ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
EDUKOLOGIJOS FAKULTETAS
UGDYMO SISTEMŲ KATEDRA

Aušra Dabulskienė

Edukologijos magistrantūros studentė

STATISTIKOS ELEMENTAI MATEMATINIŲ GEBĖJIMŲ DIAGNOSTIKOJE

Magistro darbas

Mokslinis vadovas
prof. dr. Arkadijus Kiseliovas

Šiauliai, 2009

Darbas originalus...Aušra Dabulskienė
(studento parašas)

TURINYS

SANTRAUKA

Dabulskienė A. STATISTIKOS ELEMENTAI MATEMATINIŲ GEBĖJIMŲ DIAGNOSTIKOJE: magistro baigiamasis darbas / mokslinis vadovas prof. dr. A. Kiseliovas; Šiaulių universitetas, Ugdymo sistemų katedra. – Šiauliai, 2009. – 80 p.

Magistro darbe analizuojami statistikos elementai matematinių gebėjimų diagnostikoje, išskirta pagrindinė darbo problema: ar olimpiados uždaviniai atitinka standartus? D. ir A. Kiseliovai teigia, jog matematika, kaip ir kalba, yra neatsiejama žmogaus gyvenimo dalis. Olimpiada yra aktuali dėl to, kad stiprina moksleivių valią, savarankiškumą, mąstymo lankstumą bei tikslumą, ryžtą nugalėti kliūtis. Tyrimo objektas – statistikos elementai matematinių gebėjimų diagnostikoje. Šio magistro darbo tikslas yra panaudoti statistikos elementus matematinių gebėjimų diagnostikoje. Tyrimo hipotezė**,** kad sprendžiant olimpiadinius uždavinius, svarbiausia yra loginis mąstymas ir žinios. Darbe iškelti penki uždaviniai, t. y. nagrinėjama įvairių Lietuvos ir užsienio autorių literatūra apie statistikos elementus, analizuojamos pagrindinės statistikos elementų sąvokos, nagrinėjami moksleivių matematiniai gebėjimai kaip didaktinės diagnostikos objektas, apibūdintas šalies ketvirtų klasių moksleivių matematikos mokėjimo lygmuo pagal pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrąsias programas, išanalizuotos ketvirtos klasės, olimpiadinių uždavinių sąlygos ir sprendimai pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrųjų programų kontekste ir pateikti rezultatai, rekomendacijos bei išvados.

Buvo atliktas tyrimas Lietuvos mastu. Tyrimui atsitiktinai iš kiekvieno šalies miesto bei rajono atrinkti 354 ketvirtų klasių moksleivių olimpiadiniai darbai ir analizuojami. Atlikus tyrimą, hipotezė pasitvirtino, kad šie olimpiados uždaviniai atitinka standartus, nes kiekvieno uždavinio sąlyga reikalauja ne daugiau to, ką privalo žinoti mokinys, besimokantis ketvirtoje klasėje. Darbe padarytos išvados, kad olimpiados užduotys reikalauja įvairių matematinių gebėjimų. Spręsdami bet kurią užduotį moksleiviai pasitelkia keletą skirtingų gebėjimų. Tam, kad būtų galima tiksliau analizuoti užduočių sprendimo eigą ir įvertinti skirtingus moksleivių gebėjimus bei jų klaidas.

Tyrimo rezultatai atveria galimybes išvengti trūkumų vertinant moksleivius. Mokytojai dažnai orientuojasi į tipinių užduočių sprendimą ir mažiau dėmesio skiria praktinėms užduotims. Gautomis išvadomis ir rekomendacijomis galėtų pasinaudoti pradinių klasių mokytojai bei vertintojai, nes surinkta medžiaga puikiai atskleidžia ketvirtokų mokėjimus bei jų matematinių žinių spragas.

Reikšminiai žodžiai: matematiniai gebėjimai, gebėjimų diagnostika, statistiniai metodai.

SUMMARY

Dabulskienė A. Thesis submitted for the degree of MSc: ELEMENTS OF STATISTICS IN DIAGNOSTICS OF MATHEMATICAL SKILLS. Academic Adviser: prof. dr. A.Kiseliovas; Šiauliai University, Department of Educational Systems. – Šiauliai, 2009. – 80 p.

The thesis paper analyzes the elements of statistics in diagnostics of mathematical skills as well as the main problem of the paper whether the tasks of a Mathematics contest coincides with the standards of teaching has been distinguished. Mr. and Mrs. Kiseliovai affirm that Mathematics the same as the language is an inherent part of human being life. The contest of Mathematics is relevant as it reinforces students' will, independence, flexibility and precision of thinking as well as ability to overcome different obstacles. The object of the research is the elements of statistics in diagnostics of mathematical skills. The aim of the thesis paper is to use the elements of the statistics in diagnostics of mathematical skills. The hypothesis of the research is logical thinking and knowledge when dealing with the tasks of the Mathematics contest. Five goals have been distinguished in the paper which analyze various literatures concerning the elements of statistics by Lithuanian and foreign authors and the main concepts of the elements of statistics. It also analyzes the mathematical skills of students as the object of didactic diagnostics. The paper describes the level of Mathematics knowledge of the primary school students according to Educational program, analyzes the Mathematical contest assignments in the context of Educational program of primary and basic school and provides its results, recommendations and conclusions.

The research has been carried out throughout Lithuania as 354 works of Mathematics contest of the 4th formers have been selected and analyzed from every city and district centre in Lithuania. The hypothesis has been affirmed after the research as well as the tasks of the Mathematical contest have been prepared according to Educational program because the task of each assignment requires as much as the pupil should know in the 4th form. The thesis also provides such conclusions that the assignment of the contest demands various mathematical skills as pupils use different mathematical skills when doing any assignment during the contest in order to analyze the procedure of the contest and evaluate the different skills and mistakes.

The results of the survey provide the opportunities to avoid fault evaluation of pupils. In general, most teachers tend to deal with typical assignments while the minority of them pays less attention to practical assignments. Primary school teachers and assessors could be recommended to use the forthcoming conclusions and recommendations as the available material perfectly reveals the abilities of the pupils and their knowledge shortage in Mathematics.

Meaningful expressions: mathematical skills, skill diagnostics, the elements of statistics.

ĮVADAS

Temos aktualumas ir problema. Gebėjimų diagnostika – tai subtilus menas, paslėptas psichopedagoginiuose asmens labirintuose (Kiseliova, Kiseliovas, 2004). Statistika – mokslas apimantis įvairių objektų ir reiškinių kiekybinių požymių, turinčių stochastinių savybių, tyrimą, kartu su tų reiškinių kiekybiniu turiniu ir siekiantis atskleisti tų reiškinių visumos bendrąsias savybes. Taip pat tiriantis išvadų pagal duomenų imtis sudarymą. Statistika – kiekybinių duomenų rinkimas, apdorojimas ir analizė kaip konkreti veikla (Laisvoji enciklopedija: Vikipedija, 2009). Žargoniškai statistika taip pat vadina reiškinių ir procesų kiekybinių duomenų visumą. Mokslas – sistemingas procesas, kurio tikslas yra įgyti daugiau žinių ir gilesnį supratimą; taip pat – socialinis reiškinys, kai visuomenė kuria ir kaupia žinias, panaudodama turimą mokslo infrastruktūrą bei mokslo metodus (Laisvoji enciklopedija: Vikipedija, 2009). Mokslui būdinga savita kalba ir stilius nusistovėjo per šimtmečius. Mokslas apima tyrimą, atitinkamą jo rezultatų pateikimą mokslinėse publikacijose ir bendrai pripažintų žinių apibendrinimą vadovėliuose ir šių žinių perdavimą mokiniams. Mokykla – svarbus besivystančios asmenybės gyvenimo etapas. Čia vaikai praleidžia daug laiko, susipažįsta su įvairia veikla. Viena pagrindinių ir svarbiausių – loginis mąstymas, sugebėjimas apibendrinti, analizuoti. Atlikti šias operacijas padeda matematikos pasaulis, kuriame yra ir statistikos elementai. Ar tenkintis tik būtinu, kiekvienam minimaliu matematikos žinojimu, ar gilintis į šio dalyko pagrindus, teisę rinktis turi pats mokinys. Tačiau net ir minimalus šio dalyko žinių kiekis yra labai svarbus. D. ir A. Kiseliovai (2004) teigia, jog matematika, kaip ir kalba, yra neatsiejama žmogaus gyvenimo dalis.

Jaunųjų matematikų konkursai populiarūs Lietuvoje daugiau kaip 40 metų. Šimtai moksleivių išbando savo matematinius gebėjimus Lietuvos matematikos olimpiadoje. Jos tikslas – sudominti mokinius matematika, gilinti teorines žinias, skatinti kūrybinių gabumų vystimąsi, išsiaiškinti gabiausius jaunuosius matematikus (Kiseliova, Kiseliovas, 2004). Olimpiada yra labai aktuali dėl to, kad stiprina moksleivių valią, savarankiškumą, mąstymo lankstumą bei tikslumą, ryžtą nugalėti kliūtis.

Norint išspręsti olimpiados uždavinius reikia žinių, loginio mąstymo, dažnai uždaviniai ir pratimai formuluojami nešabloniškai ir sprendžiami nestandartiškai, todėl ir iškyla pagrindinė tyrimo problema: ar olimpiados uždaviniai atitinka standartus?

Tyrimo objektas – statistikos elementai matematinių gebėjimų diagnostikoje.

Tyrimo hipotezė – sprendžiant olimpiadinius uždavinius, svarbiausia yra loginis mąstymas ir žinios.

Tyrimo tikslas – panaudoti statistikos elementus matematinių gebėjimų diagnostikoje.

Tyrimo uždaviniai:

1. Remiantis moksliniais literatūros šaltiniais išsiaiškinti statistikos elementų specifikas.
2. Išnagrinėti moksleivių matematinius gebėjimus kaip didaktinės diagnostikos objektą.
3. Apibūdinti šalies ketvirtų klasių moksleivių matematikos mokėjimo lygmenį pagal pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrąsias programas.
4. Išanalizuoti ketvirtos klasės olimpiadinių uždavinių sąlygas ir sprendimą, pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrųjų programų kontekste ir pateikti rezultatus.
5. Pateikti rekomendacijas kaip tobulinti statistikos elementus matematinių gebėjimų diagnostikoje.

Tyrimo metodologija. Mokslinės literatūros analizė statistikos elementų matematinių gebėjimų diagnostikoje klausimais. Praktinė patirtis vertinant ketvirtos klasės olimpiadinius uždavinius: įvertinti esamą situaciją, taip pat pastebėti iškylančias problemas, trūkumus, privalumus mokiniams sprendžiant olimpiadinius uždavinius. Siekiant išsiaiškinti, kaip panaudoti statistikos elementai matematinių gebėjimų diagnostikoje, buvo atliktas tyrimas:

I etapas. Norint išanalizuoti statistikos elementus matematinių gebėjimų diagnostikoje buvo analizuojama mokslinė literatūra.

II etapas. Parengtų užduočių, skirtų Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiadai, kuri įvyko 2007 m. kovo mėn. įvairiuose Lietuvos miestuose, analizė.

III etapas. Testų rezultatų statistinis apdorojimas, kiekybinė ir kokybinė duomenų analizė. Tyrimo duomenys apdoroti SPPS 10.0 Windows ir Microsoft Excel 2003 programomis.

IV etapas. Apibendrintos apklausos ir kokybinės bei kiekybinės duomenų analizės rezultatai, suformuluotos išvados bei parengtos rekomendacijos.

Tyrimo metodai:

- Teoriniai – mokslinės literatūros ir dokumentinės medžiagos analizė, lyginimas, apibendrinimas.
- Empiriniai – moksleivių matematinių gebėjimų vertinimo, matematikos olimpiados vyksmo stebėjimas bei lyginamasis tyrimas.
- Matematinės statistikos metodai.

Tyrimo imtis. Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiadoje dalyvavo labai daug moksleivių. Dėl žmogiškųjų išteklių bei techninių duomenų apdorojimo galimybių tyrimui atsitiktinai iš kiekvieno šalies miesto bei rajono atrinkti 354 ketvirtų klasių moksleivių olimpiadiniai darbai. Tyrimas vyko nuo 2007 sausio mėnesio iki 2008 vasario mėnesio.

Atliekant tyrimą buvo laikomasi šių etikos principų (Bitinas, 2002; Žydžiūnaitė, 2002; Kardelis, 2002):

- tyrėjo atsakomybė už galimas neigiamas pasekmes;
- tiriamųjų savanoriškumas;
- teisingumo principas (neužduodami klausimai apie asmeninį tiriamųjų gyvenimą);
- informacijos apie tyrimo paskirtį suteikimas, informuojant respondentus apie tyrimo tikslus bei gautų rezultatų paskelbimą;
- tyrimo anonimiškumas, užtikrinantis garantuojant duomenų apie konkrečius asmenis ar ugdymo įstaigas konfidencialumą bei neprašant tiriamųjų pateikti juos identifikuojančią informaciją.

Rezultatų naujumas ir jų teorinis reikšmingumas. Tyrimo tema dar plačiai nenagrinėta. Reikšmingiausi darbai atlikti D. ir A. Kiseliovų, todėl rašant magistrinio darbo teorinę dalį daugiausia rėmiausi šiais autoriais. Statistikos elementai plačiai taikomi ne tik mokykloje, bet ir visame pasaulyje. Šiuo darbu įvertinta, ar ketvirtų klasių olimpiadiniais uždaviniai atitinka standartus. Sukaupta medžiaga apie:

- statistikos elementus;
- ketvirtos klasės matematinių uždavinių sprendimą.

Rezultatų praktinis reikšmingumas. Pasirinktos temos rezultatų praktinį reikšmingumą sudaro tai, kad tyrimo rezultatai atveria galimybes išvengti trūkumų, problemų vertinant moksleivius. Mokytojai dažnai orientuojasi į tipinių užduočių sprendimą, ir mažiau dėmesio skiria praktinėms užduotims. Šiuo darbu galės remtis pradinių klasių mokytojai ir vertintojai.

Darbo struktūra. Šį magistro darbą sudaro: įvadas, 3 skyriai, išvados, rekomendacijos, santraukos lietuvių ir anglų kalba, priedai. Darbo apimtis 80 puslapių, pateikiama 15 lentelių, 30 paveikslų, literatūros sąraše 63 šaltiniai.

I skyrius. MATEMATINIŲ GEBĖJIMŲ DIAGNOSTIKOS MATEMATIKA

1.1 Aprašomoji statistika

Aprašomoji statistika – tai duomenų sisteminimo ir grafinio vaizdavimo metodai. Aprašomosios statistikos metodų taikymas yra labai svarbus statistinio uždavinio sprendimo etapas. Dažnai išsamus surinktos informacijos aprašymas bei duomenų grafikai leidžia daryti pagrįstas išvadas apie visos populiacijos nagrinėjamus požymius.

Vienas iš didžiausių aprašomosios statistikos privalomų yra tai, kad ji leidžia koncentruotai užrašyti informaciją, esančią dideliuose duomenų masyvuose. Todėl aprašomoji statistika gali būti taikoma ir visos populiacijos duomenims apdoroti (Čekanavičius, Murauskas, 2006).

Kiek gerai testo klausimas ar užduotis įvertinta mokymosi rezultatus? Atsakymas priklauso nuo testo užduočių tikslingumo. Tinkama testui užduotis yra tokia, kuri optimaliai atitinka testo tikslą (pvz., mokymų programos įsisavinimas, žinių įvertinimas, moksleivių gebėjimų atitiktis išsilavinimo standartams, sėkmės prognozavimas ir pan.). Testavimui tinkamą užduotį apibūdina testui keliami reikalavimai.

Vidurkis yra statistinės visumos tipiškų dydžių arba jų grupių apibendrinanti charakteristika. Jo ypatybė yra ta, kad viena savo reikšme išreiškia tai, kas bendra, būdinga visai tyrimo imčiai. Ši vidurkio ypatybė pasireiškia veikiant didžiųjų skaičių dėsniui, kai esant pakankamai dideliam vienetų skaičiui, atsitiktinės požymių reikšmės niveliuojasi (viena kitą panaikina) ir išlieka tik tai, kas bendra visai visumai.

Jeigu statistinę visumą žymėsime X, o jos variantus $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$, tai šią visumą sudarys n variantų. **Aritmetinį vidurkį**, kuris skaičiuojamas X_i variantų suma dalijant iš variantų skaičiaus n, žymėsime $\overline{X}$, t. y.

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{1}$$

Aritmetiniam vidurkiui būdingos šios savybės:

1. Požymio reikšmių nukrypimų nuo aritmetinio vidurkio suma lygi nuliui.
2. Visus variantus padidinus ar sumažinus d kartų, vidurkis taip pat padidėja ar sumažėja d kartų.
3. Padidinus ar sumažinus kiekvieno varianto dažnumą k kartų, vidurkis nesikeičia.
4. Visus variantus sumažinus ar padidinus pastoviu dydžiu A, vidurkis sumažėja ar padidėja dydžiu A.

Norint surasti empirinės asimetrijos ir eksceso koeficientų formules, pirmiausia įvedamos empirinio pradinio momento

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \text{, kai } k \in N, \tag{2}$$

ir empirinio centrinio momento

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^k \text{, kai } k \in N, \tag{3}$$

formulės.

Taigi, remiantis šiomis formulėmis, empirinės asimetrijos koeficientas $G_1 = \frac{M_3}{S^3}$ ir empirinis eksceso koeficientas $G_2 = \frac{M_4}{S^4} - 3$. Imties eksceso koeficientas G_2 yra histogramos lėkštumo matas.

Jeigu $G_2 > 0$ – histograma lėkšta, t. y. duomenų sklaida apie vidurkį yra didesnė nei normaliosios kreivės atveju. Jeigu $G_2 < 0$ – histograma smaili, t. y. duomenų sklaida apie vidurkį yra mažesnė nei normaliosios kreivės. Jeigu $G_2 = 0$, tai sklaida apie vidurkį tokia pati kaip ir normaliosios kreivės.

Asimetrijos ir eksceso koeficientai yra panašumo į normaliąją kreivę matai.

Moda – tai dažniausiai pasitaikantis arba dažniausiai pasikartojantis statistinės eilutės variantas M_0. Jeigu dažniausiai pasikartoja vienas kuris nors variantas, pasiskirstymą vadiname vienmoduliniu, jeigu du variantai – bimoduliniu. Jeigu visi variantai aptinkami vienodai dažnai – pasiskirstymo eilutėje modos nėra.

Nesugrupuotiems duomenims modą atitinka variantas, kurio dažnumas didžiausias. Sugrupuotiems duomenims, kai intervalai lygūs, tokiu pačiu būdu nustatomas modalinis intervalas (kurio dažnumas didžiausias), o po to interpoliacijos būdu intervalo viduje apskaičiuojama modos reikšmė. Naudojama ši formulė:

$$M_0 = x_0 + d\frac{f_2 - f_1}{\left(f_2 - f_1\right) + \left(f_2 - f_3\right)} \tag{4}$$

arba

$$M_0 = x_0 + d\frac{D_1}{D_1 + D_2}, \tag{5}$$

čia d – intervalo dydis; $D_1 = f_2 - f_1$ – skirtumas tarp modalinio intervalo dažnumo ir priešmodalinio intervalo dažnumo; $D_2 = f_2 - f_3$ – skirtumas tarp modalinio ir pomodalinio intervalų dažnumo.

Mediana, arba medianinis dydis, tai vidurinis sutvarkytos statistinės eilutės narys M_e, dalijantis ją į dvi lygias dalis. Ranguotoje nelyginio narių skaičius eilutėje medianos reikšmė sutaps su vidurinio varianto reikšme, o lyginio narių skaičiaus eilutėje mediana yra dviejų vidurinių narių vidurkis, tiksliau

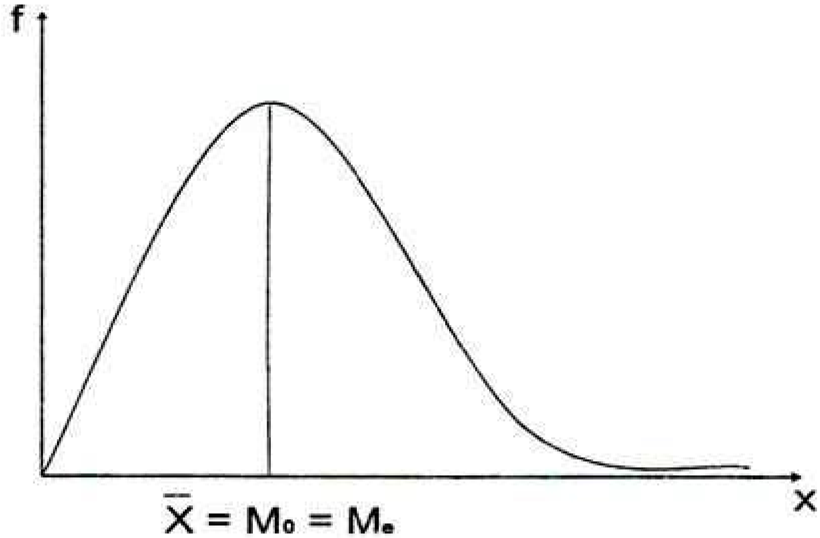
$$M_e = \begin{cases} X_{(l+1)}, jeigu \quad n = 2l+1, \\ \frac{1}{2}\left(X_{(l)} + X_{(l+1)}\right), jeigu \quad n = 2l. \end{cases} \tag{6}$$

Intervalinėje eilutėje mediana skaičiuojama keliais etapais:

- nustatomas vidurinio statistinės eilutės nario numeris;
- apskaičiuojamas intervalas, kuriame yra medianinė reikšmė;
- pagal formulę apskaičiuojama mediana.

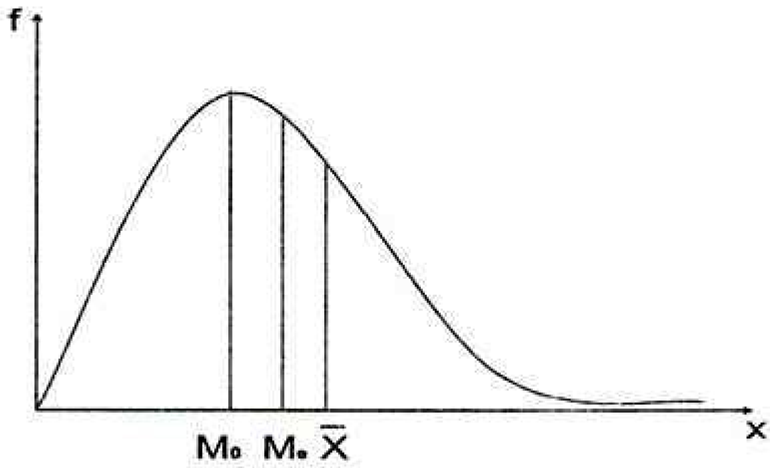
Aritmetinio vidurkio, medianos ir modos tarpusavio charakteristikų santykis parodo pasiskirstymo asimetrijos kryptį ir laipsnį:

1. Jeigu šių rodiklių reikšmės lygios $\left(\overline{X} = M_e = M_0\right)$, turime simetrišką pasiskirstymą (1 pav.).



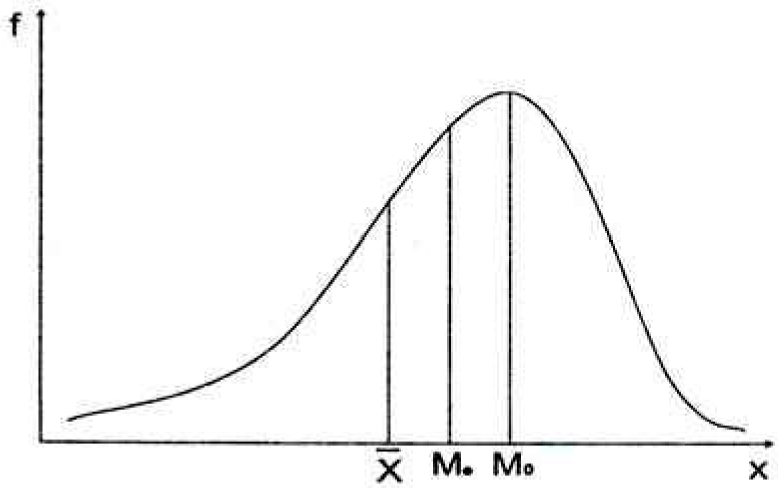
1 pav. **Normalinio pasiskirstymo (simetrinė) histograma**

2. Jeigu $\overline{X} > M_e > M_0$ - turime teigiamą dešiniašonę asimetriją (2 pav.).



2 pav. **Dešiniašonės asimetrijos histograma**

3. Jeigu $\overline{X} < M_e < M_0$ - turime neigiamą kairiašonę asimetriją (3 pav.).



3 pav. **Kairiašonės asimetrijos histograma**

Užduoties sunkumas – tai užduoties charakteristika, išreiškianti statistinį jos išspręstumo lygį tiriamųjų grupėje. Testo užduočių sunkumo analizė yra vienas iš svarbiausių testo sudarymo ir atskirų užduočių diagnostinių savybių nustatymo etapų (Thorndike et al., 1991).

$$p = \frac{n_t}{n}. \tag{7}$$

Jeigu užduotis yra elekcinė, tai sunkumo indeksas gali būti apskaičiuojamas atsižvelgiant į tikimybę atspėti teisingą atsakymą:

$$p = \frac{n_t - \frac{n - n_t}{k-1}}{n}, \tag{8}$$

kur k yra pasirinktinų atsakymų skaičius. Užduoties sunkumo indeksas gali įgyti reikšmes nuo 0 iki 1, o elekcinės užduoties atveju – nuo $\frac{1}{1-m}$ iki 1. Padauginę 1 ir 2 iš 100 gausime procentinę užduoties sunkumo išraišką (Wood, 1960).

Testo užduočių sunkumo analizės tikslai yra:

a) atrinkti optimalias pagal sunkumą užduotis,

b) parinkti užduoties vietą teste.

Jeigu užduotys yra per sunkios ar per lengvos, tai testo validumas ir patikimumas sumažėja. Klasikinėje testų teorijoje darant prielaidą, kad konkrečią užduotį išsprendusių moksleivių dažnis yra normaliai pasiskirstęs atsitiktinis dydis, rekomenduojama į testą įtraukti tik tas užduotis, kurias išsprendė ne mažiau kaip 16% ir ne daugiau kaip 84% moksleivių. Užduotis laikoma vertinga, jeigu jos sunkumo įvertis yra tarp 0,16 ir 0,84. Užduotis teste išdėstome taip, kad pirmosios būtų lengvesnės ir motyvuotų moksleivį, skatintų jo pasitikėjimą, paskutinės sunkesnės. Panašiu principu sutvarkyta ir kiekviena užduočių grupė. Atrinkdami užduotis, šiomis taisyklėmis dažniausiai ir vadovavomės, tačiau išimtinais atvejais į testą įtraukiame ir lengvesnių užduočių, jeigu jų skiriamoji geba buvo pakankama, o užduoties turinys, ekspertų nuomone, didaktikai reikšmingas, nes jos teikia informaciją apie silpnesnius moksleivius.

Tačiau, jeigu testo tikslas yra išskirti tiriamuosius pagal tam tikrą užduočių atlikimo lygmenį – tarkime, atrankos tikslais (baigiamieji ar stojamieji egzaminai, profesinio tinkamumo atranka ir t. t. – tada parenkamos užduotys, kurių p kinta siaurame intervale, atitinkančiame tą užduočių vykdymo lygį.

Užduoties standartinis nuokrypis nėra labai informatyvus dichotomine skale matuotos užduoties parametras, nes teikia panašią informaciją kaip ir sunkumo indeksas.

Testo užduoties diskriminacija. Diskriminacija (skiriamoji geba) yra testo užduoties savybė diferencijuojanti moksleivius pagal viso testo rezultatus. Klasikinėje testų teorijoje užduoties diskriminacija įvertinama keletu metodų, kurių esmė yra ryšių tarp viso testo rezultato, dažniausiai išreikšto adityvia skale, ir konkrečios užduoties išspręstumo skaičiavimas. Matematinių pasiekimų testo sudarymo metodikoje užduočių diskriminaciją apibūdiname dviem parametrais: diskriminacijos indeksu ir taškinės biserijinės koreliacijos koeficientu.

Diskriminacijos indeksą skaičiavome polinių grupių metodu. Įrodoma, kad tiksliausi rezultatai yra gaunami tada, kai šių grupių apimtys sudaro po 27% imties tūrio. Diskriminacijos indeksu (žymėsime D) vadinsime užduoties sunkumo polinės grupės skirtumą:

$$D = p_{\max} - p_{\min} = \frac{n_{t_{\max}}}{n_{\max}} - \frac{n_{t_{\min}}}{n_{\min}}, \tag{9}$$

kur $n_{\min}$, $n_{\max}$ yra moksleivių skaičius polinėse pagal testo rezultatus grupėse (atitinkamai „geriausioje“ ir „blogiausioje“), $n_{t_{\min}}, n_{t_{\max}}$ - šioms grupėms priskiriamų moksleivių, teisingai išsprendusių duotą užduotį, skaičius, $p_{\min}$, $p_{\max}$ - užduoties sunkumas polinėse grupėse.

