ir Shapiro, tačiau kurio atžvilgiu ilgą laiką po to nebūta jokio progreso. Šis iš pirmo žvilgsnio nesudėtingas klausimas gali būti suformuluotas taip: įrodykite, kad bet kokiam racionaliajam skaičiui $a > 1$ sveikųjų dalių sekoje $[a^n]$ yra be galo daug sudėtinių skaičių. (Klausimas trivialus sveikiesiems a.)

Tėra žinoma nedaug iracionaliųjų skaičių $a > 1$, kuriems yra atsakyta į analogišką klausimą. Cass'as įrodė, kad

Aibėje $[a^n]$, $n \in \mathbb{N}$, *yra be galo daug sudėtinių skaičių, kai* $a > 1$ *yra vienetas realiajame kvadratiniame skaičių kūne.*

(Vienetu mes čia vadiname apverčiamą elementą skaičių kūno algebrinių sveikųjų skaičių žiede.) Šis pasiekimas buvo apibendrintas Dubicko visiems Pisot-Vijayaraghavan'o bei Salem'o skaičiams a. (Kiekvienas realusis vienetas antrojo laipsnio racionaliųjų skaičių kūno plėtinyje yra Pisot skaičius. Salem'o skaičiumi vadinamas realusis algebrinis sveikasis skaičius, viršijantis 1, kuriam jungtiniai skaičiai visi moduliu neviršija 1 ir bent vienas iš jų yra moduliu mažesnis už 1.) Yra žinoma ir transcendentinių skaičių $a > 1$, kuriems skaičiai $[a^n]$ yra sudėtiniai su be galo daug natūraliųjų n reikšmių.

Mūsų 1.1 teoremos atvejis $a = 2$ neseniai buvo pagerintas Dubicko:

Bet kokiems realiesiems skaičiams $\xi \neq 0$ *ir* ν *sveikųjų dalių sekoje* $[\xi 2^n + \nu], n = 1, 2, \ldots$, *yra be galo daug sudėtinių skaičių. Be to, jei skaičius* ξ *yra iracionalus, tai minėtajai sekai priklauso be galo daug skaičių, dalių iš* 2 *arba* 3.

Dabar suformuluosime mūsų pagrindinę teoremą. Pažymėkime $\mathcal{P}(2) = \{2\}$, $\mathcal{P}(3) = = \mathcal{P}(4) = \{2, 3\}, \mathcal{P}(6) = \mathcal{P}(4/3) = \{2, 3, 5\}, \mathcal{P}(3/2) = \{2, 5, 7, 11\}, \mathcal{P}(5/4) = \{2, 3, 7, 11, 13\}$.

1.1 TEOREMA. *Tegu* $\xi > 0$ *yra realusis skaičius ir* $a \in \{2, 3, 4, 6, 3/2, 4/3, 5/4\}$. *Tada aibėje* $[\xi a^n]$, $n \in \mathbb{N}$, *yra be galo daug elementų, besidalijančių iš bent vieno skaičiaus, priklausančio aibei* $\mathcal{P}(a)$.

Minėtieji Forman'as ir Shapiro įrodė, kad aibėse $[(3/2)^n]$ bei $[(4/3)^n]$, $n \in \mathbb{N}$, yra be galo daug sudėtinių skaičių. Jų įrodymas be pakeitimų tinka ir $[\xi(3/2)^n]$ bei $[\xi(4/3)^n]$ su bet kokiu $\xi > 0$. Atveju $a = 4/3$ pateikiame naują įrodymą, nes (po nedidelių pradinių pastebėjimų) mes jį užrašome keliomis eilutėmis (Forman'ui ir Shapiro prireikia aštuonių lemų). Tai yra apšilimas prieš sudėtingiausią įrodymą, atitinkantį atvejį $a = 5/4$. 1.1 teoremos įrodymas atveju $a = 3/2$ pateiktas disertacijoje nagrinėjamą 1.7 lemą panaudojant drauge su pagrindiniu Forman'o bei Shapiro rezultatu.

Naudingas skirtumas tarp mūsų ir Forman'o bei Shapiro metodų yra tas, kad mes siekiame gauti prieštarą 1.7 lemai, kuri yra gaunama nagrinėjant trupmenines, o ne sveikąsias dalis. Pagrindinis gaunamas privalumas yra galimybė tokiu būdu nustatyti konkrečias galimų sudėtinių skaičių daliklių aibes. (Tačiau mes įrodome, kad tokios aibės nėra kai kuriems kitems racionaliems skaičiams. Žr. 1.2 teiginį.)

