Vilniaus Universitetas

Jurgita Markevičiūtė

Beveik nestacionarių procesų asimptotiniai rezultatai

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, matematika (01 P)

Vilnius, 2013

Disertacija rengta 2009-2013 metais Vilniaus universitete bei Lilio 1 universitete, Prancūzijoje.

Mokslinis vadovas :
prof. habil. dr. Alfredas Račkauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)
Konsultantas :
prof. dr. Charles Suquet (Lilio 1 universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto Matematikos mokslo krypties taryboje :
Pirmininkas :
prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)
Nariai :
prof. habil. dr. Youri Davydov (Lille 1 universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)
prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)
prof. habil. dr. Vygantas Paulauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)
prof. dr. Dalibor Volný (Rouen Universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)
Oponentai :
prof. habil. dr. Anne Philippe (Nanto universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)
prof. dr. Liudas Giraitis (Queen Mary, Londono universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2013 m. spalio 25 d. 16 val. 30 min., Matematikos ir informatikos fakulteto prof. Zigmas Žemaitis (101) auditorijoje.
Adresas : Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva.
Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2013 m. rugsėjo mėn. 25 d.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

Vilnius University

Jurgita Markevičiūtė

Asymptotic results on nearly nonstationary processes

Summary of doctoral dissertation

Physical sciences, Mathematics (01 P)

Vilnius, 2013

The scientific work was carried out during 2009-2013 at Vilnius University and Université des Sciences et Technologies de Lille

Scientific supervisors :
prof. dr. habil. Alfredas Račkauskas (Vilnius University, Physical Sciences Mathematics – 01 P)
prof. dr. Charles Suquet (Université des Sciences et Technologies de Lille, Physical Science, Mathematics – 01 P)

Composition of thesis defence board
Chair :
prof. dr. habil. Remigijus Leipus (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01 P)
Members :
prof. dr. habil. Youri Davydov (Lille 1 University, Physical Sciences, Mathematics – 01 P)
prof. dr. habil. Kęstutis Kubilius (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01 P)
prof. dr. habil. Vygantas Paulauskas (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01 P)
prof. dr. Dalibor Volný (Rouen University, Physical Sciences, Mathematics – 01 P)
Opponents :
prof. dr. habil. Anne Philippe (Nantes university, Physical Sciences, Mathematics – 01 P)
prof. dr. Liudas Giraitis (Queen Mary, University of London, Physical Sciences, Mathematics – 01 P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the Council on October 25, 2013, in The Faculty of Mathematics and Informatics prof. Zigmas Žemaitis (101) auditorium at 4 :30 p.m.
Adress : Naugarduko 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania.
The summury of the dissertation was distributed on September 25, 2013.
The dissertation is available at the library of Vilnius University.

Disertacijos santrauka

Tiriamoji problema

Disertacijoje pateikiama pirmos eilės beveik nestacionarių procesų asimptotiniai rezultatai. Nagrinėjama $y_{n,1}, \ldots, y_{n,n}$ imtis, čia $y_{n,k}$ yra generuojamas pirmos eilės beveik nestacionariu autoregresiniu procesu

$$y_{n,k} = \phi_n y_{n,k-1} + \varepsilon_k, \quad k \leq n, \quad n \geq 1,$$

$\phi_n \to 1$, kai $n \to \infty$, inovacijos $(\varepsilon_k, k = 0, \ldots n)$ yra centruotos ir bent kvadratu integruojamos.

Darbe nagrinėjamos funkcinės ribinės teoremos tolydžiųjų funkcijų bei Hiolderio erdvėse procesui $(y_{n,k})$. Taip pat, nagrinėjamo proceso mažiausių kvadratų liekanoms $(\widehat{\varepsilon}_k, k = 0, \ldots n)$ įrodomos funkcinės ribinės teoremos Hiolderio erdvėje. Naudojama dviejų tipų koeficiento ϕ_n parametrizacija: pirmoji $\phi_n = \mathrm{e}^{\gamma/n}$ (pasiūlyta Phillips [1987]), antroji $\phi_n = 1 - \gamma_n/n$ su $\gamma_n \to \infty$ ir $\gamma_n/n \to 0$, kai $n \to \infty$ (pasiūlyta Giraičio bei Phillips [2006]). Šios dvi parametrizacijos lemia skirtingus funkcinių ribinių teoremų rezultatus. Pirmuoju atveju riba yra funkcionalas, priklausantis nuo integruoto Ornsteino-Uhlenbecko proceso, o antruoju atveju – Vynerio procesas.

Disertacijoje funkcinės ribinės teoremos taikomos inovacijų vidurkio epideminio pasikeitimo testavimui, t.y., nagrinėjamas modelis

$$y_{n,k} = \phi_n y_{n,k-1} + \varepsilon_k + a_{n,k}, \quad k \leq n, \quad n \geq 1,$$

čia

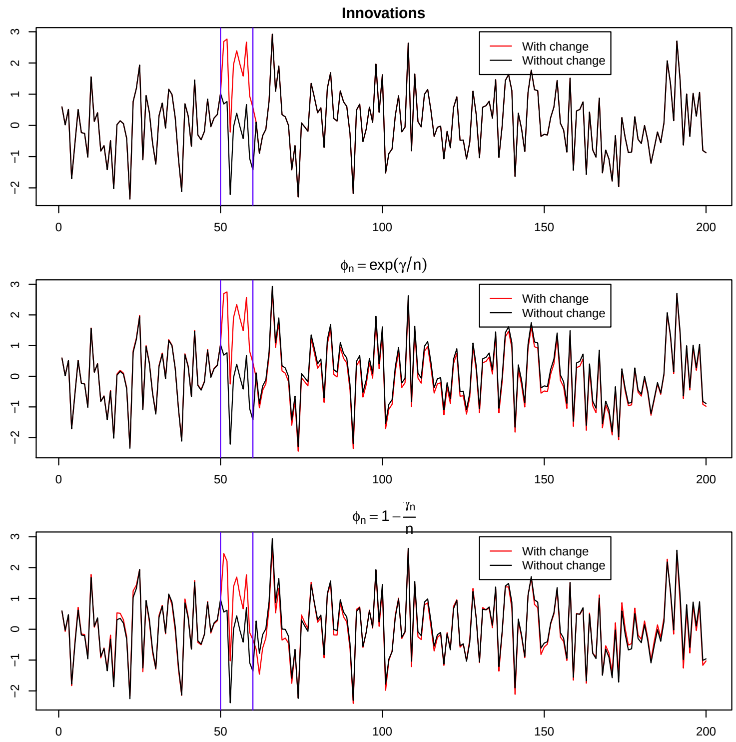
$$a_{n,k} = a_n \mathbf{1}_{\mathbb{I}_n^*}(k).$$

$\mathbf{1}_{\mathbb{I}_n^*}(k)$ yra indeksų aibės

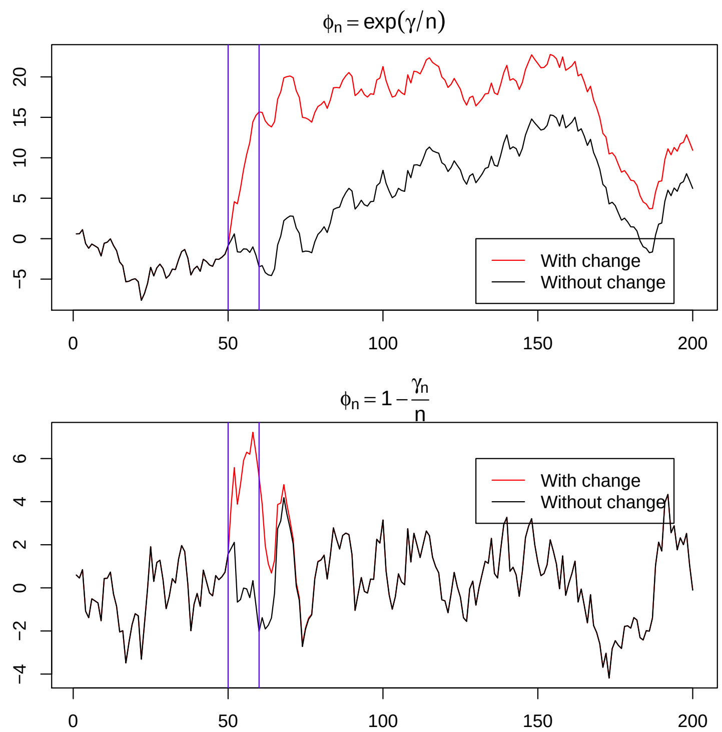
$$\mathbb{I}_n^* = \{k^* + 1, \ldots, m^*\}$$

indikatoriaus funkcija. k^* ir m^* atitinkamai žymi nežinomą epideminio pasikeitimo pradžią bei pabaigą. Toks epideminis pasikeitimas atsispindi $y_{n,k}$ bei $\widehat{\varepsilon}_k$ trajektorijose (1 ir 2 paveiksliukai). Taigi, nagrinėjama tolydžiųjų prieaugių statistika, sudaryta tiek iš $y_{n,k}$, tiek iš $\widehat{\varepsilon}_k$. Abiem atvejais gaunami skirtingi rezultatai.

Nagrinėjamai statistikai surandama riba prie nulinės hipotezės "nėra pasikeitimo". Taip pat nagrinėjamas statistikos suderinamumas, atliekama galios analizė ir aptariamas sąryšis tarp įvairių parametrų, kuris padėtų aptikti trumpiausią pasikeitimą.



1 pav.: Beveik nestacionaraus $AR(1)$ proceso liekanų trajektorija su pasikeitimu ir be jo. Vertikalios mėlynos linijos žymi epideminio pasikeitimo pradžią ir pabaigą.



2 pav.: Beveik nestacionaraus $AR(1)$ proceso trajektorija su pasikeitimu ir be jo. Vertikalios mėlynos linijos žymi epideminio pasikeitimo pradžią ir pabaigą.

Aktualumas

Beveik nestacionarūs autoregresiniai procesai yra svarbūs statistikoje bei ekonometrijoje. Svarbi šių procesų savybė yra jų elgesys šalia vienetinės šaknies. Šis klausimas buvo nagrinėjamas daugelio autorių, pvz., P.C.B. Phillips, L. Giraitis, N.H. Chan, ir t.t.