Diskriminacijos indekso reikšmės gali kisti nuo -1 iki 1. Neigiami įverčiai reiškia, kad gerai testą išsprendę moksleiviai apskritai duotą užduotį sprendžia blogiau, negu blogiausiųjų testo rezultatų grupei priklausantieji. Užduočių selekcijai naudojame *D* reikšmių interpretacijos lentelę. Atmetame visus uždavinius, kuriems *D* reikšmės mažesnės už 0,20.

1 lentelė

Diskriminacijos reikšmių D interpretacijos

D reikšmė	Interpretacija
-1,00 – 0,20	Blogai
0,21 – 0,30	Vidutiniškai
0,31 – 0,40	Gerai
0,41 – 1,00	Labai gerai

Užduočių skiriamąją gebą įvertiname skaičiuodami ir **taškinės biserijinės koreliacijos koeficientą.** *N* dydžio imties taškinės – dviejų sekų koreliacijos koeficientas yra

$$r_{pb} = \frac{\overline{x_t} - \overline{x}}{\sigma_x} \sqrt{\frac{p}{1-p}}, \tag{10}$$

čia p – užduoties sunkumas, $\overline{x_t}$ - moksleivių, teisingai atlikusių užduotį, testavimo rezultatų vidurkis, $\overline{x}$ - visų moksleivių testavimo rezultatų vidurkis, σ_x - testavimo rezultatų vidutinis kvadratinis nuokrypis. Jeigu *D* įvertina užduoties išspręstumą atsižvelgiant į testo rezultatus, tai r_{pb} įvertina testo rezultatus atsižvelgiant į užduoties išspręstumą. Koeficientas r_{pb} gali įgyti reikšmes nuo -1 iki 1. Artimas vienetui taškinės biserijinės koreliacijos koeficientas rodo, kad užduotis labai gerai skiria tiriamuosius: ją išsprendę moksleiviai dažniausiai gerai atlieka ir visą testą, ir atvirkščiai. Artimos nuliui ir neigiamos r_{pb} reikšmės rodo, kad užduoties išspręstumas neturi ryšio arba nesuderinamas su viso testo rezultatais. Tokios užduotys nesusijusios su tiriamo psichometrinio konstrukto apraiškomis, todėl yra atmestinos. Testo užduotys, kurioms $\overline{x_t} \le \overline{x}$, kai $r_{pb} \le 0$, laikomos „blogomis“. Tai pasireiškia tuo, kad tiriamieji, kurie teisingai atsako į klausimą, vidutiniškai gauna tokius pat ar net žemesnius *Y* įvertinimus, kaip tie, kurie neteisingai atsako į klausimą.

Klasikinėje testų teorijoje įprasta selekciją atlikti iteracine procedūra: netinkamos užduotys atmetamos ir vėl skaičiuojami testo parametrai. Apskritai r_{pb} išreiškia užduoties ir testo rezultatų, matuotų *S* skalėje, ryšį, tačiau mes, konstruodami testus, taikėme ir skalę *R*, sudarytą pagal *IRT* metodiką.

Kadangi konstruojamo testo rezultatų skirstinys nėra normalusis ir turi aiškią dešinę asimetriją, tai užduočių, kurių išspręstumas yra labai aukštas, taškinės biserijinės koreliacijos su testu koeficientas yra palyginti didelis ir negali visiškai atspindėti diskriminacinių užduoties savybių.

Užduoties ir testo ryšį galima įvertinti ir pagal jo ir kitų testo užduočių koreliaciją. Atsisakoma prielaidos, kad yra žinoma pilna objektą nusakančių požymių sistema, kad testo užduotys apima visas šių požymių apraiškas. Konkretus testas traktuojamas kaip generalinės užduočių aibės, kurių sprendimo rezultatai yra nagrinėjamo psichometrinio konstrukto apraiškos, imtis. Begalinė generalinė testo užduočių aibė indukuoja be galo didelę interkoreliacinę matricą ir testo interkoreliacinė matrica gali būti traktuojama kaip šios begalinės matricos atsitiktinė imtis. Užduoties *i* ryšį su kitomis testo užduotimis galime apibūdinti koreliacijos koeficiento tarp jos ir kitų užduočių vidurkiu. Užduotie *i* koreliacija r_{it} su tikrąja požymio reikšme lygi kvadratinei šakniai iš vidutinės koreliacijos su visais uždaviniais.

$$r_{it} = \sqrt{\overline{r_{ij}}}, \tag{11}$$

čia $\overline{r_{ij}}$ yra *i*-tosios užduoties koreliacijos su visomis užduotimis vidurkis. Nors apskritai ši išvada yra teisinga begalinės užduočių aibės atveju, šia formule rekomenduojama naudotis ir atliekant užduočių atranką. Atrenkamos tos užduotys, kurių r_{it} yra didžiausias.

Faktorinė analizė ir skalių sudarymas. Vienas iš pagrindinių faktorinės analizės užduočių yra sumažinti pirminių duomenų skaičių, prarandant kuo mažiau informacijos apie tiriamą reiškinį. Testas yra tik maža dalis užduočių, kurių sprendimas atskleistų moksleivio matematinius gebėjimus, todėl pasirinktas alfa faktorinės analizės modelis, grindžiamas prielaida, kad faktorius yra begalinės užduočių aibės tiesinė kombinacija. Iš pradžių buvo atliekama viso testo alfa faktorinė analizė, kurios rezultatai parodė, kad testo užduotys susijusios su keletu faktorių. Tuo pagrindu išskyrėme su kiekvienu faktoriumi labiausiai koreliuojančių užduočių grupes ir vėl tikrinome, ar šių grupių užduočių sprendimą lemia vienas faktorius. Buvo atrenkamos tik tos užduotys, kurios koreliuoja su bendru faktoriumi.

Atliekant faktorinę analizę pateikiama ne tik testų užduočių interkoreliacinė matrica, bet ir alfa faktorinės analizės rezultatai: kiekvienos užduoties faktorinis svoris ir parametrai, nusakantys matematinio faktorinės analizės modelio kokybę (Kaiser-Meyer-Olkin /KMO/ koeficientas, įvertinantis interkorealiacinės matricos tinkamumą faktorinei analizei, ir faktoriaus aprašomoji galia, išreikšta faktoriui tenkančios dispersijos procentais). Vertindami faktorinės analizės rezultatus, atsižvelkime į tai, kad alfa faktorinės analizės rodikliai (faktorinis svoris ir faktoriui tenkančios sklaidos procentas) paprastai būna mažesni, nei apskaičiuoti kitais faktorinės analizės metodais.

Skalės patikimumo įvertinimas. Testo patikimumas yra vienas iš pagrindinių jo metodologinės kokybės bruožų. Šalia testo patikimumo sąvokos kartais vartojamos ir kitos sąvokos, dažniausiai atspindinčios įvairius patikimumo aspektus: tikslumą, stabilumą, homogeniškumą, vidinį suderinamumą (konsistenciją). L. Jovaiša (Jovaiša, 1975, p. 159) pateikia tokį patikimumo apibrėžimą: „Diagnostinės metodikos patikimumas yra jos tikslumo laipsnis, kuriuo ji matuoja tam tikrą veiklos ar elgesio savybę“. Kiti autoriai (Lienert, Raatz, 1994, p. 9) jau apibrėžime akcentuoja patikimumo ir valdumo sąvokų skirtumus, apibrėždami jį kaip tikslumo laipsnį, kuriuo testas matuoja tam tikrą asmenybės ar elgsenos savybę, nesvarbu ar testas skirtas tai savybei matuoti. L. Burlačukas, S. Morozovas (Бурлачук, Морозов, 2001, p. 193) savo apibrėžimu konstatuoja dvi skirtingas patikimumo puses: „testo patikimumas – tai charakteristika, atspindinti psichodiagnostinių savybių matavimo tikslumą bei testo rezultatų stabilumą įvairių atsitiktinių faktorių poveikio aspektu.“ Panašia prasme galime kalbėti apie vidinį ir išorinį patikimumą.

Kita viena iš populiariausių sklaidos charakteristikų yra imties dispersija

$$S_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 . \tag{12}$$

Imties dispersija parodo duomenų sklaidą apie vidurkį.

Testo patikimumo statistinis rodiklis yra patikimumo koeficientas (žymėsime r_t). Kaip jau buvo minėta, klasikinė testų teorija postuluoja, kad testo matavimo rezultatas X susideda iš tikrojo rezultato θ ir atsitiktinės paklaidos ε, kurią gali sąlygoti daugelis faktorių: emocinė būsena, nuovargis, tiriamųjų požiūris į testavimą ir t. t. Remiantis šiuo modeliu, empirinę testo rezultatų dispersiją S_x^2 sudaro dvi komponentės: „tikroji“ dispersija S_t^2 ir paklaidos dispersija S_e^2.

$$S_x^2 = S_t^2 + S_e^2. \tag{13}$$

„Tikrosios“ ir empirinės dispersijos santykis yra pagrindinis testo patikimumo matas, jis vadinamas patikimumo koeficientu r_t.

$$r_t = \frac{S_t^2}{S_x^2} \tag{14}$$

Kitas rodiklis testo patikimumui įvertinti yra standartinė matavimo paklaida S_e, kurią patogu naudoti vertinant individualius testavimo rezultatus. Iš (13) ir (14) formulių:

$$\frac{S_t^2}{S_x^2} + \frac{S_e^2}{S_x^2} = 1, \tag{15}$$

$$\frac{S_e^2}{S_x^2} = 1 - r_t \tag{16}$$

gauname

$$S_e = S_x \sqrt{1 - r_t}\ . \tag{17}$$

Testavimo teorijoje ir praktikoje r_t įvertinti naudojantis (14) negalima, nes S_t^2 nežinoma, todėl šiam koeficientui apskaičiuoti taikomi specialūs koreliacinės ir dispersinės analizės metodai.

Įprasta išskirti keturias svarbiausias testo patikimumo nustatymo metodų grupes: *testo kartojimas, lygiagrečių testo formų tyrimas, testo dalijimas pusiau, konsistencinė analizė*. Reikia pažymėti, kad kiekviena metodika išreiškia kiek skirtingas patikimumo koncepcijas. L. Burlačukas, S. Morozovas (Бурлачук, Морозов, 2001, p. 194) pažymi, kad nė vienas iš metodų nėra idealus patikimumo koncerto požiūriu.

Matematinių gebėjimų testo rezultatai gali stipriai kisti net ir esant neesminiams iš pirmo žvilgsnio užduočių pobūdžio ar testavimo sąlygų pokyčiams, todėl jį konstruodami daugiau dėmesio skyrėme vidinio patikimumo aspektams.

Testo patikimumas. Kadangi patikimumas atspindi įvertinimo tikslumą, jis yra svarbi testo savybė. Testavimo kontekste tikslumas reiškia tiriamojo įvertinimų stabilumą pakartotinai atliekant identišką testą. Pagal klasikinę testų teoriją, testo patikimumas vertinamas koreliacijos koeficientu tarp dviejų analogiškų testo formų nustatytų rezultatų r_t. Ši koreliacija praktikoje apskaičiuojama įvairiais būdais. Trumpai apibūdinsime patikimumo metodų grupes matematinių gebėjimų testo konstravimo požiūriu.

Retestas (testo kartojimas). Retestas – vienas paprasčiausių testo patikimumo įvertinimo metodų, duodantis patikimumo charakteristiką, gaunamą po atitinkamo laiko pakartojus testą toje pačioje tiriamųjų imtyje. Apie testo patikimumą šiuo atveju sprendžiama pagal tai, kiek sutampa abiejų testavimų duomenys. Taigi patikimumo rodikliu r_t galima laikyti koreliacijos koeficientą tarp pirmojo ir antrojo testavimo rezultatų. Kartais tokiu būdu apskaičiuotas patikimumo rodiklis interpretuojamas kaip santykinio (laikino) matuojamos savybės stabilumo charakteristika. Konstruojant matematinių gebėjimų testą, jo patikimumo nustatymas šiuo metodu yra problemiškas, nes:

- paprastai teste yra keletas ypatingų ir įdomių užduočių, kurias moksleiviai lengvai įsimena;
- moksleiviai po pirmojo testavimo tarpusavyje ar kartu su mokytoju dažnai dar kartą aptaria ir išsiaiškina testo užduotis;

- yra nemaža tikimybė, kad mokytojas po pirmo testavimo mokymo procese tikslingai formuoja įgūdžius, reikalingus panašioms užduotims teisingai atlikti;
- matematikos gebėjimų psichometrinio konstruktas savo prigimtimi nėra stabilus: permanentinis mokymo procesas yra tikslingai nukreiptas į matematinių gebėjimų raidą, todėl dėsningam testavimo rezultatų pokyčiui yra reikšmingas ir palyginti trumpas laiko tarpas tarp testavimų.

Lygiagrečių testo formų metodas. Testo patikimumas įvertinamas skaičiuojant koreliacijos koeficientą tarp dviejų lygiagrečių jo formų rezultatų toje pačioje tiriamųjų grupėje. Pateikiant du testo variantus, gali būti iki minimumo sumažinamas laikas tarp testavimų ir išvengta iškraipymų, susijusių su konstrukto stabilumu ir testo išmokimo efektais, tačiau susiduriama su identiškos stimulinės medžiagos parinkimo problemomis. Šis patikimumo vertinimo metodas gerai tiktų mokymosi pasiekimų testams, mes jį taikėme žvalgomajame tyrime.

Testo dalių patikimumas. Šis metodas leidžia patikrinti testo reliabilumą atliekant jį tik vieną kartą. Šis būdas reikalauja mažiau medžiagos ir laiko sąnaudų, negu du ankstesnieji. Testo užduotys dalijamos į dvi grupes ir traktuojamos kaip perpus mažesnės lygiagrečios formos. Yra taikoma keletas dalijimo pusiau būdų: atsitiktinis dalijimas, dalijimas remiantis užduočių charakteristikomis, dalijimas užduoties numerio lyginimo pagrindu. Skaičiuodami matematinių gebėjimų testo patikimumo parametrus šiuo metodu (Split-half modelis) užduotis į grupes dalijame pastaruoju būdu. Sudarome dvi adityvias skales ir skaičiuojame Pearsono koreliacijos koeficientą $r_{1,2}$ tarp užduočių grupių. Tačiau šis koeficientas išreiškia tik pusės testo reliabilumą. Viso testo reliabilumą koeficientą r_1 gauname taikydami Spearman-Brown pataisą:

$$r_t = \frac{2r_{1,2}}{1 + r_{1,2}}. \tag{18}$$

Jeigu testuojama panaudojant lygiagrečius testus, tuomet testo patikimumas yra vertinamas tų dviejų testų bendro įvertinimo koreliacijos koeficientu $r_{XX'}$. Šis patikimumo įvertinimo metodas vadinamas lygiagrečių testų patikimumu. Praktiškai tik didžiausios testavimo organizacijos turi resursų tokiems testams sukurti. Lygiagrečių testų patikimumo įvertinimams kyla tokia pati nuo laiko priklausanti grėsmė, kaip ir testo – retesto patikimumui.

Konsistencinė analizė. Šio metodo esmė yra ta, kad testas dalijamas ne į dvi, bet į keletą daugiau ar mažiau ekvivalenčių dalių ir įvertinamas šių dalių suderinamumas. Atsisakoma prielaidos, kad yra žinoma visa objektą nusakančių požymių sistema, kad testo užduotys išsemia visas šių požymių apraiškas. Konkretus testas traktuojamas kaip generalinės užduočių aibės, kurių sprendimo rezultatai yra nagrinėjamo psichometrinio konstrukto apraiškos, imtis. Begalinė generalinė testo užduočių aibė indukuoja be galo didelę interkoreliacinę matricą. Šios matricos elementų vidurkis $\overline{r_{ij}}$ išreiškia užduočių bendrumą, vidinį suderinamumą.

Empirinę $\overline{r_{ij}}$ reikšmę galima naudoti ir įvertinant testo užduočių sistemos, kaip visų užduočių, išreiškiančių nagrinėjamą savybę, imties patikimumą. Tarkime, užduočių grupės interkoreliacinės matricos koeficientų vidurkis yra normaliai pasiskirstęs atsitiktinis dydis, tuomet testo, sudaryto iš k užduočių, patikimumą galima įvertinti naudojant Spearman-Brown pataisą:

$$r_t = \frac{k\overline{r_{ij}}}{1+(k-1)\overline{r_{ij}}}. \tag{19}$$

Yra daug konsistencinės analizės modelių: Raju, Kuder ir Richardson, Cronbach, Ebel, Hoyt, Dressel. Vienas iš universalių, patogiausių ir plačiausiai taikomų patikimumo, vidinio suderinamumo rodiklių yra Cronbach alfa koeficientas. Jo skaičiavimas paremtas dispersine analize:

$$\alpha = \frac{N}{N-1}\left(1-\frac{\sum_i s_i^2}{s^2}\right), \tag{20}$$

kur N – testo užduočių skaičius, s_i^t - i-tosios užduoties empirinė dispersija, s^2 - testo empirinė dispersija.

Testavimo specialistai nesutaria, kokie skalių vidinio suderinamumo įverčiai yra priimtini. Anksčiau aukšta testo vidinė konsistencija buvo laikoma testo kokybės rodikliu, o šiuo metu yra nuomonių (Бурлачук, Морозов, 2001), kad aukšta vidinė konsistencija, ypač jeigu psichometrinis konstruktas yra sudėtingas, gali prieštarauti valdumo reikalavimams.

Klasikinę testų teorija naudojau skaičiuodama tyrimo rezultatų statistinius parametrus, o toliau, tik teoriškai, apžvelgiau Tikimybinę testų teoriją.

1.2. IRT (Item Response Theory) teorijos elementai ir jos taikymai

Nepaisant klasikinės testų teorijos (*CTT*) populiarumo, spartėjantis kompiuterinių technologijų vaidmuo gebėjimų diagnostikoje panaudojant testus išryškino nemaža trūkumų, ribojančių jos taikomumą, naudojant ją kaip pagrindą testų modeliavimui.

CTT geriausiai tinka tradicinėms testavimo situacijoms, tiek grupėms, tiek atskiriems respondentams, kuomet visi tikslinės užduočių sprendimo populiacijos nariai, t. y. asmenys, norintys išlaikyti mokyklos ar valstybinį baigiamąjį egzaminą, turi įvykdyti tokias pat arba panašias testų užduotis, kurios gali būti pateikiamos egzaminuojamajam raštu arba kompiuterine forma. Nepaisant formos, įvertinant asmens gebėjimus, yra svarbu, kad kiekviena testo užduotis turėtų savybių, atitinkančių atsakančiųjų į testus žinias arba įgūdžius. Dar daugiau, tikslus tiriamojo galimybių įvertinimas reikalauja atlikti pakankamai daug užduočių, kurių sudėtingumo lygis turi būti labai artimas individų gebėjimų arba jų įgūdžių lygiui. Heterogeninėms užduotims šie fiksuoto ilgio testo reikalavimai sudaro neefektyvias ir laiką gaišinančias testavimo situacijas, kurios paprastai trikdo testuojamuosius ir veda prie diagnostinių rezultatų paklaidų.

1950 metais *CTT* pagrindu pasirodė pirmieji gebėjimų testai. Jau to meto tyrėjai naudojosi atsirandančia kompiuterine technologija. Faktiškai šių naujesnių testavimo modelių galia suteikė galimybę parinkti testų užduotis atitinkančias tiriamųjų įgūdžių lygį testavimo metu, t. y. pritaikyti testą atskiram individui realiame laike. Šiais laikais, populiaresni ir gerai ištobulinti, šie modeliai sudaro testo atsakymų matematinių charakteristikų visumą, vadinamą Item Response Theory (*IRT*) teorija.

Auganti psichometrinių matavimų reikmė reikalauja vis tobulesnių analitinių įrankių, palyginti su tradicine matavimų teorija (klasikine testų teorija *CTT*). Paskutinį dešimtmetį žymiai išaugo *IRT* testų teorijos pritaikymas diagnostinių bei kitų tyrimų matavimuose, nes ši teorija yra patogi skalių ir užduočių analizei.

IRT yra modeliais pagrįstas matavimas, kuriame įvertinamas savybių lygis (matematinių gebėjimų, kritinio mąstymo, fizinio funkcionavimo ir pan.) priklausomai nuo respondento atsakymų ir nuo jam pateiktų klausimų ypatybių (Embretson and Reise, 2000).

CTT statistika apibūdinama tuo, kad užduočių sunkumas, užduočių diskriminacija bei patikimumas priklauso nuo atrinktos respondentų, kuriems buvo užduoti klausimai, imties iš populiacijos. *IRT* užduočių parametrai nepriklauso nuo imties ir yra laikomi nekintančiais skirtingose grupėse tyrinėjamoje populiacijoje. Be to, *CTT* duoda tik vieną patikimumo įvertinimą ir atitinkamą standartinę matavimo paklaidą, o *IRT* modeliai matuoja skalės tikslumą per pagrindinį nematomą (latentinį) kintamąjį θ (Cooke & Michie, 1997; Hays, Morales & Reise, 2000; Baker, 2001; Partchev, 2009). *IRT* respondento tikrojo lygio įvertinimas savybių (pvz., matematinių gebėjimų) kontinuume yra geresnis negu susumuotas skalės balas *CTT* (Santor & Ramsay, 1998).

IRT teorijos „startą“ yra įprasta sieti su danų matematiko Georgo Rascho vardu. Plėtodamas *IRT* modelių teoriją, G. Rasch (Rach, 1960) aptarė būtinybę sukurti statistinius modelius, turinčius specifinio objektyvumo savybę, ir pagrįstus dominuojančia idėja, kad respondento ir užduoties, kurią jis sprendžia, parametrai turi būti apskaičiuojami atskirai, bet palyginami panašiais matais (similar metric). Šis danų tyrinėtojas pirmą kartą detaliai aprašė matematinį testavimo modelį, kuriam pagal jo atradėjo vardą prigijo Rascho modelio pavadinimas.

Nors pagrįstai galima teigti, jog idėjiniai pamatai moderniajai testų teorijai buvo pradėti kloti dar gerokai anksčiau. Čia turime galvoje amerikiečių tyrinėtojų Lazarsfeldo latentinių klasių analizę, Guttmano skalogramų analizę bei Thurstone lygių intervalų metodą.

Nors daugelis mano, jog *IRT* yra moderni psichometrinė teorija, jos koncepcija ir metodologija yra plėtojama jau daugiau nei tris ketvirčiaus amžiaus. L. L. Thurstone (1925) straipsnyje *Psichologinių ir mokomųjų testų matavimo metodas* padėjo konceptualius *IRT* pamatus. Jame autorius pateikia metodą, kaip A. Binet ir T. Simon (Binet, Simon, 1905) vaikų intelekto testo uždavinius pritaikyti pagal amžių suskirstytai skalei. Taikant šią teoriją efektyviai pasireiškia nuo amžiaus priklausančios latentinės tiriamųjų savybės (Bock, 1997).

Tačiau L. L. Thurstone metė darbą matavimų srityje, kad galėtų tęsti sudėtinių faktorių plėtros analizę, tačiau jo kolegos ir studentai toliau tobulino teorinius *IRT* pagrindus.

Ilgainiui pirmenybę imta teikti logistinėms funkcijoms. Iš principo gali būti postuluojama bet kokio tipo funkcija (binominė, tiesinė, Guttmano ir t. t), aišku, jeigu ji konkrečių diagnostiniu atveju yra psichometriškai prasminga. Taigi konkretus matematinės funkcijos tipas pasirenkamas, atsižvelgiant į diagnostinį testavimo tikslą. Matematinė funkcija susieja tarpusavyje du dydžius: užduoties išsprendimo tikimybę (kuri, beje, apytiksliai gali būti įvertinta empirikai iš statistinių duomenų matricos) išvadinamąjį asmens parametrą, kuris ir atspindi metrologiškai švarų tiriamojo psichometrinė įvertį, randamą iš teorinės funkcijos. Į testą paprastai atrenkami tik tie uždaviniai, kurių empirinė statistika gali aproksimuoti pasirinktą modelį su minimalia paklaida. Vėliau, panaudojant maksimalaus tikėtinumo funkcijas (Maximum Likelibood), statistikai patikrinama visos matricos (kitaip tariant, viso testo) atitiktis formaliomis modelio sąlygomis. Testo žingsniai, netenkinantys formalių modelio sąlygų, paprasčiausiai atmetami kaip netinkami.

M. Richardson (1936) ir G. Ferguson (1943) įvedė normalų skliauto modelį (normal ogive model). D. Lawley (1943) pratęsė statistinę normalaus skliauto kreivės ypatybių analizę ir aprašė maksimalaus tikėtinumo įvertinimo procedūras (maximum – likelihood estimation procedures) užduočių parametrams ir bei tų parametrų tiesinėms aproksimacijos įvertinti. F. Lord (1952) pristatė nematomos (latent, unobserved = latentinės) savybės idėją ir atskyrė šį konstruktą nuo nustatomo (stebimo) testo balo. P. Lazarsfeld (1950) interpretavo nestebimą kintamąjį kaip testo užduočių atsakymų tarpusavio sąsajas.

F. Lord ir M. Novick (Lord & Novick, 1968) bei S. Embretson ir S. Reise (Embreston & reise, 2000) pateikė tikslų ir susistemintą klasikinės testų teorijos interpretavimą. R. Bock kartu su M. Aitkin (Bock & Aitkin, 1981) išplėtojo marginalinio maksimalaus tikėtinumo metodo (marginal maximum likelibood) algoritmą.

G. Fisher (Fisher, 1968) išplėtojo Rascho metodo pritaikymą psichologiniams matavimams, o B. Wright (Wright, 1997) pradėjo metodologiją pritaikyti pedagogikai ir elgesio medicinai.

IRT modelio pagrindai. *IRT* modelis atskleidžia ryšius tarp respondento atsakymo į užduotį ir pagrindinio nematomo kintamojo (dažnai vadinamo „gebėjimu“ ar „savybe“). Pagrindinis nematomas kintamasis psichopedagoginiuose tyrimuose gali būti bet koks apskaičiuojamas konstruktas, toks kaip statistinis mąstymas, kūrybiškumas, gebėjimas kritiškai mąstyti ir t. t. Nematomas kintamasis, paprastai žymimas „teta“ θ, yra tolydusis vienmatis konstruktas, paaiškinantis bendrą kitimą tarp užduočių atsakymų (Steinberg & Thissen, 1995). Tiriamieji, turintys aukštesnį θ lygmenį, turi didesnę galimybę teisingai atsakyti į klausimą arba išspręsti užduotį.

Visi *IRT* modeliai naudoja užduočių atsakymus, kad galėtų nustatyti išmatuotus θ įverčius. Taip pat patikrinti užduotis bei ištirti jų ypatybes (Mellenbergh, 1994). Kiekviena užduotis yra charakterizuojama vienu ar keletu modelio parametrų (Steinberg & Thissen, 1995; Baker, 2001; Partchev, 2009).

Kaip ir *CTT*, *IRT* prasideda nuo teiginio, kad individo atsakymą į tam tikrą testo užduotį arba klausimą nulemia nematomos individo gebėjimų savybės (Verstralen, Bechger & Maris, 2009), kurios paprastai pastoviai kinta pagal tam tikrą dimensiją (matavimą), dažniausiai žymima θ. Pagal *IRT*, tiek testo užduotys, tiek į jas atsakantys individai yra išsidėstę (kinta) pagal θ nuo mažiausios iki didžiausios reikšmės. Asmens i padėtis skalėje θ žymima θ_i ir paprastai vadinama asmens gebėjimu. Užduoties j padėtis skalėje θ, paprastai žymima b_j, apibūdina testo užduoties sunkumą (sudėtingumą). Intuityviai mes tikimės, kad teisingo atsakymo tikimybė j-tajai užduočiai monotoniškai didės, didėjant skirtumui $\theta_i - b_j$.

Dichotominių testo užduočių vertinimo atveju, t. y. užduotims, atsakymai į kurias gali būti teisingi arba neteisingi, visi *IRT* modeliai išreiškia teisingo atsakymo į testo užduotį tikimybę θ kaip funkciją nuo vieno ar daugiau užduoties parametrų. Praktinėms reikmėms dabar dažniausiai naudojami *IRT* modeliai yra vieno, dviejų ar trijų parametrų logistiniai modeliai.

Paprastas Rascho logistinis modelis. G. Rasch (Rasch, 1960) pirmasis išvystė vieno parametro logistinį modelį (kartais dar vadinamas paprastu logistiniu modeliu), tačiau šis modelis skiriasi nuo kitų žemiau aptartų modelių. Rascho modelyje tiriamasis charakterizuojamas paslėptų savybių lygiu ξ, o respondentui teikiami klausimai – sunkumo laipsniu δ. Teisingo atsakymo į klausimą tikimybė apibrėžiama kaip santykio ξ/δ funkcija (Tinsley, 1992).