Pastebėkime, kad 1.1 teoremos formuluotėje praleistas skaičius $a = 5$. Taip yra dėl vienintelės priežasties: skaičiui $a = 5$ konkretus universalus aibės $[\xi 5^n]$, $n \in \mathbb{N}$, elementų daliklių sąrašas negali būti pateiktas. Iš tiesų, jis negali būti pateiktas jokiam skaičiui $a = 4k + 1$, čia $k \in \mathbb{N}$.

1.2 TEIGINYS. *Tegu a yra natūralusis skaičius, kurį galima užrašyti pavidalu $4k + 1$, čia $k \in \mathbb{N}$, ir tegu $\mathcal{P}$ yra bet kokia baigtinė pirminių skaičių aibė. Egzistuoja toks realusis skaičius $\xi > 0$, kad jokia sveikoji dalis $[\xi a^n]$, $n = 1, 2, \ldots$, nesidalija iš jokio aibės $\mathcal{P}$ elemento.*

Nepaisant šio teiginio, kurį įrodome disertacijos 1.4 skyriuje, tame pačiame skyriuje įrodome ir tai, kad aibėje $[\xi 5^n]$, $n \in \mathbb{N}$, yra be galo daug sudėtinių skaičių (kaip ir 1.1 teoremoje minimiems skaičiams). Tai galima padaryti todėl, kad universali baigtinė pirminių daliklių aibė nesuveikia tik ypatingoms skaičiaus ξ reikšmėms, kurias mes išnagrinėjame atskirai. Šie faktai įrodomi tokia teorema.

1.3 TEOREMA. *Tegu $\xi > 0$ yra realusis skaičius. Jei $\xi \neq (4k + 3)/(2 \cdot 5^r)$, čia k, r yra neneigiami sveikieji skaičiai, tai aibėje $[\xi 5^n]$, $n \in \mathbb{N}$, yra be galo daug elementų, dalių iš $2, 3$ arba 5. Jei $\xi = (4k+3)/(2 \cdot 5^r)$, čia $(4k+3, 5^r) = 1$, tai aibėje $[\xi 5^n]$, $n \in \mathbb{N}$, yra be galo daug elementų, dalių iš skaičiaus $10k + 7$.*

Lieka neįrodyta, kad aibėje $[\xi a^n]$, $n = 1, 2, \ldots$, čia ξ yra bet koks teigiamas skaičius, o skaičius $a \geqslant 7$ yra sveikasis, yra be galo daug sudėtinių skaičių. Be to, 1.1 teorema nėra išplėsta jokiu kitu tinkamo racionalaus skaičiaus $a \notin \mathbb{Z}$ atveju be jau įvardytųjų $3/2, 4/3, 5/4$, net kai $\xi = 1$, nors iš pirmo žvilgsnio atvejis $a = 6/5$ gali pasirodyti paprastenis už atvejį $a = 5/4$. Nepaisant to, nedaug pakeitus uždavinį, įmanoma gauti rezultatų keliems naujiems racionaliems skaičiams.

1.4 TEOREMA. *Tegu $\xi > 0$ yra realusis skaičius. Tada kiekvienoje iš aibių $[\xi(5/2)^n] - 1$ ir $[\xi(6/5)^n] - 1$, čia $n \in \mathbb{N}$, yra be galo daug elementų, dalių iš bent vieno skaičiaus aibėje $\{2, 3, 5\}$.*

Įrodymas $[\xi(5/2)^n] - 1$ atveju tinka be pakeitimų visoms pavidalo $[\xi(5/2)^n] - 1 + 30k, n \in \mathbb{N}$, aibėms, čia k yra bet koks fiksuotas sveikasis skaičius.

Galima taip pat nagrinėti ne sveikąsias laipsnių dalis, bet sveikuosius skaičius, artimiausius fiksuoto skaičiaus laipsniams. Apibrėžkime artimiausią skaičiui z sveikąjį skaičių kaip $[z + 1/2]$. Taip vėl galima gauti naujų skaičių.