Tikslai ir uždaviniai

Disertacijos tikslas – įrodyti funkcines ribines teoremas pirmos eilės beveik nestacionariems autoregresiniams procesams ir taikyti jas inovacijų vidurkio epideminio pasikeitimo testavime. Disertacijos uždaviniai:

– ištirti laužčių proceso sudaryto iš $y_{n,k}$'s bei $\widehat{\varepsilon}_k$ funkcinį konvergavimą;

– sukonstruoti ir ištirti testo statistiką epideminio pasikeitimo testavimui;

– atlikti skaitinius eksperimentus epideminio pasikeitimo aptikimui.

Naujumas

Disertacijoje įrodome funkcines ribines teoremas Hiolderio erdvėje pirmos eilės beveik nestacionariems autoregresiniams procesams. Įrodomi nauji rezultatai epideminio pasiketimo aptikimui naudojant Hiolderio tipo statistiką beveik nestacionariems procesams.

Metodai

Naudojami tikimybių teorijos, statistikos ir funkcinės analizės metodai bei rezultatai. Skaitiniai eksperimentai atliekami naudojantis programa **R**, skirta statistiniams skaičiavimams bei grafinei analizei.

Pagrindiniai rezultatai

Pirmos eilės autoregresinis procesas $AR(1)$ yra svarbus procesas statistikos ir ekonomikos taikymuose. Autoregresinis modelis yra laiko eilučių modelis:

$$y_k = \phi y_{k-1} + \varepsilon_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \tag{1}$$

čia (ε_k) yra inovacijos ir parodo laiko eilutės kintamumą. Gerai žinoma (žr., pavyzdžiui Tsay [2002]), kad $AR(1)$ modelio apibrėžto (1) formule silpnam stacionarumui būtina ir pakankama sąlyga yra $|\phi| < 1$. Procesas, apibrėžtas (1) formule, vadinamas nestacionariu, kai koeficientas ϕ lygus 1 .

Praktikoje koeficientas ϕ dažnai įvertinamas naudojant mažiausių kvadratų metodą

(MKM):

$$\widehat{\phi} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k y_{k-1}}{\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}^2}. \tag{2}$$

Jei $|\phi| < 1$, tai gerai žinoma, kad tinkamai standartizuotas MKM įvertinys yra asimptotiškai normalus atsitiktinis dydis su nuliniu vidurkiu ir baigtine dispersija $\mathfrak{N}(0, \sigma^2)$ (žr., pavyzdžiui, Mann ir Wald [1943] bei Anderson [1959]). Tačiau, jei $\phi = 1$, tai standartizuoto MKM įvertinio ribinis skirstinys yra funkcionalas, priklausantis nuo Vynerio proceso (žr., White [1958], Rao [1978]). Evans ir Savin ([1981], [1984]) skaitiniais eksperimentais parodė, kad stacionaraus $AR(1)$ proceso koeficiento įverčio ir atitinkamos t statistikos savybės panašios į nestacionaraus proceso savybes, kai koeficientas yra arti vieneto. Ši savybė jau pastebima, kai imties dydis yra apie 100. Pasak Chan ir Wei [1987], dėl netolygaus perėjimo tarp dviejų ribų, kai $|\phi| < 1$ bei $\phi = 1$, nė viena iš šių aproksimacijų neatrodo intuityvi, kai ϕ arti vieneto. Taigi, buvo pradėti nagrinėti, taip vadinamieji, beveik nestacionarūs arba beveik integruoti procesai.

Beveik nestacionarus pirmos eilės autoregresinis procesas $(y_{n,k} : k \le n; n \ge 0)$ generuojamas pagal trikampio masyvo schemą

$$y_{n,k} = \phi_n y_{n,k-1} + \varepsilon_k, \tag{3}$$

čia $\phi_n \to 1$, kai $n \to \infty$, (ε_k) yra inovacijų seka, iprastai su $\mathbb{E}\varepsilon_k = 0$ ir baigtine dispersija σ^2. Pradinė reikšmė $(y_{n,0}, n \ge 0)$ yra atsitiktinis dydis, kuris tenkina tam tikras reguliarumo sąlygas. Toliau supaprastinsime žymėjimus, rašydami y_k vietoje $y_{n,k}$ kiekvieną kartą, kai kontekste neatsiras dviprasmiškumo.

Literatūroje, susijusioje su beveik nestacionariais procesais, (3) modelyje koeficientas ϕ_n yra parametrizuojamas, siekiant tiksliau apibrėžti artėjimą prie vieneto. Phillips [1987] naudojo parametrizaciją $\phi_n = \mathrm{e}^{\gamma/n}$, čia $\gamma < 0$. Panašias parametrizacijas, pavyzdžiui, $\phi_n = 1 - \gamma/n$ su $\gamma > 0$ naudojo Chan ir Wei [1987], Cox ir Llatas [1991], Park [2003], Dzhaparidze et al. [1994] ir t.t. Andrews bei Guggenberger [2008] straipsnyje koeficieną ϕ_n apibrėžė kaip $\phi_n = 1 - \gamma_n/n$, čia $\gamma_n \to \gamma \in [0, \infty)$, o Phillips ir Magdalinos [2007] $\phi_n = 1 + \gamma/k_n$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Jei $\gamma < 0$, tai modelis apibrėžtas (3) formule tampa beveik nestacionariu. Pastebėkime, kad Giraičio bei Phillips [2006] rezultatai įtraukia atvejį, kai $\phi_n = 1 - \gamma_n/n$, čia $\gamma_n \to \infty$ ir $\gamma_n/n \to 0$, kai $n \to \infty$.

Phillips [1987] nustatė, kad koeficiento ϕ_n standartizuoto MKM įvertinio riba priklauso nuo Vynerio ir Ornsteino-Uhlenbecko procesų. Su kai kuriomis reguliarumo prielaidomis inovacijoms, Giraitis ir Phillips [2006] įrodė, kad standartizuotas MKM įvertinys konverguoja pagal pasiskirstymą į normalųjį dėsnį su nuliniu vidurkiu ir dispersija σ^2.

Keletas autorių nagrinėjo centrines ribines teoremas beveik nestacionariems procesams $(y_{n,k})$. Phillips [1987], kai $\phi_n = \mathrm{e}^{\gamma/n}$, su normalizavimu $n^{-3/2}$ riba yra atsitiktinis dydis, apibrėžiamas kaip integralas nuo Ornsteino-Uhlenbecko proceso. Giraitis ir Phillips [2006] nustatė, jog riba yra normalusis atsitiktinis dydis $\mathfrak{N}(0, \sigma^2)$, kai $\phi_n = 1 - \gamma_n/n$, $\gamma_n \to \infty$ ir $\gamma_n/n \to 0$, kai $n \to \infty$.

Be to, literatūroje nagrinėjami dalinių sumų procesai, sudaryti iš mažiausių kvadratų liekanų beveik nestacionariems procesams su įvairia inovacijų struktūra. Pavyzdžiui, Shin [1998] su tokiomis pačiomis prielaidomis kaip Phillips [1987] įrodė, kad riba yra funkcionalas priklausantis nuo Vynerio ir Ornsteino-Uhlenbecko procesų.

Invariantiškumo principas beveik nestacionariems procesams

Pirmiausia, nagrinėjame laužčių procesą sudarytą iš y_k:

$$S_n^{\mathrm{pl}}(t) := \sum_{k=1}^{[nt]} y_{k-1} + (nt - [nt]) y_{[nt]}, \quad t \in [0,1], \quad n \geq 1, \quad S_n^{\mathrm{pl}}(0) = 0. \tag{4}$$

Mūsų tikslas yra rasti S_n^{pl} ribą $\mathrm{C}[0,1]$ bei Hiolderio erdvėse dviem atvejais

– *1 atvejis*: $\phi_n = \mathrm{e}^{\gamma/n}$ (γ yra neigiama konstanta);

– *2 atvejis*: $\phi_n = 1 - \frac{\gamma_n}{n}$, $\gamma_n \to \infty$ ir $\gamma_n/n \to 0$, kai $n \to \infty$.

Hiolderio erdvė su parametru $\alpha \in [0,1)$

$$\mathrm{H}_\alpha^o[0,1] := \left\{ f \in C[0,1] : \lim_{\delta \to 0} \omega_\alpha(f, \delta) = 0 \right\},$$

ir joje apibrėžta norma $\|f\|_\alpha := |f(0)| + \omega_\alpha(f, 1)$, čia

$$\omega_\alpha(f, \delta) := \sup_{\substack{s,t \in [0,1] \\ 0 < t-s < \delta}} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha},$$

yra separabili Banacho erdvė.

Toliau nagrinėjame (3) procesą su $\phi_n = \mathrm{e}^{\gamma/n}$, $\gamma < 0$. Pastebėsime, kad vietoje tiesioginių prielaidų inovacijoms ε_j, tariame, kad galioja silpnas funkcinis W_n^{pl} konvergavimas į W, čia W_n^{pl} yra laužčių procesas sudarytas iš ε_j. Ši prielaida leidžia įrodyti rezultatus ne tik nepriklausomoms, vienodai pasiskirsčiusioms inovacijoms, bet ir bendresniu atveju, pavyzdžiui silpnai priklausomiems atsitiktiniams dydžiams, žr. Hamadouche [2000].

Teorema 1. *1 atveju, kai* (y_k) *generuojamas* (3) *formule su* $\phi_n = \mathrm{e}^{\gamma/n}$, $\gamma < 0$, *tarkime, kad laužčių proceso seka* $(n^{-1/2} W_n^{\mathrm{pl}})$ *silpnai konverguoja į standartnį Brauno judesį* W *erdvėse* $\mathrm{C}[0,1]$ *arba* $\mathrm{H}_\alpha^o[0,1]$ *su kokiu nors* $0 < \alpha < 1/2$. *Be to, tarkime kad* $y_{n,0} = o_P(n^{1/2})$. *Tada* $n^{-3/2} S_n^{\mathrm{pl}}$ *silpnai konverguoja nagrinėjamose erdvėse į integruotą Ornsteino-Uhlenbecko procesą* J *apibrėžtą formule:*

$$J(t) := \int_0^t U_\gamma(s)\, \mathrm{d}s, \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{5}$$

čia

$$U_\gamma(s) = \int_0^s \mathrm{e}^{\gamma(s-r)}\, \mathrm{d}W(r). \tag{6}$$

Pastaba 2. 1 teoremos rezultatas suformuluotas, kai dispersija yra 1. Jei dispersija yra žinoma ir lygi σ^2, tada galiojant 1 teoremos prielaidoms, gauname

$$n^{-3/2}\sigma^{-1}S_n^{\mathrm{pl}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{E}} J(t), \tag{7}$$

čia E žymi C[0, 1] arba $\mathrm{H}_\alpha^o[0,1]$, kai $0 < \alpha < 1/2$.