Taikant šį modelį daromos dvi prielaidos (specifinis objektyvumo principas):

- analizuojamų klausimų sunkumo parametrai yra nepriklausomi nuo bet kurių subjektų (veiksnių), kurie buvo tirti, grupės;
- dviejų lyginamų subjektų ξ lygiai nepriklauso nuo klausimų aibės sudarymo (Mellenbergh, 1994).

Praktiniams klausimų sprendimams G. Rasch siūlo paprastą tikimybinę funkciją, kintančiai nuo 1 iki 1

$$T = \frac{\xi}{\xi + \delta}. \tag{1}$$

Šio modelio tikimybė interpretuojama kaip teisingų (teigiamų) atsakymų skaičius (Linden & Hambleton, 1997). Keisdami ξ į expθ, o δ i exp$b$ (Thissen & Orlando, 2001), gauname

$$T = \frac{\exp\theta}{\exp\theta + \exp b} = \frac{1}{1 + \exp[-(\theta - b)]}. \tag{2}$$

θ parodo respondento tiriamo konstrukto lygį, o b – klausimo sunkumą.

Taigi galima teigti, kad šis modelis turi tik vieną parametrą – užduoties sunkumą, o užduočių skiriamoji geba yra vienoda. Buvo nustatytos psichometrijos praktikos požiūriu itin patrauklios formalios šio modelio savybės. Visų pirma modelio optimalumas vadinamojo išsemtinių statistikų kriterijaus požiūriu. Tai reikšminga dviem aspektais. Pirma, surinktas balų skaičius tampa pakankama statistika, viską pasakančia apie gebėjimo parametrą. Todėl galima teigti, jog visiškai patikimai dirbti galima, remiantis vien duomenų matricos suminiais įverčiais pagal stulpelius ir eilutes. Antra, įverčių už pavienius uždavinius nereikia indeksuoti, nors testą sudaro skirtingo sunkumo uždaviniai (Rost, 1995).

Vieno parametro logistinis modelis. Rascho modelio raida buvo nepriklausoma nuo vieno parametro logistinio modelio raidos, bet abudu šie modeliai turi panašius požymius ir yra matematiškai ekvivalentūs. Vieno parametro logistinis modelis (Baker, 2001; Partchev, 2009) klausimui (uždaviniui) j apibrėžiamas kaip

$$T_j(u_j = 1 \mid \theta) = \frac{1}{1 + [-(\theta - b_j)]}, \tag{3}$$

čia $T_j(u_j = 1 \mid \theta)$ - sąlyginė tikimybė, kad respondentas į testo u j-ąjį klausimą pateiks teigiamą (teisingą) atsakymą, yra latentinės savybės (pvz. gebėjimo spręsti uždavinį, kritiškai mąstyti ir t. t.) θ ir sunkumo parametro b_i funkcija.

Šiame modelyje vidurkis lygus 0, o nuokrypis – 1 (Thissen, Orlando, 2001). Modelio paslėptas (latentinis) kintamasis θ turės normalųjį pasiskirstymą (Thissen, Steiberg, 1988).

Vis dėlto, nepaisant formalios elegancijos, vienparametriai modeliai neretai pasirodo esą labai restriktyvūs. Visų pirma todėl, kad realioje tyrimų praktikoje yra problematika sudaryti testą, kurio visi žingsniai būtų charakterizuojami vienoda skiriamąja geba.

Dviejų parametrų logistinis modelis. Rascho modelį, plėsdamas jo matematinių parametrų skaičių, 1968 m. tobulino A. Birnbaum (Birnbaum, 1968), o vėliau ir kiti tyrinėtojai (Rost, 1995). Lyginant su pradiniu modeliu, į lygtį buvo įvedami ir išbandomi nauji psichometriškai prasmingi parametrai. A. Birnbaum tiria, ar diskriminantinis parametras kinta taip pat, kaip ir vieno parametro logistinio ar Rascho modeliuose. Skirtumo tarp asmenybės savybės lygio ir klausimų sunkumo slenksčio (threshold – kreivės aukščiausio linkimo taško) santykinis reikšmingumas yra priklausomas nuo klausimų diskriminacijos dydžio (Embretson, Reise, 2000). Dviejų parametrų logistinis modelis (Baker, 2001; Partchev, 2009) apibrėžiamas lygtimi:

$$T_j\left(u_j = 1 \mid \theta\right) = \frac{1}{1 + \exp\left[-1{,}7a_j\left(\theta + b_j\right)\right]}. \tag{4}$$

Konstanta 1,7 yra įtraukta į šį modelį kaip pataisa tam, kad modelis artėtų prie normaliosios parabolės modelio. Būtent b_j, žymi kreivės statumą, todėl nusako testo žingsnio skiriamąją gebą.

Trijų parametrų logistinis modelis. Trijų parametrų logistinis modelis (Baker, 2001; Partchev, 2009) nusakomas kaip

$$T_j\left(u_j = 1 \mid \theta\right) = \frac{1 - c_j}{1 + \exp\left[-1{,}7a_j\left(\theta + b_j\right)\right]}, \tag{5}$$

čia:

b_j yra užduoties sudėtingumo parametras;

a_j yra užduoties diskriminavimo (išskyrimo, atskyrimo) parametras;

c_j yra vadinamasis „spėjimo“ parametras.

Spėjimo parametras c_j yra tikimybė teisingai atsakyti į testo *u* *j*-ąjį klausimą, net jeigu tiriamasis nežino atsakymo į šį klausimą. Šis parametras gali būti randamas empirikai iš duomenų matricos arba postuluojamas teoriškai. Tarkime, jeigu atsakymo formate numatyti keturi pasirinkimo variantai, tai teoriškai egzistuoja 25% tikimybė, jog užduotis teisingai gali būti išspręsta atsitiktinai.

Kai c_j lygus 0, trijų parametrų modelis virsta dviejų parametrų modeliu. Sunkumo parametras *b* yra θ reikšmė, kurioje respondentai turi (0,5 + 0,5c) · 100% tikimybę teisingai atsakyti į klausimą (Thissen, Orlando, 2001).

Vienas iš $P_j(\theta)$ interpretavimo būdų yra galvoti apie jį kaip apie proporciją užduočių į kurias respondentas, turintis gebėjimą θ, atsako teisingai, kai jos pateikiamos kartu su labai daug užduočių, kurių kiekvienos sudėtingumas yra b_j. Tačiau kai kurie autoriai linkę interpretuoti $P_j(\theta)$ kaip dalį individų, kurių kiekvieno sugebėjimai yra θ, teisingai atsakius į klausimą. Šioje vietoje j užduoties sudėtingumas b_j yra nusakomas kaip θ reikšmė, kuriai galioja $P_j(\theta) = 0,50$.

Taigi vieno parametro logistinis modelis turi tik užduočių sunkumo parametrą b_j. Dviejų parametrų logistinis modelis susideda iš užduočių sunkumo parametro b_j ir užduočių (diskriminacijos) išskyrimo parametro a_j. Tačiau trijų parametrų modelis atrodo pats relistiškiausias iš visų aukščiau minėtų *IRT* modelių ta prasme, kad jis įvertina atsitiktinius atsakymus per c_j.

Ilgainiui tokio tipo logistiniams modeliams, nagrinėjantiems įvairių testo žingsnių parametrų skaičių, prigijo Item Response Theory (*IRT*) pavadinimas. Iš pradžių modeliai buvo kuriami tik dichotominiam atsakymo formatui (išspręsta – neišspręsta) ir plėtojami edukacinės bei kognityvinės diagnostikos rėmuose. Vėliau modeliai buvo pritaikyti ir tokiems testo žingsniams nagrinėti, kurie numato daugiakopį atsakymo formatą. Tai leido išplėsti modelių taikymą ir nekognityvinės diagnostikos sferoje. Vis dėl to *IRT* bazėje ir šiandien giliau išnagrinėtos tėra tik nesudėtingų (tai yra monotoniškai didėjančių) funkcijų savybės. Akivaizdu, kad minėto tipo funkcijos be išlygų tinka tik kognityvinei ir mokymosi pasiekimų diagnostikai. Tuo tarpu asmenybės savybių, socialinių nuostatų ir vertybių diagnostikoje, kur paprastai remiamasi daugiakopiu atsakymo formatu, o monotoniškai kylančios *ICC* modelis yra nepagrįstas empirikai arba nepriimtinas teoriškai, ieškoma kitų tyrimo priemonių. Priešingai nei iki šiol, iš esmės čia tenka kalbėti ne apie kiekybinius, bet kokybinius kategorinius *IRT* modelius. Pastarųjų konstravimas atitinka modernaus mokslo lygį ir yra mokslo ateities dalykas.

Simptomiška, kad tokiose modeliuose įverčių sumos, gautos pagal matricos stulpelius ir eilutes, anaiptol nebėra pakankama statistika. Kokybinių modelių statistinis tikrinimas remiasi sudėtinga tipinių atsakymo konfigūracijų analize. Jeigu testas ilgėlesnis, o tiriamųjų daug, tai faktinis atsakymo konfigūracijų (jos šiuo atveju tampa statistinės analizės vienetu) skaičius žaibiškai artėja prie milijono. Pastarųjų statistinė redukcija yra atliekama iteratyviai ir išimtinai kompiuteriu. Iš tokių modelių šiame kontekste yra paminėta latentinių klasių analizė, Rascho modelis mišriems skirstiniams ir kt. (Rost, 1995).

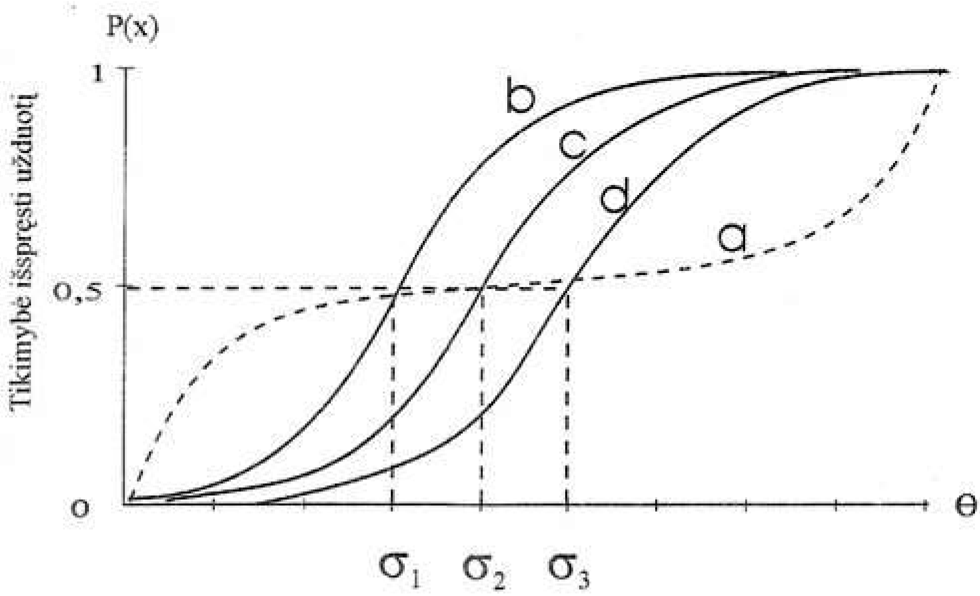
Kaip jau minėjome, *IRT* testų teorijoje centrine kategorija tampa testo užduoties išsprendimo tikimybė, todėl ši teorija neretai dar vadinama tikimybine testų teorija. Šios testų teorijos esmė ta, kad santykiui tarp:

a) atsakymo elgsenos (užduoties išsprendimo tikimybės p);
b) psichometrinio įverčio, dar vadinamo asmens parametru arba gebėjimo parametru (teta θ), apibūdinti yra postuluojamas funkcinis ryšys.

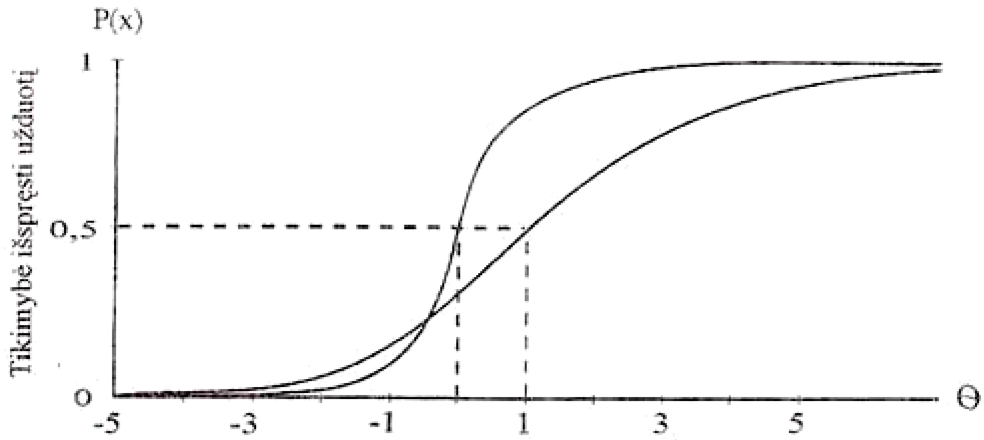
Užduočių charakteringosios kreivės. Grafinę funkcinio ryšio išraišką atspindi testo žingsnio charakteringoji kreivė (Item Characteristic Curve (*ICC*)), kurios vienokia ar kitokia konfigūracija paprastai ir nulemia duoto modelio psichometrinė prasmę.

Konstruojant empirinę charakteringąją funkciją pagal testo rezultatą visi tiriamieji suskirstomi į grupes (specializuotoje edukacinių tyrimų rezultatų kompiuterinio apdorojimo programoje *PAULA* (Битинас, Паулавичус,1987) tokių grupių yra septynios) ir užduoties sunkumo koeficientas kiekvienoje grupėje traktuojamas kaip empirinis tikimybės šios grupės moksleiviams išspręsti duotą užduotį įvertis.

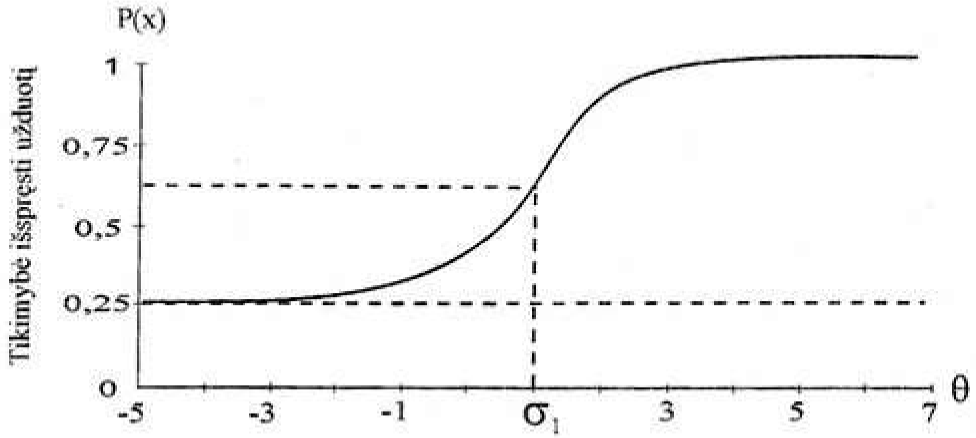
ICC kreivės turi *S* formos kreivės pobūdį (1–3 pav.) su horizontaliomis asimptotėmis $P_j(\theta)=c_j$ ir $P_j(\theta)=1$. Labai mažoms θ reikšmėms $P_j(\theta)$ didėja lėtai. Kai θ priartėja prie b_j, $P_j(\theta)$ paprastai didėja daug greičiau: didėjimo greitis pasiekia maksimumą, kai $(\theta)=b_j$. Kai θ tampa žymiai didesnis nei b_j, $P_j(\theta)$ augimo greitis sulėtėja ir pasiekia 0 su labai didelėmis θ reikšmėmis. Dabar mes turime alternatyvų užduoties sudėtingumo b_j apibūdinimą, kaip kreivės išlinkimo tašką (threshold), susijusį su teisingo atsakymo konstravimo tikimybe.



1 pav. **Rascho modelio *ICC*. Skirtingo sunkumo uždaviniai: *b* – lengvas, *c* – vidutinio sunkumo, *d* – sunkus, *a* – užduotis, netenkinanti modelio sąlygos**



2 pav. **Dviejų parametrų modelio *ICC*. Skirtingo sunkumo ir skirtingos skiriamosios gebos uždaviniai**



3 pav. **Trijų parametrų modelis, kai užduoties sunkumo parametras *b* = 0, skiriamoji geba *a* = 1,0, spėjimo parametras *c* = 0,25.**

Užduočių diskriminavimo parametras a_j yra proporcingas kreivės nuolydžiui, kai $(\theta) = b_j$. Užduočių diskriminavimas atspindi informacijos apie θ kiekį, esantį užduotyje. Įvestas spėjimo parametras $c_j < 1$, įvertina teisingo atsakymo į užduotį j tikimybę be jokio žinojimo ir supratimo. Šis atvejis beveik visuomet pasitaiko kelių pasirinkimų užduočių formatui, kai teisingas atsakymas parenkamas iš nedidelės tikėtinų atsakymų aibės.

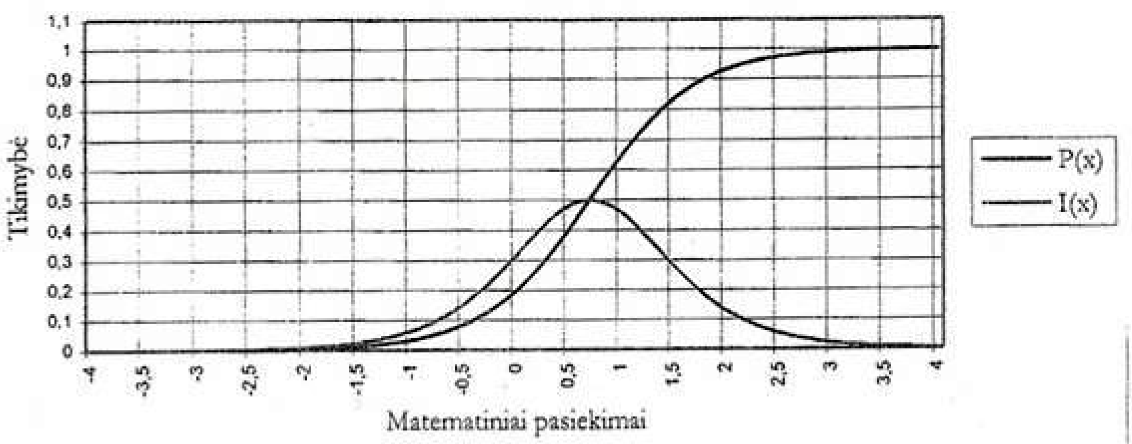
Didaktikai prieinamiausiai tokio funkcinio ryšio idėja, ko gero, apibūdina normalusis sukauptų dažnių skirstinys, apibrėžtas kaip matematinis ir grafinis testo žingsnio modelis. Ši interpretacija patraukli tuo, kad du žinomiausi statistiniai parametrai, t. y. vidurkis ir standartinis nuokrypis, čia įgauna tiesioginę psichometrinė interpretaciją. Būtent vidurkis atitinka 50% išsprendimo tikimybę ir yra apibrėžiamas kaip užduoties sunkumo parametras, o standartinis nuokrypis, apibrėžimas kaip skiriamosios gebos parametras. Kuo standartinis nuokrypis yra mažesnis, tuo testo žingsnio skiriamoji geba yra didesnė, apie ką liudija stačiai į viršų kylanti *ICC* konfigūracija.

Užduoties charakteringąja funkcija (užduoties charakteringąja kreive, *ICC*) yra vadinama monotoniškai didėjanti funkcija, išreiškianti ryšį tarp tikimybės respondentui teisingai atsakyti į testo klausimą ir užduoties parametrų. Šiuolaikinėje testų teorijoje postuluojama, kad šį ryšį geriausiai išreiškia logistinė funkcija.

Testo ir užduoties informacijos kreivės. Kiekviena užduotis apie testuojamojo gebėjimus (konkrečiu atveju apie matematinius pasiekimus) teikia tam tikrą informacijos kiekį, kurį Rascho modelyje žinant užduoties parametrus galima apskaičiuoti. Konkrečios užduoties informacijos apie atitinkamus gebėjimus kiekio priklausomybę nuo gebėjimo įverčio išreiškia užduoties informacijos funkcija:

$$I_j(\theta) = \frac{\left(P_j'(\theta)\right)^2}{P_j(\theta)\left(1 - P_j(\theta)\right)}. \tag{6}$$

$P_j(\theta)$ - j-tosios užduoties charakteringoji funkcija, $P_j'(\theta)$ jos išvestinė. 4 paveiksle pavaizduota tos pačios charakteringosios funkcijos ir testo informacijos funkcijų grafikai. Iš formulės ir grafiko matyti, kad didžiausią informacijos kiekį užduotis teikia apie tiriamuosius, kuriems tikimybė išspręsti ją lygi 0,5. Jeigu tikimybė išspręsti užduotį artima 0 arba 1, tai informatyvumas artimas 0. Informacinės funkcijos reikšmės priklauso nuo užduoties diskriminacijos parametro: kuo didesnė diskriminacija, tuo didesnį informacijos kiekį užduotis teikia apie tiriamuosius, kuriems tikimybė išspręsti užduotį lygi 0,5.



4 pav. **Užduoties charakteringosios ir informacinės funkcijos schema**

Viso testo teikiama informacija aprašoma testo informacijos funkcija:

$$I(\theta) = \sum_{j=1}^{k} I_j(\theta), \tag{7}$$

t.y.

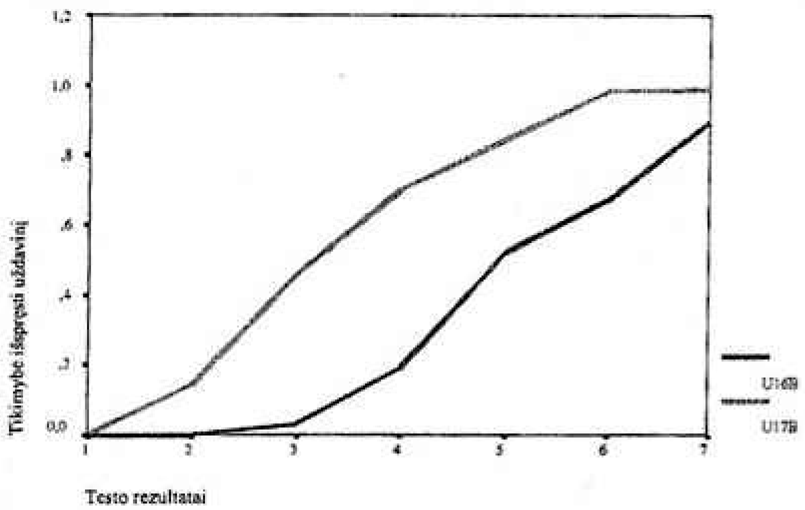
$$I(\theta) = \sum \frac{\left(P_j'(\theta)\right)^2}{P_j(\theta)\left(1 - P_j(\theta)\right)}. \tag{8}$$

Pirmiausia nagrinėdami užduočių informacinę funkciją, mes pastebime, kad ši funkcija turi simetriškumo maksimumo, pasiekiamo, kai $\theta = b_j$, atžvilgiu tendenciją vieno ar dviejų parametrų logistiniams modeliams ir $\theta = b_j + g(a_j, c_j)$ trijų parametrų modeliui. Tai turi prasmę todėl, kad mes tikimės, jog testo užduotys, kurios yra arba per lengvos, arba per sunkios, respondentui, turinčiam gebėjimų θ, yra mažiau informatyvios, nei užduotys, pasiskirsčiusios apie $b_j = \theta$. Tiek dviejų parametrų, tiek ir trijų parametrų modeliams maksimali informacijos apie užduotį reikšmė yra užduočių išskyrimo funkcija a_j. Visiems modeliams, tarp jų ir trijų parametrų modeliams, užduotys su didelėmis a_j reikšmėmis yra labiau informatyvios, nei užduotys su mažesnėmis a_j reikšmėmis. Tačiau trijų parametrų modeliui maksimali užduoties informacijos reikšmė yra tiek parametro a_j, tiek spėjimo parametro c_j funkcija. Šiuo atveju, didėjant c_j, užduotis tampa mažiau informatyvi. Vėlgi šis rezultatas yra priimtinas ta prasme, kad mes tikimės, kad užduotys su spėjimo faktoriumi yra mažiau informatyvios, nei tos užduotys, kuriuose nėra spėjimo.

Pereidami toliau prie testo informacinės funkcijos, pirmiausia mes pastebime, kad viso testo informacija $I(\theta)$ – tai elementarių testo užduočių informacijos suma (7). Kartu su tuo faktu, kad $I(\theta)$ yra nustatomas kiekvienam gebėjimui skalės taškui, užduočių nepriklausomumas reiškia, kad užduotys – kaip adaptuotas testavimas – gali būti parinktos taip, kad gautume optimalų θ įvertinimą.

Aišku, kad testo informacija priklauso nuo užduočių skaičiaus k. Didėjant k, gerėja tikslumas, su kuriuo paskaičiuojama tikimybė. Tačiau praktikoje mums reikia atsakyti tik į tokį skaičių klausimų, kuris reikalingas iš anksto nustatytam tikslumo lygiui pasiekti.

Pažymėta, kad Lietuvoje originalūs *IRT* modeliai nėra kuriami, o jau samus modelius taiko tik pavieniai tyrinėtojai. Šiame kontekste paminėtas B. Bitinas, kuris *IRT* modelius pradėjo taikyti vos jiems atsiradus, apie 1960-1970 m., o vėliau kartu su programuotoju R. Paulavičiumi sukūrė programinę įrangą edukacinės diagnostikos uždaviniams spręsti *PAULA* (Битинас, Паулавичус,1987), kurioje pavienės programinės funkcijos atitinka *IRT* nuostatas. Paveiksle 5 pavaizduotos dviejų užduočių empirinių charakteringųjų funkcijų kreivės, apskaičiuotos *PAULA* programa.



5 pav. **Empirinių charakteringųjų funkcijų kreivės, apskaičiuotos *PAULA* programa**

Šiandien Lietuvoje, autorių duomenimis, tyrimų praktikoje *IRT* modelius epizodiškai taiko tik Nacionalinis egzaminų centras ir Šiaulių universiteto mokslininkai.

Iškalbinga yra testavimo praktikos statistika: apskritai daugiau nei 95% testų, skelbiamų komerciniuose testų leidyklų kataloguose, yra pagaminti *KTT* bazėje (Brickenkamp, 1997; Testzentrale, 1998). Mokslo organizaciniu požiūriu *IRT* trūkumas yra tas, kad reikalinga tarpdisciplininė socialinių tyrinėtojų, matematikų ir programuotojų santalka. Pastarąją įgyvendinti, remiantis įprasta specialistų telkimo tvarka, grindžiama tradicine mokslo klasifikacija, yra sunku. Testų konstravimas pagal *IRT* yra žymiai sudėtingesnis ir brangesnis. Norint pasiekti reikiamą modelio grynumą, būtinos didelės imtys ir t. t. Savo ruožtu praktinis *IRT* testų taikymas reikalauja gilesnio psichometrinio ir matematinio pasirengimo. Vis dėlto akivaizdu, jog, palyginti su *CTT*, kur operuojama „žaliais“ testo balais ir iš esmės dirbama „apgraibomis“, *IRT* leidžia pakilti į analitinį matematinio modeliavimo lygį, konstruoti metrologiškai pilnavertes ir psichometrijos požiūriu labai skaidriai interpretuojamas skales. Anksčiau *CTT* ir *IRT* dažniausiai buvo supriešinamos, o dabar socialinių tyrinėtojų stovykloje šiuo požiūriu įsivyrauja konvergencinės nuostatos: dirbama pagal *CTT*, tačiau *IRT* modeliai pasitelkiami, kada siekiama optimaliai atrinkti testo žingsnius. Tokia pozicija yra pagrįsta. Iš tyrimų praktikos yra žinoma, kad jeigu logistinis modelis galioja, tai koreliacija tarp „žalių“ testo balų ir asmens parametrų, nuskaitytų iš funkcijos, svyruoja nuo 0,90 iki 0,95 (Rost, 1995). Tokiu atveju testo balų metrologinė kokybė garantuota.

Jeigu *IRT* modelio užduočių parametrai yra žinomi, tada gana paprasta įvertinti tiriamųjų imties galimybes, panaudojant maksimalaus tikėtinumo metodą. Įprasta naudoti užduočių parametrų įvertinimus, išvestus iš ankstesnių užduočių gradavimo tyrimo, paskaičiuojant θ.

Tiriamųjų moksleivių gebėjimų ir testo užduočių parametrų vertinimas vienu metu taikant. *IRT* metodą, yra sunkus ir problemiškas darbas. Aptarsime N + 3k gebėjimų vertinimo procedūrą bei užduočių parametrus taikydami trijų parametrų logistinį modelį.

