VILNIAUS UNIVERSITETAS

ANDRIUS GRIGUTIS

LERCHO IR SELBERGO DZETA FUNKCIJŲ REIKŠMIŲ PASISKIRSTYMAI

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2012

Disertacija rengta 2008–2012 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas

prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Konsultantas

akad. prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas

prof. dr. Gediminas Stepanauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Nariai:

prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. dr. Aleksandras Krylovas (Mykolo Romerio universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

doc. dr. Renata Macaitienė (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. dr. Jonas Šiaulys Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Oponentai:

akad. prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. dr. Darius Šiaučiūnas (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2012 m. gruodžio mėn. 21 d. 14 val. 00 min., VU Nuotolinių studijų centre, Šaltinių 1A.

Adresas: Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2012 m. lapkričio mėn.

Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

ANDRIUS GRIGUTIS

VALUE DISTRIBUTION OF LERCH AND SELBERG ZETA-FUNCTIONS

Summary of Doctoral Dissertation

Physical Sciences, Mathematics (01P)

Vilnius, 2012

The scientific work was carried out in 2008–2012 at Vilnius University.

Scientific supervisor

prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilnius University, Physical Scienes, Mathematics – 01P)

Scientific adviser

acad. prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, Physical Scienes, Mathematics – 01P)

The council:

Chairman

prof. dr. Gediminas Stepanauskas (Vilnius University, Physical Scienes, Mathematics – 01P)

Members:

prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilnius University, Physical Scienes, Mathematics – 01P)

prof. dr. Aleksandras Krylovas (Mykolas Romeris University, Physical Scienes, Mathematics – 01P)

doc. dr. Renata Macaitienė (Šiauliai University, Physical Scienes, Mathematics – 01P)

prof. dr. Jonas Šiaulys (Vilnius University, Physical Scienes, Mathematics – 01P)

Opponents:

acad. prof. habil. dr. Eugenijus Manstavičius (Vilnius University, Physical Scienes, Mathematics – 01P)

prof. dr. Darius Šiaučiūnas (Šiauliai University, Physical Scienes, Mathematics – 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the Council on December 21, 2012, in VU Nuotolinių studijų centras, Šaltinių 1A, at 14:00 pm.

Address: Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania.

The summary of the dissertation was distributed in November, 2012.

The dissertation is available at the library of Vilnius University.

Disertacinio darbo aprašymas

Mokslinė problema ir tyrimo objektas

Disertacijos tyrimas yra Lercho ir Selbergo dzeta funkcijos. Šios disertacijos tikslas - gauti naujas teoremas apie minėtų funkcijų reikšmių pasiskirstymą.

Pagrindinis analizinės skaičių teorijos objektas yra pirminių skaičių pasiskirstymas. Svarbus analizinės skaičių teorijos instrumentas yra Dirichlė eilutė. Tegu $s = \sigma + it$ kompleksinis skaičius. Dirichlė eilute vadiname eilutę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

čia koeficientai a_n yra realieji arba kompleksiniai skaičiai. Bendresnė eilutė

$$\sum_{n} a_n e^{-\lambda_n s}$$

vadinama bendrąja Dirichlė eilute arba kartais tiesiog Dirichlė eilute, jei tai nekelia painiavos. Specialus tipas $\sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$ gaunamas įstatant $\lambda_n = \log n$ į bendrąją Dirichlė eilutę. Žymiausia Dirichlė eilutė, kai koeficientai $a_n \equiv 1$, yra Rymano dzeta funkcija, apibrėžiama eilute

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

kai $\sigma > 1$ ir analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuriame ji turi paprastąjį polių su residuumu 1. Žymioji Rymano hipotezė teigia, kad $\zeta(s) \neq 0$, kai $\sigma > 1/2$. Ryšį tarp šios hipotezės ir pirminių skaičių pasiskirstymo gerai galima pademonstruoti pasinaudojus Kocho pasiūlytu ekvivalentu

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(x^{\alpha+\varepsilon}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \zeta(s) \neq 0, \text{ kai } \sigma > \alpha,$$

čia $1/2 \leqslant \alpha < 1$, o $\pi(x)$ yra piminių skaičių skaičiaus funkcija iki pasirinkto skaičiaus x, t.y.

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1.$$

Visos dzeta funkcijos yra apibrėžiamos Dirichlė eilutėmis. Pavyzdžiui, Hurvitzo dzeta funkcija

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^s}, \ \sigma > 1, \ 0 < \alpha \leqslant 1$$

yra bendroji Dirichlė eilutė su koeficientais $a_n = 1$ ir $\lambda_n = \log(n+\alpha)$. Lecho dzeta funkcija

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda n}}{(n+\alpha)^s}, \ \sigma > 1, \ 0 < \lambda, \alpha \leqslant 1$$

taip pat yra bendroji Dirichlė eilutė su koeficientais $a_n = e^{2\pi i \lambda n}$ ir $\lambda_n = \log(n+\alpha)$.

