

## Apie vieno brėžimo uždavinio neišsprendžiamumą II

Jevgenijus Kirjackis<sup>1</sup>, Edmundas Mazėtis<sup>2,3</sup>,  
Grigorijus Melničenko<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Fundamentalųjų mokslų fakultetas*  
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius

<sup>2</sup> *Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas*  
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius

<sup>3</sup> *Lietuvos edukologijos universitetas, Gamtos, matematikos ir technologijų fakultetas*  
Studentų g. 39, LT-08106 Vilnius

E. paštas: jk@vgtu.lt, gmelnicenko@gmail.com, edmundas.mazetis@leu.lt

**Santrauka.** Straipsnyje įrodoma, kad skriestuvu ir liniuote negalima nubrėžti trikampio, kai duotas kampas ir iš kitų skirtingų kampų viršūnių išeinančios pusiauakraštinė ir pusiau-kampinė. Išnagrinėti atskiri atvejai, kai toks trikampio brėžimas yra galimas.

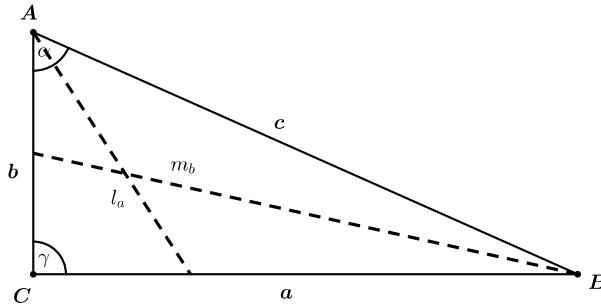
**Raktiniai žodžiai:** trikampis, pusiauakraštinė, pusiauakampinė, brėžimas skriestuvu ir liniuote, kubinė lygtis.

### Įvadas

Straipsnyje [3] įrodyta, kad skriestuvu ir liniuote bendruoju atveju negalima nubrėžti trikampio, kai duotas jo kampas ir iš kito kampo nubrėžtos aukštinė bei pusiauakampinė. Šiame darbe autoriai įrodo, kad bendruoju atveju negalima nubrėžti trikampio, kai duotas jo kampas ir iš kitų skirtingų viršūnių išvestos pusiauakraštinė bei pusiauakampinė.

Sakykime, kad duotas trikampio  $\triangle ABC$  kampas  $\angle C = \gamma$ , pusiauakampinės, išeinančios iš viršūnės  $A$ , ilgis –  $l_a$ , pusiauakraštinės nubrėžtos iš viršūnės  $A$  ilgis –  $m_a$ , o pusiauakraštinės, išvestos iš viršūnės  $B$ , ilgis yra  $m_b$ . Autoriai [3] darbe įrodė, kad negalima skriestuvu ir liniuote nubrėžti trikampį, kai duota  $\gamma$ ,  $l_a$  ir  $m_a$ , suvedant uždavinį į trečiojo laipsnio lygties šaknų nubrėžimą. Darbe [4] įrodomas negalimumas nubrėžti trikampį atskiru atveju, kai  $\gamma = 90^\circ$ ,  $l_a = 1$  ir  $m_a = 1$ , bet neįrodoma, kad trikampis su tokiais elementais egzistuoja. Mes nagrinėjame atskirą atvejį, kai duota  $\gamma = 90^\circ$ ,  $l_a = \sqrt{3}$  ir  $m_b = 3$ . Įrodoma, kad galima nubrėžti trikampį, tokiu atskiru atveju, kai duota  $\gamma = 90^\circ$ ,  $l_a = 1$  ir  $m_b = \sqrt{4026}/8$ . Taip pat įrodoma, kad bet kurioms duotoms atkarpoms  $l_a$  ir  $m_b$ , tenkinančioms sąlygą  $2m_b > l_a$ , egzistuoja statusis trikampis  $\triangle ABC$ , kurio kampas  $C$  yra statusis, kampo  $A$  pusiauakampinė lygi  $l_a$ , o iš viršūnės  $B$  išvesta trikampio pusiauakraštinė lygi  $m_b$  ir atvirkščiai.

Tokius ir panašius tyrinėjimus gali atlikti vyresnių klasių mokiniai, besidomintys matematika.



1 pav.