Tarkime, kad X_j yra kintamasis su reikšme 1, kai atsakymas į užduotį yra teisingas, ir 0, kai atsakymas į užduotį *j* yra neteisingas. Tarkime, kad x_i yra binarinių asmens *i* atsakymų į *k* užduočių seka, t. y. *k* x 1 vektorius. $X=(x_1 ... x_2)$ yra *N* tiriamųjų atsitiktinės imties respondentų atsakymų į testo užduotis matrica. Tada stebinio *X* tikimybė (Item Response Theory, 2004)

$$P(X \mid \theta, \beta) = \prod_i P(x_i \mid \theta_i, \beta) = \prod_i \prod_j P_j(\theta_i)^{x_{ij}} Q_j(\theta_i)^{1-x_{ij}} \ , \qquad (9)$$

čia $Q_j(\theta) = 1 - P_j(\theta)$, o θ ir β yra modelio fiksuotų nežinomų parametrų vektoriai. Trijų parametrų logistiniam modeliui β elementai yra *k* užduočių sunkumo, išskyrimo (diskriminavimo) ir spėjimo parametrai. Lygtis (9) implikuoja, kad atsakymai į bet kurią užduočių porą fiksuotam θ yra nepriklausomi – tai visų *IRT* modelių pagrindinė prielaida.

Po to, kai buvo atlikti imties matavimai (testavimas), lygtis (9) nebėra tikėtina. Greičiau, duotajam x_i lygtis (9) gali būti interpretuojama kaip θ ir β *tikėtinumo funkcija (likelibood function)* (Partchev, 2009) $L(\theta, \beta \mid x_i)$ duotajam x_i. Tikėtinumo funkcijos reikšmė tam tikrai parametrų reikšmių sekai yra tikėtinumas, kad x_i gali būti nustatytas, jei ši parametrų reikšmių seka buvo teisingų reikšmių seka. Akivaizdu, kad sąlyginė x_i tikimybė kinta kaip parametrų funkcija. Tos parametrų reikšmės, kurios kartu maksimizuoja tikėtinumo funkciją, yra vadinamos θ ir β *maksimalaus tikėtinumo įverčiais*.

Labiausiai paplitęs trijų parametrų logistinio modelio užduočių parametrų įvertinimo metodas yra *marginalinis maksimalus tikėtinumas* (*Marginal Maximum Likelibood – MML*) (Partchev, 2009). *MML* užduočių parametrų įvertinimo kriterijai yra nustatomi integruojant gebėjimų pasiskirstymo tikėtinumo funkciją

$$L(\beta \mid X) = \prod_i \int P(x_i \mid \theta, \beta) f(\theta) d\theta, \qquad (10)$$

čia *f(θ)* yra gebėjimų tankio funkcija. *f(θ)* gali būti žinoma iš anksto, arba, kaip dažnai būna praktikoje, daroma prielaida, ją esant normalaus tankio $N(\mu_\theta, \sigma_\theta^2)$ su $\mu_\theta = 0$ ir $\sigma_\theta^2 = 1$. *MML* įvertinimai yra tos β reikšmės, kurios maksimizuoja (10) lygtį.

Kai kurie autoriai teigia, kad geresni β įvertinimai gali būti nustatyti toliau tikslinant $L(\beta|X)$ tinkamais užduočių parametrų $f(a_j)$, $f(b_j)$ ir $f(c_j)$ pasiskirstymais. Reikšmės, kurios maksimizuoja šį Bajeso (Bayesian) tolimesnį parametrų pasiskirstymą, yra vadinamos β Bajeso modalinėmis reikšmėmis.

Testo sudarymas. Tradicinis priėjimas prie testo kūrimo, paremtas klasikine testų teorija, koncentruojasi į dvi užduočių statistikas: užduoties *sudėtingumą* (*p* dalis tiriamųjų, pasirinkusių teisingą atsakymą) ir užduočių *išskyrimą (diskriminaciją)* (r_{it} – koreliacija tarp elementarios užduoties balo ir tam tikro gebėjimų įvertinimo, pvz., bendro testo įvertinimo (balo)). Bendruoju atveju yra parenkamos tokios užduotys, kurių *p* reikšmės generuoja norimą testo rezultatų pasiskirstymą ir kurios turi aukštas bendras testo užduočių koreliacijas. Galutinė pasirinktų užduočių seka turi duoti testo rezultatą, t.y. gebėjimų įvertinimą su aukštu *patikimumu*. Testo rezultatų patikimumas naudojamas individualiai testo rezultatų paklaidai įvertinti.

Tradicinis *CTT* priėjimas prie testų sudarymo turi keletą silpnų vietų. Vieniems testams užduočių sudėtingumo, užduočių išskyrimo ir patikimumo įvertinimai priklauso nuo imties specifikos. Kitiems tikėtina, kad respondento testo rezultatų paklaida yra pastovi visoms gebėjimų reikšmėms. Priešingai nei *CTT*, *IRT* užduočių parametrų įvertinimai imtyje yra nekintami, o vertinimų paklaidos *IRT* modelyje kinta kaip gebėjimų funkcija. Šių savybių vertė – didelės respondentų imtys.

IRT modelyje testų sudarymas koncentruojasi apie elementarių užduočių ir viso testo informacijos funkcijas. Tai atrodo priimtina ta prasme, kai užduotys turi būti parenkamos remiantis informacijos kiekiu, kuriuo kiekviena užduotis prisideda prie viso testo informacijos. Kai sykį užduotys yra patikrintos, t. y. užduočių parametrai apskaičiuoti, užduoties parinkimas tampa gana nesudėtingas.

Priklausomai nuo testo tikslo (stojamieji ar baigiamieji egzaminai, matematinių ar kitų gebėjimų vertinimas ir t. t.), nustatoma *tikslinio testo informacinė funkcija*. Tai yra testo informacinė funkcija pasirinktinai testo užduočių sekai.

Toliau parenkama testo užduotis su užduočių informacinėmis funkcijomis, atitinkančiomis tikslo funkcijos reikalavimus.

Pridedant kiekvieną užduotį prie testo, apskaičiuojama testo informacinė funkcija.

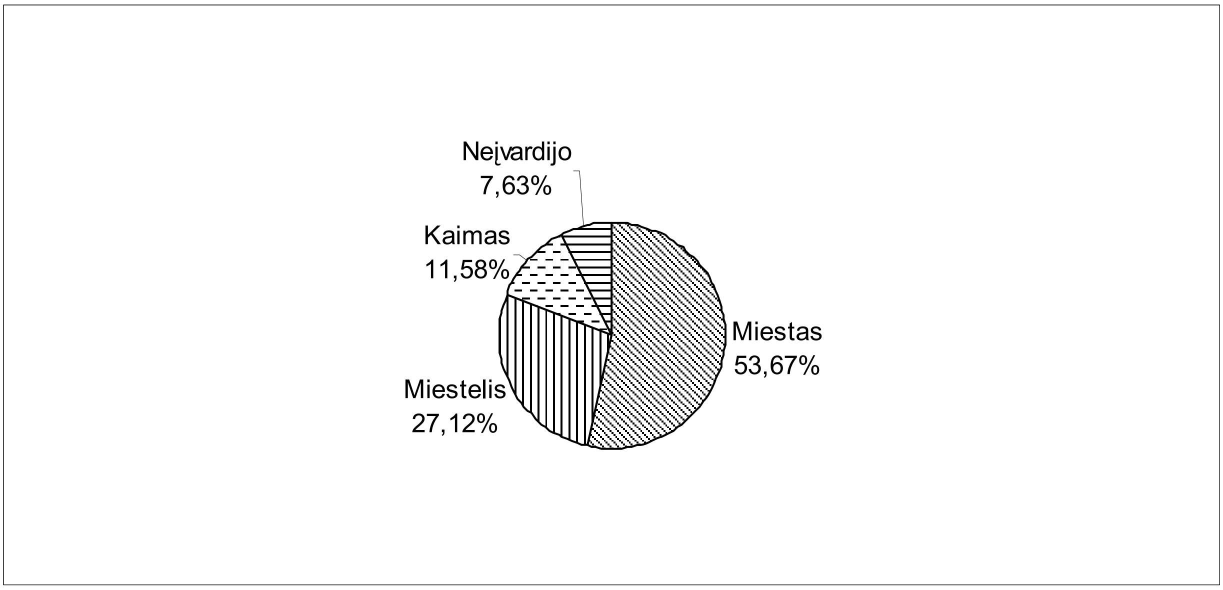
Užduočių atranką tiksliam testui tęsiame tol, kol apskaičiuota testo informacinė funkcija apytiksliai, tam tikra priimtina prasme, priartės prie tikslinės testo informacinės funkcijos.

2. SKYRIUS. TYRIMO REZULTATŲ KOKYBINĖ ANALIZĖ

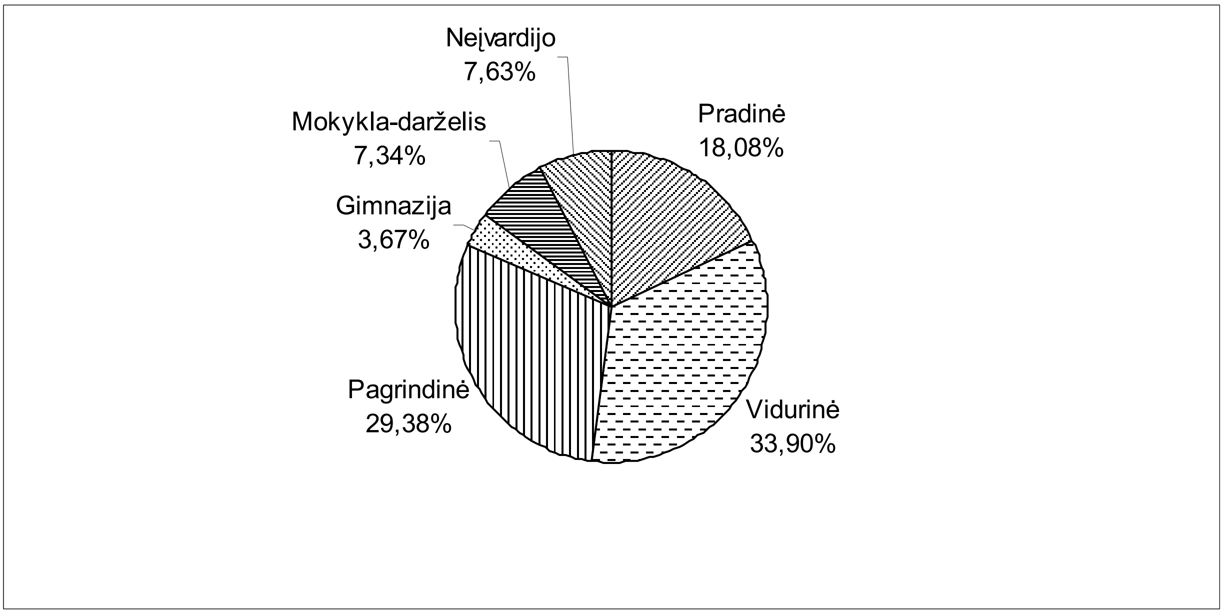
2.1. Didaktinio tyrimo turinys ir organizavimas

Tyrimo koncepcija. Matematinių gebėjimų testai yra skirti daugiau mokytojų ir moksleivių savikontrolei nei mokyklos ar švietimo skyriaus vadybiniams sprendimams pagrįsti, todėl, siekiant užtikrinti testavimo procedūros situacinį valdumą, buvo pasirinktas vidinis tyrimo administravimo būdas. Moksleivius testavo mokyklos mokytojai, naudodamiesi standartine testavimo instrukcija. Kadangi matematiniai moksleivių pasiekimai kaip psichometrinis konstruktas yra labilūs (moksleivių matematinės žinios ir įgūdžiai nuolat kinta, kaitą sąlygoja mokymo procesas ir užmiršimo faktoriai), tai kiekvieno testo duomenys buvo surinkti ne per ilgesnį kaip 20 dienų laikotarpį. Testą sudaro 10 užduočių. Testavimo trukmė 60 min., įskaitant 5 min. moksleivių instruktažą. Ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados testo turinio struktūra ir struktūrinių dalių proporcijos nustatytos remiantis Pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrųjų programų reikalavimais pradinės mokyklos matematikai bei realia pradinės matematikos mokymo situacija, kurią lemia matematikos vadovėlių turinys bei pradinių klasių mokytojų profesionalumas, realizuojamas per įvairias matematikos ugdymo sistemas ir metodus.

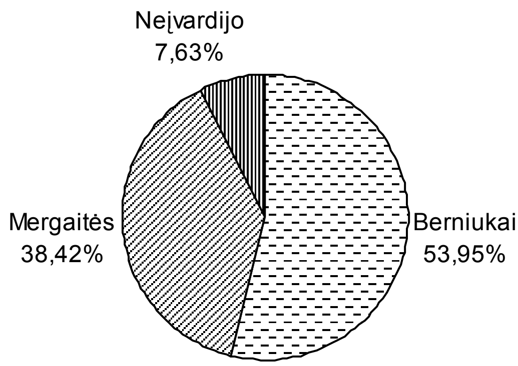
Tyrimo imtis. Tyrimo rezultatų patikimumui ir tikslumui didelę įtaką turi imties parinkimas. Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiadoje dalyvavo labai daug moksleivių. Dėl žmogiškųjų išteklių bei techninių duomenų apdorojimo galimybių tyrimui atsitiktinai iš kiekvieno šalies miesto bei rajono atrinkti 354 ketvirtų klasių moksleivių olimpiadiniai darbai. 1–3 pav. pateikta viso tyrimo dalyvių bendroji charakteristika.



1 pav. **Lietuvos ketvirtos klasės miestų ir rajonų matematikos olimpiados dalyvių pasiskirstymas pagal regioną**



2 pav. **Lietuvos ketvirtos klasės miestų ir rajonų matematikos olimpiados dalyvių pasiskirstymas pagal mokyklos tipą**



3 pav. **Lietuvos ketvirtos klasės miestų ir rajonų matematikos olimpiados dalyvių pasiskirstymas pagal lytį**

Naudoti tyrimo metodai.

Teoriniai:

- mokslinės literatūros (pedagoginės, psichologinės, dalykinės) analizė ir apibendrinimas. Taikant juos buvo galima patikimiau atskleisti tiriamosios problemos teoriją, metodologiją ir tyrimų gaires; suformuluoti tyrimo hipotezę, tikslus ir uždavinius, suformuluoti empirinio tyrimo metodiką;
- dokumentinės medžiagos (švietimo dokumentų, mokyklos, miesto-rajono, šalies matematikos olimpiadų protokolų ir kt.) analizė, lyginimas, apibendrinimas. Tai leido ne tik nustatyti matematikos olimpiadų reikšmę ugdant jaunuosius matematikus, bet ir optimizuoti pradinių klasių moksleivių matematikos olimpiadų vedimo (rengimo) metodiką.

Empiriniai:

- moksleivių matematinių gebėjimų vertinimo ir matematikos olimpiados vyksmo stebėjimas. Jis padėjo visapusiškai atskleisti pradinės mokyklos matematinių gebėjimų vertinimo (diagnozavimo) bei matematikos olimpiadų organizavimų būklę;
- lyginamasis tyrimas. Juo įvertinta tyrimuose dalyvavusių moksleivių matematikos žinių bei gebėjimų kaita ir priklausomybė nuo lyties, gyvenamosios vietos, mokyklos, kurią jie lanko, tipo, mneminių faktorių ir t. t.

Matematinės statistikos metodai: nominalinių bei ranginių skalių sudarymas, testų patikimumo (reliabilumą) ir reikšmingumo nustatymas, koreliacinė, faktorinė (pagrindinių komponenčių metodas; ašių pasukimas maksimalios sklaidos būdu), kontingencijos analizė ir t. t.

Tyrimo duomenys susisteminti taikant *Excel* ir *SSPS* (Statistical Package for the Social Science) redaktorius.

2.2. Matematiniai gebėjimai „Pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrųjų programų“ kontekste

Matematiniai gebėjimai yra skaičiavimo įgūdžiai ir mokėjimas spręsti įvairaus pobūdžio bei lygmens matematinius uždavinius. Gebėjimo terminu sujungiamos klasikinėje didaktikoje vartojamos mokėjimų ir įgūdžių sąvokos (Kiseliova, 2002).

„Pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrosiose programose” (2008) suformuluoti pradinę mokyklą baigiančių moksleivių matematinių žinių ir gebėjimų reikalavimai. Visi programų reikalavimai suskirstyti į penkias veiklos sritis:

I. **Skaičiai ir skaičiavimai.**
II. **Reiškiniai, lygtys, nelygybės.**
III. **Geometrija.**
IV. **Matai ir matavimai.**
V. **Statistika.**

Trumpai aptarsime, kuo svarbi ir vertinga kiekviena matematikos veiklos sritis.

Skaičiai ir skaičiavimai. Skaičiai ir skaičiavimai – pati svarbiausia ir savo turinio apimtimi didžiausia matematinės veiklos sritis, teikianti ypatingai daug ugdymo galimybių. Mokydamiesi šios dalyko srities, pradinėje mokykloje mokiniai suvokia, kad gyvenimas šiuolaikiniame pasaulyje neįmanomas be skaičių ir skaičiavimų, kad geri skaičiavimo įgūdžiai yra būtini ir naudingi sprendžiant įvairias problemas. Jie išmoksta perskaityti, užrašyti natūraliuosius ir trupmeninius skaičius, juos tarpusavyje susieti, palyginti, spręsti paprasčiausius realaus ir formalaus matematinio turinio uždavinius, kuriuose reikia atlikti aritmetinius veiksmus su natūraliaisiais skaičiais. Be skaičių ir skaičiavimų tematiką atitinkančių žinių ir gebėjimų neįmanoma sėkmingai mokytis kitų matematikos sričių, gamtos ir technologijų dalykų, orientuotis kasdieniniame gyvenime. Ši matematikos veiklos sritis ypač reikšminga ugdant mokinių nuostatas bei bendruosius gebėjimus – matematinio komunikavimo, matematinio mąstymo, problemų sprendimo.

„Pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrosiose programose“ (2008, p. 198-199) numatoma, kad moksleiviai turi mokėti:

- Perskaityti ir užrašyti natūraliuosius skaičius iki 1000 ir papratąsias taisyklingas trupmenas su vardikliais 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100 bei dešimtaines trupmenas (turinčias ne daugiau kaip du ženklus po kablelio). Palyginti vienodo tipo skaičius, įrašant tarp jų ženklą <, > arba =. Pasakyti, prie kurios dešimties, šimto ar tūkstančio arčiau yra duotasis natūralusis skaičius. Atlikti praktines įvairių daiktų ir objektų skaičiavimo užduotis.

- Atlikti aritmetinius veiksmus su natūraliais skaičiais. Pasirinkti tinkamą veiksmą ir skaičiavimo būdą paprastiems uždaviniams spręsti, numatyti ir pasitikrinti skaičiavimo rezultatus.

Reiškiniai, lygtys, nelygybės, sistemos. Ši sritis ypač palanki mokinių struktūravimo ir formalizavimo gebėjimams lavinti, algoritminiam mąstymui formuoti. Mokiniai suvokia, kad įvairias gyvenimiškas situacijas galima aprašyti ne tik žodžiais, bet ir pasitelkiant matematinius simbolius aprašyti skaitiniais reiškiniais, nelygybėmis ar lygtimis. Taip formuojamas labai reikšmingas supratimas apie matematinį modeliavimą.

„Pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrosiose programose“ (2008, p. 199) nurodoma, kad moksleiviai turi gebėti:

- Apskaičiuoti paprastų skaitinių reiškinių ar dydžių skaitines reikšmes.
- Aprašyti kasdienines praktines ir matematines situacijas paprastais skaitiniais reiškiniais.
- Pertvarkant paprastus skaitinius reiškinius, taikyti sudėties ir daugybos perstatomumo ir jungiamumo dėsnius.
- Į paprasčiausią lygtį įrašyti skaičių ir patikrinti, ar gautoji lygtis yra teisinga.
- Į paprasčiausią nelygybę su vienu kintamuoju įrašyti skaičių ir patikrinti, ar gautoji nelygybė teisinga.

Geometrija. Geometrija – reikšminga matematikos mokymosi sritis ir svarbus aplinkos aprašymo įrankis. Gebėjimai suvokti erdvines figūras, jų santykius, susidaryti suvokiamos erdvės visumos vaizdą yra vieni reikalingiausių kasdieniame gyvenime. Pradinėje mokykloje mokiniai, mokydamiesi geometrijos atlieka daug figūrų klasifikavimo užduočių, aiškinasi jų savybes – taip sudaromos sąlygos mokinių dedukciniam mąstymui ugdyti. Žinios apie geometrines figūras padeda geriau orientuotis supančioje aplinkoje, spręsti įvairias praktines užduotis, suvokti, kaip matematika yra pritaikoma praktiškai.

„Pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrosiose programose“ (2008, p. 199) nurodoma, jog ketvirtoje klasėje moksleiviai turi mokėti:

- Atpažinti ir pavaizduoti tašką, atkarpą, trikampį, stačiakampį, kvadratą, skritulį, apskritimą. Modelyje ir brėžinyje parodyti trikampio ir stačiakampio elementus (kraštinė, kampas, viršūnė), brėžinyje – apskritimo spindulį. Praktiškai nustatyti, ar daiktas, plokštumos geometrinė figūra yra simetriška. Taikyti žinias apie plokštumos geometrines figūras paprastiesiems uždaviniams spręsti.

- Atpažinti kubą, stačiakampį gretasienį, ritinį, piramidę, kūgį, rutulį. Modelyje ir brėžinyje parodyti kubo, stačiakampio gretasienio, prizmės briaunas, viršūnes, sienas. Taikyti žinias apie erdvės geometrines figūras paprastiems uždaviniams spręsti.
- Tiksliai apibūdinti įvairių objektų tarpusavio padėtį ir formą.

Matai ir matavimai. Kasdieniame gyvenime itin svarbūs yra gebėjimai, kurie ugdomi mokant matų ir matavimų. Ši sritis itin palanki atskleisti mokiniams matematikos ryšius su kitais mokomaisiais dalykais. Pradinėje mokykloje svarbiausia, kad mokiniai išmoktų atlikti pagrindinius tiesioginius matavimus: išmoktų išmatuoti ilgius bei temperatūrą, sveriant nustatyti įvairių daiktų masę, suskaičiuoti pinigus. Suprastų, kodėl reikalingi standartiniai dydžių matavimo vienetai ir gebėtų teisingai užrašyti matavimų rezultatus. Mokiniai gauna supratimą ne tik apie tiesioginius matavimus, bet susipažįsta su stačiakampių plotų skaičiavimu, išmoksta šias žinias taikyti praktinėms ir matematinėms problemoms spręsti.

„Pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrosiose programose“ (2008, p. 200) nurodoma, kad moksleiviai turi gebėti:

- Taisyklingai skaityti ir užrašyti įvairių dydžių matavimo rezultatus. Liniuote išmatuoti atkarpos ilgį. Nubrėžti nurodyto ilgio atkarpą, nurodytų matmenų stačiakampį, apskritimą (kai nurodytas spindulys). Paprastais atvejais be matavimo įrankių apytiksliai įvertinti artimiausios aplinkos objektų ar daiktų parametrus (ilgį, plotą, tūrį – litrais).
- Spręsti paprastus uždavinius, kuriuose reikia atlikti veiksmus su matiniais skaičiais. Naudotis kalendoriumi, tvarkaraščiais. Apskaičiuoti vidutinį judėjimo greitį, kai žinomas kelias ir judėjimo laikas.
- Apskaičiuoti trikampio ir keturkampio perimetrą, stačiakampio plotą.

Statistika. Šiuolaikinės visuomenės gyvenime plačiai naudojama įvairių rūšių statistinė informacija. Mokant statistikos pradinėje mokykloje pradedamas formuoti mokinių supratimas apie šiuolaikinių technologijų funkcionavimo sudėtingumą, apie būtinybę moksliškai tirti ir rinkti duomenis vienu metu daugelyje žemės rutulio taškų, apie tai, kad egzistuoja valstybinės institucijos duomenims rinkti ir kaupti. Mokiniai turi suvokti, kad norint priimti pagrįstus sprendimus visuomenės gyvenime, būtina išmokti surasti ir suprasti įvairių rūšių statistinę informaciją, mokėti ją vertinti. Ieškodami statistinės informacijos mokiniai kartu visapusiškai lavina savo informacinius gebėjimus, įgytas žinias ir gebėjimus naudoja mokydamiesi kitų dalykų ir ugdymo aplinkoje iškylančioms problemoms spręsti.

„Pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrosiose programose“ (2008, p. 200) nurodoma, kad moksleiviai turi gebėti:

- Rinkti duomenis apie artimą aplinką pagal vieną požymį ir juos užrašyti dažnių lentelėje.

- Skaityti informaciją, pateiktą stulpeline ar skrituline diagrama, piktograma, dažnių lentele, pavaizduoti pateiktus (surinktus) duomenis stulpeline diagrama.
- Remiantis pateiktais (surinktais) duomenimis, atsakyti į paprastus klausimus, daryti paprastas išvadas.

2.3. 2007 m. IV klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados užduočių sprendimo rezultatų analizė

Matematinių gebėjimų testo užduočių klasifikacija tematikos aspektu nuo bendrosiose programose (Pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrosios programos, 2008) pateikto skirstymo kiek skiriasi. Neišskiriame matematinio tyrimo krypties, traktuodami tai daugiau ne kaip turinio, bet kaip veiklos kategoriją. Matematikos gebėjimų matavimo pagrindu imame tris matematinės veiklos sritis: žinių lygmenyje – supratimą, įgūdžių lygmenyje – algoritmų taikymą, mąstymo lygmenyje – užduočių sprendimą. Sudarydami matematinės veiklos ir turinio matricą, rėmėmės pažintinės veiklos įgūdžių taksonomija (Cole, 1990).

Testų užduočių turinys ir forma pasirinkti orientuojantis į B. Balčyčio bei A. Kiseliovo ir D. Kiseliovos IV klasės matematikos vadovėliuose ir šiuo metu mokytojų dažniausiai naudojamoje papildomoje medžiagoje pateiktų bazinio lygmens (Pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrosios programos, 2008) užduočių tipus. Keletas užduočių parinkta orientuojantis į matematikos mokymo turinio kaitos perspektyvas ir iš bendrųjų gebėjimų, mažai susijusių su išmokta matematine informacija, srities.

Lietuvos mokinių informavimo ir techninės kūrybos centras teigia, kad matematikos **olimpiados tikslai**:

- ✓ Skatinti mokinių domėjimąsi matematika, ugdyti jų kūrybiškumą, matematinę kultūrą ir mąstyseną.
- ✓ Surasti ir puoselėti talentus, rengti mokinius tarptautinėms matematikos varžyboms.
- ✓ Skatinti mokinių motyvaciją rinktis matematikos ar su ja susijusias specialybes.
- ✓ Ugdant gabius matematikai mokinius aktyvinti ir puoselėti mokytojų iniciatyvą.

Mokyklinės matematikos olimpiados užduotys yra sudaromos atsižvelgiant į moksleivių amžių, žinias ir gebėjimus. Matematiniai gebėjimai yra skaičiavimo įgūdžiai ir mokėjimas spręsti įvairaus pobūdžio bei lygmens matematinius uždavinius. Bendrųjų ir specialiųjų gebėjimų reikalavimai yra išdėstyti ,,Pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrosiose programose“ (2008). Visi bendrųjų programų reikalavimai suskirstyti į penkis skyrius (skaičiai ir skaičiavimai; reiškiniai, lygtys, nelygybės; geometrija; matai ir matavimai; statistika) ir pateikiami trimis lygmenimis:

- **Paprasčiausi uždaviniai**, kuriuos sprendžiant reikia atlikti vieną standartinę operaciją ar pritaikyti standartinį algoritmą.
- **Paprastieji uždaviniai**, kuriuos sprendžiant reikia suderinti ir atlikti dvi standartines operacija ar algoritmus.
- **Nesudėtingieji uždaviniai**, kuriuos sprendžiant reikia suderinti ir atlikti 3–4 standartines operacijas ar algoritmus.

Sudarant šias olimpiados užduotis buvo orientuotasi į paprastuosius ir nesudėtinguosius uždavinius. Olimpiados užduočių pasiskirstymas pagal šiuos skyrius pateikiamas 1 lentelėje.

1 lentelė

Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados užduočių pasiskirstymas pagal lygmenis

Turinio kategorijos	**Paprastieji uždaviniai**	**Nesudėtingieji uždaviniai**
	Olimpiados užduočių numeriai	Olimpiados užduočių numeriai
Skaičiai ir skaičiavimai	1, 3, 7	4, 6
Reiškiniai, lygtys, nelygybės	2	
Geometrija		9
Matai ir matavimai	5	
Statistika	10	8

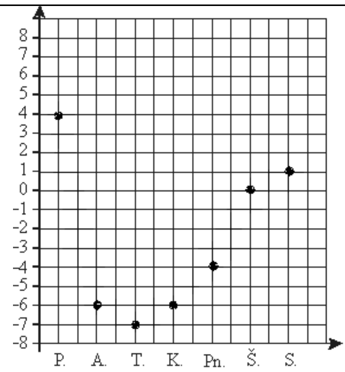
Duomenims į kompiuterį perkelti naudota MS *Excel* programa. Skaičiavimai atlikti naudojantis specializuotu statistinių kompiuterinių programų paketu SPSS, lentelės ir grafikai sukurti SPSS ir *Excel* redaktoriais.