Tikslai ir uždaviniai

Disertacijoje sprendžiami šie uždaviniai:

- Praėjusio šimtmečio ketvirtajame dešimtmetyje Selbergas įrodė, kad tinkamai normuotas Rymano dzeta funkcijos modulio logaritmas ant kritinės tiesės $\sigma = 1/2$ turi standartinį normalųjį asimptotinį skirstinį. Rymano dzeta funkcija yra bendresnės Lercho dzeta funkcijos

  $$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda n}}{(n+\alpha)^s}, \ 0 < \lambda \leq 1, \ 0 < \alpha \leqslant 1,$$

  atskiras atvejis, t.y. $\zeta(s) = L(1, 1, s)$.

  Tegu $f(n)$ aritmetinė funkcija. Eilutė $\sum f(n)$ turi Oilerio sandaugą, jei ji gali būti užrašyta begaline absoliučiai konverguojančia sandauga

  $$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p} \left(1 + f(p) + f(p^2) + \dots\right),$$

  čia sandauga yra pagal visus pirminius skaičius.

  Ribinės teoremos įrodymas Rymano dzeta funkcijai remiasi Oilerio sandauga. Yra žinoma, kad bendru atveju Lercho dzeta funkcija Oilerio sandaugos neturi. Iškyla įdomus klausimas: ar panašus ribinis dėsnis galioja Lercho dzeta funkcijos reikšmėms?

- Tegu $Li_s(q) = \sum_{n=1}^{\infty} q^n n^{-s}$ polilogaritminė funkcija. 1957 metais Vineris ir Vintneris parodė galimą ryšį tarp polilogaritminės funkcijos nulių elgsenos dešinėje kompleksinės pusplokštumės pusėje $\sigma > 1$ ir Rymano hipotezės, kuri teigia, kad visi Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$ netrivialieji nuliai yra išsidėstę ant tiesės $\mathrm{Re}(s) = 1/2$. Vineris ir Vintneris parodė, kad Rymano hipotezė teisinga, jei egzistuoja skaičius $0 < \varepsilon < 1$ toks, kad

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n n^{-s} \neq 0,$$

kai $\sigma > 1$ ir $1 - \varepsilon < q < 1$.

Kita vertus, 1983 metais Montgomeris parodė, kad polilogaritminė funkcija $Li_s\left(e^{-1/N}\right)$ turi nulių srityje $\sigma > 1$ visiems pakankamai dideliems sveikiesiems skaičiams N, taigi, aukščiau suformuluotas Vinerio ir Vintnerio Rymano hipotezės kriterijus tapo tuščias.

Disertacijoje nagrinėjame Lercho transendenčiąją funkciją

$$\Phi(q, s, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(n+\alpha)^s},$$

kuri apibendrina polilogaritminę funkciją $Li_s(q)$. Pagrindinis uždavinys yra palyginti funkcijų $\Phi(q, s, \alpha)$ ir $Li_s(q)$ nulių pasiskirstymą pusplokštumėje $\mathrm{Re}(s) > 1$, tikintis, kad Vinerio ir Vintnerio kriterijus gali būti kitu būdu susijęs su Rymano hipoteze.

Tegu $0 < q < 1$ ir $1/2 < \alpha \leq 1$. Tikimės, kad Lercho transendenčioji funkcija $\Phi(q, s, \alpha)$ turi nulių srityje $\mathrm{Re}(s) > 1$, kai q yra pakankamai arti 1. Kai $\alpha = 1$, tokių nulių egzistavimą įrodė Montgomeris, bet nenurodė tokių nulių išreikštinio pavidalo (koordinačių).

- 2003 metais Saidakas ir Zvengrovskis Rymano dzeta funkcijos moduliui įrodė tokią nelygybę: kai $0 \leqslant \Delta \leqslant 1/2$ ir $t \geqslant 2\pi + 1$ galioja

$$|\zeta(1/2 - \Delta + it)| \geqslant |\zeta(1/2 + \Delta + it)|.$$

Autoriai taip pat pažymėjo, kad tokį patį rezultatą įrodžius su griežta nelygybe, t.y. parodžius, kad, kai $0 < \Delta \leqslant 1/2$ ir $t \geqslant 2\pi + 1$, galioja

$$|\zeta(1/2 - \Delta + it)| > |\zeta(1/2 + \Delta + it)|,$$

iš to sektų, kad Rymano hipotezė yra teisinga.

Kiek vėliau Saidakas, Zvengrovskis ir Matijasevičius įrodė, kad funkcijoms ζ ir ξ teisinga nelygybė:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) < \operatorname{Re}\left(\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\right),$$

kai $|t| \geqslant 8$, $\sigma < 1/2$. Čia ζ - Rymano dzeta funkcija, o

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

Sondovas ir Dumitresku įrodė, kad šie trys teiginiai yra ekvivalentūs:

I. Jei t yra fiksuotas realusis skaičius, tai $|\xi(\sigma + it)|$ didėja, kai $1/2 < \sigma < \infty$.

II. Jei t yra fiksuotas realusis skaičius, tai $|\xi(\sigma + it)|$ mažėja, kai $-\infty < \sigma < 1/2$.

III. Rymano hipotezė yra teisinga.

Selbergo dzeta funkcijos yra netrivialių dzeta funkcijų pavyzdžiai, kurioms dažniausiai Rymano hipotezė galioja. Disertacijoje tiriame, ar aukščiau išvardintų nelygybių analogai ir modulio didėjimo (mažėjimo) savybės galioja ir kai kurioms Selbergo dzeta funkcijoms.