Pastaba 3. Jei dispersija nežinoma, remiantis Slutskio teorema, (7) rezultate ji gali būti pakeista įverčiu

$$\widehat{\sigma}^2 := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\widehat{\varepsilon}_k^2, \tag{8}$$

nes Phillips [1987] parodė, kad

$$\widehat{\sigma}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \sigma^2. \tag{9}$$

Atsižvelgiant į klasikinį Donskerio-Prohorovo invariantiškumo principą bei į Račkausko ir Suquet [2004a] įrodytą Hiolderio invariantiškumo principą, mes gauname 1 teoremos išvadą klasikiniu nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių atveju.

Išvada 4. *Tarkime, kad (y_k) yra generuojamas (3) formule, su $\phi_n = \mathrm{e}^{\gamma/n}$, $\gamma < 0$ ir inovacijos (ε_k) yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu. Tada $\sigma^{-1}n^{-3/2}S_n^{\mathrm{pl}}$ silpnai konverguoja į J*

- *erdvėje C[0, 1], jei galioja $\mathbb{E}\varepsilon_1^2 = \sigma^2 < \infty$ ir $y_{n,0} = o_P(n^{1/2})$;*
- *erdvėje $\mathrm{H}_\alpha^o[0,1]$, jei su $p > 2$ apibrėšime $\alpha = 1/2 - 1/p$ ir galioja sąlygos*

$$\lim_{t\to\infty} t^p P(|\varepsilon_1| \geq t) = 0 \tag{10}$$

bei $y_{n,0} = o_P(n^{1/2})$.

Toliau nagrinėsime laužčių procesą S_n^{pl} sudarytą iš y_k, kuris apibrėžtas (4) formule, čia $\phi_n = 1 - \gamma_n/n$ ir $\gamma_n \to \infty$ lėčiau nei n. Pradėsime nuo S_n^{pl} konvergavimo C[0, 1] erdvėje.

Teorema 5. *Tarkime, kad (y_k) yra generuojamas (3) formule ir $\phi_n = 1-\gamma_n/n$, čia (γ_n) yra tokia neneigiamų skaičių seka, kad $\gamma_n \to \infty$ ir $\gamma_n/n \to 0$, kai $n \to \infty$. Taip pat, tarkime, kad inovacijos (ε_k) yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su $\mathbb{E}\varepsilon_k = 0$, $\mathbb{E}\varepsilon_k^2 = 1$ ir $y_{n,0} = o_P(n^{-1/2}(1-\phi_n)^{-1})$. Tada galioja*

$$n^{-1/2}(1-\phi_n)S_n^{\mathrm{pl}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{C}[0,1]} W.$$

Toliau išplečiame 5 teoremos rezultatą, įrodydami S_n^{pl} silpną konvergavimą Hiolderio erdvėje, tačiau su stipresne sąlyga (ε_k) nei baigtinis antras momentas. Papildomos (11) sąlygos γ_n divergavimui būtinumas ir optimalumas yra atviras klausimas.

Teorema 6. *Tarkime, kad (y_k) yra generuojamas (3) formule ir $\phi_n = 1 - \gamma_n/n$, čia (γ_n) yra tokia neneigiamų skaičių seka, kad $\gamma_n \to \infty$ ir $\gamma_n/n \to 0$, kai $n \to \infty$, o inovacijos (ε_k) yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai ir tenkina (10) sąlygą kokiam nors $p > 2$. Tada su $0 < \beta < \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$,*

$$n^{-1/2}(1-\phi_n)S_n^{\mathrm{pl}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{H}_\beta^o[0,1]} W,$$

kai $y_{n,0} = o_P(n^{-1/2}(1-\phi_n)^{-1})$ ir

$$\liminf_{n\to\infty} \gamma_n n^{-\frac{\beta}{\alpha}} > 0. \tag{11}$$

Pastaba 7. Jei dispersija yra σ^2, tada galiojant 5 teoremos sąlygoms, turime

$$n^{-1/2}(1-\phi_n)\sigma^{-1}S_n^{\mathrm{pl}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{C}[0,1]} W \tag{12}$$

bei galiojant 6 teoremos sąlygoms, gauname

$$n^{-1/2}(1-\phi_n)\sigma^{-1}S_n^{\mathrm{pl}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{H}_\beta^o[0,1]} W. \tag{13}$$

Pastaba 8. Jei dispersija σ^2 yra nežinoma, tai pagal Slutskio teoremą, (12) ir (13) sąryšiuose ji gali būti pakeista įverčiu, apibrėžtu (8) formule

$$\widehat{\sigma}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \sigma^2.$$

Šis rezultatas išplaukia iš 4.3.1 lemos disertacijoje.

Toliau tiriame laužčių proceso $(\widehat{W}_n^{\mathrm{pl}}(t), t \in [0,1])$, sudaryto iš mažiausių kvadartų liekanų $(\widehat{\varepsilon}_k)$, konvergavimą Hiolderio erdvėje

$$\widehat{W}_n^{\mathrm{pl}}(t) := \sum_{k=1}^{[nt]} \widehat{\varepsilon}_k + (nt - [nt])\widehat{\varepsilon}_{[nt]+1}. \tag{14}$$

(3) modelio liekanos apibrėžiamos taip:

$$\widehat{\varepsilon}_k = y_k - \widehat{\phi}_n y_{k-1} = \varepsilon_k - (\widehat{\phi}_n - \phi_n)y_{k-1},$$

čia $\widehat{\phi}_n$ yra koeficiento ϕ_n MKM įvertinys.

$\widehat{W}_n^{\mathrm{pl}}$ procesui, apibrėžtam (14) formule, įrodome invariantiškumo principą bei randame būtiną ir pakankamą sąlygą.

Teorema 9. *Tegu $p > 2$ ir (y_k) yra generuojamas (3) formule, $\phi_n = \mathrm{e}^{\gamma/n}$ ir $\gamma < 0$ yra konstanta. Tarkime, kad (ε_k) yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su $\mathbb{E}\varepsilon_0 = 0$ bei $\mathbb{E}\varepsilon_0^2 = 1$ ir $y_{n,0} = o_P(n^{1/2})$. Tuomet*

$$n^{-1/2}\widehat{W}_n^{\mathrm{pl}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{H}_\alpha^o[0,1]} W - A^{-1}BJ$$

tada ir tik tada jei (10) sąlyga galioja. Čia $A = \int_0^1 U_\gamma^2(t)\,\mathrm{d}t$, $B = \int_0^1 U_\gamma(t)\,\mathrm{d}W(t)$ ir $J(t)$ yra integruotas Ornsteino-Uhlenbecko procesas, apibrėžtas (5) formule.

Pastaba 10. Jei dispersija σ^2 yra nežinoma, tai galiojant 9 teoremos sąlygoms, gauname, kad

$$n^{-1/2}\sigma^{-1}\widehat{W}_n^{\mathrm{pl}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{H}^o_\alpha[0,1]} W - A^{-1}BJ \tag{15}$$

tada ir tik tada, jei galioja (10) sąlyga.

Pastaba 11. Jei dispersija yra nežinoma, tai pagal Slutskio teoremą, (15) konvergavime ji gali būti pakeista dispersijos (8) įvertiniu, naudojantis Phillips [1987] rezultatu (9).

Antrojo tipo modeliui, gauname, kad $n^{-1/2}\widehat{W}_n^{\mathrm{pl}}$ konvergavimas į Vynerio procesą galioja Hiolderio erdvėje su papildoma sąlyga γ_n divergavimo greičiui.

Teorema 12. *Tarkime, kad* $(y_{n,k})$ *yra generuojamas* (3) *formule ir* $\phi_n = 1 - \gamma_n/n$, *čia* (γ_n) *yra tokia neneigiamų skaičių seka, kad* $\gamma_n \to \infty$ *ir* $\gamma_n/n \to 0$, *kai* $n \to \infty$, *o inovacijos* (ε_k) *yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai ir tenkina* (10) *sąlygą kokiam nors* $p > 2$. *Tada su* $0 < \beta \le \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$,

$$n^{-1/2}\widehat{W}_n^{\mathrm{pl}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{H}^o_\beta[0,1]} W,$$

jei $y_{n,0} = o((1-\phi_n)^{-1/2})$ *ir*

$$\liminf_{n\to\infty} \gamma_n n^{-\frac{2\beta}{1+2\alpha}} > 0. \tag{16}$$

Pastaba 13. Jei dispersija σ^2 yra žinoma, tai galiojant 12 teoremos sąlygoms, gauname

$$n^{-1/2}\sigma^{-1}\widehat{W}_n^{\mathrm{pl}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{H}^o_\beta[0,1]} W. \tag{17}$$

Pastaba 14. Jei dispersija yra nežinoma, tai pagal Slutskio teoremą, (17) formulėje ji gali būti pakeista įvertiniu (8), naudojantis 4.3.1 lema disertacijoje.

Epideminio pasikeitimo testavimas

Pasikeitimo taško uždavinys yra plačiai taikomas ekonomikoje, medicinoje, biologijoje ir t.t. Analizuojami klausimai susiję tiek su vieno pasikeitimo taško aptikimu, tiek su kelių pasikeitimo taškų nustatymu. Specialus daugelio pasikeitimo taškų testavimo uždavinys yra epideminis pasikeitimas. Norėdami apibūdinti epideminį pasikeitimą, tarkime, kad turime seką $X_1, \ldots, X_n$. Standartinė nulinė hipotezė yra

$$H_0: \quad X_1, \ldots, X_n \quad \text{visi turi tą patį parametrą} \quad \theta_0$$

(pvz., vidurkį, medianą, dispersiją ir t.t.) prieš alternatyvą

$$H_A: \quad \text{egzistuoja tokie sveikieji skaičiai} \quad 1 < k^* < m^* < n \quad \text{, kad}$$

$$\theta_1 = \ldots = \theta_{k^*} = \theta_{m^*+1} = \ldots = \theta_n = \theta_0 \quad \text{bei} \quad \theta_{k^*+1} = \ldots = \theta_{m^*} = \theta_A.$$

Čia k^* žymi (nežinomą) laiką ar vietą, kai prasidėjo epideminis pasikeitimas, m^* žymi pasikeitimo pabaigą, o $\ell^* = m^* - k^*$ yra epidemijos ilgis. Taigi, pirmiausia parametras θ įgyja vieną reikšmę, vėliau kažkuriuo momentu parametro reikšmė pasikeičia iš θ_0 į θ_A, o po tam tikro periodo grįžtama į pradinę būseną.