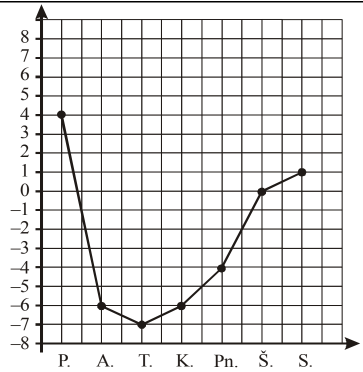
Olimpiados užduotys reikalauja įvairių matematinių gebėjimų. Spręsdami bet kurią užduotį moksleiviai pasitelkia keletą skirtingų gebėjimų. Tam, kad būtų galima tiksliau analizuoti užduočių sprendimo eigą ir įvertinti skirtingus moksleivių gebėjimus bei jų klaidas, 2 lentelėje visos užduotys suskaidytos į elementarias užduotis (žingsnius).

2 lentelė

Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados užduočių skaidymas į elementarias užduotis

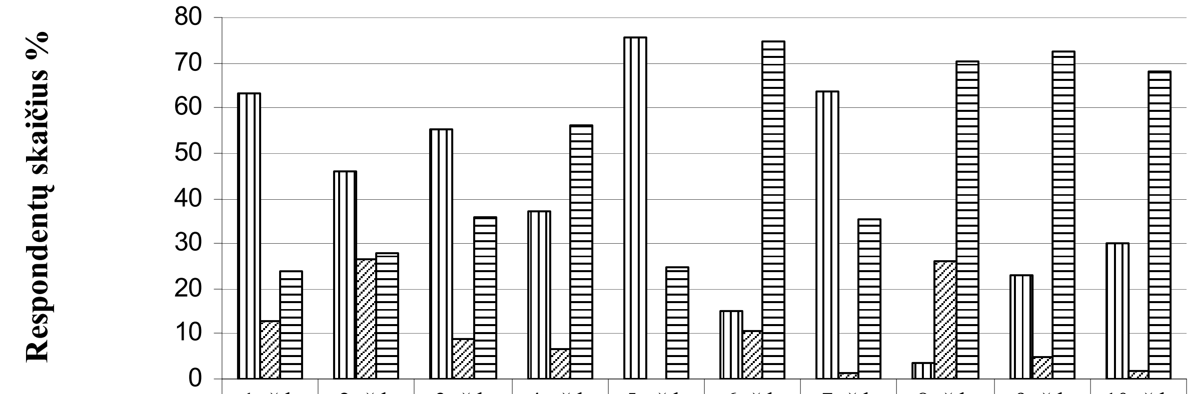
Testo užduoties nr.	Elementarios užduoties numeris	Elementarios užduoties aprašymas	Sprendimas
1 užduotis	1	Skaičių pasirinkimas	a = 11, b = 18, c = 13, d = 16, e = 17, f = 12, g = 14, h = 15
	2	Parašyta teisinga lygybė	11 + 18 + 13 + 16 = 17 + 12 + 14 + 15
2 užduotis	3	1 reiškinys	a – b – 50
	4	2 reiškinys	a – b – 20
	5	3 reiškinys	a – b
	6	4 reiškinys	a – b + 10
	7	5 reiškinys	a – b + 30
	8	6 reiškinys	a – b + 40
	9	7 reiškinys	a + b + 40
	10	Teisingai sudėliotas žodis	VELYKOS
3 užduotis	11	Skaičių skirtumo apskaičiavimas	200 – 58 = 142
	12	Reikiamo veiksmo ir skaičiaus radimas	160 – 142 = 18
4 užduotis	13	Skaičiaus 64 trys aštuntadaliai radimas	64 : 8 · 3 = 24
	14	Skaičiaus 64 padidinimas	64 + 24 = 88
	15	Skaičiaus 64 pusės radimas	64 : 2 = 32
	16	Atsakymo į užduoties klausimą radimas	88 – 32 = 56
5 užduotis	17	Sumos radimas ir metrų stambinimas	1 km 200 m + 5000 m = 6 km 200 m
	18	Sumos radimas ir minučių stambinimas	1 h 12 min + 70 min = 2 h 22 min
6 užduotis	19	Sužinome keliomis juostomis bus tiesiamas kilimas	4 : 2 = 2 (juost.)
	20	Kiek metrų kilimo reikia pirmam	5 · 2 = 10

		kambariui?	
	21	Kiek metrų kilimo reikia antram kambariui?	6 · 2 = 12
	22	Kiek metrų kilimo reikia trečiam kambariui?	7 · 2 = 14
	23	Kiek metrų kilimo reikia iš viso?	10 + 12 + 14 = 36
	24	Atsakymo į užduoties klausimą radimas	36
7 užduotis	25	Skaičiavimas ir loginis mastymas	Pvz.: (7 · 4) + 2 = 30
	26	Atsakymo į užduoties klausimą radimas	Sekmadienį
8 užduotis	27	Iš pirmo į antrą 7 kamuoliukus perkeliame	Gauname 4, 14, 6
	28	Iš antro į trečią 6 kamuoliukus perkeliame	Gauname 4, 8, 12
	29	Iš trečio į pirmąjį 4 kamuoliukus perkeliame	Gauname 8, 8, 8
9 užduotis	30	Sandaugos (3 · 15) apskaičiavimas	45
	31	Sandaugos (5 · 17) apskaičiavimas	85
	32	Sandaugos (12 · 10) apskaičiavimas	120
	33	Viso ploto (45 + 85 + 120) apskaičiavimas	250
	34	Nežinomos kraštinės (20 – 3 - 12) radimas	5
	35	Perimetro (15 + 3 + 10 + 5 + 10 + 12 + 15 + 20) apskaičiavimas	90
10 užduotis	36	Taškų atidėjimas koordinačių ašyse	

	37	Nubraižytas oro kitimo grafikas	

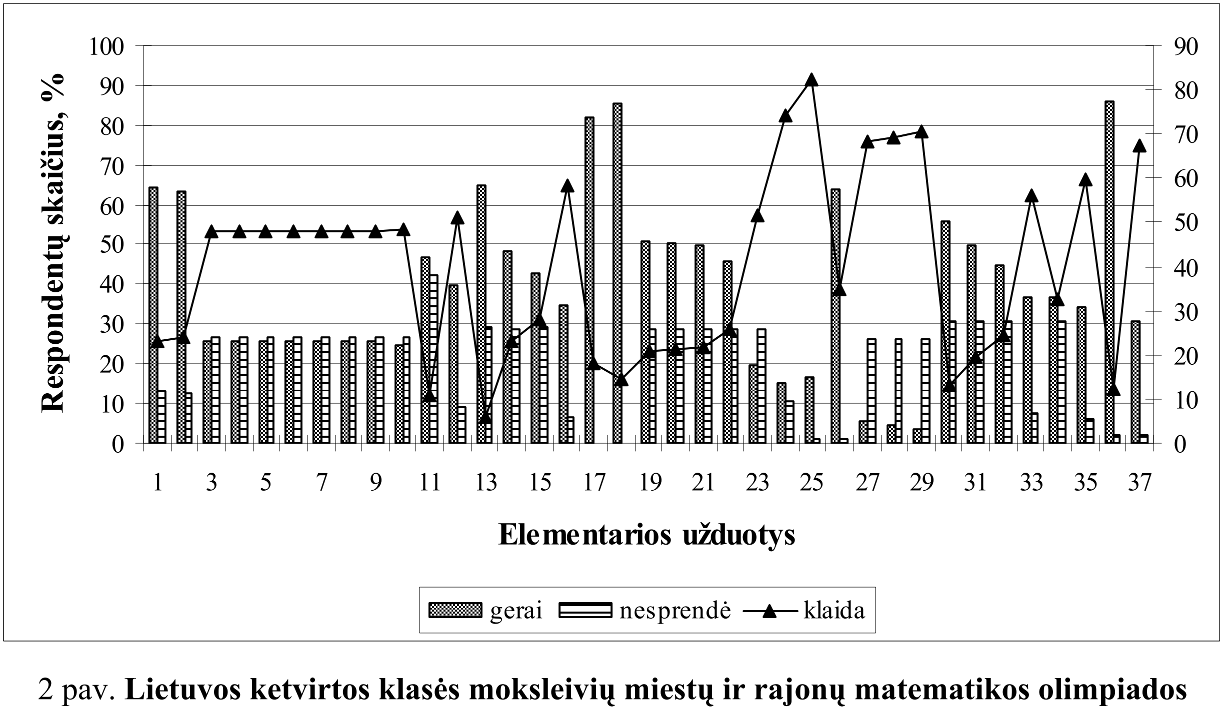
Duomenų kodavimas. Testą sudaro 10 užduočių. Užduočių ir elementarių užduočių sprendimai buvo analizuojami ir, remiantis moksleivių klaidų pobūdžiu, buvo pasirinkti kodai: 0 – nesprendė, 1 – gerai, 2 – blogas skaičių pasirinkimas, 3 – parašyta neteisinga lygybė, 4 – reiškiniai nesudėlioti didėjimo tvarka, 5 – teisingai sudėliotas žodis, 6 – neteisingai sudėliotas žodis, 7 – suklydo atlikdamas veiksmus, 8 – pateiktas tik teisingas atsakymas, 9 – vietoj atimties atliko sudėties veiksmą, 10 – pateiktas klaidingas atsakymas, 11 – vietoj sudėties atliko daugybos veiksmą, 12 – klaida sąlygota ankstesnės, 13 – nemoka padalinti skaičių, 14 – nemoka sudėti metrų, 15 – nemoka sudėti minučių, 16 – metrų stambinimo klaida,17 – minučių stambinimo klaida, 18 – nevisiškai suprasta sąlyga, 19 – neatskleistas loginis mąstymas, 20 – nepasakytas perkeltų kamuoliukų skaičius, 21 – blogas kraštinės ilgis, 22 – trūksta vienos kraštinės, 23 – trūksta dviejų kraštinių, 24 – nepadėjo skliaustų, 25 – vietoj grafiko nubraižyta diagrama, 26 – nemoka stambinti metrų, 27 – nemoka stambinti minučių, 28 – blogai atidėti taškai koordinačių ašyse, 29 – aritmetinė klaida, 30 – nemoka skaičiuoti ploto, 31 – nemoka skaičiuoti perimetro, 32 – nenubraižytas grafikas, 33 – praleistas sudėties veiksmas, 34 – teisingai pradėjo, bet nebaigė spręsti užduoties, 35 – praleistas atimties veiksmas, 36 – neparašytas atsakymas, 37 – nepadalino iš dviejų, 38 – vietoj sudėties atliko dalybos veiksmą, 39 – blogai parašyti matavimo vienetai, 40 – vietoj dalybos atliko daugybos veiksmą, 41 – nemokėjo sudaryti lygties, 42 – neparašyta lygybė, 43 – trūksta trijų kraštinių, 44 – išsiblaškymo klaida, 45 – vietoj pliusų sudėjo kablelius, 46 – nepažymėtu taškai, 47 – vietoj atimties atliko dalybos veiksmą.

Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos 2007 metų olimpiados užduočių bei elementarių užduočių sprendimo pagrindiniai rezultatai procentais pateikti 1 ir 2 paveiksle.



	1užd.	2užd.	3užd.	4 užd.	5 užd.	6užd.	7užd.	8užd.	9užd.	10užd.
gerai	63,28	45,76	55,08	37,29	75,42	14,97	63,56	3,39	22,88	29,94
nesprendė	12,71	26,56	9,04	6,78	0	10,45	1,13	26,27	4,80	1,98
klaida	24,01	27,68	35,88	55,93	24,58	74,58	35,31	70,34	72,32	68,08

1 pav. **Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados užduočių sprendimo rezultatai**



2 pav. **Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados elementarių užduočių sprendimo rezultatai**

3 lentelė

2007 m. Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados elementarių užduočių sprendimo bendroji suvestinė, %

	1 užduotis		**2 užduotis**							
Testo užduočių skaidymas	1	2	1	2	3	4	5	6	7	8
Elementarios užduoties nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nesprendė	13,00	12,71	26,55	26,55	26,55	26,55	26,55	26,55	26,55	26,55
Klaida	22,88	24,01	48,02	48,02	48,02	48,02	48,02	48,02	48,02	48,59
Gerai	64,12	63,28	25,43	25,43	25,43	25,43	25,43	25,43	25,43	24,86

	3 užduotis		**4 užduotis**				**5 užduotis**	
Testo užduočių skaidymas	1	1	2	3	4	2	1	2
Elementarios užduoties nr.	11	13	14	15	16	12	17	18
Nesprendė	42,37	29,38	28,81	29,09	6,78	9,04	0	0
Klaida	10,74	5,93	22,88	28,25	58,47	51,13	18,08	14,41
Gerai	46,89	64,69	48,31	42,66	34,75	39,83	81,92	85,59

	6 užduotis						**7 užduotis**	
Testo užduočių skaidymas	1	2	3	4	5	6	1	2
Elementarios užduoties nr.	19	20	21	22	23	24	25	26
Nesprendė	28,53	28,53	28,53	28,53	28,53	10,45	1,13	1,13
Klaida	20,62	21,19	21,75	25,99	51,70	74,29	82,49	35,03
Gerai	50,85	50,28	49,72	45,48	19,77	15,26	16,38	63,84

	8 užduotis			**9 užduotis**						**10 užduotis**	
Testo užduočių skaidymas	1	2	3	1	2	3	4	5	6	1	2
Elementarios užduoties nr.	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
Nesprendė	26,27	26,27	25,99	30,79	30,79	30,79	7,35	30,79	5,93	1,98	1,98
Klaida	68,08	69,21	70,34	13,28	19,49	24,58	55,93	32,49	59,89	12,15	67,23
Gerai	5,65	4,52	3,67	55,93	49,72	44,63	36,72	36,72	34,18	85,87	30,79

Kiekviena olimpiados užduotis vertinama taškais. Jeigu dalyvis užduotį išsprendžia ir sprendimą teoriškai pagrindžia, jam skiriamas iš anksto nurodytas taškų skaičius. Jeigu sprendimas nepilnas, nepakankamai pagrįstas arba turi nežymių trūkumų, taškų skaičius mažinamas. Už neišspręstą užduotį taškų neskiriama. Moksleivių darbus tikrina ir vertina speciali olimpiados komisija: ji išaiškina nugalėtojus, skiria premijas, analizuoja kiekvieno turo užduočių sprendimus (Drėgūnas, Rumšas, 1984). Susumavus rezultatus, gauname tokią lentelę.

4 lentelė

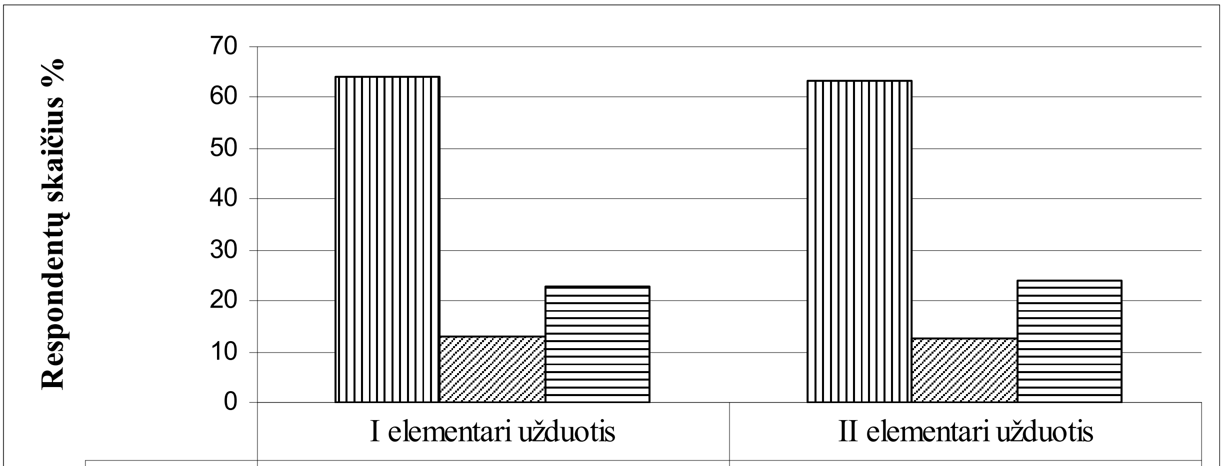
Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados vertintojų skirti taškai mokiniams

Vertintojų skirti taškai	Mokinių skaičius, %	Vertintojų skirti taškai	Mokinių skaičius, %	Vertintojų skirti taškai	Mokinių skaičius, %
30	0,28	**18,5**	0,85	**9,5**	3,39
29	0,28	**18**	2,82	**9**	2,82
28	0,28	**17,5**	1,98	**8,5**	1,98
27,5	0,57	**17**	1,69	**8**	5,08
27	0,57	**16,5**	2,54	**7,5**	1,13
26,5	0,28	**16**	2,82	**7**	2,26
26	0,57	**15,5**	2,54	**6,5**	1,69
25	0,28	**15**	3,96	**6**	2,26
24	0,28	**14,5**	1,13	**5,5**	0,57
23,5	0,28	**14**	1,41	**5**	3,11
23	0,85	**13,5**	3,11	**4,5**	0,57
22	1,98	**13**	4,24	**4**	3,39
21,5	1,13	**12,5**	1,98	**3,5**	0,28
21	2,82	**12**	4,24	**3**	1,69
20,5	0,85	**11,5**	1,13	**2,5**	0,85
20	3,67	**11**	3,11	**2**	0,57
19,5	3,11	**10,5**	2,26	**1,5**	0,28
19	2,54	**10**	5,08	**1**	0,57

2.4. Olimpiados užduočių sprendimo vertinimas

1 uždavinys. Parašykite skaičius 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 vietoje raidžių a, b, c, d, e, f, g, h (skirtingos raidės – skirtingi skaičiai) taip, kad būtų teisinga lygybė: a + b + c + d = e + f + g + h.

Pirmoji olimpiados užduotis – skaičių pasirinkimas ir sudėties veiksmų atlikimas. Šią užduotį gerai atliko 63,28% moksleivių. Visai nesprendė 12,71%, kitokių klaidų darė 24,01%.



	I elementari užduotis	II elementari užduotis
gerai	64,12	63,28
nesprendė	13,00	12,71
klaida	22,88	24,01

1 pav. **Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados skaičių pasirinkimo ir sudėties veiksmų atlikimo rezultatai**

1 lentelė

Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados skaičių pasirinkimo ir sudėties veiksmų atlikimo klaidos, %

Kodo reikšmė	**1 užduotis**	
	I elementari užduotis	II elementari užduotis
Blogas skaičių pasirinkimas	22,60	0,00
Parašyta neteisinga lygybė	0,00	22,60
Neparašyta lygybė	0,00	0,56
Vietoj pliusų sudėjo kablelius	0,00	0,28
Teisingai pradėjo, bet nebaigė spręsti	0,28	0,28
Pateiktas klaidingas atsakymas	0,00	0,28

Šią užduotį moksleiviai turėjo spręsti dviem veiksmais:

1) turėjo pasirinkti skaičius: a = 11, b = 18, c = 13, d = 16, e = 17, f = 12, g = 14, h = 15;

2) parašyti teisingą lygybę: 11 + 18 + 13 + 16 = 17 + 12 + 14 + 15.

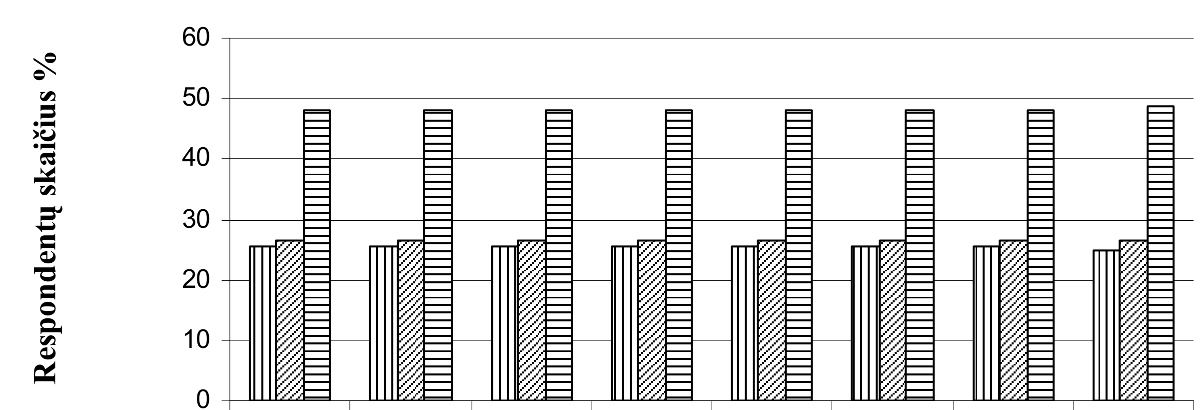
Kad teisingai išspręstų pateiktą užduotį, moksleiviai turi mokėti, taikydami sumos ir kombinatorikos žinias, numatyti įvairų skaičių kombinacijų sumų rezultatus ir išrinkti tinkamiausią. Moksleiviai turėjo suvokti, kad vienoje lygybės pusėje reikėjo surašyti kas antrą skaitmenį ir juos sudėti, o kitoje pusėje tą patį veiksmą atlikti su likusiais skaitmenimis.

Padarytų klaidų priežastis paaiškinti sunku, nes užduoties sprendimas yra trumpas. Įžvelgti vaiko mąstymo eigą ir klaidos priežastį trumpame sprendime yra sudėtinga.

2 uždavinys. Sudėliokę reiškinius reiškinių didėjimo tvarka, perskaitykite žodį:

L a – b	K a – b + 30	V a – b – 50	S a + b + 40
Y a – b + 10	E a – b – 20	O a – b + 40	

Antroji olimpiados užduotis – reiškinių palyginimo ir teisingai perskaitytas žodis. Šią užduotį teisingai išsprendė 45,76% olimpiados dalyvių. 27,68% moksleivių suklydo, 26,56% vaikų šios užduoties net nebandė spręsti.



	I užd.	II užd.	III užd.	IV užd.	V užd.	VI užd.	VII užd.	VIII užd.
gerai	25,43	25,43	25,43	25,43	25,43	25,43	25,43	24,86
nesprendė	26,55	26,55	26,55	26,55	26,55	26,55	26,55	26,55
klaida	48,02	48,02	48,02	48,02	48,02	48,02	48,02	48,59

2 pav. **Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados reiškinių palyginimo ir teisingai perskaityto žodžio rezultatai**

2 lentelė

Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados reiškinių palyginimo ir teisingai perskaityto žodžio klaidos, %

Kodo reikšmė	2 užduotis							
	I elementari užduotis	II elementari užduotis	III elementari užduotis	IV elementari užduotis	V elementari užduotis	VI elementari užduotis	VII elementari užduotis	VIII elementari užduotis
Reiškiniai nesudėlioti didėjimo tvarka	48,02	48,02	48,02	48,02	48,02	48,02	48,02	0,00
Pateiktas tik teisingas atsakymas	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	38,70
Neteisingai sudėliotas žodis	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	9,04
Pateiktas klaidingas atsakymas	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,56
Neparašytas atsakymas	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,28

Mokiniai turėjo:

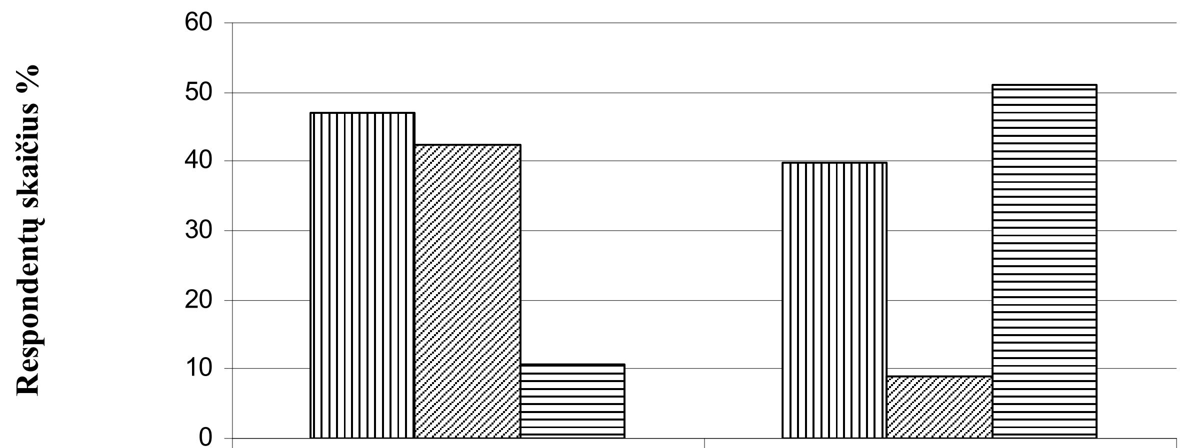
1) reiškinius surašyti didėjimo tvarka nuo mažiausio ligi didžiausio: V a – b – 50, E a – b – 20, L a – b, Y a – b + 10, K a – b + 30, O a – b + 40, S a + b + 40;
2) perskaityti gautą žodį – VELYKOS.

Kad teisingai išspręstų pateiktą užduotį, moksleiviai turi mokėti lyginti skaitinius reiškinius. Jau trečioje klasėje moksleiviai gilina skaičiaus sąvokos bei skaičių tvarkos supratimą. Šio tipo užduočių yra daug visuose pradinės mokyklos matematikos vadovėliuose. Jos pateikiamos moksleiviams mokantis skaičių numeracijos įvairiuose koncentruose, nagrinėjant skaičių sandarą. Sprendžiama daug tekstinių užduočių su skaičių palyginimu. Taigi ši užduotis neturėjo būti labai sudėtinga.

Užduoties sprendimas, kaip ir pirmoje užduotyje, yra trumpas, todėl įžvelgti vaiko mąstymo eigą ir klaidų priežastis trumpame sprendime yra sudėtinga. Pastebėta, kad moksleiviai nepratę pasinaudoti brėžiniais, schemomis, kuriomis remiantis galima pasilengvinti užduoties sprendimo radimą. Akivaizdu, kad ryšius tarp raidžių ir skaitinių duomenų išlaikyti vien mintyse jiems dar per sunku.

3 uždavinys. Kokį skaičių reikia atimti iš 160, norint gauti 200 ir 58 skirtumą?

Ši užduotis yra dviejų veiksmų tekstinė užduotis. Trečią užduotį gerai atliko 55,08% moksleivių. Visai nesprendė 9,04%, kitokių klaidų darė 35,88%.



	I elementari užduotis	II elementari užduotis
gerai	46,89	39,83
nesprendė	42,37	9,04
klaida	10,74	51,13

3 pav. **Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados dviejų veiksmų tekstinės užduoties sprendimo rezultatai**

3 lentelė

Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados dviejų veiksmų tekstinės užduoties sprendimo klaidos, %

Kodo reikšmė	**3 užduotis**	
	I elementari užduotis	II elementari užduotis
Vietoj atimties atliko sudėties veiksmą	3,11	5,93
Pateiktas tik teisingas atsakymas	0,00	21,19
Pateiktas klaidingas atsakymas	0,00	20,62
Aritmetinė klaida	1,41	0,85
Nevisiškai suprasta sąlyga	5,37	0,56
Nemokėjo sudaryti lygties	0,56	0,00
Klaida sąlygota ankstesnės	0,00	0,85
Išsiblaškymo klaida	0,28	0,28
Teisingai pradėjo, bet nebaigė spręsti užduoties	0,00	0,85

Šią užduotį moksleiviai turėjo spręsti dviem veiksmais:

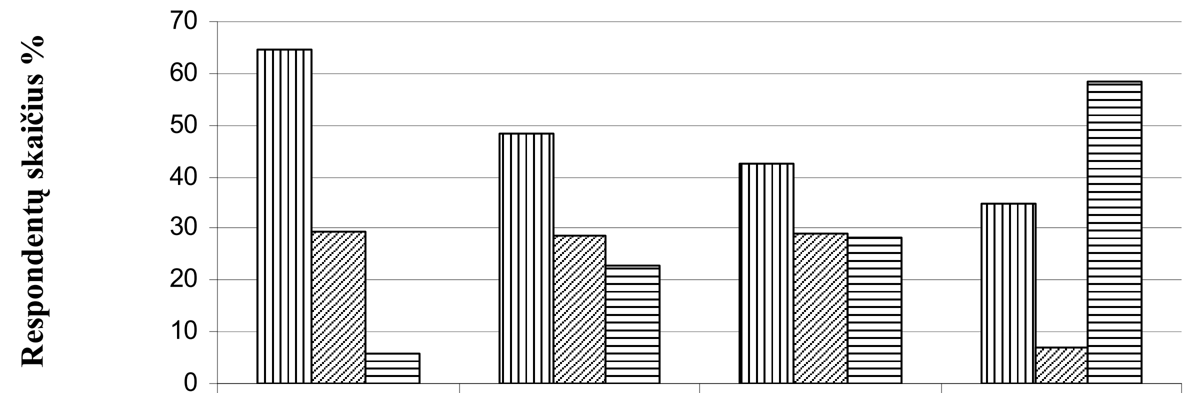
1) rasti šių skaičių skirtumą 200 – 58 = 142;
2) sužinojus skirtumą galima apskaičiuoti ir atsakymą 160 – 142 = 18.