Aktualumas

Dzeta funkcijos vaidina labai svarbų vaidmenį analizinėje skaičių teorijoje. Rymano dzeta funkciją ir pirminių skaičių pasiskirstymą sieja žymioji Rymano hipotezė. Kitaip tariant, sveikųjų skaičių dalumo savybės yra susijusios su Rymano dzeta funkcijos reikšmių, ypač nulių, pasiskirstymu. Rymano hipotezė, suformuluota 1859 metais vokiečių matematiko Rymano, yra vis dar neišspęsta problema ir pritraukia daug dėmesio šių dienų matematikoje. Siekiant geriau suprasti Rymano dzeta funkcijos elgseną, nagrinėjamos ir kitos dzeta funkcijos, pavyzdžiui: polilogaritminė funkcija, Lercho, Hurvitzo ir Selbergo dzeta funkcijos, Lercho transendenčioji funkcija.

Tyrimų metodika

Pagrindiniai metodai panaudoti rašant disertaciją yra šie: kompleksinio kintamojo funkcijų teorija, analizinės skaičių teorijos technika, tikimybinių matų konvergavimas, kompiuteriniai skaičiavimai programa MATHEMATICA.

Rezultatų naujumas ir vertė

Didžioji dalis matematinių rezultatų, gautų rašant disertaciją, yra nauji. Kai kurie seniau žinomi rezultatai buvo gauti panaudojus naujus metodus jiems įrodyti. Rezultatai yra teorinio pobūdžio, dalis jų praturtinti kompiuteriniais skaičiavimais ir grafikais.

Darbo struktūra

Disertacija parašyta anglų kalba. Ją sudaro įvadas, trys skyriai, išvados ir literatūros sąrašas. Disertacijos apimtis yra 65 puslapiai.

Svarbiausi rezultatai ir teoremos

Ribinės teoremos Lercho dzeta funkcijai

Pirmoje praėjusio amžiaus pusėje Selbergas įrodė, kad tinkamai normuotas Rymano dzeta funkcijos modulis ant kritinės tiesės turi asimptotinį standartinį normalųjį pasiskirstymą. Suformuluosime jo rezultatą realiajai ir menamajai dalims. Pažymėkime

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

standartinio normaliojo dėsnio pasiskirstymo funkciją. Selbergas įrodė, kad

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ t \in [0,T] : \frac{\log|\zeta(1/2+it)|}{\sqrt{2^{-1}\log\log T}} < x \right\} = \Phi(x).$$

Toks pats dėsnis galioja, jei $\log|\zeta(1/2+it)|$ pakeičiame $\arg\zeta(1/2+it)$. Ribinis dėsnis išlieka toks pats, kai σ yra pakankamai arti kritinės tiesės. Tegu $\beta_T = \log T$, kai $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1/2 + 1/\log T$ ir $\beta_T = \log(1/(\sigma - 1/2))$, kai $1/2 + 1/\log T < \sigma < 1/2 + o(1)$, jei $T \to \infty$.

Tada

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\text{meas}\left\{t\in[0,T]:\frac{\log|\zeta(\sigma+it)|}{\sqrt{2^{-1}\log\beta_T}}<x\right\}=\Phi(x).$$

Panašūs rezultatai, kai σ yra pakankamai arti kritinės tiesės, žinomi ir funkcijai $\arg\zeta(\sigma+it)$. Nusipelnę žmonės šioje srityje yra Bombieris ir Hejhalas, Joineris, Laurinčikas, Selbergas, Tsangas.

Rymano dzeta funkcija yra atskiras atvejis ($\zeta(s)=L(1,1,s)$) bendresnės Lercho dzeta funkcijos

$$L(\lambda,\alpha,s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\lambda n}}{(n+\alpha)^s},$$

čia $0<\lambda\leq 1$ ir $0<\alpha\leqslant 1$. Bendru atveju Lercho dzeta funkcija neturi Oilerio sandaugos. Ribinio dėsnio įrodymas Rymano dzeta funkcijai priklauso nuo Oilerio sandaugos ir nėra aišku, ar ribinis dėsnis galioja Lercho dzeta funkcijai.

Žemiau suformuojame keletą atvejų, kai ribinis dėsnis galioja ir Lercho dzeta funkcijai.

1.1 TEOREMA. *Tegu*

$$1-T^{-1-\varepsilon}<\lambda<1-e^{-T/\log T}\quad \textit{arba}\quad \lambda=1\quad \textit{arba}\quad |\lambda-1/2|<T^{-1-\varepsilon}$$

ir

$$1-T^{-1-\varepsilon}<\alpha\leq 1\quad \textit{arba}\quad |\alpha-1/2|<T^{-1-\varepsilon}.$$

Tada

$$\lim_{T\to\infty}\nu_T\left(\frac{\log|L(\lambda,\alpha,1/2+it)|}{\sqrt{2^{-1}\log\log T}}<x\right)=\Phi(x).$$

Pažymėkime

$$E(\lambda,\alpha,t)=-(2\pi/t)^{it}\exp\left\{it+\frac{3\pi i}{4}-2\pi i\lambda\alpha+2\pi i\alpha\right\}\frac{e^{-\pi t}}{(1-\{\lambda\})^{1/2-it}}. \tag{1}$$

Kad galiotų ribinis dėsnis, kai λ artėja prie 1, „labai greitai" reikia atlikti tam tikras modifikacijas.