1.5 TEOREMA. *Tegu $\xi > 0$ yra realusis skaičius. Tada*
(i) aibėje $[\xi 7^n + 1/2]$, $n \in \mathbb{N}$, yra be galo daug sudėtinių skaičių,
(ii) aibėje $[\xi(5/3)^n + 1/2]$, $n \in \mathbb{N}$, yra be galo daug elementų, dalių iš 2 arba 3,

(iii) aibėje $[\xi(7/5)^n + 1/2]$, $n \in \mathbb{N}$, *yra be galo daug skaičių, dalių iš bent vieno skaičiaus, priklausančio aibei* $\{2, 3, 5, 11\}$.

Pastebėkime, kad aibei $[\xi 7^n + 1/2]$, $n \in \mathbb{N}$, nėra nurodyta galimų daliklių aibė. Šis atvejis skiriasi nuo kitų, nes jo neapima disertacijoje nagrinėjama 1.2 lema, galiojanti tik racionaliesiems skaičiams, esantiems už sveikųjų skaičių aibės ribų (kaip ir atveju $a = 5$) bei todėl, kad, kitaip nei atvejis $a = 5$, šis atvejis įrodomas naudojantis sveikosiomis, bet ne trupmeninėmis dalimis.

Įrodymuose mes apibrėžiame svarbias juose operacijų sekas, atspindinčias sveikųjų dalių sekų elgseną. Šios sekos taip pat interpretuojamos kaip begaliniai žodžiai, t.y., formalios simbolių, priklausančių tam tikrai aibei, vadinamai abėcėle, sekos. Mes nagrinėjame baigtinius žodžių fragmentus, kurie gali arba negali rastis šiuose žodžiuose, taip pat galimą šių žodžių periodiškumą.

Antros eilės tiesinės rekurentinės sekos

Realiųjų skaičių seka $x_n, n = 1, 2, \ldots$, vadinama *tiesine rekurentine seka*, jei jos nariai tenkina rekurentinę lygtį

$$x_{n+d} = a_1 x_{n+d-1} + a_2 x_{n+d-2} + \cdots + a_d x_n, \ \ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

fiksuotiems skaičiams $d \in \mathbb{N}$ bei $a_1, a_2, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$. Galiojant natūraliai sąlygai $a_d \neq 0$, skaičius d vadinamas tiesinės rekurentinės sekos eile.

Mūsų rezultatai susiję su eilės 2 tiesinėmis rekurentinėmis sekomis, sudarytomis iš sveikųjų skaičių. Žinomiausia antros eilės tiesinė rekurentinė seka yra Fibonačio seka, apibrėžiama lygybėmis $F_1 = F_2 = 1$ ir rekurentiniu sąryšiu $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, n \geqslant 2$.

Klausimas apie pirminius ir sudėtinius skaičius tiesinėse rekurentinėse sekose nėra naujas. Pavyzdžiui, iki šiol nėra žinoma, ar Fibonačio sekoje yra be galo daug pirminių skaičių.

Pagrindinė šios tyrimų dalies motyvacija yra Graham'o rezulatatas: jis rado tokius du tarpusavyje pirminius natūraliuosius skaičius x_1, x_2, kad seka, apibrėžta šiom dviem reikšmėmis bei lygtimi

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1},$$

$n = 2, 3, 4, \ldots$, yra sudaryta vien iš sudėtinių skaičių, t.y., x_n yra sudėtinis skaičius visiems $n \in \mathbb{N}$. Graham'o skaičių pora (x_1, x_2) buvo

$$(331635635998274737472200656430763, 1510028911088401971189590305498785).$$

Knuth'as rado mažesnių skaičių porą

$$(x_1, x_2) = (62638280004239857, 49463435743205655).$$

Wilf'as kiek patobulino Knuth'o skaičiavimus ir rado porą

$$(x_1, x_2) = (20615674205555510, 3794765361567513).$$

Ji buvo dar sumažinta Nicol'o iki

$$(x_1, x_2) = (407389224418, 76343678551).$$

Šiuo metu „mažiausia" tokia žinoma pora (tiek mažiausios galimos $x_1 + x_2$ reikšmės, tiek mažiausios galimos $\max(x_1, x_2)$ reikšmės prasme) yra Vsemirnovo rastoji skaičių pora

$$(x_1, x_2) = (106276436867, 35256392432).$$

Mes gauname apibendrintą tokio pobūdžio rezultatą kiekvienai antros eilės tiesinei rekurentinei sekai, išskyrus dvi išimtis, kurioms pagrindžiamas analogiško teiginio klaidingumas. Tiksliau pasakius, įrodomas toks teiginys:

2.1 TEOREMA. *Tegu $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ ir tegu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ yra seka, apibrėžta savo pradinių reikšmių x_1, x_2 ir tiesinės rekurentinės lygties*

$$x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1},$$

kai $n = 2, 3, 4, \ldots$. Taip pat tarkime, kad $b \neq 0$ bei $(a, b) \neq (2, -1), (-2, -1)$. Tada egzistuoja tokie du tarpusavyje pirminiai natūralieji skaičiai x_1, x_2, kad skaičius $|x_n|$ yra sudėtinis visiems $n \in \mathbb{N}$.

Išimčių pagrįstumas paaiškinamas trumpu įrodymu: norima pradinių reikšmių pora neegzistuoja, t.y., sekoje $(|x_n|)_{n=1}^{\infty}$, čia x_1, x_2 yra sudėtiniai skaičiai, tenkinantys lygybę $\mathrm{DBD}(x_1, x_2) = 1$, visada yra be galo daug pirminių skaičių. Įrodyme (kaip ir vienoje pačios 2.1 teoremos įrodymo dalyje) naudojamasi Dirichlė teorema apie aritmetines progresijas: aritmetinėje progresijoje, kurios pirmasis narys ir skirtumas yra tarpusavyje pirminiai sveikieji skaičiai, yra be galo daug pirminių skaičių (jei imsime sekos narių modulį).

Neišsigimusioms sekoms 2.1 teorema buvo suformuluota ir įrodyta Somer'io. Mes pateikiame jos pilną įrodymą, nepriklausomą nuo šio rezultato.

Kaip ir Graham'as, įrodymuose mes naudojamės *dalumo sekos* (divisibility sequence) bei *dengiančiosios sistemos* (covering system) sąvokomis; be to, atveju $|b| = 1$ naudojamės ir Graham'o idėja ieškoti tinkamos dengiančiosios sistemos nagrinėjamai sekai bei Vsemirnovo rasta skaičių pora.

2.2 APIBRĖŽIMAS. *Sveikųjų skaičių seka* $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ *vadinama dalumo seka, jei* v_r *dalija* v_s*, kai* r *dalija* s*.*

Pvz., Fibonačio seka yra *dalumo seka.* Bendresnis dalumo sekos pavyzdys vadinamas *Liuka (Lucas) pirmos rūšies seka.* Tarkime, kad (charakteristinės) lygties $x^2 - ax - b = 0$, čia $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, šaknys α, β yra skirtingos: $\alpha \neq \beta$. Tada

$$u_n := \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \in \mathbb{Z},$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$, yra dalumo seka. Jei $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ yra seka, tenkinanti tiesinę rekurentinę lygtį $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$, tai galima nagrinėti atitinkamą dalumo seką, pasirenkant pradines reikšmes $u_1 := 1$, $u_2 := a$. Ši dalumo seka ir yra vadinama *Liuka pirmos rūšies seka.*

2.3 APIBRĖŽIMAS. *Likinių klasių rinkinys*

$$r_i \pmod{m_i} := \{r_i + m_i k \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

čia $m_i \in \mathbb{N}$, $r_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant r_i < m_i$, *ir* $i = 1, \ldots, t$, *yra vadinamas dengiančiąja sistema, jei kiekvienas skaičius* $n \in \mathbb{Z}$ *priklauso bent vienai likinių klasei* $r_i \pmod{m_i}$, *čia* $1 \leqslant i \leqslant t$.

Pavyzdžiui, $0 \pmod 2$, $1 \pmod 2$ yra dengiančioji sistema. Mūsų įrodyme naudojamas įdomesnis dengiančiosios sistemos pavyzdys:

$$0 \pmod 2,\ 0 \pmod 3,\ 3 \pmod 4,\ 5 \pmod 8,\ 5 \pmod{12},\ 1 \pmod{24}.$$

Būtų įdomu išplėsti 2.1 teoremą eilės d tiesinėms rekurentinėms sekoms, kai $d \geqslant 3$. Kuriems $(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$, čia $a_d \neq 0$, įmanoma parinkti d sveikųjų skaičių $x_1, \ldots, x_d$, tenkinančių lygybę $\mathrm{DBD}(x_1, \ldots, x_d) = 1$, kuriems seka

$$x_{n+d} = a_1 x_{n+d-1} + a_2 x_{n+d-2} + \cdots + a_d x_n,\ \ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

būtų sudaryta tik iš sudėtinių skaičių, tiksliau, skaičius $|x_n|$ būtų sudėtinis visiems natūraliesiems skaičiams $n \geqslant 1$?