Viena iš galimų testo statistikų epideminiam pasikeitimui aptikti yra tolygiųjų prieaugių statistika:

$$T_{0,n}(X_1, \dots, X_n) = \max_{1 \le k, \ell \le n} \left| \sum_{j=k+1}^{k+\ell} X_j - \frac{\ell}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j \right|. \tag{18}$$

Kiek mums žinoma, pasikeitusio segmento problema nepriklausomiems, vienodai pasiskirsčiusiems atsitiktiniams dydžiams pirmiausia buvo nagrinėjama Levin ir Kline [1985] straipsnyje (taip pat žr. Csörgő ir Horváth [1997] 1.4 skyrių). Taip pat, siūlome keletą kitų šaltinių: Gombay [1994] tyrė rangų ir ženklų statistikas; Siegmund [1986] nagrinėja parametrinę statistiką epideminio pasikeitimo testavimui; Lombard [1987] pasiūlė neparamerinius testus; Yao [1993] studijavo įvairius parametrinius testus, kurie padeda aptikti vidurkio epideminį pasikeitimą.

Nagrinėjame statistiką, apibrėžtą (18) formule. Račkauskas ir Suquet [2004b] pastebėjo, kad ši statistika gali aptikti epideminį pasikeitimą, kurio ilgis ℓ^* tenkina $n^{1/2} = o_P(\ell^*)$ sąlygą. Siekiant aptikti trumpesnį pasikeitimą, Račkauskas ir Suquet [2004b] pasiūlė pagerinti statistiką su papildomu svoriu. Tegu $\alpha \in [0, 1)$ ir $X_1, \dots, X_n$ yra bet kokia imtis, tada apibrėžiame statistiką

$$T_{\alpha,n} = T_{\alpha,n}(X_1, \dots, X_n) = \max_{1 \le \ell \le n} \ell^{-\alpha} \max_{1 \le k \le n-\ell} \left| \sum_{j=k+1}^{k+\ell} X_j - \frac{\ell}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j \right|. \tag{19}$$

Račkauskas ir Suquet [2004b] parodė, kad bet kokiam $0 < \alpha < 1/2$ statistika $T_{\alpha,n}(X_1, \dots, X_n)$ aptinka epidemiją, kurios ilgis yra $n^\delta = o_P(\ell^*)$, čia $\delta = (1 - 2\alpha)/(2 - 2\alpha)$ yra intervale $(0, 1/2)$. Mikosch ir Račkauskas [2010] nagrinėjo statistikos $T_{\alpha,n}$ ribinį elgesį su reguliariai kintančiai atsitiktiniais dydžiais bei $\alpha > 1/2$. Be to, statistikoje įdomūs uždaviniai, kai atsisakoma atsitiktinių dydžių nepriklausomumo sąlygos. Pavyzdžiui, Rastenė [2011] tyrė pirmos eilės autoregresinio proceso koeficiento epideminį pasikeitimą.

Tarkime, turime n imtį $y_{n,1}, \dots, y_{n,n}$ generuojamą

$$y_{n,k} = \phi_n y_{n,k-1} + \varepsilon_k + a_{n,k}, \quad k = 1, \dots, n, \quad n \ge 1, \quad y_{n,0} = 0, \tag{20}$$

čia nežinomas parametras $\phi_n \to 1$, kai $n \to \infty$, $(\varepsilon_k, k \ge 1)$ yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu ir baigtiniu antruoju momentu, $(a_{n,k})$ yra seka, kurią apibrėšime vėliau. Mūsų tikslas yra pasiūlyti testą, kuriuo galėtume patikrinti nulinę hipotezę

$$H_0: \quad a_{n,1} = \cdots = a_{n,n} = 0$$

prieš epideminę alternatyvą:

$$H_A: \text{ egzistuoja } \quad 1 \le k_n^*, \quad 1 \le m_n^* \le n \quad \text{tokie, kad}$$
$$a_{n,k} = a_n \mathbf{1}_{\mathbb{I}_n^*}(k), \quad a_n \ne 0, \quad 1 \le k \le n,$$

čia $\mathbb{I}_n^*$ yra epideminio pasikeitimo intervalas

$$\mathbb{I}_n^* = \{k_n^* + 1, \dots, m_n^*\}$$

bei $\mathbf{1}_{\mathbb{I}_n^*}$ žymi intervalo indikatoriaus funkciją. Su šia alternatyva, $a_{n,k}$ reikšmės, epideminio pasikeitimo periodu $\mathbb{I}_n^*$, yra interpretuojamos kaip epideminis nuokrypis nuo įprastinio (nulinio) vidurkio ir $\ell_n^* = m_n^* - k_n^*$ vadinamas epideminio pasikeitimo ilgiu.

Norint patikrinti šią hipotezę, sukonstruojame testo statistiką

$$\widetilde{T}_{\alpha,n} = T_{\alpha,n}(y_{n,1}, \dots, y_{n,n}). \tag{21}$$

Norint pagrįsti tokį pasirinkimą, perrašykime (20) formule šiuo būdu

$$y_{n,k} - \tau_{n,k} = \phi_n(y_{n,k-1} - \tau_{n,k-1}) + \varepsilon_k,$$

čia

$$\tau_{n,k} = \sum_{j=0}^{k-1} \phi_n^j a_{n,k-j} = \sum_{j=1}^{k} \phi_n^{k-j} a_{n,j}. \tag{22}$$

Apibrėžkime

$$z_{n,k} = y_{n,k} - \tau_{n,k}. \tag{23}$$

Pastebėsime, kad $(z_{n,k})$ yra beveik nestacionarus pirmos eilės autoregresinis procesas, kuris tenkina nulinę hipotezę. Taigi, dėka (23) formulės, mes turime epideminio pasikeitimo problemą, kur priklausomų dydžių seka yra pastumta per deterministinę seką. Todėl (21) statistika atrodo natūrali šioje situacijoje.

Nagrinėjame ribinį Levin ir Kline $\widetilde{T}_{\alpha,n}$ statistikos su $\alpha = 0$ elgesį bei statistiką $\widetilde{T}_{\alpha,n}$ su $\alpha \in (0, 1/2 - 1/p)$, $p > 2$, kurią pasiūlė Račkauskas ir Suquet. Tikrinsime, ar Hiolderio svoriai leidžia aptikti trumpesnę epidemiją nei $\widetilde{T}_{0,n}$ statistika.

Taip pat nagrinėjame dviejų tipų beveik nestacionarius procesus (20) modelyje. Pirmojo tipo modelis atitinka koeficientą

$$\phi_n = \mathrm{e}^{\gamma/n}, \quad \gamma < 0. \tag{24}$$

Antrojo tipo modelis atitinka koeficientą

$$\phi_n = 1 - \frac{\gamma_n}{n}, \quad \text{čia} \quad \gamma_n \to \infty \text{ ir } \frac{\gamma_n}{n} \to 0, \quad \text{kai} \quad n \to \infty. \tag{25}$$

Bet kokiai funkcijai $f \in \mathrm{C}[0,1]$ arba $f \in \mathrm{H}_\alpha^o[0,1]$ su $0 \le \alpha < 1/2$ apibrėžkime

$$T_{\alpha,\infty}(f) := \sup_{0<t<s<1} \frac{|f(t) - f(s) - (t-s)f(1)|}{|t-s|^\alpha}.$$

Pradedame nuo Levin ir Kline statistikos $\widetilde{T}_{0,n}$. Pirma, nagrinėkime (20) modelį prie nulinės hipotezės H_0 su koeficientu $\phi_n = \mathrm{e}^{\gamma/n}$, $\gamma < 0$. Tarus, kad inovacijos turi baigtinį antrą momentą, gauname, kad riba yra funkcionalas priklausantis nuo Ornsteino-Uhlenbecko proceso.

Teorema 15. *Prie nulinės hipotezės H_0, pirmojo tipo modeliui apibrėžtam* (20) *bei* (24) *formulėmis, galioja*

$$n^{-3/2}\sigma^{-1}\widetilde{T}_{0,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} T_{0,\infty}(J),$$

čia $\sigma^2 = \mathbb{E}\varepsilon_1^2$ ir J yra integruotas Ornsteino-Uhlenbecko procesas $J(t) = \int_0^t U_\gamma(r)\,\mathrm{d}r$, $t \in [0,1]$ bei U_γ apibrėžtas (6) *formule.*

Toliau, randame testo statistikos $\widetilde{T}_{0,n}$ ribą prie nulinės hipotezės antrojo tipo modeliui.

Teorema 16. *Prie nulinės hipotezės H_0, antrojo tipo modeliui apibrėžtam* (20) *bei* (25) *formulėmis, galioja*

$$n^{-1/2}(1-\phi_n)\sigma^{-1}\widetilde{T}_{0,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} T_{0,\infty}(W), \tag{26}$$

čia $\sigma^2 = \mathbb{E}\varepsilon_1^2$.

Dabar parodysime, kad (20) modeliui su $\phi_n = \mathrm{e}^{\gamma/n}$, $\gamma < 0$ statistikos $\widetilde{T}_{\alpha,n}$ $(\alpha > 0)$ riba prie nulinės hipotezės H_0 yra funkcionalas priklausantis nuo integruoto Ornsteino-Uhlenbecko proceso, tačiau su stiprense sąlyga inovacijoms nei antro momento baigtinumas.

Teorema 17. *Pirmojo tipo modeliui, apibrėžtam* (20) *bei* (24) *formulėmis, tarkime, kad (ε_i) tenkina* (10) *sąlygą kokiam nors $p > 2$. Tada prie nulinės hipotezės H_0 bet kokiam $\alpha \in (0, 1/2 - 1/p)$*

$$n^{-3/2+\alpha}\sigma^{-1}\widetilde{T}_{\alpha,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} T_{\alpha,\infty}(J),$$

čia $\sigma^2 = \mathbb{E}\varepsilon_1^2$ ir J yra integruotas Ornsteino-Uhlenbecko procesas $J(t) = \int_0^t U_\gamma(r)\,\mathrm{d}r$, $t \in [0,1]$ bei U_γ apibrėžtas (6) *formule.*

Toliau rasime statistikos $\widetilde{T}_{\alpha,n}$ ribą prie nulinės hipotezės antrojo tipo modeliui, t.y., modeliui apibrėžtam (20) formule su koeficientu $\phi_n = 1 - \gamma_n/n$, $\gamma_n \to \infty$ bei $\gamma_n/n \to 0$, kai $n \to \infty$. Šiuo atveju riba yra funkcionalas priklausantis nuo Vynerio proceso. Dabar reikalaujame ne tik inovacijų integruojamumo, bet ir γ_n divergavimo greičio.