1.2 TEOREMA. *Tegu* $1-e^{-T/\log T}\leq\lambda<1$ *ir*

$$1-T^{-1-\varepsilon}<\alpha\leq 1\quad \textit{arba}\quad |\alpha-1/2|<T^{-1-\varepsilon}.$$

Tada

$$\lim_{T\to\infty} \nu_T \left(\frac{\log|L(\lambda,\alpha,1/2+it)-E(\lambda,\alpha,t)|}{\sqrt{2^{-1}\log\log T}} < x \right) = \Phi(x).$$

Žemiau suformuluosime teoremas funkcijai $\arg L(\lambda,\alpha,s)$.

1.3 TEOREMA. *Tegu*

$$1-T^{-1-\varepsilon} < \lambda < 1-e^{-T/\log T} \quad \textit{arba} \quad \lambda = 1 \quad \textit{arba} \quad |\lambda - 1/2| < T^{-1-\varepsilon}$$

ir $1-T^{-1-\varepsilon} < \alpha \le 1$. *Tada*

$$\lim_{T\to\infty} \nu_T \left(\frac{\arg L(\lambda,\alpha,1/2+it)}{\sqrt{2^{-1}\log\log T}} < x \right) = \Phi(x).$$

1.4 TEOREMA. *Tegu*

$$1-T^{-1-\varepsilon} < \lambda < 1-e^{-T/\log T} \quad \textit{arba} \quad \lambda = 1 \quad \textit{arba} \quad |\lambda - 1/2| < T^{-1-\varepsilon}$$

ir $|\alpha - 1/2| < T^{-1-\varepsilon}$. *Tada*

$$\lim_{T\to\infty} \nu_T \left(\frac{\arg L(\lambda,\alpha,1/2+it) - t\log 2/2\pi}{\sqrt{2^{-1}\log\log T}} < x \right) = \Phi(x).$$

Teoremose 1.1 – 1.4 nagrinėjame ribinį dėsnį, kai (λ,α) artėja prie $(1,1)$, $(1,1/2)$, $(1/2,1)$ ir $(1/2,1/2)$. Tačiau taip pat kyla klausimas, ar ribinis dėsnis galioja, kai (λ,α) artėja prie $(0,0)$, $(0,1/2)$, $(0,1)$, $(1/2,0)$ ir $(1,0)$. Visus šiuos atvejus galime iliustruoti lentelėje:

(0,0)	(1/2,0)	(1,0)
(0,1/2)	(1/2,1/2)	(1,1/2)
(0,1)	(1/2,1)	(1,1)

Tegu

$$\Lambda(\lambda,\alpha,t) = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{it} \exp\left\{ it + \frac{\pi i}{4} - 2\pi i\lambda\alpha \right\} \frac{1}{\lambda^{1/2-it}}.$$

Sudarykime atvejus:

a)
$$0 < \lambda \leqslant \frac{1}{T(\log T)^{1+\varepsilon}} \quad \textit{ir} \quad 1 - \frac{1}{T(\log T)^{1+\varepsilon}} \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

b)
$$0 < \lambda \leqslant \frac{1}{T(\log T)^{1+\varepsilon}} \quad ir \quad |\alpha - 1/2| \leqslant \frac{1}{T(\log T)^{1+\varepsilon}},$$

c)
$$0 < \lambda \leqslant \frac{1}{T(\log T)^{1+\varepsilon}} \quad ir \quad 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{T(\log T)^{1+\varepsilon}},$$

d)
$$|\lambda - 1/2| \leqslant \frac{1}{T(\log T)^{1+\varepsilon}} \quad ir \quad 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{T(\log T)^{1+\varepsilon}},$$

e)
$$1 - \frac{1}{T(\log T)^{1+\varepsilon}} \leqslant \lambda < 1 - e^{-T/\log T} \quad ir \quad 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{T(\log T)^{1+\varepsilon}},$$

f)
$$1 - e^{-T/\log T} \leqslant \lambda < 1 \quad ir \quad 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{T(\log T)^{1+\varepsilon}}.$$

1.5 TEOREMA. *Jei tariame, kad galioja a) arba b), tai*

$$\lim_{T\to\infty} \nu_T \left(\frac{\log |L(\lambda, \alpha, 1/2 + it) - \Lambda(\lambda, \alpha, t)|}{\sqrt{2^{-1} \log\log T}} < x \right) = \Phi(x). \tag{2}$$

Jei tariame, kad galioja c), tai

$$\lim_{T\to\infty} \nu_T \left(\frac{\log |L(\lambda, \alpha, 1/2 + it) - \Lambda(\lambda, \alpha, t) - 1/\alpha^{1/2+it}|}{\sqrt{2^{-1} \log\log T}} < x \right) = \Phi(x).$$

Jei tariame, kad galioja d) arba e), tai

$$\lim_{T\to\infty} \nu_T \left(\frac{\log |L(\lambda, \alpha, 1/2 + it) - 1/\alpha^{1/2+it}|}{\sqrt{2^{-1} \log\log T}} < x \right) = \Phi(x).$$

Jei tariame, kad galioja f), tai

$$\lim_{T\to\infty} \nu_T \left(\frac{\log |L(\lambda, \alpha, 1/2 + it) - E(\lambda, \alpha, t) - 1/\alpha^{1/2+it}|}{\sqrt{2^{-1} \log\log T}} < x \right) = \Phi(x),$$

čia funkcija $E(\lambda, \alpha, t)$, nurodyta lygtyje (1).