Galutinis atsakymas į šį klausmimą kol kas atrodo nepasiekiamas. Visų pirma, daugumai tiesinių rekurentinių lygčių negalima apibrėžti jas tenkinančių dalumo sekų. Hall'as gavo vieną iš pirmųjų šios krypties rezultatų, kai $d = 3$:

Nėra tokios trečios eilės (tiesinės rekurentinės) taisyklingos dalumo sekos, kurios charakteristinis daugianaris būtų neredukuojamas daugianaris su sveikaisiais koeficientais, iš kurių paskutinieji du būtų tarpusavyje pirminiai. (Dalumo seka čia vadinama *taisyklinga*, jei jos pirmasis narys lygus 0.)

Todėl mūsų metodai netinka taisyklingų dalumo sekų atvejams, kai, pvz., $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ visiems $i = 1, \dots, d$, o rekurentinės sekos charakteristinis daugianaris yra neredukuojamas. Be to, ir tai dar svarbiau, nėra būdų parodyti, kad atvejai, kai charakteristinis daugianaris

$$x^d - a_1 x^{d-1} - a_2 x^{d-2} - \dots - a_d$$

yra lygus $(x+1)^d$ arba $(x-1)^d$, yra išimtiniai. Jau vien kai $d = 3$ ir, sakykime, $(a_1, a_2, a_3) = (3, -3, 1)$, gauname sudėtingą uždavinį apie kvadratinio trinario $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ pirmines reikšmes neneigiamuose sveikuosiuose taškuose.

Šiurys neseniai sėkmingai išnagrinėjo atvejį $x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1} + x_n, n = 1, 2, 3, \dots$, sukonstruodamas atitinkamą netrivialią sudėtinių skaičių seką.

Egiptietiškos trupmenos

Tegu t yra fiksuotas natūralusis skaičius. Mes nagrinėjame natūraliųjų skaičių aibę, priklausančią tik nuo skaičiaus t:

$$E(t) := \{n \ : \ n = tM - d\},$$

čia M yra dviejų natūraliųjų skaičių a ir b sandaugos kartotinis, o d yra tų dviejų skaičių sumos daliklis, tai yra,

$$ab | M \quad \text{ir} \quad d | (a + b)$$

tam tikriems $a, b \in \mathbb{N}$. Žinoma,

$$E(t') \subseteq E(t), \quad \text{jei tik} \quad t | t'.$$

Nesunkiai įrodoma, kad

$$E(1) = E(2) = \mathbb{N}.$$

Situacija, kai $t \geqslant 3$, nėra tokia aiški. Šiame kontekste ypač įdomios aibės $E(4)$ ir $E(5)$, kadangi skaičius n priklauso aibei $E(t)$ tada ir tik tada, kai

$$n = tM - d = tuab - (a + b)/v$$

tam tikriems skaičiams $a, b, u, v \in \mathbb{N}$. Vadinasi, $n \in E(t)$ reiškia galimybę užrašyti lygybę

$$\frac{t}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

natūraliesiems skaičiams

$$x := uab, \quad y := uvna, \quad z := uvnb.$$

Tai mus veda prie egiptietiškų trupmenų (skirtingų skaičių, atvirkštinių natūraliesiems skaičiams, sumų) temos ir su ja susijusių įžymių hipotezių. Jei $n \in E(t)$, tai trupmena t/n gali būti užrašyta kaip trijų skaičių, atvirkštinių natūraliesiems, suma. Jei kiekvienas pirminis skaičius p priklauso aibei $E(4)$, tai galioja Erdős'o-Straus'o hipotezė (ji teigia, kad kiekvienam natūraliajam skaičiui $n \geqslant 2$ trupmena $4/n$ gali būti išreikšta kaip suma $1/x + 1/y + 1/z$, čia $x, y, z \in \mathbb{N}$). O jei kiekvienas pirminis skaičius p priklauso aibei $E(5)$, tai galioja atitinkama Sierpiński'o hipotezė (ji teigia, kad kiekvienam natūraliajam skaičiui $n \geqslant 4$ trupmena $5/n$ gali būti išreikšta kaip suma $1/x + 1/y + 1/z$). Šiame kontekste pati bendriausia Schinzel'io hipotezė teigia, kad kiekvienam natūraliajam skaičiui $n \geqslant n(t)$ trupmena t/n yra išreiškiama kaip suma $1/x+1/y+1/z$. Tai akivaizdžiai galioja, kai $t \leqslant 3$, bet lieka neįrodyta bet kuriam fiksuotam $t \geqslant 4$. Toliau pateikta 3.5 hipotezė reiškia, jog egzistuoja toks skaičius $C(t)$, kad bet kuris pirminis skaičius $p > C(t)$ priklauso aibei $E(t)$. Tokiu atveju Schinzel'io hipotezė taip pat būtų teisinga.