Teorema 18. *Antrojo tipo modelyje apibrėžtame* (20) *bei* (25) *formulėmis, tarkime, kad* (ε_i) *tenkina* (10) *salygą, kokiam nors* $p > 2$. *Tada* $\alpha \in (0, 1/2 - 1/p)$ *prie nulinės hipotezės* H_0

$$n^{-1/2+\alpha}(1-\phi_n)\sigma^{-1}\widetilde{T}_{\alpha,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} T_{\alpha,\infty}(W)$$

su sąlyga, kad

$$\liminf_{n\to\infty} \gamma_n n^{-\alpha/(1/2-1/p)} > 0.$$

Toliau nagrinėjame, testo statistikos $\widetilde{T}_{n,\alpha}$ suderinamumą. Šis rezultatas išreiškia suderinamumo sąlygą per

$$T_{\alpha,n}(\tau_{n,1},\dots,\tau_{n,n}) = \max_{1\le\ell\le n} \ell^{-\alpha} \max_{1\le k\le n-\ell} \left| \sum_{j=k+1}^{k+\ell} \tau_{n,j} - \frac{\ell}{n}\sum_{j=1}^{n} \tau_{n,j} \right|$$

išraišką, čia $\tau_{n,k}$ apibrėžtas (22) formule.

Dėl žymėjimų paprastumo, praleisime indeksą n žymėjimuose k_n^*, m_n^* ir ℓ_n^*.

Teorema 19. *Tarkime, kad pirmos eilės beveik nestacionariame autoregresiniame procese apibrėžtame* (20) *formule, inovacijos yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu ir tenkina* (10) *sąlygą. Tarkime, kad kokiai nors normalizuojančiai sekai* $(b_n)_{n\ge1}$ *statistika* $b_n\widetilde{T}_{\alpha,n}$ *yra stochastiškai aprėžta prie nulinės hipotezės* H_0. *Tada prie alternatyvos* H_A,

$$b_n\widetilde{T}_{\alpha,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \infty$$

tada ir tik tada kai

$$b_n T_{\alpha,n}(\tau_{n,1},\dots,\tau_{n,n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty. \tag{27}$$

Tam, kad galiotų (27), *pakankama sąlyga yra*

$$\frac{a_n b_n}{(1-\phi_n)^2 \ell^{*\alpha}} \left(\ell^*(1-\phi_n)\left(1-\frac{\ell^*}{n}\right) - (1-\phi_n^{\ell^*})\left(\phi_n - \frac{\ell^*}{n}\phi_n^{n-m^*+1}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Praktiniai 19 teoremos rezultatai pateikiami 20 ir 22 išvadose

Išvada 20. *Pirmojo tipo modelyje apibrėžtame* (20) *bei* (24) *formulėmis, tarkime, kad kokiam nors* $p > 2$, (ε_i) *tenkina* (10) *ir* $\alpha \in (0, 1/2 - 1/p)$. *Tada prie alternatyvios hipotezės* H_A

$$n^{-3/2+\alpha}\widetilde{T}_{\alpha,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \infty$$

su sąlyga, kad $\ell^{*2-\alpha} n^{-3/2+\alpha} a_n \to \infty$, *kai* $n \to \infty$ *ir*

$$\liminf_{n\to\infty} \left| 1 + \frac{\gamma}{2} - \mathrm{e}^{\gamma\left(1-\frac{m^*}{n}\right)} \right| > 0.$$

Šis rezultatas galioja ir atskiru atveju, kai $\alpha = 0$, *tariant, kad galioja* $\mathbb{E}\varepsilon_1^2 < \infty$.

Pastaba 21. Iš suderinamumo sąlygos galime pastebėti, kad didėjant α, galima aptikti trumpesnį epideminį pasikeitimą. Kaip ir buvo galima tikėtis, šiuo atveju aptikimas nėra toks gera kaip nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių atveju (žr., Račkausko ir Suquet [2004b] straipsnį).

Išvada 22. *Antrojo tipo modelyje apibrėžtame* (20) *bei* (25) *formulėmis, tarkime, kad kokiam nors $p > 2$, (ε_i) tenkina* (10) *sąlygą. Tegu $\alpha \in (0, 1/2 - 1/p)$ tenkinantis sąlygą*

$$\liminf_{n\to\infty} \gamma_n n^{-\alpha/(1/2-1/p)} > 0.$$

Tada prie alternatyvos H_A galioja konvergavimas

$$n^{-1/2+\alpha}(1-\phi_n)\widetilde{T}_{\alpha,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \infty,$$

kai

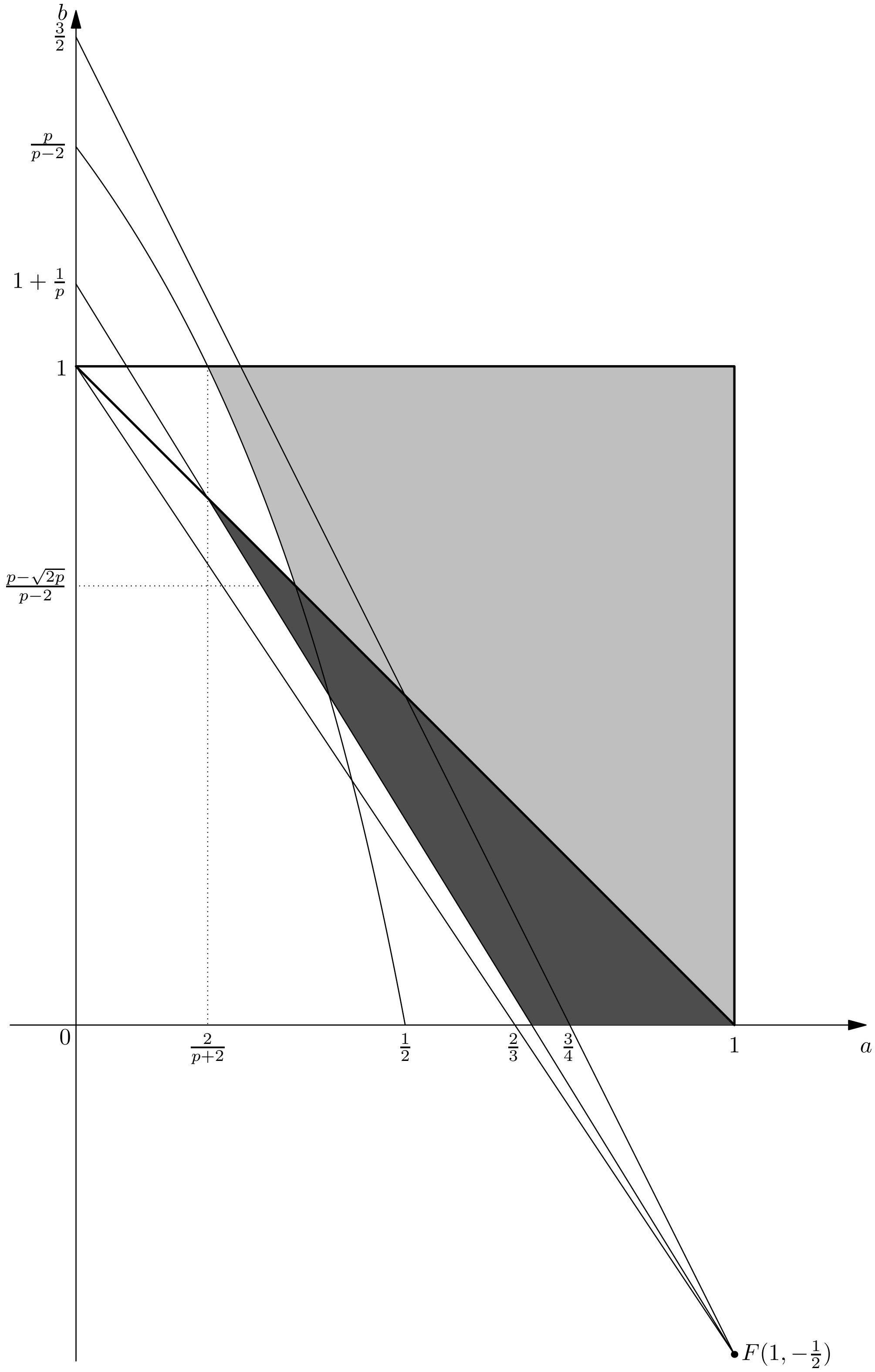
1. $\ell^*(1-\phi_n)$ konverguoja į ∞, $\limsup_{n\to\infty} \ell^*/n < 1$ ir $n^{-1/2+\alpha}\ell^{*1-\alpha}a_n$ konverguoja į ∞;
arba

2. $\ell^*(1-\phi_n)$ konverguoją į kokią nors teigiamą konstantą c ir $n^{-1/2+\alpha}\ell^{*1-\alpha}a_n$ konverguoja į ∞;
arba

3. $\ell^*(1-\phi_n)$ konverguoja į 0 ir $n^{-3/2+\alpha}\gamma_n\ell^{*2-\alpha}a_n$ konverguoja į ∞.
Šis rezultatas galioja ir specialiu atveju, kai $\alpha = 0$, tariant, kad $\mathbb{E}\varepsilon_1^2 < \infty$.

Pastaba 23. Grafinis vaizdas pateiktas 3 paveiksliuke, iliustruoja 22 išvados rezultatus. Nemažinant bendrumo, tarkime, kad $a_n = 1$, $\ell^* \asymp n^a$ (t.y., egzistuoja teigiamos konstantos c_1 ir c_2 tokios, kad dideliems n, $c_1 n^a \le \ell^* \le c_2 n^a$) ir $\phi_n \asymp n^b$ kokiems nors $0 < a, b < 1$. Duotai p reikšmei (10) sąlygoje, kokios yra (a, b) poros, kurioms 22 išvada leidžia aptikti epideminį pasikeitimą, kurio ilgis $\ell^* \asymp n^a$, atsižvelgiant į galimas α reikšmes? Sprendiniai yra pavaizduoti kaip pilka zona vienetiniame kvadrate. Šviesiai pilka dalis virš diagonalės atitinka 1 ir 2 atvejus, t.y., $\lim_{n\to\infty} \ell^*(1-\phi_n)$ yra intervale $(0, \infty]$. Jos vakarinė siena yra hiperbolės lankas su parametrine išraiška $a = (1 - 2\alpha_p t)/(2 - 2\alpha_p t)$, $b = t$ čia $t = \alpha/\alpha_p$ ir $\alpha_p = 1/2 - 1/p$. Tamsesnė pilka zona atitinka atvejį, kai $\ell^*(1-\phi_n)$ konverguoja į 0. Ši zona yra trikampis apribotas diagonale, horizontale ašimi bei tiesia linija D_{α_p}, čia D_α yra Dekarto lygtis $(2-\alpha)a + b - 3/2 + \alpha = 0$. Visos šios linijos turi bendrą tašką $F(1, -1/2)$.