Atvejais a)-f) panašios teoremos gali būti gaunamos ir funkcijai $\arg L(\lambda, \alpha, 1/2 + it)$. Suformuluosime vieną pavyzdį.

1.6 TEOREMA. *Jei tariame, kad galioja a) tai*

$$\lim_{T\to\infty} \nu_T \left(\frac{\arg(L(\lambda, \alpha, 1/2 + it) - \Lambda(\lambda, \alpha, t))}{\sqrt{2^{-1} \log\log T}} < x \right) = \Phi(x).$$

Pastebėsime, kad $L(0, \alpha, 1/2 + it) = L(1, \alpha, 1/2 + it)$, tačiau ribinis elgesys skiriasi, kai λ artėja prie 0 ir 1.

Lercho transendčiosios funkcijos nulių pasiskirstymas

Lercho transendenčioji funkcija $\Phi(q, s, \alpha)$ yra analizinis pratęsimas eilutės

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(n+\alpha)^s},$$

kuri konverguoja visiems $\alpha > 0$, jei q ir s yra kompleksiniai skaičiai, kai $|q| < 1$ arba $|q| = 1$ ir $\sigma > 1$. Disertacijoje nagrinėjame funkciją $\Phi(q, s, \alpha)$, kaip kintamojo s funkciją su parametrais $q \in \mathbb{C}$, $0 < |q| \leq 1$ ir $0 < \alpha \leq 1$.

Yra žinoma, kad Rymano dzeta funkcija neturi nulių pusplokštumėje $\sigma \geq 1$. Kairėje pusplokštumėje $\sigma \leq 0$ ji turi tik trivialiuosius nulius, kai s yra lyginis neigiamas sveikasis skaičius. Primename, kad Rymano hipotezė teigia, jog visi likę nuliai išsidėstę ant kritinės tiesės $\sigma = 1/2$.

Hurvitzo dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ turi be galo daug nulių juostoje $1 < \sigma < 1 + \alpha$, jei α yra transendentusis arba racionalusis $\neq 1/2$, 1 (įrodė Davenportas ir Heilbronas). Kai α yra algebrinis įracionalusis skaičius, tą patį rezultatą įrodė Caselsas.

Tegu $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$. Voroninas (racionaliajam $\alpha \neq 1/2, 1$) ir Gonekas (transendenčiajam α) įrodė, kad funkcijos $\zeta(s, \alpha)$ nulių skaičiaus įvertis srityje $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ ir $0 < t < T$ yra T eilės, kai skaičius T yra pakankamai didelis. Gonekas taip pat įrodė, kad tam tikroms α reikšmėms funkcijos $\zeta(s, \alpha)$ visų netrivialiųjų nulių skaičiaus dalis ant tiesės $\sigma = 1/2$ yra griežtai mažesnė už 1.

Disertacijoje nagrinėjame funkcijos $\Phi(q, s, \alpha)$ nulius, kai $0 < \alpha < 1$ ir $q \in \mathbb{C}, 0 < |q| < 1$.

Tegu $N_\Phi(\sigma_1, \sigma_2, T) = N_\Phi(\sigma_1, \sigma_2, T, q, \alpha)$ žymi funkcijos $\Phi(q, s, \alpha)$ nulių skaičių srityje $\{s : \sigma_1 < \mathrm{Re}(s) < \sigma_2, 0 < \mathrm{Im}(s) \leqslant T\}$. Tarkime, kad $\sigma_0 = \sigma_0(q, \alpha)$ yra realusis skaičius apibrėžtas lygtimi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|q|^n}{\left(\frac{n}{\alpha} + 1\right)^{\sigma_0}} = 1.$$

Galima patikrinti, kad $\sigma_0 \leq c = 1.73\ldots$, čia $\zeta(c) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-c} = 2$. Kintant q ir α, skaičius σ_0 įgyja reikšmes iš intervalo $-\infty$ ir c.

2.1 TEOREMA. *Tegu* $q \in \mathbb{C}$, $0 < |q| < 1$. *Tegu* $0 < \alpha < 1$ *transendentusis skaičius. Tada kiekvienoje fiksuotoje juostoje* $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2 \leq \sigma_0$ *galioja*

$$T \ll N_\Phi(\sigma_1, \sigma_2, T) \ll T.$$

Be to, funkcija $\Phi(q, s, \alpha)$ *neturi nulių, kai* $\sigma > \sigma_0$.