Yamamoto ir Mordell'as yra pastebėję, kad Erdős'o-Straus'o hipotezę pakanka įrodyti tik tiems pirminiams skaičiams p, kurie dalijant iš 840 duoda liekanas $1, 121, 169, 289, 361$ arba 529. Vaughan'as įrodė, kad Erdős'o-Straus'o hipotezė teisinga beveik visiems natūraliesiems skaičiams n.

Mes įrodome, kad

3.1 TEOREMA. *Aibei* $E(4)$ *nepriklauso visi tikslieji kvadratai bei skaičiai* 288*,* 336*,* 4545.

Tarkime, $k^2 \in E(4)$. Tada egzistuoja tokie skaičiai $u, v, a, b \in \mathbb{N}$, kad

$$v(4uab - k^2) = a + b.$$

Įrodydami, kad $k^2 \notin E(4)$, mes naudojamės šiuo faktu:

3.2 LEMA. *Lygties* $v(4uab - k^2) = a + b$ *netenkina jokie natūralieji skaičiai* u, v, a, b, k.

Ši lema reiškia, kad $-d$ yra kvadratinis nelikinys moduliu $4ab$, kai $d|(a + b)$. Pastebėkime, kad $a + b$ daliklių aibei, kai $a < b$ abu perbėga aibę $\{1, 2, \ldots, n\}$, priklauso poaibis $\{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$. Todėl, remiantis 3.2 lema,

3.3 IŠVADA. *Kiekvienam natūraliajam skaičiui* n *iš eilės paimti* $2n - 1$ *skaičius*

$$4n! - 2n + 1, 4n! - 2n + 2, \ldots, 4n! - 1$$

yra kvadratiniai nelikiniai moduliu $4n!$.

3.3 išvada yra pavyzdys mažiausiai $(2-\varepsilon)\log m/\log\log m$ iš eilės einančių kvadratinių nelikinių moduliu $m = 4n!$. Einant šia kryptimi, įdomiausias uždavinys yra nustatyti, kiek tokių iš eilės einančių kvadratinių likinių ir nelikinių moduliu m galima rasti pirminiams skaičiams m. Yra žinoma, kad egzistuoja be galo daug pirminių skaičių m, kuriems galima rasti bent $c_1 \log m \log\log\log m$ iš eilės einančių kvadratinių likinių moduliu m. Be to, daugina mąjį $\log\log\log m$ galima pakeisti $\log\log m$, jei galioja apibendrinta Rymano hipotezė.

Kaip jau minėjome, aibės $\mathbb{N} \setminus E(1)$ ir $\mathbb{N} \setminus E(2)$ yra tuščios. Remiantis 3.2 lema lygtis $v(4uab - k^2) = a + b$ neturi natūraliųjų sprendinių. Atskiru atveju, kai t yra iš 4 dalus natūralusis skaičius, o $s \in \mathbb{N}$ tenkina $4s|t$, tai lygties $vs(4(t/4s)uab - k^2) = a + b$ netenkina jokie natūralieji skaičiai u, v, a, b, k. Pastaroji lygtis ekvivalenti lygybei $v(tuab-sk^2) = a+b$. Taip mes gauname, kad

3.4 IŠVADA. *Kai $4|t$, aibei $E(t)$, nepriklauso pavidalo sk^2, čia $s \in \mathbb{N}$, $4s|t$ bei $k \in \mathbb{N}$, skaičiai.*

Iš čia gauname, kad aibė $\mathbb{N} \setminus E(t)$ yra begalinė, kai $4|t$. Mes darome prielaidą, kad visos kitos tokios aibės, o būtent visos aibės $\mathbb{N} \setminus E(t)$, kai $t \in \mathbb{N}$ nėra skaičiaus 4 kartotinis, yra baigtinės.