## 1 Kubinės lygties šaknų braižymas

Daugelis klasikinių brėžimo skriestuvu ir liniuote uždavinių sprendžiami, suvedant juos į kubinių lygčių šaknų brėžimą. Klasikiniai tokio tipo uždavinių pavyzdžiai – tai kubo sudvigubinimas, kampo trisekcija, taisyklingojo septyniakampio braižymas. Pastebėkime, kad egzistuoja kampai (pvz.,  $90^\circ$  kampas), kuriems kampo trisekcija atliekama skriestuvu ir liniuote. Bet bendroju atveju nėra procedūros, įgalinančios skriestuvu ir liniuote padalinti į tris lygias dalis bet kurį kampą.

Klasikinių uždavinių neišsprendžiamumas seka iš tokio tvirtinimo, kurį taikysime ir mūsų nagrinėjamu atveju.

**1 teorema.** (Žr. [1, p. 136], [2, p. 163].) *Jei kubinė lygtis su racionaliaisiais koeficientais*

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

*neturi racionaliuųjų sprendinių, tai nėra vienas šios lygties sprendinys nenubrėžiamas skriestuvu ir liniuote.*

## 2 Kubinė lygtis, siejanti stačiojo trikampio smailiojo kampo kosinusą ir iš skirtingų smailiųjų kampų viršūnių išeinančiomis pusiauokampine ir pusiauokraštine

**2 teorema.** *Sakykime, kad trikampyje  $\triangle ABC$  kampas  $\angle C = \gamma = 90^\circ$ , atkarpa  $l_a$  yra kampo  $\angle A = \alpha$  pusiauokampinė, o atkarpa  $m_b$  – pusiauokraštinė nubrėžta iš viršūnės B. Tuomet kampo  $\angle A = \alpha$  kosinusas  $x = \cos \alpha$  yra lygties*

$$3x^3 + kx^2 - 4x - 4 = 0, \quad (2)$$

*čia  $k = (8m_b^2 + 3l_a^2)/l_a^2$ , sprendinys.*

*Irodymas.* Sakykime, kad trikampis  $\triangle ABC$  (1 pav.) tenkina teoremos sąlygas. Tuomet teisinga lygybė

$$b = l_a \cos \frac{\alpha}{2} = l_a \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}. \quad (3)$$

Pagal Pitagoro teoremą  $4m_a^2 = a^2 + 4b^2$ , todėl

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8m_b^2 - l_a^2 \cos \alpha - l_a^2}{2}}. \quad (4)$$

Kadangi  $\sin \alpha / \cos \alpha = a/b$ , tai

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{8m_b^2 - l_a^2 \cos \alpha - l_a^2}{4l_a^2(1 + \cos \alpha)},$$

t. y.,

$$\frac{(1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{8m_b^2 - l_a^2 \cos \alpha - l_a^2}{4l_a^2(1 + \cos \alpha)}.$$

Atlikę veiksmus, gauname, kad  $x = \cos \alpha$  yra (2) lygties sprendinys.

### 3 Negalimumas nubrėžti skriestuvu ir liniuote trikampi, kai duota kampas ir iš kitų skirtingų kampų viršūnių išvestos pusiauakampinė ir pusiauakraštinė

Kaip ir [3] darbe, brėžimą trikampio, kai duota  $\gamma$ ,  $l_a$  ir  $m_b$ , išnagrinėsime atskirais atvejais. Pradėsime nuo to, kad įrodysime teiginį apie stačiojo trikampio egzistavimą, kai duota iš skirtingų smailiųjų kampų viršūnių išeinančios pusiauakampinė ir pusiauakraštinė.

**3 teorema.** *Jei  $l_a$  ir  $m_b$  – dvi atkarpos, tenkinančios sąlygą  $2m_b > l_a$ , tuomet egzistuoja statusis trikampis  $\triangle ABC$ , kurio kampas  $C$  yra statusis, atkarpa  $l_a$  yra kampo  $A$  pusiauakampinė, o atkarpa  $m_b$  – pusiauakraštinė, nubrėžta iš viršūnės  $B$ .*