Be to, mes atlikome testo galios analizę. Skaičiuojame empirinę galią su koreguota baze (ne nominalia), t.y., pakeičiame nominalų reikšmingumo lygmenį p-reikšmių empirinio pasiskirstymo funkcija prie nulinės hipotezės (žr. Davidson ir MacKinnon [1994]). Pavyzdžiui,



3 pav.: Aptikimo regionas parametrų aibėje ($\ell^* \asymp n^a, \gamma_n \asymp n^b$) 22 išvadai.

pristatysime antrojo tipo modelio skaitinio eksperimento rezultatus (1 lentelė). Antrojo tipo modelio baziniai parametrai yra

$$\gamma_n = n^{3/4}; \quad a_n = 1; \quad n = 1000; \quad \frac{\ell^*}{n} = 0.05; \quad \frac{k^*}{n} = 0.4, \quad y_{n,0} = 0.$$

Generuojame inovacijas kaip standartinį normalųjį atsitiktinį dydį. Keisdami atskirus parametrus, skaičiuojame empirinę galią. Tariame, kad visi parametrai fiksuoti, išskyrus vieną (pažymėtas lentelės pirmame stulpelyje), kuriam leidžiama kisti. Testo galia yra žemiausia visais atvejais, kai $\alpha = 0$ ir didėja, kai α didėja. Šiam modeliui epideminio pasikeitimo aptikimas gerėja, kai didėja epidemijos ilgis, bet testas aptinka ir trumpas epidemijas su dideliais α ($\approx 1/3$). Pastebėsime, kad testo galia nepriklauso nuo epideminio pasikeitimo vietos. Taip pat, testas gana gerai aptinka mažus pasikeitimus, pvz., $a_n = 0.8$. Testo galia didėja, kai didėja stebėjimų skaičius. Testo galia nepriklauso nuo pasirinktų γ_n reikšmių.

Parametrai	$\alpha = 0$	$\alpha = 2/32$	$\alpha = 6/32$	$\alpha = 10/32$
$\ell^*/n = 0.035$	0.373	0.441	0.675	0.909
$\ell^*/n = 0.050$	0.758	0.859	0.974	0.996
$\ell^*/n = 0.065$	0.980	0.990	0.999	1.000
$k^*/n = 0.2$	0.780	0.875	0.980	0.999
$k^*/n = 0.4$	0.758	0.859	0.974	0.996
$k^*/n = 0.8$	0.783	0.877	0.981	0.998
$a_n = 0.8$	0.478	0.565	0.780	0.929
$a_n = 1$	0.758	0.859	0.974	0.996
$a_n = 1.2$	0.949	0.985	0.999	1.000
$n = 500$	0.422	0.480	0.676	0.813
$n = 1000$	0.758	0.859	0.974	0.996
$n = 2000$	0.997	1.000	1.000	1.000
$\gamma_n = n/\ln(n)$	0.754	0.847	0.970	0.995
$\gamma_n = \ln^{2.5}(n)$	0.758	0.844	0.972	0.995
$\gamma_n = n^{3/4}$	0.758	0.859	0.974	0.996

1 lentelė: Empirinė galia prie koreguotos reikšmingumo reikšmės 0.05 antrojo tipo modeliui.

Toliau nagrinėjame tą patį (20) modelį ir norime patikrinti tas pačias hipotezes. Tačiau dabar sudarome testo statistiką su liekanomis, kadangi inovacijos nėra stebimos. Iš tikrųjų, liekanos yra įvertintos inovacijos ir jį vidurkis ir integruojamumo laipsnis turėtų sutapti.

Norint aptikti trumpą inovacijų vidurkio epideminį pasikeitimą pirmos eilės beveik nestacionariame autoregresiniame procese, sudarome α-Hölder tipo tolygiųjų prieaugių statistiką iš liekanų, kai $0 < \alpha \leq 1$:

$$\widehat{T}_{\alpha,n} = \max_{1\leq \ell \leq n} \ell^{-\alpha} \max_{1\leq k\leq n-\ell} \left| \sum_{j=k+1}^{k+\ell} \widehat{\varepsilon}_j - \frac{\ell}{n} \sum_{j=1}^{n} \widehat{\varepsilon}_j \right| .$$

Vėl nagrinėjame dviejų tipų modelius. Pirmojo tipo modelis apibrėžtas (20) lygybe su koeficientu (24), tuo tarpu antrojo tipo modelis apibrėžtas (20) lygybe su koeficientu (25).

Tarsime, kad inovacijos yra

- nepriklausomi, vienodai pasiskirstę, centruoti atsitiktiniai dydžiai ir kokiam nors $p > 2$ tenkina integruojamumo sąlygą

$$\lim_{t\to\infty} t^p \mathbb{P}\left(|\varepsilon_0| > t\right) = 0 \tag{28}$$

arba

- nepriklausomi, vienodai pasiskirstę, centruoti ir reguliariai kintantys atsitiktiniai dydžiai su indeksu $p > 2$. (29)

Rasime statistikos $\widehat{T}_{\alpha,n}$ ribinį pasiskirstymą prie nulinės hipotezės. Pradėsime nuo pirmojo tipo modelio su inovacijomis, tenkinančiomis (28) sąlygą.

Teorema 24. *Pirmojo tipo modelyje, apibrėžtame* (20) *ir* (24) *lygybėmis, tarkime, kad inovacijos tenkina* (28) *sąlygą kokiam nors* $p > 2$. *Tada prie nulinės hipotezės* H_0 *bet kokiems* $\alpha \in (0, \alpha_p)$

$$n^{-1/2+\alpha}\sigma^{-1}\widehat{T}_{\alpha,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} T_{\alpha,\infty}(Z),$$

čia $\sigma^2 = E\varepsilon_1^2$. *Be to,*

$$Z(t) = W(t) - A^{-1}B'J(t), \tag{30}$$

čia $A = \int_0^1 U_\gamma^2(t)\,\mathrm{d}t$, $B' = \int_0^1 U_\gamma(t)\,\mathrm{d}W(t)$ *ir* $J(t) = \int_0^t U_\gamma(r)\,\mathrm{d}r$, $t \in [0,1]$ *bei* U_γ *yra Ornsteino-Uhlenbecko procesas, apibrėžtas* (6) *lygybe.*

Tolesnis rezultatas yra antrojo tipo modeliui bei inovacijoms, tenkinančioms (28) sąlygą.

Teorema 25. *Antrojo tipo modeliui, apibrėžtam* (20) *bei* (25) *formulėmis, tarkime, kad inovacijos tenkina* (28) *sąlygą kokiam nors* $p > 2$. *Tada prie nulinės hipotezės* H_0 *bet kokiam* $\alpha \in (0, \alpha_p)$

$$n^{-1/2+\alpha}\sigma^{-1}\widehat{T}_{\alpha,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} T_{\alpha,\infty}(W),$$

čia $\sigma^2 = E\varepsilon_1^2$, *su sąlygą kad*

$$\liminf_{n\to\infty} \gamma_n n^{-2\alpha/(1+2\alpha_p)} > 0.$$

Pereikime prie reguliariai kintančių inovacijų. Jei (ε_k) yra reguliariai kintančios, tai apibrėžiame

$$b_n = \inf\{x > 0 : P(|\varepsilon_1| \le x) \ge 1 - 1/n\}.$$

Iš uodegų sąlygos seka, kad egzistuoja tokia lėtai kintanti funkcija $v(n), n \in \mathbb{N}$, kad

$$b_n \sim \; n^{1/p} v(n) \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

Tolesnėje teoremoje pateikiamas rezultatas pirmojo tipo modeliui.

Teorema 26. *Tegu $p > 2$. Jei inovacijos (ε_i) tenkina (29) sąlygą pirmojo tipo modelyje, apibrėžtame (20) bei (24) formulėmis, tai prie nulinės hipotezės H_0*

(a) bet kokiam $\alpha \in (\alpha_p, 1]$

$$b_n^{-1}\sigma^{-1}\widehat{T}_{\alpha,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} T_p,$$

čia T_p yra atsitiktinis dydis su Frechet skirstiniu $P(T_p \le x) = \mathrm{e}^{-x^{-p}}, x \in \mathbb{R}$,

(b) bet kokiam $\alpha \in [0, \alpha_p)$

$$n^{-1/2+\alpha}\sigma^{-1}\widehat{T}_{\alpha,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} T_{\alpha,\infty}(Z),$$

čia $Z(t)$ apibrėžtas (30) lygybe ir $A = \int_0^1 U_\gamma^2(t)\,\mathrm{d}t$, $B' = \int_0^1 U_\gamma(t)\,\mathrm{d}W(t)$ bei $J(t) = \int_0^t U_\gamma(r)\,\mathrm{d}r$, $t \in [0,1]$, U_γ yra Ornsteino-Uhlenbecko procesas.

Antrojo tipo modeliui gauname naują rezultatą.

Teorema 27. *Tegu $p > 2$. Jei inovacijos (ε_i) tenkina (29) sąlygą antrojo tipo modelyje, apibrėžtame (20) bei (25) formulėmis, tai prie nulinės hipotezės H_0*

(a) bet kokiam $\alpha \in (\alpha_p, 1]$

$$b_n^{-1}\sigma^{-1}\widehat{T}_{\alpha,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} T_p,$$

su sąlyga, kad $\gamma_n = O(n^{q(\alpha-\alpha_p)})$ kokiam nors $0 < q < 2$,

(b) bet kokiam $\alpha \in (0, \alpha_p)$, jei

$$\liminf_{n\to\infty} \gamma_n n^{\frac{-2\alpha}{1+2\alpha_p}} > 0,$$

tai

$$n^{-1/2+\alpha}\sigma^{-1}\widehat{T}_{\alpha,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} T_{\alpha,\infty}(W).$$

Galiausiai, rasime statistikos suderinamumo sąlygas antrojo tipo modeliui. Mūsų taikomi metodai, netinka pirmojo tipo modeliui. Toliau pateikiame $\widehat{T}_{\alpha,n}$ statistikos suderinamumo rezultatus antrojo tipo modeliui, kai a_n yra konstanta bei $\alpha \in (0, \alpha_p)$.