Jungdami du paprastuosius uždavinius į vieną, gauname dviveiksmę tekstinę užduotį. Jungimo pobūdis gali būti įvairus. Reikšmingesni tokie junginiai, kai sudėtinis uždavinys gaunamas vientisas, nematyti atskirų paprastųjų užduočių, tai yra, kai reikia mokiniui gerai pagalvoti, kokie paprastieji uždaviniai jį sudaro, be to, kai antrąją iš paprastųjų užduočių galima spręsti tik išsprendus pirmąją.

Mokant aritmetinių veiksmų pradinėse klasėse, pirmiausia išmokstama lentelinė sudėtis ir atimtis. Vėliau remiantis išmoktais dalykais, mokoma ir sudėtingesnių atimties ir sudėties atvejų. Vadovėliuose daugiausia dėmesio ir skiriama aritmetinių veiksmų mokymui. Todėl pateikiama daug įvairių užduočių, lavinančių atmintį, loginį mąstymą.

4 uždavinys. Skaičių 64 padidinkite jo paties trimis aštuntadaliais, o gautąjį skaičių sumažinkite pirmojo skaičiaus puse.

Ketvirtoji olimpiados užduotis – skaitinės reikšmės radimas, kuris moksleiviams sudarė nemažai sunkumų. Šios užduoties sprendimo rezultatai yra tokie: 37,29% moksleivių užduotį išsprendė teisingai, 55,93% pradinukų suklydo, 6,78% moksleivių net nebandė spręsti šios užduoties.



	I užd.	II užd.	III užd.	IV užd.
gerai	64,69	48,31	42,66	34,75
nesprendė	29,38	28,81	29,09	6,78
klaida	5,93	22,88	28,25	58,47

4 pav. **Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados skaitinės reikšmės radimo rezultatai**

4 lentelė

Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados skaitinės reikšmės radimo klaidos, %

Kodo reikšmė	4 užduotis			
	I elementari užduotis	II elementari užduotis	III elementari užduotis	IV elementari užduotis
Aritmetinė klaida	0,85	0,00	0,56	0,56
Nevisiškai suprasta sąlyga	4,80	13,56	22,88	0,56
Išsiblaškymo klaida	0,28	0,00	0,00	0,85
Vietoj atimties atliko sudėties veiksmą	0,00	0,56	0,85	0,85
Vietoj atimties atliko dalybos veiksmą	0,00	0,00	0,28	0,28
Vietoj sudėties atliko daugybos veiksmą	0,00	5,93	0,00	0,00
Vietoj sudėties atliko dalybos veiksmą	0,00	1,41	0,00	0,00
Klaida sąlygota ankstesnės	0,00	0,85	1,69	4,80
Nemoka padalinti skaičių	0,00	0,00	0,28	0.00
Praleistas sudėties veiksmas	0,00	0,56	0,00	0,00
Teisingai pradėjo, bet nebaigė spręsti užduoties	0,00	0,00	1,13	0,00
Pateikė tik teisingą atsakymą	0,00	0,00	0,00	7,63
Pateikė tik klaidingą atsakymą	0,00	0,00	0,00	42,66
Neparašytas atsakymas	0,00	0,00	0,00	0,28
Nepadalino iš dviejų	0,00	0,00	0,56	0,00

Šiam uždaviniui išspręsti, moksleiviai turėjo atlikti keturis veiksmus:

1) apskaičiuoti skaičiaus 64 tris aštuntadalius $64 : 8 \cdot 3 = 24$;
2) padidinti skaičių $64 + 24 = 88$;
3) rasti skaičiaus pusę $64 : 2 = 32$;
4) gautąjį skaičių sumažinkite pirmojo skaičiaus puse $88 – 32 = 56$.

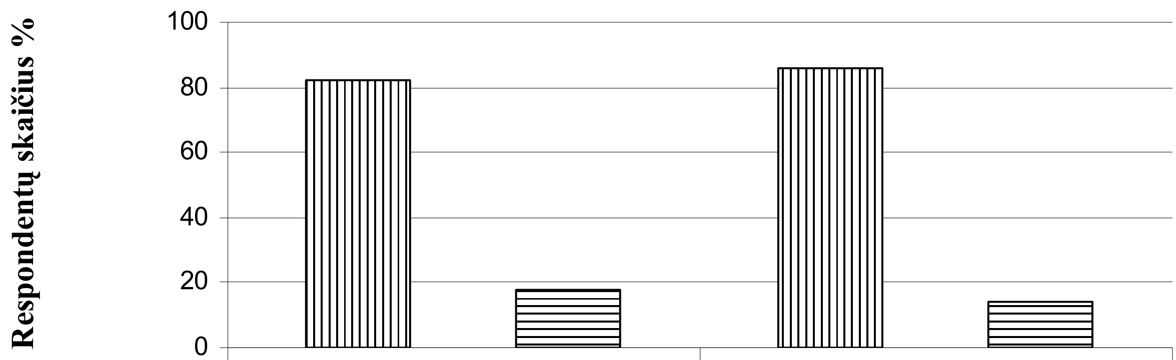
Iš esmės pradinėje mokykloje pagrindinis dėmesys skiriamas aritmetiniams veiksmams ir veiksmų atlikimo įgūdžių lavinimui. Pagrindinius matematinius veiksmus (sudėties, atimties, daugybos ir dalybos) moksleiviai mokosi atlikti stulpeliu ir eilute.

Išanalizavus šios užduoties sprendimus, galima teigti, kad dalis moksleivių nesuvokia trupmenų esmės, todėl nesugeba jų pritaikyti. Ketvirtokai yra susipažinę su paprastosiomis trupmenomis, skiria ekvivalenčias trupmenas, taisyklingas ir netaisyklingas trupmenas. Sprendžiant šį uždavinį reikėjo pritaikyti turimas žinias ir apskaičiuoti skaičiaus dalį, t. y. 64 : 8 · 3 = 24. Kai kurie vaikai tik padalijo iš 8, bet gauto dalmens nedaugino iš 3, t. y. apskaičiavo tik vieną skaičiaus dalį.

5 uždavinys. Sudėkite:

1 km 200 m + 5000 m =   1 h 12 min + 70 min =

Penktoji olimpiados užduotis – veiksmai su matiniais vienetais. Šią užduotį sprendė visi vaikai: teisingai išsprendė 75,42% moksleivių, o 24,58% vaikų suklydo.



	I elementari užduotis	II elementari užduotis
gerai	81,92	85,59
nesprendė	0	0
klaida	18,08	14,41

5 pav. **Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados užduoties su matiniais vienetais sprendimo rezultatai**

5 lentelė

Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados užduoties su matiniais vienetais sprendimo klaidos, %

Kodo reikšmė	**5 užduotis**	
	I elementari užduotis	II elementari užduotis
Nemoka sudėti metrų	7,63	0,00
Nemoka sudėti minučių	0,00	7,63
Metrų stambinimo klaida	0,56	0,00

Minučių stambinimo klaida	0,00	0,28
Nemoka stambinti metrų	9,89	0,00
Nemoka stambinti minučių	0,00	5,93
Aritmetinė klaida	0,00	0,28
Išsiblaškymo klaida	0,00	0,28

Šiame uždavinyje moksleiviai turėjo atlikti veiksmus su matiniais vienetais:

1) 1 km 200 m + 5000 m = 6 km 200 m (pirmiausia reikia sustambinti smulkesnį matinį vienetą, t. y. 5000 m. Jį sustambinę gauname 5 km);
2) 1 h 12 min + 70 min = 2 h 22 min (pirmiausia reikia sustambinti smulkesnį matinį vienetą, t. y. 70 min. Jį sustambinę gauname 1 h 10 min).

Pradinėse klasėse nagrinėjami tik didžiausią praktinę reikšmę turintys ir su nagrinėjamąja numeracija suderinti matiniai skaičiai. Norinti gerai skaičiuoti matiniais skaičiais, reikia gerai mokėti matus, tiksliai ir konkrečiai įsivaizduoti matavimo vienetus, žinoti paprastojo ir sudėtinio matinio skaičiaus sąvokas. O sudėtinių matinių skaičių veiksmai padeda tvirtai įsisavinti matus ir jų tarpusavio santykius. Kad moksleiviai gerai įsisavintų matavimo vienetus, būtina sudaryti tokias sąlygas, kur atlikdami konkrečius matavimus jie patys įsitikintų, kaip susidaro paprastieji ir sudėtiniai matiniai skaičiai, ir aiškiai įsivaizduotų šių skaičių kilmę. Taikant tik formalius mokymo būdus, dalis moksleivių visai nesuvokia matų sistemos ir sprendimus atlieka spėjimo būdu. Norint išvengti tokių klaidų, reikėtų ne tik skirti kuo daugiau praktinių užduočių, bet ir kiek įmanoma dažniau lyginti matinių vienetų pakeitimus, pabrėžiant, kad jie yra vienas kitam priešingi: smulkinant stambūs matai pakeičiami smulkiais matais, o stambinant, atvirkščiai, smulkūs matai pakeičiami stambiais. Pirmasis pakeitimas atliekamas dauginant, o antrasis – dalijant.

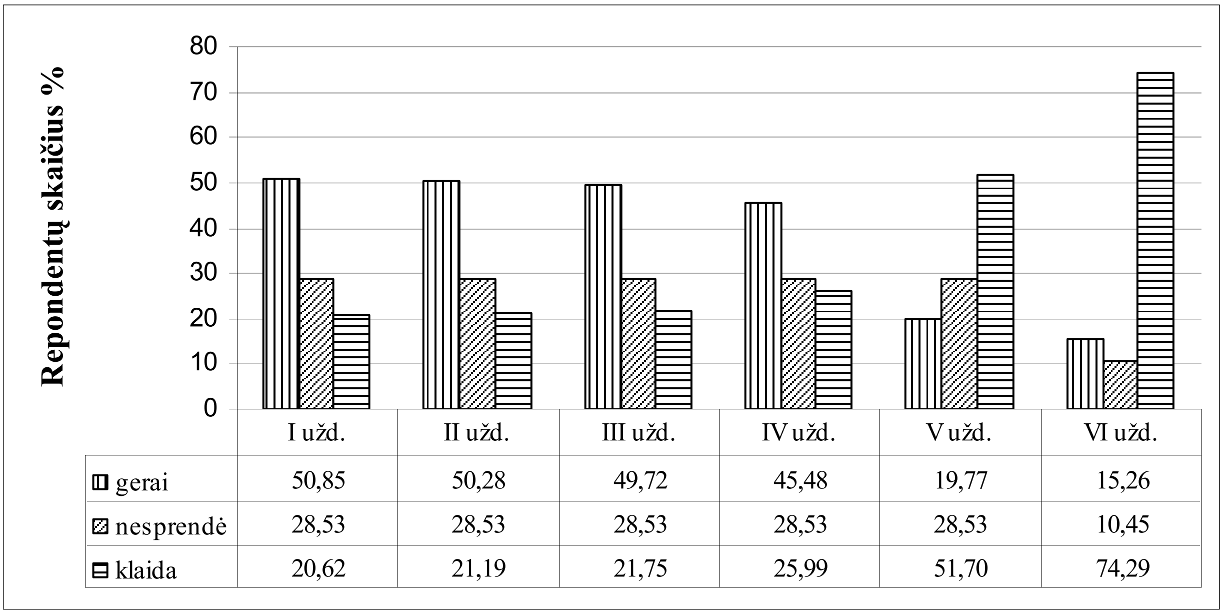
Ketvirtokai, anot pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrųjų programų, operuoja matavimo vienetais: kilometrais ir metrais, valandomis ir minutėmis; atlieka paprastus skaičiavimus su dviejų matų sudėtiniais skaičiais.

Atliekant sudėtinių matinių skaičių veiksmus, moksleivių samprotavimai būna sudėtingesni, negu atliekant bevardžių skaičių veiksmus. Prieš pradėdami skaičiuoti, moksleiviai turi:

a) atidžiai pažiūrėti į duotuosius skaičius ir pastebėti jų ypatybes;
b) taisyklingai parašyti vieną skaičių po kitu, atsižvelgdami į duotųjų skaičių pobūdį;
c) prireikus atlikti smulkinimą ir stambinimą.

6 uždavinys. Roko tėvai parduotuvėje išsirinko 2 m pločio kiliminę dangą. Kiek metrų kiliminės dangos reikės trims kambariams iškloti, jeigu kiekvieno kambario plotis yra 4 m, o vieno kambario ilgis 5 m, kito – 6 m, o trečiojo – 7 m?

Tai praktinio pobūdžio užduotis, kuri moksleiviams sudarė didelių sunkumų. Tik 14,97% olimpiados dalyvių išsprendė teisingai. 74,58% moksleivių suklydo, 10,45% vaikų šios užduoties net nebandė spręsti. Tai didžiausias klaidingai užduotį sprendusių moksleivių skaičius (74,58%). Kokios padarytos klaidos ir tų klaidų priežastys?



6 pav. **Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados praktinio pobūdžio užduoties sprendimo rezultatai**

6 lentelė

Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados praktinio pobūdžio užduoties sprendimo klaidos, %

Kodo reikšmė	6 užduotis					
	I elementari užduotis	II elementari užduotis	III elementari užduotis	IV elementari užduotis	V elementari užduotis	VI elementari užduotis
Nepadalino iš dviejų	0,00	0,00	0,00	0,00	22,32	1,13
Vietoj dalybos atliko daugybos veiksmą	0,00	0,00	0,00	0,00	0,85	0,28
Nevisiškai suprasta sąlyga	18,64	18,93	19,21	20,62	19,77	0,28
Aritmetinė klaida	0,28	0,00	0,28	1,13	1,13	0,00

Teisingai pradėjo, bet nebaigė spręsti	1,41	1,98	2,26	4,24	5,65	0,00
Klaida sąlygota ankstesnės	0,00	0,28	0,00	0,00	1,98	0,00
Išsiblaškymo klaida	0,28	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Pateiktas tik teisingas atsakymas	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	4,24
Pateiktas klaidingas atsakymas	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	65,82
Blogai parašyti matavimo vienetai	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,54

Šiam uždaviniui išspręsti moksleiviai turėjo atlikti šešis veiksmus:

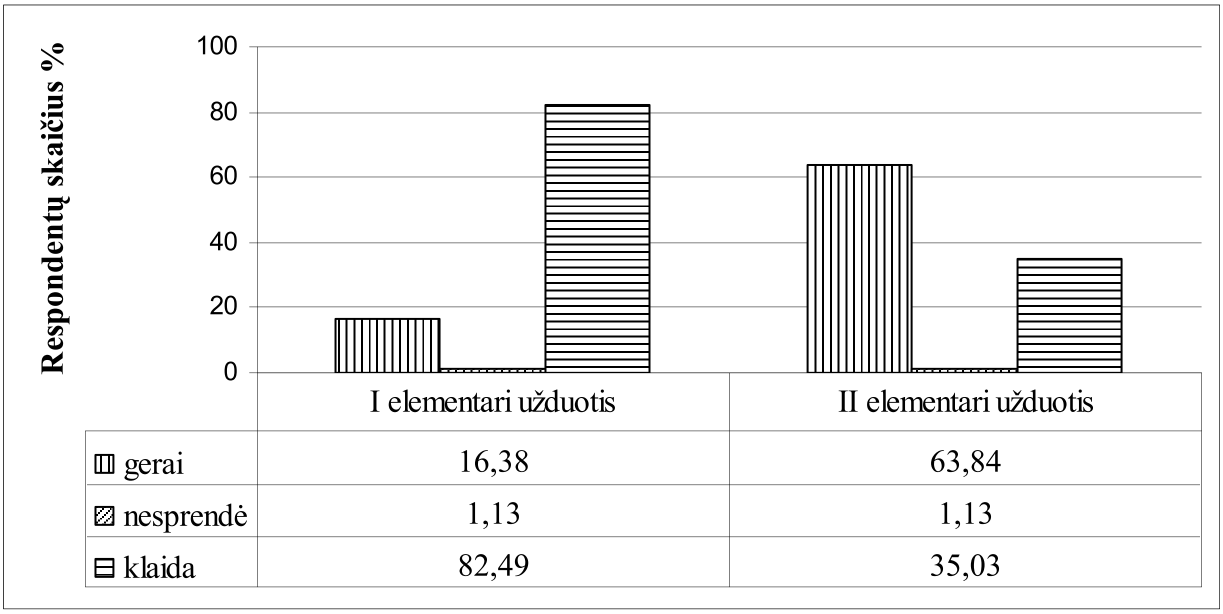
1) Visų pirma turėjo sužinoti keliomis juostomis bus tiesiamas kilimas 4 : 2 = 2 (juost.);
2) Kiek metrų kilimo reikia pirmam kambariui? 5 · 2 = 10;
3) Kiek metrų kilimo reikia antram kambariui? 6 · 2 = 12;
4) Kiek metrų kilimo reikia trečiam kambariui? 7 · 2 = 14;
5) Kiek metrų kilimo reikia iš viso? 10 + 12 + 14 = 36;
6) Atsakymo į užduoties klausimą radimas 36.

Su šia užduotimi dažnai susiduriama praktikoje, o ketvirtokai, kaip parašyta pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrosiose programose, tiria nesudėtingas gyvenimiškas ir matematines situacijas, sprendžia uždavinius, susietus su aplinka, moka matuoti ir skaičiuoti ilgius. Tai akcentuojama ir pradinės mokyklos matematikos programoje (Kiseliova, Kiseliovas, 2003).

Mokytojai dar dažnai orientuojasi į formalių tipinių užduočių sprendimą, o mažiau dėmesio skiria praktinėms užduotims Kita vertus, ši užduotis skirta aukštesnių matematinių gebėjimų moksleiviams. Gerai ją atliko abstrakčiai mąstantys moksleiviai. Kiti moksleiviai sunkiai įsivaizdavo, kad kilimą reikia kloti dviem juostomis, nes kilimo plotis 2m, o kambario plotis 4m.

7 uždavinys. Manto gimtadienis buvo penktadienį, Donato – už 30 dienų. Kokią savaitės dieną bus Donato gimtadienis?

Septintoji olimpiados užduotis – gimtadienio dienos nustatymo užduotis. Šią dažnai gyvenime pasitaikančią užduotį gerai atliko 63,56% moksleivių. Visai nesprendė 1,13%, kitokių klaidų darė 35,31%.



7 pav. **Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados gimtadienio dienos nustatymo tekstinės užduoties sprendimo rezultatai**

7 lentelė

Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados gimtadienio dienos nustatymo tekstinės užduoties sprendimo klaidos, %

Kodo reikšmė	**7 užduotis**	
	I elementari užduotis	II elementari užduotis
Neatskleistas loginis mąstymas	76,55	0,00
Nevisiškai suprasta sąlyga	5,93	0,28
Pateiktas tik klaidingas atsakymas	0,00	34,75

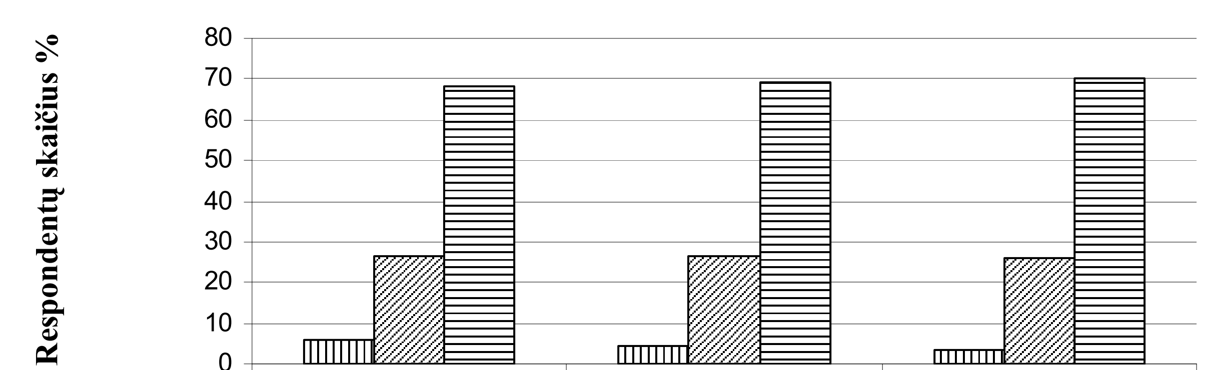
Respondentai turėjo apskaičiuoti, kada bus Donato gimtadienis. Kadangi 30 dienų – tai 4 savaitės ir 2 dienos, tai po 4 savaičių bus penktadienis ir dar po 2 dienų bus sekmadienis. Taigi Donato gimtadienis bus sekmadienį.

Moksleiviai dažniausiai darė skaičiavimo klaidų. Reikia manyti, kad klaidų būtų žymiai mažiau, jei moksleiviai būtų pratinami sudarinėti schemas, t. y. pasilengvinti užduoties sprendimo radimą.

Ypač tai reikalinga silpnesniesiems moksleiviams, pasižymintiems daugiau konkrečiu mąstymu, todėl jiems reikėtų dažniau pasiūlyti įvairias pagalbines priemones. Kai moksleiviai susidarys tam tikrus vaizdinius, pamažu tų priemonių atsikratys patys.

8 uždavinys. Lentynoje yra trys kibirėliai su kamuoliukais. Viename iš jų yra 11 kamuoliukų, kitame – 7, o trečiame – 6 kamuoliukai. Dėliojant kamuoliukus iš vieno kibirėlio į kitą, reikia padaryti taip, kad visuose kibirėliuose būtų po 8 kamuoliukus. Bet į kiekvieną kibirėlį galima įdėti tik tiek kamuoliukų, kiek jų yra kibirėlyje. Pavyzdžiui, į pirmąjį kibirėlį galima įdėti tik 11 kamuoliukų. Kaip tai padaryti atliekant tik tris perdėjimus?

8 užduoties sprendimas moksleiviams sudarė didelių sunkumų. Tik 3,39% olimpiados dalyvių išsprendė teisingai. 70,34% moksleivių suklydo, 26,27% vaikų šios užduoties net nebandė spręsti. Tai mažiausias gerai užduotį sprendusių moksleivių skaičius (3,39%). Kokios padarytos klaidos ir tų klaidų priežastys?



	I elementari užduotis	II elementari užduotis	III elementari užduotis
gerai	5,65	4,52	3,67
nesprendė	26,27	26,27	25,99
klaida	68,08	69,21	70,34

8 pav. **Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados tikimybinių eksperimentų užduoties sprendimo rezultatai**

8 lentelė

Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados tikimybinių eksperimentų užduoties sprendimo klaidos, %

Kodo reikšmė	8 užduotis		
	I elementari užduotis	II elementari užduotis	III elementari užduotis
Nevisiškai suprasta sąlyga	67,51	68,64	69,49
Nepasakytas perkeltų kamuoliukų skaičius	0,56	0,56	0,28
Pateiktas klaidingas atsakymas	0,00	0,00	0,28
Išsiblaškymo klaida	0,00	0,00	0,28

Atlikdami šią užduotį, moksleiviai turėjo:

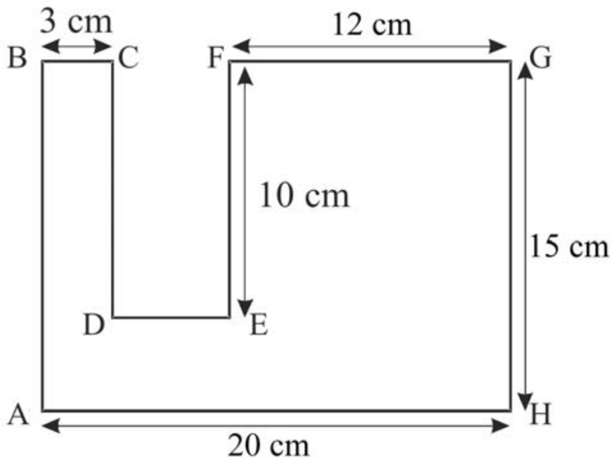
1) Iš pirmo kibirėlio į antrą perdėję7 kamuoliukus, gausime: 4, 14, 6.
2) Iš antro kibirėlio į trečiąjį perdėję 6 kamuoliukus, gausime: 4, 8, 12.
3) Iš trečio kibirėlio į pirmąjį perdėję 4 kamuoliukus, gausime: 8, 8, 8.

Pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrosiose programose parašyta, jog moksleiviai taisyklingai vartoja kasdieninės kalbos žodžius, susijusius su atsitiktinumu ir duomenimis; numato atskirų įvykių tikėtinumą ir pagrindžia to numatymo teisingumą duomenimis.

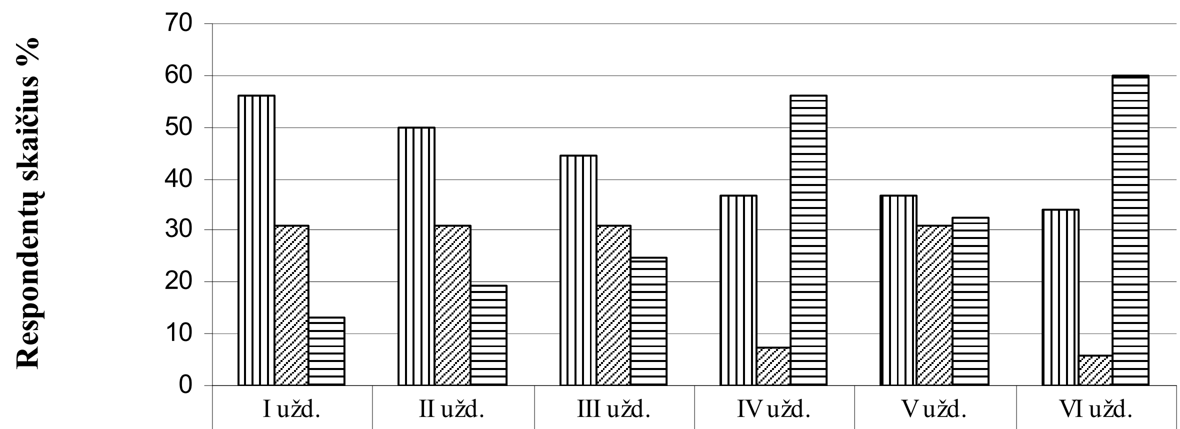
Pradinėse klasėse moksleiviai tik supažindinami su nevienodu įvykių tikėtinumo laipsniu atliekant paprasčiausius praktinius eksperimentus. Kol moksleiviai nesimokė procentų, tikėtinumo įvertinimas yra tik mokymo tikslas. Sunku moksleiviams buvo suprasti šią užduotį. Ir apskritai šio amžiaus moksleiviams dar gana sunkoka raštu reikšti bet kokias mintis, o juo labiau matematines. Kaip jau minėjome, mokytojai dirba labai inertiškai, vis dar daug dėmesio skirdami užduočių skaičiui per pamoką, ir beveik nekreipiamas komunikacinių gebėjimų ugdymui. Pamokoje daugiausia kalba mokytojas, o moksleiviai tebelieka klausytojai. Taigi gauti rezultatai atspindi ne tik moksleivių žinias, gebėjimus, bet ir mokytojų taikomus metodus.

Mano nuomone, ši užduotis yra gana sunki ir panašios užduotys neturėtų būti įtraukiamos į olimpiadinių užduočių testą. Tačiau tai miesto ir rajono matematikos olimpiados užduotis. Joje dalyvauja moksleiviai, jau perėję pirmąjį atrankos etapą – mokyklinę matematikos olimpiadą. Miestų ir rajonų matematikos olimpiados tikslas – atrinkti gabiausius ir geriausiai matematiką mokančius moksleivius. Olimpiadoje siekiama patikrinti ne moksleivių žinias, o jų gebėjimą įgytas žinias taikyti neįprastomis sąlygomis

9 uždavinys. Apskaičiuokite nubraižytos figūros plotą ir perimetrą.



Devintoji olimpiados užduotis – geometrinės figūros ploto ir perimetro skaičiavimo užduotis. Teisingai šią užduotį išsprendė 22,88% moksleivių, suklydo - 72,32% moksleivių ir 4,80% vaikų užduoties nesprendė visiškai.