*Irodymas.* Sakykime, kad  $k = (8m_b^2 + 3l_a^2)/l_a^2$ , ir išnagrinėkime (2) lygtį. Įrodysime, kad su visomis  $l_a$  ir  $m_b$  reikšmėmis ši lygtis turi sprendinį, esantį intervale  $[0, 1]$ . Nagrinėkime funkciją  $f(x) = 3x^3 + kx^2 - 4x - 4$ . Akivaizdu, kad  $f(0) = -4$ , o  $f(1) = k - 5$ . Iš nelygybės  $2m_b > l_a$  lengvai įrodoma, kad  $f(1) = k - 5 > 0$ . Iš teoremos apie tolydžių funkcijų nulių seka, kad (2) lygtis turi bent vieną sprendinį, tenkinantį sąlygą  $0 < x_0 < 1$ . Todėl egzistuoja toks smailusis kampas  $0 < \alpha < 90^\circ$ , kad  $x_0 = \cos \alpha$ . Taigi galima nubrėžti šią lygybę tenkinantį smailųjį kampą  $\angle A = \alpha$ . Tuomet brėžiame kampo  $\angle A$  pusiauakampinę, joje atidedame atkarpa  $AL = l_a$ . Iš taško  $L$  brėžiame statmenį kuriai nors kampo  $\angle A$  kraštinei, jis kerta to kampo kraštines taškuose  $B$  ir  $C$ . Gauname statųjį trikampį  $\triangle ABC$  ( $\angle C = \gamma = 90^\circ$ ) su smailiuoju kampu  $\angle A = \alpha$  ir šio kampo pusiauakampine  $l_a$ . Sakykime, kad šio trikampio pusiauakraštinės, nubrėžtos iš viršūnės  $B$ , ilgis lygus  $\bar{m}_b$ . Tuomet kampo  $\angle A = \alpha$  kosinusas  $\cos \alpha$  tenkina dvi lygtis

$$\begin{aligned} 3x^3 + kx^2 - 4x - 4 &= 0, \\ 3x^3 + \bar{k}x^2 - 4x - 4 &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

čia  $\bar{k} = (8\bar{m}_b^2 + 3l_a^2)/l_a^2$  ir  $k = (8m_b^2 + 3l_a^2)/l_a^2$ . Iš (5) lygybių gauname, kad  $\bar{k} = k$ , taigi  $\bar{m}_b = m_b$ . Iš čia ir išplaukia stačiojo trikampio, tenkinančio teoremos sąlygas, egzistavimas.

**4 teorema.** *Bendruoju atveju skriestuvu ir liniuote negalima nubrėžti trikampio, kai duotas jo kampas, ir iš kitų skirtingų viršūnių nubrėžtos pusiaukampinė bei pusiau-kraštinė.*

*Irodymas.* Išnagrinėkime atskirą atvejį. Tarkime, reikia nubrėžti trikampį  $\triangle ABC$ , kurio  $\angle C = \gamma = 90^\circ$ ,  $l_a = \sqrt{3}$  ir  $m_b = 3$ . Iš 3 teoremos seka, kad toks trikampis egzistuoja. Šiuo atveju  $k = (8m_b^2 + 3l_a^2)/l_a^2 = (8 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3)/3 = 27$ . Tuomet (2) lygtis tampa tokia

$$3x^3 + 27x^2 - 4x - 4 = 0. \quad (6)$$

Įrodysime, kad (6) lygtis neturi racionaliųjų sprendinių. Keičiame  $x = y - 3$  ir gauname lygtį  $3y^3 - 85y + 170 = 0$ . Akivaizdu, kad užtenka patikrinti, ar ši lygtis turi racionaliųjų sprendinių. Sakykime, kad racionalusis skaičius  $m/n$ , čia  $m$  ir  $n$  – tarpusavyje pirminiai sveikieji skaičiai, yra šios lygties sprendinys. Tuomet yra teisinga lygybė  $3m^3 - 85mn^2 + 170n^3 = 0$ , t. y., lygybė  $3m^3 = 5n^2(13m - 34n)$ . Iš jos seka, kad  $m = 5r$ , čia  $r$  – sveikasis skaičius. Iš čia gauname, kad  $3 \cdot 25r^3 = n^2(5 \cdot 13r - 34n)$ . Taigi  $n$  irgi dalijasi iš 5. Gavome prieštarą tvirtinimui, kad trupmena  $m/n$  yra nesuprastinama.

Anksčiau įrodėme, kad trikampis  $\triangle ABC$ , kuriame  $\gamma = 90^\circ$ ,  $l_a = \sqrt{3}$  ir  $m_b = 3$  egzistuoja. Sakykime, kad jis nubraižomas skriestuvu ir liniuote. Tuomet skriestuvu ir liniuote yra nubrėžiamas kampas  $\angle A = \alpha$ , kurio kosinusas lygus  $\cos \alpha$ : brėžiamas statusis trikampis, kurio įžambinė  $AB = 1$ , o statinis  $AC' = \cos \alpha$ . Taigi atkarpa, kurios ilgis lygus  $\cos \alpha$ , yra nubraižoma skriestuvu ir liniuote. Bet  $\cos \alpha$  yra (2) lygties sprendinys, o ši lygtis neturi racionaliųjų sprendinių. Iš 1 teoremos seka, kad šios lygties sprendiniai n nubraižomi skriestuvu ir liniuote. Taigi atkarpa, kurios ilgis  $\cos \alpha$ , n nubrėžiama skriestuvu ir liniuote. Gautoji priešara įrodo teoremą.