Kaip jau minėta, Vineris ir Vintneris įrodė ryšį tarp polilogaritminės funkcijos nulių elgsenos srityje $\sigma > 1$ ir Rymano hipotezės. Autoriai įrodė, kad Rymano hipotezė yra teisinga, jei egzistuoja skaičius $0 < \varepsilon < 1$ toks, kad $Li_s(q) = \sum_{n=1}^{\infty} q^n n^{-s} \neq 0$, kai $\sigma > 1$ ir $1 - \varepsilon < q < 1$. Tačiau Montgomeris įrodė, kad polilogaritminė funkcija $Li_s\left(e^{-1/N}\right)$ turi nulių srityje $\sigma > 1$ visiems pakankamai dideliems skaičiams N ir Vinerio bei Vintnerio teorema tapo tuščia. Teorema 2.1 rodo, kad Lercho transendenčioji funkcija $\Phi(q, s, \alpha)$ taip pat turi nulių srityje $\sigma > 1$, kai $0.92 < q < 1$ ir α, $1/2 < \alpha < 1$ yra transendentusis skaičius. Tačiau kompiuteriniai skaičiavimai (1 lentelė) rodo skirtingą funkcijos $\Phi(q, s, \alpha)$ nulių elgseną srityje $\mathrm{Re}(s) > 1$, priklausomai nuo to, ar $\alpha = 1$, ar $\alpha \neq 1$. Tegu

$$R = \{s : \mathrm{Re}(s) > 1, 0 < \mathrm{Im}(s) \leqslant 1000\}.$$

1 lentelėje surašyti funkcijos $\Phi(q, s, \alpha)$ nulių skaičiai pasirinktiems skaičiams q ir α srityje R.

$\alpha \setminus$ q	**0.9**	**0.95**	**0.99**	**1**
0.9	2	8	34	40
0.95	4	10	37	46
0.99	14	27	41	45
1	0	0	0	0

1 LENTELĖ. Funkcijos $\Phi(q, s, \alpha)$ nulių skaičius R.

Apie Selbergo dzeta funkcijų elgseną kritinėje juostoje

Rymano dzeta funkcijai galioja svarbi funkcinė lygtis:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

arba

$$\xi(s) = \xi(1-s),$$

kai

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

Saidakas ir Zvengrovskis Rymano dzeta funkcijos moduliui įrodė tokią nelygybę. Kai $0 \leqslant \Delta \leqslant 1/2$ ir $t \geqslant 2\pi + 1$, tai

$$|\zeta(1/2 - \Delta + it)| \geqslant |\zeta(1/2 + \Delta + it)|.$$

Autoriai taip pat pažymėjo, kad tokį patį rezultatą įrodžius su griežta nelygybe, t.y. kai $0 < \Delta \leqslant 1/2$ ir $t \geqslant 2\pi + 1$, teisinga

$$|\zeta(1/2 - \Delta + it)| > |\zeta(1/2 + \Delta + it)|,$$

iš to sektų, kad Rymano hipotezė yra teisinga.

Kiek vėliau Saidakas, Zvengrovskis ir Matijasevičius įrodė, kad funkcijoms ζ ir ξ galioja nelygybė

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) < \mathrm{Re}\left(\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\right),$$

kai $|t| \geqslant 8$, $\sigma < 1/2$.

Sondovas ir Dumitresku įrodė, kad šie trys teiginiai yra ekvivalentūs:

I. Jei t yra fiksuotas realusis skaičius, tai $|\xi(\sigma + it)|$ didėja, kai $1/2 < \sigma < \infty$.

II. Jei t yra fiksuotas realusis skaičius, tai $|\xi(\sigma + it)|$ mažėja, kai $-\infty < \sigma < 1/2$.

III. Rymano hipotezė yra teisinga.

Panašiai, kaip ir Rymano dzeta funkcijai, Selbergo dzeta funkcijai $Z_\Gamma(s)$, apibrėžtai pilnoje modulinėje grupėje $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ (išsamus funkcijos $Z_\Gamma(s)$ apibrėžimas pateikiamas disertacijoje), taip pat galioja funkcinė lygtis:

$$\Xi(s) = \Xi(1-s), \tag{3}$$

čia

$$\Xi(s) = Z_\Gamma(s) Z_{id}(s) Z_{ell}(s) Z_{par}(s)$$

ir

$$
\begin{aligned}
Z_{id}(s) &= \left(\frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)}\right)^{1/6} (\Gamma_2(s))^{1/3}, \\
Z_{ell}(s) &= \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{-1/2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^{1/2} \Gamma\left(\frac{s}{3}\right)^{-2/3} \Gamma\left(\frac{s+2}{3}\right)^{2/3}, \\
Z_{par}(s) &= \frac{\pi^s}{\Gamma(s)\zeta(2s)\Gamma(s+1/2)2^s}.
\end{aligned}
$$

Funkcija $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija, $\zeta(s)$ - Rymano dzeta funkcija. Funkcija $\Gamma_2(s)$ vadinama dviguba Barneso gama funkcija. Disertacijoje įrodome teoremą.

3.1 TEOREMA. *Egzistuoja toks teigiamas skaičius C, kad*

$$
\mathrm{Re}\left(\frac{\Xi'(s)}{\Xi(s)}\right) < 0,
$$

kai $t > C$ ir $0 < \sigma < 1/2$.

Jei tariame, kad Rymano hipotezė yra teisinga, tai egzistuoja toks teigiamas skaičius C_1, kad

$$
\mathrm{Re}\left(\frac{Z'_\Gamma(s)}{Z_\Gamma(s)}\right) < \mathrm{Re}\left(\frac{\Xi'(s)}{\Xi(s)}\right),
$$

kai $t > C_1$ ir $0 < \sigma < 1/4$.