Teorema 28. *Prie alternatyvos H_A, tarkime, kad $\ell^* \to \infty$, $\ell^*/n \to 0$ ir kokiam nors $\alpha \in (0, \alpha_p)$ galioja*

$$n^{-1/2+\alpha}\ell^{*(1-\alpha)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Tada antrojo tipo modeliui, apibrėžtam (20) *ir* (25) *formulėmis, su inovacijomis* (ε_i), *tenkinančiomis* (28) *arba* (29) *sąlygas,*

$$n^{-1/2+\alpha}\widehat{T}_{\alpha,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \infty$$

su sąlyga, kad γ_n *didėjanti su* n *arba reguliariai kintanti seka,*

$$\liminf_{n\to\infty} \gamma_n n^{-\alpha/\alpha_p} > 0$$

ir

$$\frac{\widehat{\phi}_n - \phi_n}{1-\phi_n} = o_P(1). \tag{31}$$

(31) *sąlyga galioja, kai*

– $\ell^* = o(\gamma_n)$ *jei* $\ell^*(1-\phi_n) \to \infty$, *kai* $n \to \infty$;

– $\ell^* = o(\gamma_n^3 n^{-1})$ *jei* $\ell^*(1-\phi_n) \to 0$, *kai* $n \to \infty$.

Tolesnis statistikos $\widehat{T}_{\alpha,n}$ suderinamumo rezultatas gautas antrojo tipo modeliui su konstanta a_n bei $\alpha \in (\alpha_p, 1]$.

Teorema 29. *Prie alternatyvos* H_A, *tarkime, kad* $\ell^* \to \infty$, $\ell^*/n \to 0$ *ir kokiam nors* $\alpha \in (\alpha_p, 1]$,

$$b_n^{-1}\ell^{*(1-\alpha)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Tada antrojo tipo modeliui, apibrėžtam (20) *bei* (25), *lygybėmis su inovacijomis* (ε_i), *tenkinančiomis* (29) *sąlygą,*

$$b_n^{-1}\widehat{T}_{\alpha,n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} \infty$$

su sąlyga, kad γ_n *didėjanti su* n *arba reguliariai kintanti seka,*

$$\gamma_n = O(n^{q(\alpha-\alpha_p)})$$

ir

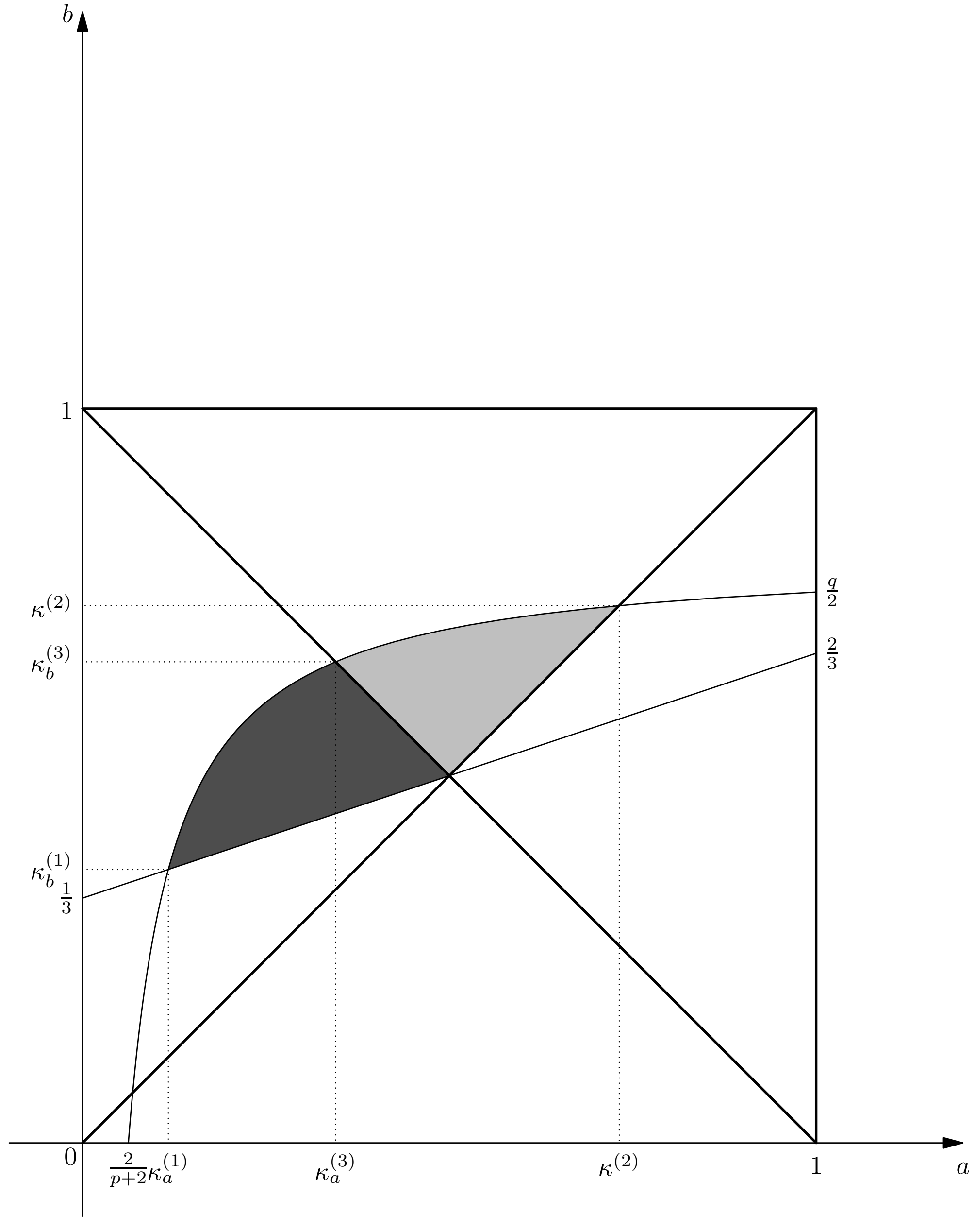
$$\frac{\widehat{\phi}_n - \phi_n}{1-\phi_n} = o_P(1). \tag{32}$$

(32) *sąlyga galioja, kai*

– $\ell^* = o(\gamma_n)$ *jei* $\ell^*(1-\phi_n) \to \infty$, *kai* $n \to \infty$;

– $\ell^* = o(\gamma_n^3 n^{-1})$ *jei* $\ell^*(1-\phi_n) \to 0$, *kai* $n \to \infty$.

Prielaidų suderinamumas 28 ir 29 teoremose analizuojamas taip pat, kaip ir 23 pastaboje, pvz., žr., 4 paveiksliuką. Jis rodo, kad maksimali aptikimo zona (gaunama, leidžiant p artėti į begalybę) nėra tokia pati, kaip su statistika sudaryta iš stebėjimų y_k.



4 pav.: Aptikimo zona parametrų $(\ell^* \asymp n^a, \gamma_n \asymp n^b)$ aibėje, teoremai 28 su $q = 1.5$ ir $\alpha > \alpha_p$.

Šviesiai pilka zona atitinka $\ell^*(1-\phi_n) \to \infty$.

Tamsiai pilka zona atitinka $\ell^*(1-\phi_n) \to 0$.

Testo galios analizė atlikta visiems modeliams su abejomis prielaidomis inovacijoms. Visais atvejais gavome, kad α įtakoja testo galią. Pavyzdžiui, nagrinėkime antrojo tipo modelį su reguliariai kintančiomis inovacijomis, generuojant jas kaip simetrinį Pareto atsitiktinį dydį. Analizuodami 27 teoremos (b) dalį, imame α reikšmes kaip ir Gausiniu atveju, $p = 20$ ir normalizavimas $n^{-1/2+\alpha}$. Tada testas neturi galios su mažomis α reikšmėmis, bet galia didėja su α, n, ℓ^* ir a_n reikšmėmis (žr., 2)

Parametrai	$\alpha = 2/32$	$\alpha = 6/32$	$\alpha = 10/32$
$\ell^*/n = 0.035$	0.094	0.226	0.792
$\ell^*/n = 0.050$	0.173	0.630	0.959
$\ell^*/n = 0.100$	0.368	0.912	0.994
$k^*/n = 0.2$	0.152	0.620	0.966
$k^*/n = 0.4$	0.173	0.630	0.959
$k^*/n = 0.8$	0.141	0.627	0.963
$a_n = 0.8$	0.154	0.389	0.805
$a_n = 1$	0.173	0.630	0.959
$a_n = 1.2$	0.172	0.854	0.997
$n = 500$	0.039	0.124	0.509
$n = 1000$	0.173	0.630	0.959
$n = 2000$	0.706	0.997	1.000
$\gamma_n = n/\ln(n)$	0.085	0.555	0.944
$\gamma_n = \ln^{2.5}(n)$	0.057	0.445	0.949
$\gamma_n = n^{3/4}$	0.173	0.630	0.95

2 lentelė: Empirinė koreguota 0.05 reikšmingumo lygmens galia antrojo tipo modeliui su reguliariai kintančiomis inovacijomis ir $\alpha < \alpha_p$.

Išvados

Nagrinėjamas pirmos eilės beveik nestacionarus autoregresinis procesas $y_{n,k} = \phi_n y_{n,k-1} + \varepsilon_k$ su koeficientu ϕ_n apibrėžtu dviem būdais:

– $\phi_n = \mathrm{e}^{\gamma/n}$, $\gamma < 0$;

– $\phi_n = 1 - \gamma_n/n$, $\gamma_n \to \infty$, $\gamma_n/n \to 0$, kai $n \to \infty$.

Analizuojami laužčių procesai S_n^{pl}, kuris sudarytas iš stebėjimų $y_{n,k}$, ir $\widehat{W}_n^{\mathrm{pl}}$, kuris sudarytas iš liekanų $\widehat{\varepsilon}_k$. Įrodomos funkcinės ribinės teoremos S_n^{pl} procesams $\mathrm{C}[0,1]$ ir $\mathrm{H}_\alpha^o[0,1]$ erdvėse, $\alpha \in$

$(0, 1/2)$. Parodoma, kad ribos skiriasi abiejų tipų modeliams. Tinkamai normalizuotas S_n^{pl} konverguoja į integruotą Ornsteino-Uhlenbecko procesą pirmojo tipo modelyje, o tuo tarpu antrojo tipo modelyje ribinis procesas yra Vynerio. Įrodomos funkcinės ribinės teoremos $\widehat{W}_n^{\mathrm{pl}}$ procesui $\mathrm{H}_\alpha^o[0,1]$ erdvėje. Parodoma, kad pirmojo tipo modeliui $\lim_{t\to\infty} t^p \mathbb{P}(|\varepsilon_0| > t) = 0$ sąlygą yra būtina ir pakankama sąlygą $\widehat{W}_n^{\mathrm{pl}}$ silpnam konvergavimui $\mathrm{H}_\alpha^o[0,1]$ erdvėje. Antrojo tipo modeliui parodoma, kad riba yra Vynerio procesas $\mathrm{H}_\alpha^o[0,1]$ erdvėje.