3.5 HIPOTEZĖ. *Kai 4 nedalija natūraliojo skaičiaus t, egzistuoja toks skaičius $C(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, kad aibei $E(t)$ priklauso visi natūralieji skaičiai, ne mažesni už $C(t) + 1$. Kai $4|t$, egzistuoja toks skaičius $C(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, kad aibei $E(t)$ priklauso visi natūralieji skaičiai, ne mažesni už $C(t) + 1$, išskyrus skaičius, užrašomus pavidalu sk^2, čia $4s|t$ ir $s, k \in \mathbb{N}$.*

Jau žinome, kad $C(1) = C(2) = 0$. Be to, yra nustatyta, kad būdų, kuriais įmanoma užrašyti t/n kaip sumą $1/x + 1/y + 1/z$, skaičius neviršija $c(\varepsilon)(n/t)^{2/3}n^{\varepsilon}$, čia $\varepsilon > 0$. Jei $n \in E(t)$, tai t/n galima užrašyti kaip trijų skaičių, atvirkštinių natūraliesiems, sumą, todėl šis viršutinis rėžis tinka ir skaičiaus n užrašymo pavidalu $tM - d$ būdams. Iš kitos pusės, Vaughan'as įrodė, kad taip galima užrašyti beveik visus natūraliuosius skaičius. Taip pat nesunku įsitikinti, kad bet kokiam fiksuotam natūraliajam skaičiui $t \geqslant 3$ beveik visi natūralieji skaičiai priklauso aibei $E(t)$.

Mes įrodome tokį teiginį, stipresnį už pastarąjį:

3.6 TEIGINYS. *Kiekvienam natūraliajam skaičiui $t \geqslant 3$ beveik visi natūralieji skaičiai gali būti užrašyti pavidalu $pa - 1$, čia skaičius $p \equiv -1 \pmod t$ yra pirminis ir $a \in \mathbb{N}$.*

Išvados

Disertacijoje gaunami tokie rezultatai, atitinkantys iškeltus klausimus (žr. skyrių „Tikslai ir uždaviniai"):

- Sekoje
$$[\xi a^n], n = 1, 2, \dots,$$
yra be galo daug sudėtinių skaičių bet kuriems $\xi > 0$ ir $a \in \{2, 3, 4, 5, 6, 3/2, 4/3, 5/4\}$.

- Kiekvienam $a \in \{2, 3, 4, 6, 3/2, 4/3, 5/4\}$ egzistuoja baigtinė pirminių skaičių, kurių bent vienas dalija be galo daug sekos
$$[\xi a^n], n = 1, 2, \dots,$$
narių, aibė, nepriklausanti nuo skaičiaus $\xi > 0$. Pavyzdžiui, kai $a = 5/4$, tokia aibė yra $\mathcal{P}(5/4) = \{2, 3, 7, 11, 13\}$. Kai $a = 5$, tokia pirminių skaičių aibė egzistuoja kiekvienam atskiram $\xi > 0$. Tačiau šiuo atveju vienos tokios baigtinės aibės visiems $\xi > 0$ nėra.

- Sekoje
$$[\xi a^n + \nu], n = 1, 2, \dots,$$
yra be galo daug sudėtinių skaičių bet kuriems $\xi > 0$ ir $a \in \{7, 5/3, 7/5\}$, kai $\nu = 1/2$. Tas pats galioja ir skaičiams $\nu = -1$, bet kokiam $\xi > 0$ bei $a = 6/5$. Sekoje $[\xi(5/2)^n - 1 + 30k], n = 1, 2, \dots,$ yra be galo daug sudėtinių skaičių bet kokiam realiajam skaičiui $\xi > 0$ ir bet kokiam sveikajam skaičiui k.

- Kiekvienai antros eilės rekurentinei lygčiai
$$x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1},$$
čia $a, b \in \mathbb{Z}, (a, b) \neq (\pm 2, -1)$, egzistuoja atitinkama rekurentinė sveikųjų skaičių seka, kurios visų narių moduliai yra sudėtiniai skaičiai, o pirmieji du nariai yra teigiami ir tarpusavyje pirminiai. Kai $(a, b) \neq (\pm 2, -1)$, tokia seka neegzistuoja.