Selbergo dzeta funkcijai $Z_C(s)$, apibrėžtai ant kompaktiško Rymano paviršiaus (išsamus funkcijos $Z_C(s)$ apibrėžimas pateikiamas disertacijoje), galioja tokia funkcinė lygtis

$$
Z_C(s) = f(s) Z_C(1-s),
$$

čia

$$
f(s) = \exp\left(4\pi(g-1)\int_0^{s-1/2} v\tan(\pi v)\,dv\right).
$$

Arba $M(s) = M(1-s)$, kai

$$
M(s) = Z_C(s)\exp\left(2\pi(g-1)\int_0^{1/2-s} v\tan\pi v\,dv\right).
$$

Disertacijoje įrodome teoremą apie funkcijų $Z_C(s)$ ir $M(s)$ sąryšį:

3.4 TEOREMA. *Egzistuoja toks skaičius* $B > 0$, *kad funkcijoms* $Z_C(s)$ *ir* $M(s)$ *galioja nelygybė*

$$\operatorname{Re}\left(\frac{Z'_C(s)}{Z_C(s)}\right) < \operatorname{Re}\left(\frac{M'(s)}{M(s)}\right) < 0,\ t > B,\ 0 < \sigma < 1/2.$$

Funkcijos $Z_C(s)$ moduliui kritinėje juostoje galioja nelygybė:

3.5 TEOREMA. *Jei* $0 < \Delta \leqslant 1/2$ *ir* $t > t_0$, *tai*

$$|Z_C(1/2 - \Delta + it)| > |Z_C(1/2 + \Delta + it)|,$$

čia

$$t_0 = \frac{1}{\pi} \log \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = 0.15\ldots$$

Išvados

Pagrindiniai disertacijoje įrodyti teiginiai:

- Ribinis dėsnis galioja Lercho zeta funkcijai
$$L(\lambda,\alpha,s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\lambda n}}{(n+\alpha)^s},$$
kai parametrų pora (λ,α), priklausomai nuo T, artėja prie $(1,1),(1,1/2)$, $(1/2,1)$, $(1/2,1/2)$. Kai λ artėja prie 1 greičiau nei $1-e^{T/\log T}$, ribinis dėsnis galioja su tam tikromis modifikacijomis. Jei ribinis dėsnis galioja, rašome
$$\lim_{T\to\infty}\nu_T\left(\frac{\log|L(\lambda,\alpha,1/2+it)|}{\sqrt{2^{-1}\log\log T}}<x\right)=\Phi(x).$$
Kai (λ,α) artėja prie $(0,0),(1/2,0),(1,0),(0,1/2),(0,1)$, kad galiotų standartinis normalus ribinis dėsnis, iš $L(\lambda,\alpha,1/2+it)$ reikia atimti tam tikrus narius.
- Funkcija $N_\Phi(\sigma_1,\sigma_2,T)=N_\Phi(\sigma_1,\sigma_2,T,q,\alpha)$ yra funkcijos $\Phi(q,s,\alpha)$ nulių skaičius srityje $\{s:\sigma_1<\mathrm{Re}(s)<\sigma_2, 0<\mathrm{Im}(s)\leqslant T\}$. Tegu $\sigma_0=\sigma_0(q,\alpha)$ realusis skaičius apibrėžtas lygtimi
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|q|^n}{\left(\frac{n}{\alpha}+1\right)^{\sigma_0}}=1.$$
Galima įrodyti, kad $\sigma_0\le c=1.73\ldots$, čia $\zeta(c)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-c}=2$. Skaičius σ_0 įgyja reikšmes iš intervalo $-\infty$ ir c. Įrodome, kad funkcija $\Phi(q,s,\alpha)$ neturi nulių, kai $\sigma>\sigma_0$, o jos nulių skaičiaus įvertis juostoje $\sigma_1<\sigma<\sigma_2\le\sigma_0$ yra
$$T\ll N_\Phi(\sigma_1,\sigma_2,T)\ll T,$$
čia $q\in\mathbb{C}, 0<|q|<1$ ir $0<\alpha<1$ yra transendentusis skaičius.

  Tegu
$$R=\{s:\mathrm{Re}(s)>1, 0<\mathrm{Im}(s)\leqslant 1000\}.$$
Matematine programa MATHAMETICA suskaičiuojame funkcijos $\Phi(q,s,\alpha)$ nulių skaičių srityje R, kai q ir α yra fiksuoti:

$\alpha \setminus$ q	**0.9**	**0.95**	**0.99**	**1**
0.9	2	8	34	40
0.95	4	10	37	46
0.99	14	27	41	45
1	0	0	0	0

- Pažymėkime $Z_\Gamma(s)$ Selbergo dzeta funkciją, apibrėžtą pilnoje modulinėje grupėje $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ ir $\Xi(s) = Z_\Gamma(s)Z_{id}(s)Z_{ell}(s)Z_{par}(s)$. Funkcijoms $Z_\Gamma(s)$ ir $\Xi(s)$ galioja nelygybės:
$$\mathrm{Re}\left(\frac{\Xi'(s)}{\Xi(s)}\right) < 0,$$
kai $t > C > 0$ ir $0 < \sigma < 1/2$.