	I užd.	II užd.	III užd.	IV užd.	V užd.	VI užd.
gerai	55,93	49,72	44,63	36,72	36,72	34,18
nesprendė	30,79	30,79	30,79	7,35	30,79	5,93
klaida	13,28	19,49	24,58	55,93	32,49	59,89

9 pav. **Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados ploto ir perimetro užduoties sprendimo rezultatai**

9 lentelė

Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados ploto ir perimetro užduoties sprendimo klaidos, %

Kodo reikšmė	6 užduotis					
	I elementari užduotis	II elementari užduotis	III elementari užduotis	IV elementari užduotis	V elementari užduotis	VI elementari užduotis
Blogas kraštinės ilgis	1,13	3,11	2,54	0,00	9,32	0,00
Aritmetinė klaida	1,69	0,85	3,95	1,13	4,52	0,00
Nemoka skaičiuoti ploto	9,89	12,99	12,71	0,00	0,00	0,00
Nemoka skaičiuoti perimetro	0,00	0,00	0,00	0,00	12,71	0,00
Vietoj atimties atliko sudėties veiksmą	0,00	0,00	0,28	0,00	0,00	0,00
Trūksta vienos kraštinės	0,00	0,00	0,00	0,00	2,54	0,28
Trūksta dviejų kraštinių	0,00	0,00	0,00	0,00	1,69	0,00
Trūksta trijų kraštinių	0,00	0,00	0,00	0,00	1,41	0,00
Klaida sąlygota ankstesnės	0,00	0,56	1,98	4,52	0,00	1,13
Nepadėjo skliaustų	0,00	0,00	0,00	0,00	0,28	0,00
Teisingai pradėjo, bet nebaigė spręsti	0,56	1,41	1,98	0,00	0,00	0,28
Nevisiškai suprasta sąlyga	0,00	0,28	1,13	0,00	0,00	0,00
Išsiblaškymo klaida	0,00	0,28	0,00	0,28	0,00	0,56
Pateiktas tik teisingas atsakymas	0,00	0,00	0,00	9,04	0,00	8,19
Pateiktas klaidingas atsakymas	0,00	0,00	0,00	38,42	0,00	48,02
Neparašytas atsakymas	0,00	0,00	0,00	0,85	0,00	0,56
Blogai parašyti matavimo vienetai	0,00	0,00	0,00	1,69	0,00	0,85

Šiam uždaviniui išspręsti moksleiviai turėjo atlikti šešis veiksmus:

1) sandaugos apskaičiavimas $3 \cdot 15 = 45$ (cm^2);
2) sandaugos apskaičiavimas $5 \cdot 17 = 85$ (cm^2), t. y. $15 – 10 = 5$ (cm) ir $20 – 3 = 17$ (cm);
3) sandaugos apskaičiavimas $12 \cdot 10 = 120$ (cm^2);
4) viso ploto apskaičiavimas $45 + 85 + 120 = 250$ (cm^2);
5) nežinomos kraštinės radimas $20 – 3 – 12 = 5$ (cm);
6) perimetro apskaičiavimas $15 + 3 + 10 + 5 + 10 + 12 + 15 + 20 = 90$ (cm).

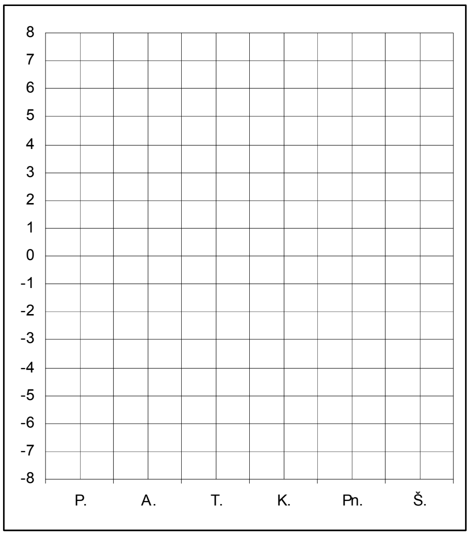
Geometrija yra reikšminga matematikos mokymosi sritis ir svarbus aplinkos aprašymo įrankis. Ji žadina vaizduotę ir skatina mąstymą. Pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrosios programos nurodo, kad ketvirtos klasės moksleiviai turi mokėti apskaičiuoti trikampio, kvadrato ir stačiakampio perimetrą, mokėti apskaičiuoti plotą kvadratiniais metrais ir kvadratiniais centimetrais.

B.Balčytis (Balčytis, 1997) mokytojams skirtoje knygoje pažymi, kad IV klasėje lavinami ploto, perimetro apskaičiavimo įgūdžiai. Daug dėmesio tokioms užduotims skiriama ,,Matematikos pasaulyje" (Kiseliovas, Kiseliova, 2006).

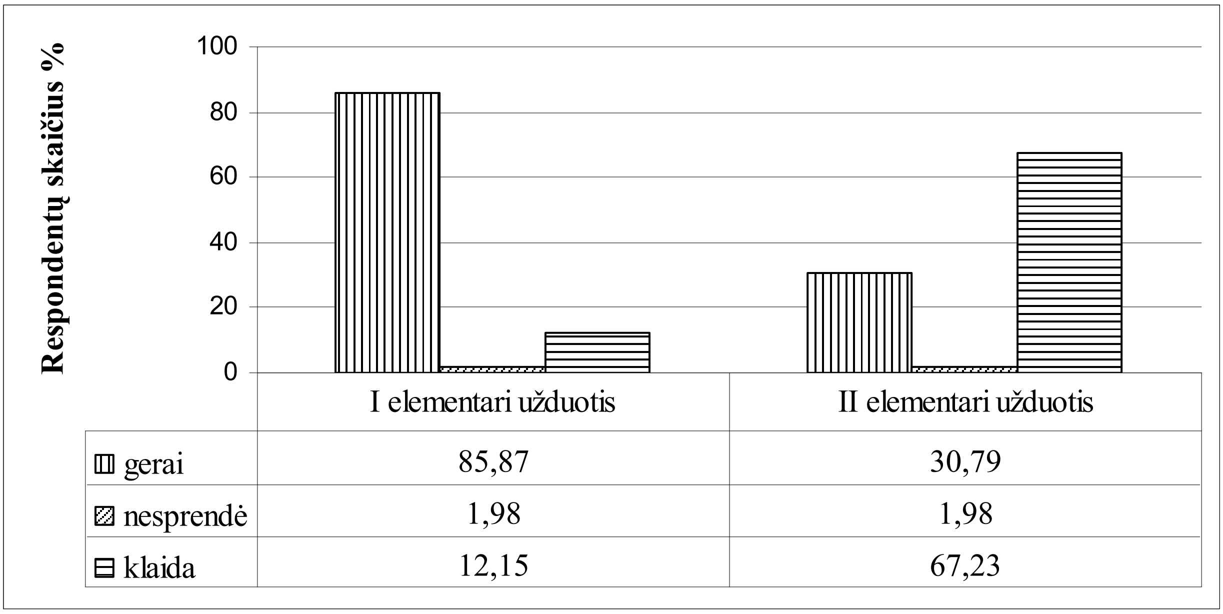
Moksleiviai dažnai atlieka nubraižytų stačiakampių plotų ir perimetrų apskaičiavimo užduotis. Šioje užduotyje dalyviai turėjo pastebėti, kad ši plokštumos geometrinė figūra yra sudaryta iš kelių atskirų stačiakampių, kurių plotus reikėjo apskaičiuoti atskirai ir tik paskui juos visus sudėti.

10 uždavinys. Pagal pateiktus orų stebėjimo duomenis sudarykite orų kitimo grafiką.

Savaitės dienos	Temperatūra
P.	4
A.	-6
T.	-7
K.	-6
Pn.	-4
Š.	0
S.	1



Paskutinė olimpiadoje pateikta užduotis – duomenų vaizdavimas grafiškai. Užduotį teisingai išsprendė 29,94% dalyvių, 68,08% mokinių spręsdami suklydo ir 1,98% nė nebandė spręsti.



10 pav. **Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados orų kitimo grafiko braižymo rezultatai**

10 lentelė

Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados orų kitimo grafiko braižymo klaidos, %

Kodo reikšmė	10 užduotis	
	I elementari užduotis	II elementari užduotis
Blogai atidėti taškai koordinačių ašyse	11,02	0,00
Vietoj grafiko nubraižyta diagrama	0,00	51,41
Nenubraižytas grafikas	0,00	11,58
Nepažymėti taškai	1,13	0,00
Klaida sąlygota ankstesnės	0,00	4,24

Šiame uždavinyje moksleiviai remiantis pateiktais lentelės duomenimis turėjo atlikti dvi užduotis:

1) atidėti taškus koordinačių ašyse;
2) nubraižyti oro kitimo grafiką.

10 užduotis yra skirta tam, kad mokiniai mokėtų skaityti duomenis pateiktus lentelėje bei juos pavaizduoti grafiškai. Ši užduotis neturėjo sudaryti sunkumų, tačiau daugiau nei pusė mokinių vietoj grafiko braižė diagramą, nesugeba atskirti grafiko nuo diagramos.

Turint galvoje, kad ši užduotis yra pateikiama paskutinė, tikėtina, kad moksleiviai ją sprendė taip pat paskiausiai, todėl jau galėjo būti nuvargę ir tai lėmė neatidumo klaidas.

III skyrius. TYRIMO REZULTATAI

3.1. Statistiniai parametrai

Šioje trečioje darbo dalyje, remiantis pirmoje dalyje išnagrinėta teorija, buvo atliktas paskutinis tyrimo etapas – įvertintas testo, sudaryto iš skirtingų užduočių ir skirtingų ketvirtos klasės mokinių matematinių gebėjimų diagnostikai, tinkamumas (validumas bei patikimumas). Apskaičiuotas visų testo užduočių sunkumas, standartinis nuokrypis, koreliacija su bendru testo balu, atlikta įverčių faktorinė analizė.

Testų teorijoje priimta, kad diagnostiškai informatyvūs yra tie uždaviniai, kurių koreliacija su bendru testo balu r/tt $\geq$ 0,2 (Bitinas, 1974). Norint išspręsti visus šių testų uždavinius, reikia tam tikros savybės – gebėjimo spręsti pradinės mokyklos matematikos užduotis. Šių testų uždaviniai ir yra skirti patikrinti, kaip moksleiviai sprendžia tuos uždavinius. Jeigu darome prielaidą, kad iš užduočių visumos galima spręsti apie moksleivio gebėjimus šioje srityje, tai koreliacijos su bendru testo balu koeficientas r/tt ir rodo, kiek su tuo gebėjimu yra susijusi kiekviena užduotis.

Užduoties sunkumas – tai užduoties charakteristika, išreiškianti statistinį jos išspręstumo lygį tiriamųjų grupėje. Testo užduočių sunkumo analizė yra vienas iš svarbiausių testo sudarymo ir atskirų užduočių diagnostinių savybių nustatymo etapų. Užduoties sunkumą (išspręstumą) įprasta reikšti sunkumo indeksu. Jį žymėsime P ir skaičiuosime moksleivių, teisingai išsprendusių užduotį, skaičių n_t dalydami iš visų moksleivių, sprendusių užduotį, skaičius n:

$$P = \frac{n_t}{n}$$

Užduoties sunkumo koeficientas gali įgyti reikšmes nuo 0 iki 1. Žemas sunkumo koeficientas rodo, kad užduotis sunki, aukštas, kad ji lengva. Testo užduočių sunkumo analizės paskirtis – atrinkti optimalias pagal sunkumą užduotis bei parinkti užduoties vietą teste. Jeigu užduotys yra per sunkios ar per lengvos, tai testo validumas ir patikimumas sumažėja. Klasikinėje testų teorijoje darant prielaidą, kad konkrečią užduotį išsprendusių moksleivių dažnis yra normaliai pasiskirstęs atsitiktinis dydis, rekomenduojama į testą įtraukti tik tas užduotis, kurias išsprendė nemažiau kaip 16% ir ne daugiau kaip 84% moksleivių. Užduotis laikoma vertinga, jeigu jos sunkumo įvertis yra tarp 0,16 ir 0,84.

Testavimo rezultatai parodė, kad visi šio skyriaus uždaviniai yra diagnostiškai informatyvūs (pagal koreliacijos su bendru testo balu koeficientą r/tt ir užduoties sunkumą P). Užduoties sunkumo koeficientai $P \leq 0,16$ rodo, kad uždaviniai per sudėtingi. Tokie yra SS06_6, SS07_1, S08_1, S08_2, S08_3 uždaviniai. Sunkumo koeficientai $P \geq 0{,}84$ rodo, kad uždaviniai per lengvi. Tokie yra MM05_1, MM05_2, S10_1 uždaviniai.

1 lentelė

2007m. Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados testo kokybės statistiniai parametrai (Crobbach alpha = 0,89, Guttman Split-half = 0,80, *SD* = 16,49, μ = 14,75)

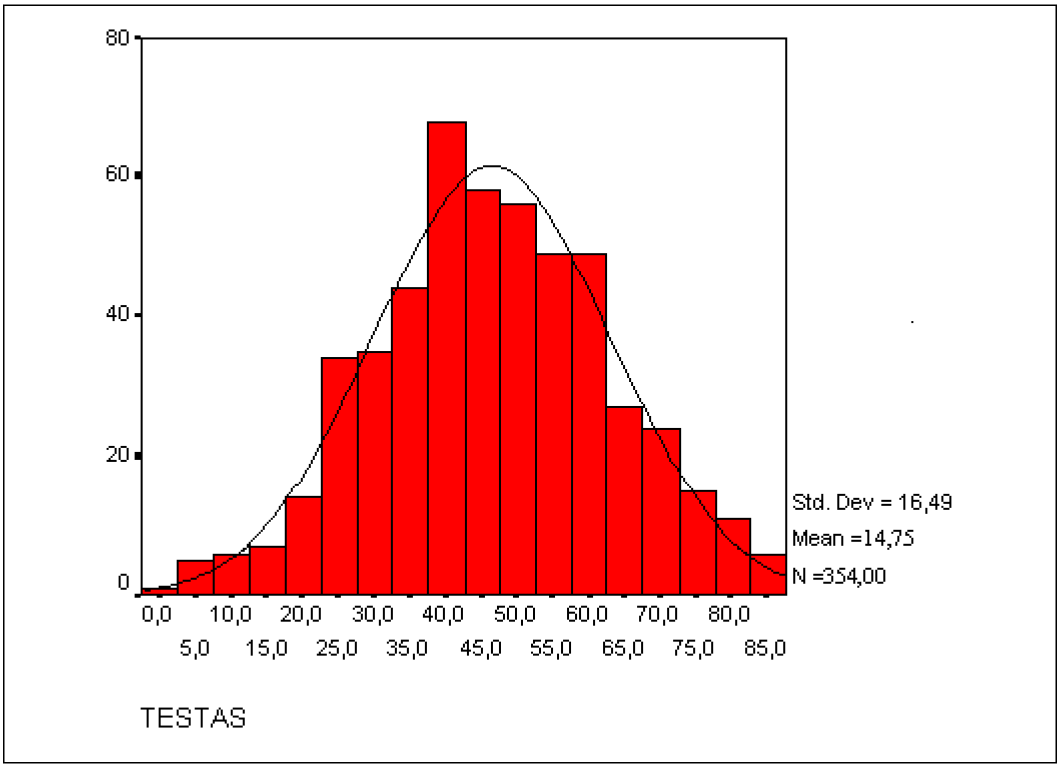
Elementarios užduoties numeris	**Užduoties sunkumas (*P*)**	**Standartinis nuokrypis**	**Koreliacija su bendru testo balu (*r/tt*)**	**Cronbach alpha pašalinus užduotį**	**Užduotį teisingai išsprendusių moksleivių skaičius, %**
SS01_1	0,64	0,47	0,44	0,89	64,12
SS01_2	0,63	0,48	0,51	0,89	63,28
RLN02_1	0,25	0,43	0,31	0,89	25,43
RLN02_2	0,25	0,43	0,31	0,89	25,43
RLN02_3	0,25	0,43	0,31	0,89	25,43
RLN02_4	0,25	0,43	0,31	0,89	25,43
RLN02_5	0,25	0,43	0,31	0,89	25,43
RLN02_6	0,25	0,43	0,31	0,89	25,43
RLN02_7	0,25	0,43	0,31	0,88	25,43
RLN02_8	0,25	0,43	0,31	0,88	24,86
SS03_1	0,47	0,50	0,37	0,88	46,89
SS03_2	0,40	0,49	0,34	0,89	39,83
SS04_1	0,65	0,47	0,44	0,89	64,69
SS04_2	0,48	0,50	0,34	0,88	48,31
SS04_3	0,43	0,50	0,42	0,89	42,70
SS04_4	0,35	0,48	0,47	0,89	34,75
MM05_1	0,82	0,38	0,39	0,89	81,92
MM05_2	0,86	0,34	0,38	0,88	85,59
SS06_1	0,51	0,50	0,54	0,88	50,85
SS06_2	0,50	0,50	0,57	0,88	50,28
SS06_3	0,50	0,50	0,31	0,88	49,72
SS06_4	0,45	0,50	0,53	0,88	45,48
SS06_5	0,20	0,40	0,44	0,88	19,77
SS06_6	0,15	0,34	0,16	0,88	15,26
SS07_1	0,16	0,37	0,32	0,88	16,38
SS07_2	0,64	0,48	0,46	0,88	63,84
S08_1	0,06	0,09	0,11	0,89	5,65
S08_2	0,05	0,08	0,10	0,89	4,52
S08_3	0,04	0,07	0,09	0,89	3,67
G09_1	0,56	0,50	0,38	0,89	55,93
G09_2	0,50	0,50	0,54	0,89	49,72
G09_3	0,45	0,50	0,53	0,88	44,63
G09_4	0,37	0,48	0,45	0,89	36,72
G09_5	0,37	0,48	0,45	0,89	36,72
G09_6	0,34	0,47	0,42	0,89	34,18
S10_1	0,86	0,34	0,38	0,89	85,87
S10_2	0,31	0,47	0,39	0,88	30,79

Panagrinėjus koreliaciją su bendru testo balu (*r/tt*), matome, jog didžiausias koreliacijos koeficientas 0,57 yra SS06_2 užduotyje, o mažiausias koreliacijos koeficientas 0,09 yra S08_3 užduotyje. Kaip matyti iš 1 lentelės, šiame teste ne visis uždaviniai yra diagnostiškai informatyvūs, t. y. jų koreliacija su bendru testo balu yra mažesnė už 0,2 (SS06_6, S08_1, S08_2, S08_3). Tačiau kiekvienos užduoties koreliacija su bendru testo balu yra gana aukšta ir kinta nuo r_{tt} = 0,09 iki r_{tt} = 0,57. O sunkumo koeficientas *P* kinta nuo 0,04 iki 0,86. Šios statistinės testo charakteristikos tenkina standartizuoto testo parametrus, o testas yra tinkamas ketvirtokų matematinių gebėjimų diagnostikai.

Taip pat šioje lentelėje yra Cronbach alpha koeficientas pašalinus užduotį, parodantis, kaip pasikeistų skalės patikimumas. Bendras visos skalės Cronbach alpha = 0,89. Jeigu pašalinus užduotį skalės patikimumas padidėtų, tai tikslinga būtų tą užduotį išmesti. Kaip matome iš 1 lentelės, Cronbach alpha pašalinus užduotį koeficientai neviršija 0,89, tai reiškia, kad visi testo uždaviniai tinka ketvirtokų matematinių gebėjimų įvertinimui.

Norėdami išsiaiškinti, kaip šio skyriaus uždaviniai yra susiję tarpusavyje, analizavome šio skyriaus uždavinių koreliacinę matricą (žr. 1 Priedas). Pirsono koreliacijos koeficientai rodo ryšio stiprumą tarp kintamųjų. Kaip matyti iš testo koreliacinės matricos, didžiausia koreliacija 0,95 yra tarp SS04_1 ir SS04_2 uždavinių, visiškai nekoreliuoja SS06_4 su SS01_2, RLN02_5, RLN02_6, SS06_6, SS07_2, G09_2. Ši užduotis koreliuoja tik su MM05_1 (*r* = 0,27), SS06_1 (*r* = 0,33), SS06_2 (*r* = 0,51), SS06_3 (*r* = 0,79). Pagal sunkumą (*P* = 0,45), koreliacija su bendru testo balu (*r/tt* = 0,53) ir Cronbach alpha pašalinus užduotį = 0,88 ši užduotis testui yra tinkama.

Matome IV klasės moksleivių matematikos pasiekimų testo rezultatų skirstinį:

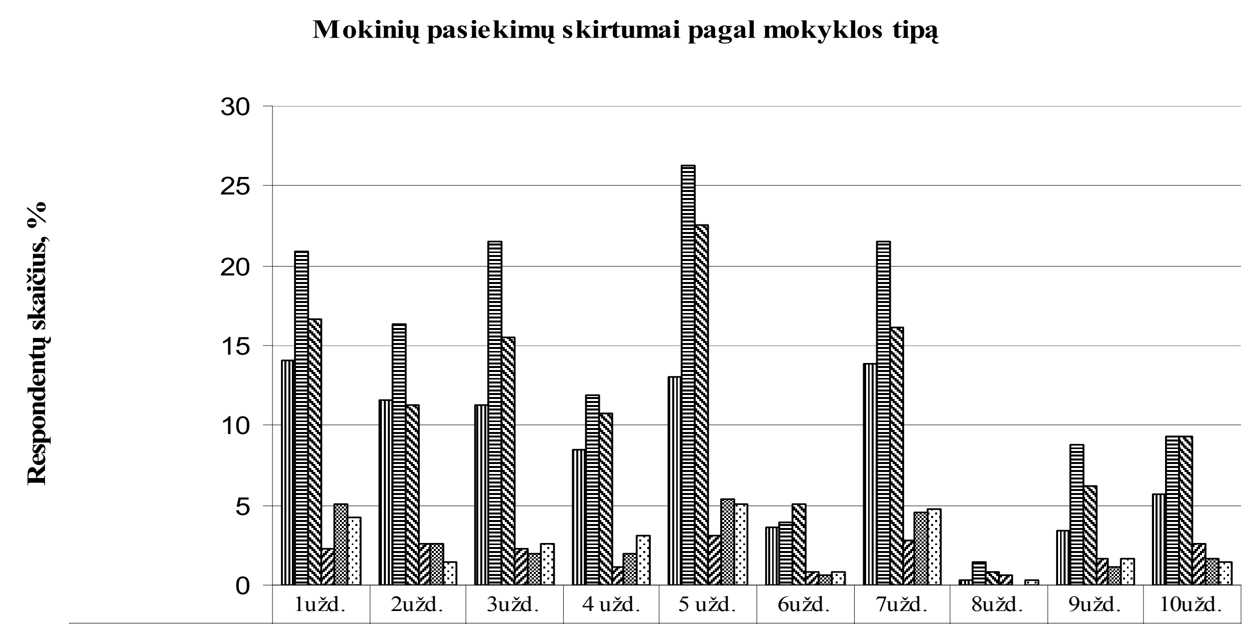


1 pav. **Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados pasiekimų testo rezultatų skirstinys**

Skirstinys yra normalusis. Skirstinio normalumui nustatyti buvo panaudotas Kolmogorovo – Smirnovo kriterijus. Tikrinta nulinė hipotezė H_0 (skirstinys yra normalusis). Paskaičiuota, kad Kolmogorovo – Smirnovo Z = 0,59. Reikšmingumo lygmuo p = 0,88, kai N = 354. Hipotezės apie skirstinio normalumą atmesti negalime, nes $p > 0{,}01$.

3.2. Mokinių pasiekimų skirtumai

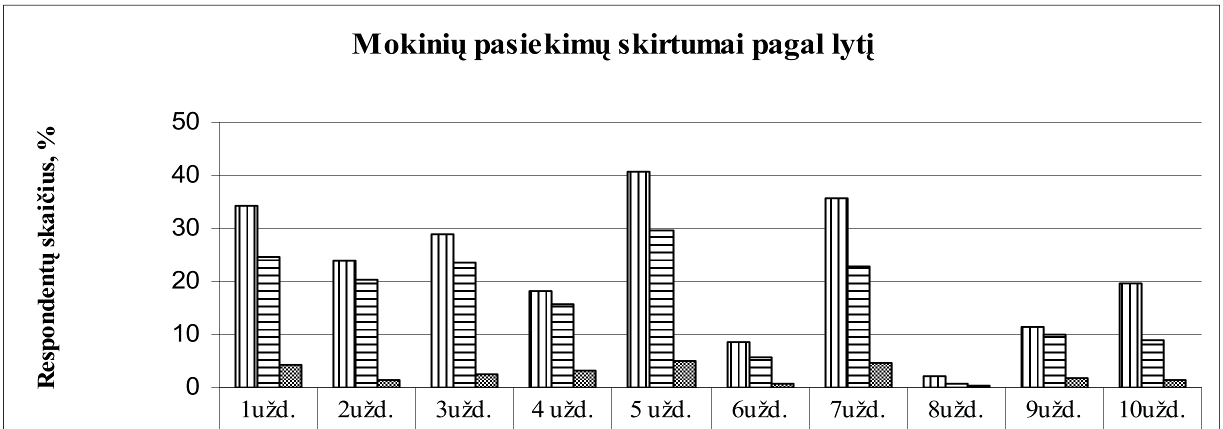
Nėra iki galo išspręstas kokybiško pradinio ugdymo prieinamumo visiems mokiniams klausimas, nes nagrinėjant olimpiados uždavinių sprendimus nustatyti dideli mokinių pasiekimų skirtumai pagal regioną, lytį, mokyklos tipą, tarp atskirų mokyklų. Išryškėjo ir kai kurie mokyklų tipų, kurių moksleiviai atliko testų užduotis, skirtumai. Buvo palyginti pradines, vidurines, pagrindines, gimnazijas ir darželį – mokyklas lankančių moksleivių testų rezultatai. Beveik visas testo užduotis vidurinės ir pagrindinės mokyklos mokiniai atlieka daug geriau, nei likusiųjų mokyklų moksleiviai (1 pav.). Tai dar nereiškia, kad pradinių ir darželių mokyklų mokytojai prasčiau paruošia mokinius. Taip atsitikti galėjo dėl įvairių priežasčių. Į pradines ir darželių mokyklas dažniausiai eina tie mokiniai, kuriems ji yra arčiausiai, ir kurių tėveliai finansiškai negali leisti jų į vidurines ir pagrindines mokyklas, esančias toliau namų, kur reikia kasdien važinėti. Todėl tikėtina, kad tose mokyklose dažniau mokosi silpniau besimokantys ar sunkiau materialiai besilaikančių šeimų vaikai.



	1užd.	2užd.	3užd.	4 užd.	5 užd.	6užd.	7užd.	8užd.	9užd.	10užd.
pradinė	14,12	11,58	11,30	8,48	13,00	3,67	13,84	0,28	3,39	5,65
vidurinė	20,90	16,39	21,47	11,86	26,27	3,95	21,47	1,41	8,76	9,32
pagrindinė	16,67	11,30	15,53	10,73	22,60	5,08	16,10	0,85	6,22	9,32
ginnazija	2,26	2,54	2,26	1,13	3,11	0,85	2,83	0,57	1,69	2,54
darželis-mokykla	5,09	2,54	1,98	1,98	5,36	0,57	4,52	0,00	1,13	1,70
neįvardijo	4,24	1,41	2,54	3,11	5,08	0,85	4,80	0,28	1,69	1,41

1 pav. **Lietuvos ketvirtos klasės miestų ir rajonų matematikos olimpiados dalyvių pasiekimai pagal mokyklos tipą**

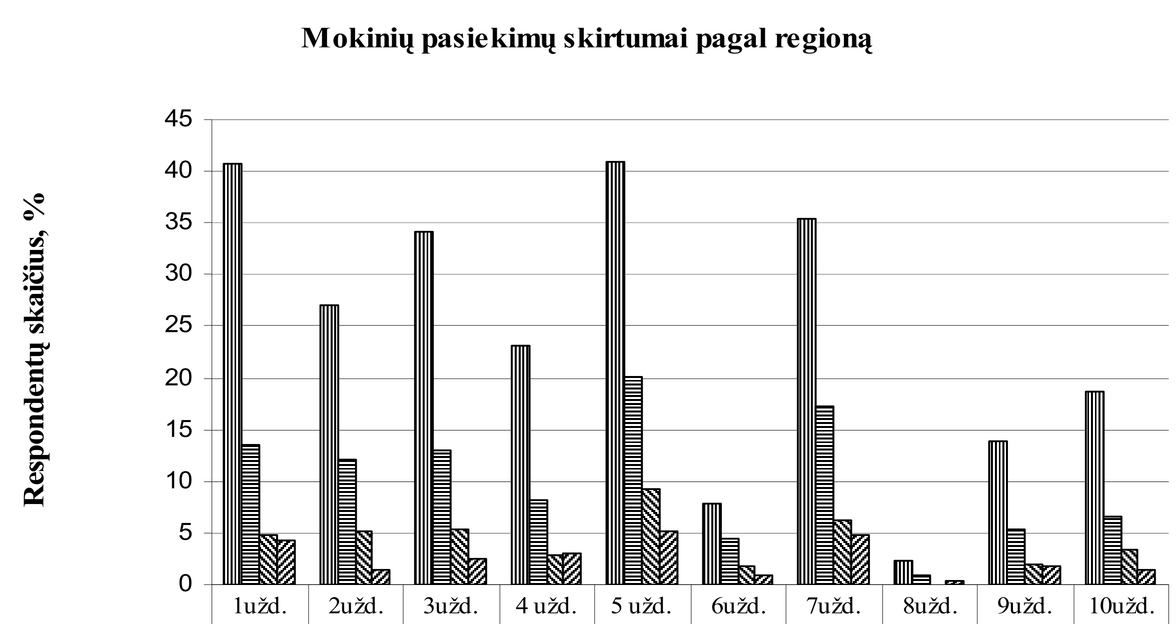
Dauguma mokslininkų lyčių skirtumus mokantis matematikos fiksuoja tik vidurinėje mokykloje konstatuodami berniukų pranašumą. Yra duomenų, kad vyrų pranašumą matematikoje galime sieti su tradiciniais matematikos mokymo būdais – konkuruojančiomis individų pastangomis, o ne bendra mokymosi veikla, pagrįsta komunikacija. Kai pagrindinių matematikos dalykų mokoma bendradarbiaujančiose mažose grupėse, mergaitėms sekasi geriau už berniukus. 2 paveiksle buvo analizuota lyties įtaka atskirų testo užduočių išspręstumui. Ir buvo pastebėta, kad berniukai šiek tiek geriau atlieka užduotis nei mergaitės.