- Aibei $E(t)$ priklauso beveik visi natūralieji skaičiai (ir $E(1) = E(2) = \mathbb{N}$). Aibei $E(t)$, kai $4|t$, nepriklauso skaičiai sk^2, čia $s \in \mathbb{N}$ tenkina $4s|t$ bei $k \in \mathbb{N}$.

Publikacijų sąrašas

Pagrindiniai disertacijos rezultatai:

- A. Dubickas and A. Novikas, *Integer parts of powers of rational numbers,* Math. Zeitschrift, **251** (2005), 635–648.
- A. Dubickas, A. Novikas and J. Šiurys, *A binary linear recurrence sequence of composite numbers,* J. Number Theory, **130** (8) (2010), 1737–1749.
- A. Dubickas and A. Novikas, *On integers expressible by some special linear form,* Acta Math. Univ. Comen., New Ser., 9 p. (to appear).

Preprintai ir konferencijų tezės:

- Integer parts of powers of rational numbers, *Preprint 2004–44,* Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics 2004, 14 p. (with A. Dubickas)
- A binary linear recurrence sequence of composite numbers, *27th Journées Arithmétiques,* Vilnius, Lithuania, June 27 – July 1, 2010: Abstracts, http://atlas-conferences.com/c/b/b/v/22.htm
- Some remarks on the composition of competition problems, *The 9th International conference "Teaching mathematics: retrospective and perspectives",* Vilnius, Lithuania, May 16 – May 17, 2008: Abstracts

Aprobacija

Disertacijos rezultatai ne tik spausdinti recenzuojamuose žurnaluose, bet ir pristatyti tarptautinėje konferencijoje "27th Journées Arithmétiques" (Vilnius, Lietuva, 2011), Lietuvos matematikų draugijos konferencijoje bei Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedros seminare.

Summary

The topics examined in this thesis were the subject of my research as a PhD student at the Faculty of Mathematics and Informatics of Vilnius University. The presented investigation concerns the existence of composite numbers in some special sequences, such as the sequence of integer parts of powers of a fixed number and a linear recurrence sequence consisting of integer numbers.

The thesis consists of the introduction, 3 sections, conclusions and bibliography.

In Section 1 we consider composite numbers in the sequences of integer parts of powers of rational numbers and prove that the sequence $[\xi(5/4)^n]$, $n = 1, 2, \dots$, where ξ is an arbitrary positive number, contains infinitely many composite numbers. Furthermore, it is shown that there are infinitely many positive integers n such that $([\xi(5/4)^n], 6006) > 1$, where $6006 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Similar results are obtained for shifted powers of some other rational numbers. In particular, the same is proved for the sets of integers nearest to $\xi(5/3)^n$ and to $\xi(7/5)^n$, $n \in \mathbb{N}$. The corresponding sets of possible divisors are also described.

In Section 2 we consider composite numbers in the binary linear recurrence sequences and prove that for $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, where $b \neq 0$ and $(a, b) \neq (\pm 2, -1)$, there exist two positive relatively prime composite integers x_1, x_2 such that the sequence given by $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$, consists of composite terms only, i.e., $|x_n|$ is a composite integer for each $n \in \mathbb{N}$.

In Section 3 we consider the sets of the numbers expressible by some special linear form in connection with Egyptian fractions. We investigate which numbers belong to those sets.

Trumpos žinios apie autorių

Gimimo data ir vieta:

1983 m. rugpjūčio 28 d., Vilnius.

Išsilavinimas ir kvalifikacija:

1990–1998 m. Vilniaus Gerosios Vilties vidurinė mokykla.

1998–2002 m. Vilniaus licėjus.

2002–2006 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas. Matematikos bakalauro kvalifikacinis laipsnis (Cum Laude diplomas).

2006–2008 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas. Matematikos magistro kvalifikacinis laipsnis (Magna Cum Laude diplomas).

2008–2012 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas. Matematikos krypties doktorantūra.

Darbo patirtis:

2005 m. Matematikos ir informatikos instituto Tikimybių teorijos skyriaus laborantas.

2005–2006 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedros laborantas.

2006 m. Matematikos ir informatikos instituto Matematinės logikos skyriaus laborantas.

2007–2008 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Matematikos ir informatikos metodikos katedros laborantas.

2008–2011 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Matematikos ir informatikos metodikos katedros asistentas.

2011–2012 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Matematikos ir informatikos metodikos katedros lektorius.