  Dar daugiau, tariant, kad Rymano hipotezė teisinga, funkcijoms Z_C ir $\Xi(s)$ galioja nelygybės:
$$\mathrm{Re}\left(\frac{Z_\Gamma'(s)}{Z_\Gamma(s)}\right) < \mathrm{Re}\left(\frac{\Xi'(s)}{\Xi(s)}\right),$$
kai $t > C_1 > 0$ ir $0 < \sigma < 1/4$.
- Tegu $Z_C(s)$ Selbergo dzeta funkcija apibrėžta ant kompaktiško Rymano paviršiaus. Tegu
$$M(s) = Z_C(s)\exp\left(2\pi(g-1)\int_0^{1/2-s} v\tan\pi v\,dv\right).$$
Funkcijoms $Z_C(s)$ ir $M(s)$ galioja nelygybės
$$\mathrm{Re}\left(\frac{Z_C'(s)}{Z_C(s)}\right) < \mathrm{Re}\left(\frac{M'(s)}{M(s)}\right) < 0,\ t > B > 0,\ 0 < \sigma < 1/2.$$
  Funkcijos $Z_C(s)$ moduliui galioja nelygybė
$$|Z_C(1/2 - \Delta + it)| > |Z_C(1/2 + \Delta + it)|,$$
kai $0 < \Delta \leqslant 1/2$ ir $t > t_0$. Čia $t_0 = \frac{1}{\pi}\log\frac{2}{\sqrt{5}-1} = 0.15\ldots$

Publikacijų sąrašas

Pagrindiniai disertacijos rezultatai yra išspausdinti šiuose straipsniuose:

- R. Garunkštis, A. Grigutis, A. Laurinčikas, *Selberg's central limit theorem on the critical line and the Lerch zeta-function*, New Directions in Value Distribution Theory of zeta and L-Functions: proceedings of Würzburg Conference, October 6–10, 2008, Shaker Verlag, 57–64, 2009.
- R. Garunkštis, A. Grigutis, *Zeros of the Lerch Transcendent Function*, Math. Model. Anal., Volume 17, Number 2, Taylor&Francis and VGTU, 245–250, 2012.
- A. Grigutis, *Selberg's Central Limit Theorem on the Critical Line and the Lerch Zeta-Function II*, Šiauliai Mathematical Seminar, Šiauliai, 31–40, 2010.

Rezultatų aprobavimas

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti šiose Lietuvos ir tarptautinėse mokslinėse konferencijose, kurios vyko Lietuvoje ir užsienyje:

- *50th Conference of Lihuanian Mathematical Society*, Vilnius, Lithuania, 2009.
- *Number Theory and its Applications*, An International Conference Dedicated to Kálmán Győry, Attila Pethő, János Pintz and András Sárközy, Debrecen, Hungary, 2010.
- *16th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis*, Sigulda, Latvia, 2011.
- *27th Journées Arithmétiques*, Vilnius, Lithuania, 2011.
- *International Conference in Honour of Jonas Kubilius*, Palanga, Lithuania, 2011.
- *Arctic Number Theory School*, Helsinki, Finland, 2011.

Disertacijos rezultatai taip pat buvo pristatyti Vilniaus universiteto matematikos ir informatikos fakulteto Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedros seminaruose.

Summary

The doctoral dissertation contains the material of scientific investigations done in 2008-2012 in the Faculty of Mathematics and Informatics at Vilnius University. The dissertation includes new theorems for the value distribution of Lerch and Selberg zeta-functions and computer calculations performed using the computational software program MATHEMATICA.

The dissertation consists of the introduction, 3 chapters, the conclusions and the references. The results of the thesis are published in three scientific articles in Lithuanian and foreign journals, reported in scientific conferences in Lithuania and abroad and at the seminars of the department.

In the first chapter, the limit theorems for several cases of the Lerch zeta-functions are proved. In the 1940s, Selberg proved that suitably normalized logarithm of modulus of the Riemann zeta-function on the critical line has a standard normal distribution. Selberg's proof was based on the Euler product; however, in general, Lerch zeta-functions have no Euler product.

In the second chapter, the theorem concerning the zero distribution of the Lerch transendent function is proved, and computer calculations of zeros in the region $\mathrm{Re}(s) > 1$ and $0 \leqslant \mathrm{Im}(s) \leqslant 1000$ are performed using MATHEMATICA.

In the third chapter, the monotonicity properties of Selberg zeta-functions are investigated. Monotonicity of these two functions is directly related to the location of zeros in the critical strip. The results are compared to the monotonicity properties of the Riemann zeta-function and the distribution of zeros. The zero distribution problem of the Riemann zeta-function is one of the most important unsolved problems in modern-day Mathematics.

Trumpos žinios apie autorių

Gimimo data ir vieta:

1984 m. vasario 23 d., Skuodas.

Išsilavinimas ir kvalifikacija:

1990 – 1999 m. Skuodo Bartuvos vidurinė mokykla.

1999 – 2002 m. Skuodo Prančiškaus Žadeikio gimnazija (baigta su pagyrimu).

2002 – 2006 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, matematikos ir matematikos taikymų studijų programos bakalauras.

2006 – 2008 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, matematikos magistro kvalifikacinis laipsnis.

2008 – 2012 m. Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, matematikos doktorantūra.

Darbo patirtis:

2006 – 2010 m. Danske bankas, kredito rizikos valdymo analitikas.

2010 – 2012 m. Mykolo Romerio universitetas, lektorius.

Nuo 2010 m. Vilniaus universitetas, lektorius, jaunesnysis mokslo darbuotojas.