	1užd.	2užd.	3užd.	4 užd.	5 užd.	6užd.	7užd.	8užd.	9užd.	10užd.
berniukai	34,46	24,01	28,81	18,36	40,68	8,47	35,88	2,26	11,30	19,49
mergaitės	24,58	20,34	23,73	15,82	29,66	5,65	22,88	0,85	9,89	9,04
neįvardijo	4,24	1,41	2,54	3,11	5,08	0,85	4,80	0,28	1,69	1,41

2 pav. **Lietuvos ketvirtos klasės miestų ir rajonų matematikos olimpiados dalyvių pasiekimai pagal lytį**

Testavimas išryškino ir ketvirtos klasės mokinių matematinių gebėjimų skirtumus didžiųjų miestų ir kitų vietovių mokyklose. Miesto mokyklų moksleivių matematikos pasiekimai žymiai geresni, juos geriau vertina ir mokytojai, ir patys moksleiviai. Parinkti testo atlikimo vertinimo normas taip, kad skirtumai būtų mažesni, nėra tikslinga, nes tai prieštarautų Pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrųjų programų paskirčiai. Atskiros matematikos pasiekimų normos miesto ir kaimo moksleiviams būtų tikslingos, jeigu rezultatai būtų naudojami mokytojo darbui bei moksleivio potencijoms vertinti. Akivaizdus skirtumas matyti tarp regionų 3 pav. Vaikai, besimokantys miesto mokyklose, olimpiados uždavinius išsprendė daug geriau nei tie mokiniai, kurie mokosi kaimo mokyklose.



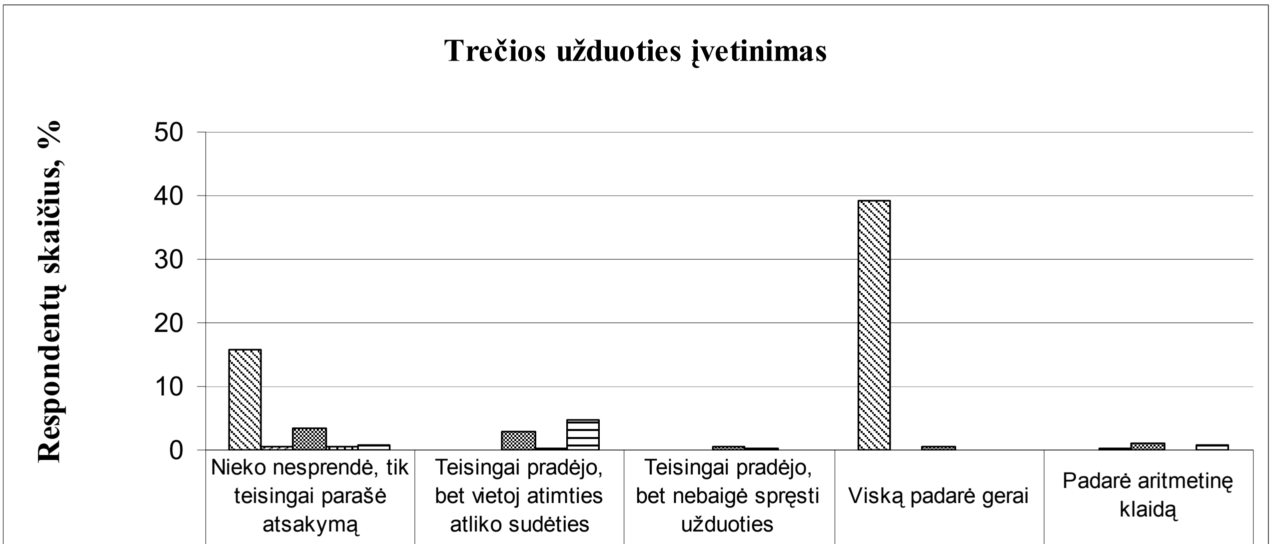
	1užd.	2užd.	3užd.	4 užd.	5 užd.	6užd.	7užd.	8užd.	9užd.	10užd.
miestas	40,68	27,12	34,18	23,16	40,96	7,91	35,31	2,26	13,84	18,64
miestelis	13,56	12,15	12,99	8,19	20,06	4,52	17,23	0,85	5,37	6,5
kaimas	4,80	5,08	5,37	2,83	9,32	1,69	6,22	0,00	1,98	3,39
neįvardijo	4,24	1,41	2,54	3,11	5,08	0,85	4,8	0,28	1,69	1,41

3 pav. **Lietuvos ketvirtos klasės miestų ir rajonų matematikos olimpiados dalyvių pasiekimai pagal regioną**

3.3. Olimpiados užduočių sprendimo įvertinimo subjektyvumas

Nagrinėjant šios olimpiados sprendimus ir mokytojų įvertinimus buvo pastebėtas trūkumas – įvertinimų subjektyvumas. Užduočių sprendimo vertintojo vaidmenį atlieka mokytojas, asmuo ne visai neutralus mokslo žinių vertinime, nes jis taip pat vertina savo darbo kokybę. Buvo analizuojami gauti taškai už kiekvieną atskirą užduotį, kuri buvo suskirstyta į elementariąsias užduotis.

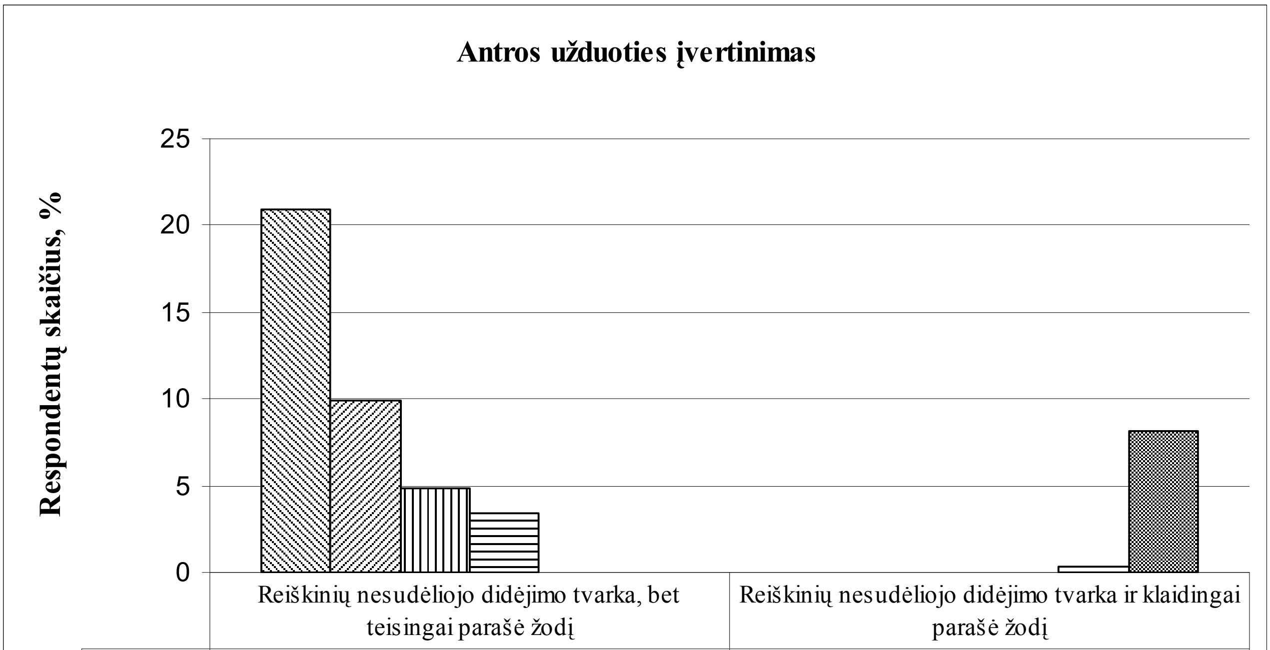
Nagrinėjant Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados užduočių vertinimą, kiekvienoje užduotyje buvo pastebėta nemažai vertinimo klaidų. Mokiniai už tokią pat padarytą klaidą gavo nevienodai taškų, kurie buvo skiriami už teisingai išspręstą užduotį. Rasta netgi tokių atvejų, kai vienas mokinys už lygiai tokią pat klaidą gauną maksimumą, t. y. 2 taškus, o kitas vaikas už lygiai tokį pat sprendimą gauna 0 taškų. Pateiksiu kelis paveikslėlius, kuriuose akivaizdžiai matosi vertintojų subjektyvumas.



	Nieko nesprendė, tik teisingai parašė atsakymą	Teisingai pradėjo, bet vietoj atimties atliko sudėties	Teisingai pradėjo, bet nebaigė spręsti užduoties	Viską padarė gerai	Padarė aritmetinę klaidą
2 taškus	15,82			39,27	
1,5 taško	0,56				0,28
1 tašką	3,39	2,82	0,56	0,56	1,13
0,5 taško	0,56	0,28	0,28		
0 taškų	0,85	4,80			0,85

1 pav. **Trečios užduoties vertinimo subjektyvumas**

1 pav. matyti, kad mokiniai, padarę vienodas klaidas, gauna skirtingus įvertinimus, pvz. net 21,2% dalyvių nieko nesprendė, tik teisingai parašė atsakymą, bet ne visi jie įvertinimus gavo vienodus. Atidžiau panagrinėjus trečios užduoties vertinimo sistemą pastebima daug klaidų, kurias darė vertintojai.



	Reiškinių nesudėliojo didėjimo tvarka, bet teisingai parašė žodį	Reiškinių nesudėliojo didėjimo tvarka ir klaidingai parašė žodį
4taškus	20,90	
3 taškus	9,89	
2 taškus	4,80	
1 tašką	3,39	
0,5 taško		0,28
0 taškų		8,19

2 pav. **Antros užduoties vertinimo subjektyvumas**

Galima pastebėti vertintojų subjektyvumo įrodymus ir antroje užduotyje. Iš viso 39% mokinių reiškinių nesudėliojo didėjimo tvarka, bet teisingai parašė žodį. 2 pav. matyti, kad moksleiviai gavo nevienodus taškus, nors visų jų klaidos buvo tokios pačios. Nevienodai buvo įvertinti ir tie vaikai, kurie reiškinių nesudėliojo didėjimo tvarka ir klaidingai parašė žodį, vieni gavo pusę taško, o kiti taškų visai negavo.

Tyrimo duomenų analizė parodė, kad šiuo atveju verta kalbėti apie vidinį objektyvumą arba subjektyvumą. Būtinybė panaudoti šiuos teiginius sukėlė tokios priežastys. Manykime, kad mokytojas suskirstė savo klasės mokinius gana tiksliai, priklausomai nuo jų pasirengimo lygio. Jo įvertinimai sutampa su nepriklausomų ekspertų įvertinimais. Tegul ir kitas mokytojas taip pat kokybiškai įvertino savo mokinius. Tokiu būdu, abiejų mokytojų įvertinimų subjektyvumas nereikšmingas. Ar tai reiškia, kad mokinys, gavęs vieno mokytojo aukštą įvertinimą, gaus tokį pat įvertinimą ir kito mokytojo? Žinoma, kad ne. Gerai žinoma, kad „silpnas“ mokytojas skiriasi nuo „stipraus“ ne tuo, kad pirmojo mokiniai turi žemesnius įvertinimus negu antrojo. .„Silpnas“ mokytojas gali sukelti įvertinimus, o „stiprus“, atvirkščiai, sumažinti. Tokį subjektyvumą galima įvardinti kaip išorinį. Išorinis subjektyvumas neleidžia sulyginti įvairių mokytojų įvertinimus.

IŠVADOS

1. Šiuolaikinis mokymo rezultatų matavimas remiasi klasikinės testų teorijos (*CTT*) ir tikimybinės testų teorijos (*IRT*) konvergavimo tendencija. Išnagrinėjus daugelio autorių pateiktus statistikos apibrėžimus, galima pastebėti, kad visi apibrėžimai turi savo realų pagrindą, tačiau beveik visi išskiria ir kokybinius, ir kiekybinius požymius. Vienas iš didžiausių aprašomosios statistikos privalumų yra tai, kad ji leidžia koncentruotai užrašyti informaciją, esančią dideliuose duomenų masyvuose. Todėl aprašomoji statistika gali būti taikoma ir visos populiacijos duomenims apdoroti.
2. Olimpiados užduotys reikalauja įvairių matematinių gebėjimų. Spręsdami bet kurią užduotį moksleiviai pasitelkia keletą skirtingų gebėjimų. Tam, kad būtų galima tiksliau analizuoti užduočių sprendimo eigą ir įvertinti skirtingus moksleivių gebėjimus bei jų klaidas, visos užduotys suskaidytos į elementarias užduotis. Pradinėje mokykloje pagrindinis dėmesys skiriamas aritmetiniams veiksmams ir veiksmų atlikimo įgūdžių lavinimui. Pagrindinius matematinius veiksmus (sudėties, atimties, daugybos ir dalybos) moksleiviai mokosi atlikti stulpeliu ir eilute. Skaičiai ir skaičiavimai – pati svarbiausia ir savo turinio apimtimi didžiausia matematinės veiklos sritis, teikianti ypatingai daug ugdymo galimybių.
3. Matematinių gebėjimų testai yra skirti daugiau mokytojų ir moksleivių savikontrolei, nei mokyklos ar švietimo skyriaus vadybiniams sprendimams pagrįsti. Jeigu užduotys yra per sunkios ar per lengvos, tai testo validumas ir patikimumas sumažėja. Testo užduočių sunkumo analizė yra vienas iš svarbiausių testo sudarymo ir atskirų užduočių diagnostinių savybių nustatymo etapų. Rekomenduojama į olimpiados testą įtraukti tik tas užduotis, kurias išsprendė ne mažiau kaip 16% ir ne daugiau kaip 84% moksleivių. Užduotis laikoma vertinga, jeigu jos sunkumo įvertis yra tarp 0,16 ir 0,84.
4. Išanalizavus ketvirtos kasės olimpiadinių uždavinių sąlygas ir sprendimą pastebėjau, kad:
   - Moksleiviams lengvesnės tos užduotys, kurių daugiau yra matematikos vadovėliuose.
   - Moksleiviai neblogai sprendžia tradicinio turinio uždavinius, kurių klausimas pateiktas įprasta forma.
   - Išanalizavus skaičiaus dalies užduoties sprendimus pastebėta, jog dalis moksleivių nesuvokia trupmenų esmės, todėl nesugeba jų pritaikyti.
   - Moksleiviai spręsdami uždavinius dažniausiai darė skaičiavimo klaidų. Reikia manyti, kad klaidų būtų žymiai mažiau, jei moksleiviai būtų pratinami sudarinėti schemas, t. y. pasilengvinti užduoties sprendimo radimą.
   - Apibendrinus visų užduočių sprendimo rezultatus, galima išskirti, kokios užduotys moksleiviams buvo sunkiausios ir kokių klaidų pasitaikė dažniausiai.

- Palyginus, kiek moksleivių teisingai išsprendė kiekvieną užduotį, galima teigti, kad sunkiausia užduotis buvo aštunta. Ją teisingai išsprendė tik 3,39% moksleivių. Tai rodo, kad daugumai moksleivių sunkiai sekasi spręsti užduotis, kur reikia pasitelkti loginį mąstymą ar ieškoti netradicinio sprendimo kelio, t. y. kai įgytas žinias reikia taikyti netradicinėse situacijose.
- Daugiau kaip pusė mokinių vietoj grafiko braižė diagramą, o tai rodo, kad nesugeba atskirti grafiko nuo diagramos.
- Nėra iki galo išspręstas kokybiško pradinio ugdymo prieinamumo visiems mokiniams klausimas, nes nagrinėjant olimpiados uždavinių sprendimus nustatyti dideli mokinių pasiekimų skirtumai pagal regioną, lytį, mokyklos tipą, tarp atskirų mokyklų.
- Nagrinėjant Lietuvos ketvirtos klasės moksleivių miestų ir rajonų matematikos olimpiados užduočių vertinimą, kiekvienoje užduotyje buvo pastebėta nemažai vertinimo klaidų.

5. Darbo pradžioje iškelta hipotezė, kad sprendžiant ketvirtos klasės matematikos olimpiados uždavinius svarbiausia yra loginis mąstymas ir žinios, pasitvirtino.

REKOMENDACIJOS

Manau, kad šie olimpiados uždaviniai atitinka standartus, t. y. Pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrąsias programas, nes kiekvieno uždavinio sąlyga reikalauja ne daugiau to, ką privalo žinoti mokinys, besimokantis ketvirtoje klasėje. Gautais rezultatais galėtų pasinaudoti pradinių klasių mokytojai, nes surinkta medžiaga puikiai atskleidžia ketvirtokų mokėjimus bei jų matematinių žinių spragas. Taigi aš rekomenduočiau:

1. Mokytojams per pamokas nesistengti išspręsti kuo daugiu uždavinių, geriau išsiaiškinti keletą, kad mokiniai suprastų, kaip jie sprendžiami.
2. Olimpiados vertintojai turėtų išsiaiškinti, pasitarti, kaip vertinti kiekvieną uždavinio sprendimą, jeigu mokinys išsprendė ne tuo būdu, kuris nurodytas vertinime.
3. Sudarant uždavinių sąlygas parinkti tokias užduotis, kurios būtų suprantamos ketvirtos klasės mokiniams.
4. Rengiant mokinius matematikos olimpiadoms didesnis dėmesys skiriamas ne tik užduotims, susijusioms su kūrybingu, lanksčiu žinių pritaikymu, esant netradicinėms situacijoms, bet ir su kuo išsamesniu ugdytinių galimybių pažinimu bei subtilių užduočių parinkimu savarankiškam mokinių darbui.
5. Kuriant pradinės mokyklos matematikos olimpiadų užduotis, tikslinga panaudoti mokslininkų bei matematikos didaktų teorines ir praktines žinias užduočių moksliniam lygiui gerinti bei tobulinti, stengtis, kad jos atitiktų į moksleivį orientuoto ugdymo dvasia.
6. Pati švietimo sistema, kaip svarbiausia valstybinė institucija, turėtų prisidėti prie papildomo matematikai gabių moksleivių mokymo gilinimo ir plėtros; pradinių klasių mokytojai galėtų aktyviau dalyvauti propaguojant ir realizuojant mokymo naujoves.

LITERATŪRA

1. Baker F. B. (2001). *The Basius of Item Response Theory*. Second edition. ERIC Clearinghouse on Assessment and Evalaution. Wisconsin.
2. Balčytis B. (2004). *Skaičių šalis: pratybų sąsiuvinis IV klasei*. 1d. Kaunas.
3. Balčytis B. (2004). *Skaičių šalis: pratybų sąsiuvinis IV klasei*. 2d. Kaunas.
4. Balčytis B. (2005). *Papildomos matematikos užduotys IV klasės stipresniesiems mokiniams*. Kaunas.
5. Balčytis B. (2008). *Skaičių šalis: matematikos vadovėlis IV klasei*. Pirmoji knyga. Kaunas.
6. Balčytis B. (2008). *Skaičių šalis: matematikos vadovėlis IV klasei*. Antroji knyga. Kaunas.
7. Binet A. & Simon T. (1905). *Methodes nouvelles pour le diagnostic du niveau intellectuel anormoux* [New methods for the dzagnosis of levels of intell ec tual abnormality] // Année Psychologique, 11, p. 191–244.
8. Birnbaum A. (1968). *Some Latent Trait Models and their Use in Inferring an Examinee‘s Ability*. In F. M. Lord & M. R. Novick (Eds.). Statistical theories of mental test scores. Reading, MA: Addison Wesley, p. 395–479.
9. Bitinas B. (1974). *Statistiniai metodai pedagogikoje ir psichologijoje*. Kaunas.
10. Bitinas B. (2002). *Pedagoginės diagnostikos pagrindai*. Vilnius.
11. Bock R. D. (1997). *A brief history of item response theory* // Educational Measurement: Issuses and Practice, 16, p. 21–33.
12. Bock R. D. & Aitkin M. (1981). *Marginal maximum likelihood estimation of item parameters: application of an EM algorithm*. // Psychometrika, 46, p. 443–459.
13. Bobrova L., Kazlauskienė A., Lukavičienė V. ir kt. (2008). *Kursinių ir baigiamųjų (bakalauro, magistro, specialiųjų profesinių studijų) darbų rengimo ir gynimo metodinės rekomendacijos*. Šiauliai, Šiaulių universiteto leidykla.
14. Brickenkamp R. (Hrsg.) (1997). *Handbuch psychologischer und pedagogischer Tests*. Geottingen, Seatle: Hogrefe.
15. Cole N. (1990). *Conception of educational achievement*. Educational researcher. No 3.
16. Cooke D. J. & Michie C. (1997). *An item response theory analysis of the Hare Psychopathy Checklist – Revised* // Psychological Assessment, 9, p. 3–14.
17. Čekanavičius V., Murauskas G., (2006). *Statistika ir jos taikymai*. Vilnius.
18. Drėgūnas V., Rumšas P. (1984). *Bendroji matematikos mokymo metodika*. Vilnius.
19. Embreston S. E. & Reise, S. P. (2000). *Item Response Theory for Psychologists*. Mahwan, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
20. Ferguson G. A. (1943). *Item selection by the constant process* // Psychometrika, 7, p. 19–29.

21. Fischer G. (1968). *Psychologische Test Theorie* [Psychological test theory]. Bern: Huber.
22. Hays R. D., Morales, L. S. & Reise S. P. (2000). *Item response theory and health outcomes measurement in the 21st century*. Medical Care, 38 (9 Supplement), p. 28–42.
23. *Item Response Theory* [žiūrėta 2009–04–20]. Prieiga per internetą: <http://www.calikocal.com/irt.html>.
24. Jovaiša L. (1975). *Psichologinė diagnostika*. Kaunas.
25. Kardelis K. (2002). *Mokslinių tyrimų metodologija ir metodai*. Kaunas.
26. Kiseliova D., Kazlauskienė A., Kiseliovas A. (2002). *Ketvirtokų statistinių gebėjimų subesto diagnostinės kokybės charakteristikos* // Pedagogika. Mokslo darbai. Nr. 61, p. 116–125 .
27. Kiseliovas A., Kiseliova D. (2002). *Matematikos teminiai testai: taikymas, skaičiavimai, geometrija, matavimai, statistika. IV klasė*. Vilnius.
28. Kiseliovas A., Kiseliova D. (2003). *Matematikos pasaulyje: vadovėlis pirmai klasei*. Pirmoji knyga. Vilnius.
29. Kiseliovas A., Kiseliova D. (2003). *Matematikos pasaulyje: vadovėlis pirmai klasei*. Antroji knyga. Vilnius.
30. Kiseliova D., Kiseliovas A. (2004). *Matematinių gebėjimų diagnostika*. Mokslinė monografija. Pirmoji knyga. Šiauliai.
31. Kiseliova D., Kiseliovas A. (2004). *Matematinių gebėjimų diagnostika*. Mokslinė monografija. Antroji knyga. Šiauliai.
32. Kiseliovas A., Kiseliova D. (2005). *Matematikos testai 4 klasei*. Vilnius.
33. Kiseliovas A., Kiseliova D. (2006). *Matematikos pasaulyje: vadovėlis IV klasei*. Pirmoji knyga. Vilnius.
34. Kiseliovas A., Kiseliova D. (2006). *Matematikos pasaulyje: vadovėlis IV klasei*. Antroji knyga. Vilnius.
35. Kiseliovas A., Kiseliova D. (2007). *Papildomos matematikos užduotys: IV klasei*. Vilnius.
36. Lawley D. N. (1943). *On problems connected with item selection and test construction* // Proceedings of the royal Society of Edinburgh, 62 – A, Part 1, p. 74–82 .
37. Lazarsfeld P. F. (1950). *The logical and mathematical foundation of latent structure anglysis*. In S. A. Stouffer, L. Guttman, E. A. Suchman, P. F. Lazarsfeld, S. A. Star, & J. A. Clausen, Measurement and Prediction. New York: Wiley, p. 362–412.
38. Lienert G. A., & Raatz U. (1994). *Testaufbau und Testanalyse*. Weinheim.
39. *Lietuvos mokinių informavimo ir techninės kūrybos centras* [interaktyvus]. [žiūrėta 2009–03–09]. Prieiga per internetą <http://www.lmitkc.lt/lt.php/olimpiados?id=55>
40. Linden W. J. & Hambleton R. K. (Eds.) (1997). *Handbook of modern item response theory*. New York, NY: Springer–Verlag.

41. Lord F. M. & Novick M. R. (1968). *Statistical theories of mental test scores*. Rcading, MA; Addison–Wesley.
42. Lord F. M. (1952). *A theory of test scores*. Psychometric Monographs, Whole No 7.
43. Mellenbergh G. J. (1994). *A unidimensional latent trait model for continuous item responses* // Multivariate Behavioral Research, 29, p. 223–236.
44. Partchev I. *A visual guide to item response theory* [žiūrėta 2009–04–20]. Prieiga per internetą: <http://www2.uni-jena.de/svw/metheval/irt/VisualIRT.pdf>.
45. *Pradinio ir pagrindinio ugdymo bendrosios programos* (2008). Vilnius.
46. Rach G. (1960). *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*. Chicago: MESA.
47. Richardson M. W. (1936). *The relationship between difficulty and the differential validity of a test* // Psychometrika, 1, p. 33–49.
48. Rost J. (1995). *Lehrbuch Testtheorie Testkonstruktion*. Verlag Hans Huber, Bern.
49. Santor D. A. & Ramsay J. O. (1998). *Progress in the technilogy of measurement: applications of item response models* // Psychological Assessment, 10, p. 345–359.
50. Steinberg L. & Thissen D. (1995). *Item response theory in personality research*. In P. E. Shrout & S. T. Fiske (Eds.), Personality research, methods, and theory: a festschrift honouring Donald W. Fiske (p. 161–181). Hilldale, NJ: Erlbaum.
51. Testzentrale (Hrsg.) (1998). *Testkatalog 1998/1999*. European test Publischers Group, Testzentrale, Geottingen; Bern: Hogrefe.
52. Thissen D. & Orlando M. (2001). *Chapter 3 – Item response theory for items scored in two categories*. In D. Thissen & H. Wainer (Eds.), Test Scoring. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
53. Thissen D. & Steinberg L. (1988). *Data anglysis using item response theory* //Psychological Bulletin, 104, p. 385–395.
54. Thorndike R. M., Cunningham O. K., Thorndike R. L. & Hagen E. P. (1991). *Measurement and evaluation psychology and education (5th ed.).* New York: Macmillan.
55. Thurstone L. L. (1925). *A method of scaling psychological and educational tests* // Journal of Educational Psychology, 16, p. 433–451 .
56. Tinsley H. E. A. (1992). *Psychometric theory and counseling psychology research*. In S. D. Brown & R. W. Lent (Eds.), Handbook of counseling psychology (2nd ed., p. 37–70). New York, NY: Wiley.
57. Verstralen H., Bechger T. & Maris G. *The Combined Use of Classical Test Theory and Item Response Theory* [žiūrėta 2009–04–20]. Prieiga per internetą: <http://www.cito.nl/pok/poc/eind-fr.htm>

58. Vikipedija. *Laisvoji enciklopedija* [žiūrėta 2009–04–20]. Prieiga per internetą: <http://lt.wikipedia.org/wiki/Pagrindinis_puslapis>.
59. Wright B. D. (1997). *A history of social science measurement* // Educational Measurement: Issues and Practice, 16, p. 21–33.
60. Wood D. A. (1960). *Test construction: Development and interpretation of achievement tests*. Columbus, OH: Charles E, Merrill Books, Inc.
61. Žydžiūnaitė V. (2002). *Baigiamojo diplominio darbo parengimas ir įvertinimas*. Mokomoji knyga. Klaipėda.
62. Битинас Б., Паулавичюс Р. (1987). *Система анализа педагогических данных на ЭВМ*. Вильнюс.
63. Бурлачук Л. Ф., Морозов С. М. (2001). *Словарь-справочник по психодиагностике*. Санкт–Петербург . Москва–Харьков–Минск.

PRIEDAI