Parodysime, kad atskirais atvejais skriestuvu ir liniuote galima nubrėžti trikampį, kai žinomas jo kampas ir iš skirtingų kitų kampų viršūnių išvestos pusiaukampinė ir pusiau-kraštinė. Išnagrinėsime uždavinį:

*Uždavinys.* Nubrėžkime trikampį  $\triangle ABC$ , kuriame  $\angle C = \gamma = 90^\circ$ ,  $l_a = 1$  ir  $m_b = \sqrt{4026}/8$ .

*Analizė.* Sakykime, kad trikampis  $\triangle ABC$  nubraižytas. Tuomet  $(8m_b^2 + 3l_a^2)/l_a^2 = 45/2$ , o racionalusis skaičius  $x_0 = 1/2$  yra (2) lygties sprendinys. Iš čia gauname, kad  $\alpha = 60^\circ$ , o iš (3) ir (4) lygybių seka, kad  $a = \sqrt{2007/32}$  ir  $b = \sqrt{3}/2$ .

*Brėžimas.* Skriestuvu ir liniuote brėžiame atkarpas, kurių ilgiai lygūs  $\sqrt{3}$  ir  $\sqrt{2007/32}$  ([4, pp. 120–123]; [1, pp. 146–148]). Tada nubrėžiame statųjį trikampį, kurio statiniai lygūs  $a = \sqrt{2007/32}$  ir  $b = \sqrt{3}/2$ . Iš (3) ir (4) lygybių surandame, kad  $l_a = 1$  o  $m_b = \sqrt{4026}/8$ , t. y., nubrėžtas trikampis tenkina uždavinio sąlygą.

Pastebėkime, kad 3 teoremos sąlygoje duota nelygybė  $2m_b > l_a$  yra ne tik pakankama stačiojo trikampio egzistavimo sąlyga, bet ir būtina. Iš tikrųjų, iš (2) išplaukia, kad stačiojo trikampio (1 pav.) pusiaukampinei teisinga lygybė

$$l_a = \frac{b}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{\sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}}} = \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{b}{c}}} = \frac{\sqrt{2b^2c}}{\sqrt{b+c}},$$

o iš Pitagoro teoremos jo pusiaukraštinei – lygybė  $2m_b = \sqrt{4a^2 + b^2}$ . Bet  $a^2 = c^2 - b^2$ , taigi  $2m_b = \sqrt{4c^2 - 3b^2}$ . Kadangi  $c > b$ , tai

$$\begin{aligned} (b+c)((2m_b)^2 - l_a^2) &= (b+c)(4c^2 - 3b^2) - 2b^2c \\ &= 4bc^2 - 3b^3 + 4c^3 - 3b^2c - 2b^2c \\ &= 8bc^2 + 3b^2c + 4c^3 - 8b^2c - 3b^3 - 4bc^2 \\ &= (c-b)(8bc + 3b^2 + 4c^2) > 0. \end{aligned}$$

Todėl  $2m_b - l_a > 0$  arba  $2m_b > l_a$ .

Autoriai palieka skaitytojams savarankiškai išsiaiškinti, ar nelygybė  $2m_b > l_a$  yra būtina ir pakankama bet kurio trikampio (nebūtinai stačiojo) egzistavimo sąlyga.

## Literatūra

- [1] R. Courant and H. Robbins. *What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*. Oxford University Press, Oxford, 2nd edition, 1996.
- [2] R. Courant and H. Robbins. *What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*. Moskva, MCNMO, 2001 (in Russian).
- [3] J. Kirjackis and E. Mazėtis ir G. Melničenko. Apie vieno brėžimo uždavinio neišsprendžiamumą. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B.*, **56**:70–74, 2015.
- [4] O. Krottenheerdt. Zur theorie der dreieckskonstruktionen. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Math.-Naturw. Reihe*, **15**:677–700, 1966.

## SUMMARY

### On the insolubility of one drawing problem II

*J. Kirjackis, G. Melnichenko and E. Mazėtis*

It is shown in the article that, in general, it is not possible to draw a triangle using a compass and a straightedge given an angle and a bisector and a median drawn from the vertices of another different angles. It is shown in which particular cases a triangle can be drawn.

*Keywords:* triangle, median, bisector, drawing with compass and straightedge, cubic equation.