Toliau nagrinėjamas inovacijų vidurkio epideminis pasikeitimas, t.y., nagrinėjamas modelis

$$y_{n,k} = \phi_n y_{n,k-1} + \varepsilon_k + a_{n,k}, \quad n \geq 0, \quad k \leq n.$$

Tolygiųjų prieaugių statistika konstruojama iš stebėjimų $y_{n,1}, \ldots, y_{n,n}$ ir liekanų $\widehat{\varepsilon}_1, \ldots, \widehat{\varepsilon}_n$. Galiojant tam tikroms prielaidoms inovacijoms randame ribą abiems statistikoms. Randamos statistikų $T_{\alpha,n}(y_{n,1}, \ldots, y_{n,n})$ bei $T_{\alpha,n}(\widehat{\varepsilon}_1, \ldots, \widehat{\varepsilon}_n)$ suderinamumo sąlygos ir atliekama galios analizė.

Summary

We study some Hölderian functional central limit theorems for the polygonal partial sum processes built on a first order nearly nonstationary autoregressive process $y_{n,k} = \phi_n y_{n,k-1} + \varepsilon_k$ and its least squares residuals $\widehat{\varepsilon}_k$ with ϕ_n converging to 1 and i.i.d. centered square-integrable innovations. In the case where $\phi_n = \mathrm{e}^{\gamma/n}$ with a negative constant γ, we prove that the limiting process depends on Ornsteino–Uhlenbecko one. In the case where $\phi_n = 1 - \gamma_n/n$, with γ_n tending to infinity slower than n, the convergence to Brownian motion is established in Hölder space in terms of the rate of γ_n and the integrability of the ε_k's.

We also investigate some epidemic change in the innovations of the first order nearly nonstationary autoregressive process $AR(1)$. Two types of models are considered. For $0 \leq \alpha < 1$, we build the α-Hölderian uniform increments statistics based on the observations and on the least squares residuals to detect the short epidemic change in the process under consideration. Under the assumptions for innovations we find the limit of the statistics under null hypothesis, some conditions of consistency and we perform a test power analysis. We also discuss the interplay between the various parameters to detect the shortest epidemics.

Publikacijos ir konferencijos

Publikacijos.

1. J. Markevičiūtė, A. Račkauskas, Ch. Suquet. Functional central limit theorems for sums of nearly nonstationary processes. *Lithuanian mathematical journal*, 52(3): 282-296, 2012.
2. J. Markevičiūtė, A. Račkauskas, Ch. Suquet. Testing the epidemic change in nearly nonstationary processes. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, To appear, 2013.
3. J. Markevičiūtė, A. Račkauskas. Ch. Suquet. Epidemic change test based on residuals for nearly nonstationary process. (**preprint**)

Konferencijos.

1. Pirmoji Vokiečių-Lenkų jungtinė tikimybių teorijos ir statistikos konferencija, Torun, Lenkija, 2013 06 06 - 2013 06 09, žodinis pranešimas „Testing the epidemic change in nearly nonstationary processes".
2. Baigiamoji programos „Non-stationarity in Statistics and Risk Management" konferencija (Luminy, Prancūzija, 2013 01 21 – 2013 01 25), žodinis pranešimas „Functional limit theorems for residuals of nearly nonstationary processes"
3. 53-oji Lietuvos matematikų draugijos konferencija (Klaipėda, 2012 06 11 - 2012 06 12), žodinis pranešimas „Functional central limit theorems for nearly nonstationary processes and applications for testing epidemic change"
4. Fizinių ir technologijos mokslų tarpdalykiniai tyrimai : antroji LMA Jaunųjų mokslininkų konferencija (Vilnius, 2012 02 14), stendinis pranešimas „Silpnas didžiųjų skaičių dėsnis beveik nestacionariems pirmos eilės autoregresiniams procesams funkcinėse erdvėse"
5. 52-oji Lietuvos matematikų draugijos konferencija (Vilnius, 2011 06 16 – 2011 06 17), žodinis pranešimas "Functional limit theorems for residuals of nearly non stationary processes"
6. Fizinių ir technologijos mokslų tarpdalykiniai tyrimai : pirmoji LMA Jaunųjų mokslininkų konferencija (Vilnius, 2011.02.08) , stendinis pranešimas „Aukšto dažnio duomenų suglodinimo dimensijos parinkimas"

Literatūra

T. W. Anderson. On asymptotic distributions of estimates of parameters of stochastic difference equations. *Ann. Math. Statist.*, 30:676–687, 1959.

D.W.K. Andrews and P. Guggenberger. Asymptotics for stationary very nearly to unit root processes. *Journal of Time Series Analysis*, 29(1):203–212, 2008.

N.H. Chan and C.Z. Wei. Asymptotic inference for nearly nonstationary AR(1) processes. *Ann. Statist.*, 15(3):1050–1063, 1987.

D.D. Cox and I Llatas. Maximum likelihood type estimation for nearly nonstationary autoregressive time series. *Ann. Statist.*, 19(3):1109–1128, 1991.

M. Csörgő and L. Horváth. *Limit Theorems in Change-Point Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1997.

R. Davidson and J.G. MacKinnon. Graphical methods for investigating the size and power of hypothesis tests. Working Papers 903, Queen's University, Department of Economics, June 1994. URL `http://ideas.repec.org/p/qed/wpaper/903.html`.

K. Dzhaparidze, J. Kormos, T. van der Meer, and M. van Zuijlen. Parameter estimation for nearly nonstationary AR(1) processes. *Math. Comput. Modelling*, 19(2):29–41, 1994.

G.B.A. Evans and N.E. Savin. Testing for unit roots: 1. *Econometrica*, 49(3):753–779, 1981.

G.B.A. Evans and N.E. Savin. Testing for unit roots: 2. *Econometrica*, 52(5):1241–1269, 1984.

L. Giraitis and P.C.B. Phillips. Uniform limit theory for stationary autoregression. *Journal of time series analysis*, 27(1):51–60, 2006.

E Gombay. Testing for change-points with rank and sign statistics. *Statistics & Probability Letters*, 20:49–55, 1994.

D. Hamadouche. Invariance principles in Hölder spaces. *Portugal. Math.*, 57:127–151, 2000.

B. Levin and J. Kline. The CUSUM test of homogeneity with an application in spontaneous abortion epidemiology. *Statistics in Medicine*, 4:469–488, 1985.

F. Lombard. Rank tests for changepoint problems. *Biometrika*, 74(3):615–624, 1987.

H.B. Mann and A Wald. On the statistical treatment of linear stochastic difference equations. *Econometrica*, 11:173–220, 1943.

T. Mikosch and A. Račkauskas. The limit distribution of the maximum increment of random walk with regularly varying jump size distribution. *Bernoulli*, 16(4):1016–1038, 2010.

J.Y. Park. Weak unit roots. Unpublished paper, 2003.

P.C.B. Phillips. Towards a unified asymptotic theory for autoregression. *Biometrika*, 74(3): 535–547, 1987.

P.C.B. Phillips and T. Magdalinos. Limit theory for moderate deviations from a unit root. *Journal of Econometrics*, 136:115–130, 2007.

M.M. Rao. Asymptotic distribution of an estimator of the boundary parameter of an unstable process. *Ann. Statist.*, 6:185–190, 1978.

I. Rastenė. *Testing and Estimating Changed Segment in Autoregressive Model*. PhD thesis, Vilnius University, 2011.

A. Račkauskas and Ch. Suquet. Necessary and sufficient condition for the functional central limit theorem in Hölder spaces. *Journal of Theoretical Probability*, 17(1):221–243, 2004a.

A. Račkauskas and Ch. Suquet. Hölder norm test statistics for epidemic change. *Journal of statistical planning and inference*, 126(2):495–520, 2004b.

D. W. Shin. The limiting distribution of the residual processes in nonstationary autoregressive processes. *Journal of time series analysis*, 19(6):723–736, 1998.

D. O. Siegmund. Boundary crossing probabilities with statistical applications. *Ann. Statist.*, 14(2):361–404, 1986.

S. Tsay, R. *Analysis of Financial Time Series*. Wiley-Interscience Publication, USA, 2002.

J. S. White. The limiting distribution of the serial correlation coeffcient in the explosive case. *Ann. Math. Statist.*, 29:1188–1197, 1958.

Q. Yao. Tests for change-points with epidemic alternatives. *Biometrika*, 80:179—-191, 1993.

Curriculum Vitae

Gimimo data ir vieta: 1985 m. gegužės 24, Ukmergė.

Išsilavinimas:

– 2013 baigtos doktorantūros studijos Vilniaus univesritete, Matematikos ir informatikos fakultete, ekonometrinės analizės katedroje bei Laboratory Paul Painlevé, U.F.R. Mathématiques, Lille 1 University.

– 2009 gautas statistikos magistro laipsnis (specialybė ekonometrija) Vilniaus universitete, Matematikos ir informatikos fakultete.

– 2007 gautas statistikos bakalauro laipsnis (specialybė ekonometrija) Vilniaus universitete, Matematikos ir informatikos fakultete.

– 2003 baigta Ukmergės Antano Smetonos gimnazija.

Darbo patirtis:

– 2008-2013 laborantė Ekonometrinės analizės katedroje, Matematikos ir informatikos fakultetas, Vilniaus universitetas.

– 2010-2013 asistentė Ekonometrinės analizės katedroje, Matematikos ir informatikos fakultetas, Vilniaus universitetas.

– 2007-2008 laborantė Matematinės analizės katedroje, Matematikos ir informatikos fakultetas, Vilniaus universitetas.

– 2007-2010 duomenų analitikė įvairiuose ekonometriniuose projektuose.

Vizitai:

– Statistikų vasaros mokykla „Time Series Modeling with ARIMA and RegARIMA Models“, Örebro (Švedija), 2010 08 09 – 2010 08 11.

– Stažuotė Lilio Mokslų ir Technologijų universitete pagal jungtinės doktorantūros sutartį, Lilis (Prancūzija), 2011 01 31 – 2011 04 29; 2012 02 01 – 2012 04 25; 2013 01 25 – 2013 04 26.

– Mokslinė stažuotė Lillio Mokslų ir Technologijų universitete pagal dvišalio bendradarbiavimo Lietuvos - Prancūzijos programą “Gillibert”, Lilis (Prancūzija), 2011 09 05 – 2011 09 17.