VILNIAUS UNIVERSITETAS

DONATA PUPLINSKAITĖ

AUTOREGRESINIŲ PROCESŲ IR ATSITIKTINIŲ LAUKŲ SU BAIGTINE ARBA BEGALINE DISPERSIJA AGREGAVIMAS

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, matematika (01 P)

Vilnius, 2013

Disertacija rengta 2009-2013 m. Vilniaus universitete bei Nanto universitete, Prancūzijoje.

Mokslinis vadovas:
prof. habil. dr. Donatas Surgailis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Mokslinis konsultantas:
prof. habil. dr. Anne Philippe (Nanto universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas

prof. habil. dr. Vygantas Paulauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika –01P)

Nariai:

prof. habil. dr. Youri Davydov (Lilio 1 universitetas, Prancūzija, fiziniai mokslai, matematika –01P)

prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika –01P)

prof. habil. dr. Alfredas Račkauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika –01P)

prof. habil. dr. Charles Suquet (Lilio 1 universitetas, Prancūzija, fiziniai mokslai, matematika –01P)

Oponentai:

prof. dr. Adam Jakubowski (Nicolaus Copernicus universitetas, Lenkija, fiziniai mokslai, matematika –01P)

prof. habil. dr. Philippe Soulier (Paris Ouest universitetas, Prancūzija, fiziniai mokslai, matematika –01P)

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2013 m. spalio 25 d. 14 val. VU Matematikos ir informatikos fakulteto prof. Zigmo Žemaičio auditorijoje (101).

Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva
Disertacijos santrauka išplatinta 2013 m. rugsėjo 25 d.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

DONATA PUPLINSKAITĖ

AGGREGATION OF AUTOREGRESSIVE PROCESSES AND RANDOM FIELDS WITH FINITE OR INFINITE VARIANCE

Summary of doctoral dissertation

Physical sciences, Mathematics (01P)

Vilnius, 2013

The scientific work was carried out during 2009-2013 at Vilnius University and Université de Nantes.

Scientific supervisor:
prof. habil. dr. Donatas Surgailis (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01 P)

Scientific adviser:
prof. habil. dr. Anne Philippe (Université de Nantes, Physical Science, Mathematics – 01 P)

The thesis is defended in the council of Mathematics of Vilnius University.

Chairman

prof. habil. dr. Vygantas Paulauskas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics –01P)

Members:

prof. habil. dr. Youri Davydov (Lille 1 University, France, Physical sciences, Mathematics –01P)

prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics –01P)

prof. habil. dr. Alfredas Račkauskas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics –01P)

prof. habil. dr. Charles Suquet (Lille 1 University, France, Physical sciences, Mathematics –01P)

Opponents:

prof. dr. Adam Jakubowski (Nicolaus Copernicus University, Poland, Physical sciences, Mathematics –01P)

prof. habil. dr. Philippe Soulier (University of Paris Ouest, France, Physical sciences, Mathematics –01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on October 25, 2013 at 2pm at Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, lecture room 101.

Address: Naugarduko st. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania
The summary of the dissertation was distributed on September 25, 2013.
The dissertation is available at the library of Vilnius University.

Disertacinio darbo aprašymas

1. Tyrimo objektas: agregavimas

Agregavimas nusako ryšį tarp individualaus (mikro) elgesio ir agreguotų (makro) statistikų. Yra įvairių agregavimo rūšių: mažo kiekio ir didelio kiekio agregavimas erdvėje, agregavimas laike, agregavimas kartu ir laike ir erdvėje (žr. [2], [8]). Disertacijoje didžiausias dėmesys skiriamas vienalaikiam didelio kiekio agregavimui. Vienalaikio agregavimo schemą pirmieji pradėjo tirti P. Robinson (1978, [18]) ir C.W.J. Granger (1980, [7]). Jie norėjo parodyti ilgos atminties atsiradimą agreguotose laiko eilutėse. Tarkime, turime N heterogeninių individų, kurių kiekvieno elgesys yra aprašomas procesais $\{X_i(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$, $i = 1, \ldots, N$. *Agreguotą procesą* apibrėžkime kaip individualių procesų sumą kiekvienu laiko momentu t:

$$\bar{X}_N(t) := \frac{1}{A_N} \sum_{i=1}^{N} X_i(t), \qquad t \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

čia A_N, $N \in \mathbb{N}$, yra tam tikra normuojanti seka. Didelio kiekio agregavimo pagrindinis uždavinys yra rasti agreguoto proceso $\{\bar{X}_N(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$ ribinį skirstinį, kai individų skaičius N auga į begalybę, bei ištirti kokiomis savybėmis pasižymi *ribinis agreguotas procesas* $\mathfrak{X}(t) := \lim_{N\to\infty} \bar{X}_N(t)$, $t \in \mathbb{Z}$. Ribinis agreguotas procesas $\{\mathfrak{X}(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$ gali turėti visiškai kitą struktūrą negu kad turi neagreguoti individualūs procesai. Pagrindinės savybės, kurios gali atsirasti agreguojant individualius procesus, yra ergodiškumas ir ilgoji atmintis. Ergodiškumas yra stochastinio proceso savybė, kuri leidžia įvertinti jo charakteristikas turint tik vieną pakankamai ilgą realizaciją, ir mums nereikia stebėti atskirų nepriklausomų šio proceso realizacijų. Tuo tarpu ilgoji atmintis rodo tam tikrą priklausomybę procese. Mokslinėje literatūroje yra aprašoma daug ilgos atminties apibrėžimų. Jų įvairovė apžvelgiama disertacijos 2.3 skyrelyje.

Kitas svarbus uždavinys yra taip vadinama deagregavimo problema: įvertinti individualių procesų $\{X_i(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$, $i = 1, \ldots, N$, tam tikras savybes, turint tik agreguotus duomenis $\mathfrak{X}(1)$, $\mathfrak{X}(2)$, ..., $\mathfrak{X}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Tarkime, turime realizaciją ribinio agreguoto proceso $\{\mathfrak{X}(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$, kuris yra gautas agreguojant nepriklausomus AR(1) procesus:

$$X_i(t) = a_i X_i(t-1) + \varepsilon_i(t), \qquad t \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{2}$$

čia $\{\varepsilon_i(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$ yra baltasis triukšmas; a_i, $i = 1, \ldots, N$, yra nepriklausomi atsitiktiniai koeficientai, turintys tokį patį skirstinį kaip ir juos generuojantis atsitiktinis dydis a. Šiuo atveju deagregavimo uždavinys būtų rasti "gerą"atsitiktinio dydžio a tankio funkcijos įvertį.

Tiesinių modelių (de)agregavimo uždavinys buvo nagrinėtas darbuose [3], [6], [7], [9], [11], [14], [18], [19], ir kt. Reikia pastebėti, kad minėti straipsniai nagrinėja agregavimo uždavinį, kai mikro lygio duomenys turi baigtinę dispersiją. Taip pat yra gerai žinoma nepriklausomų atsitiktinių procesų agregavimo schema, kuri rezultate duoda Gauso atvejį, t.y. agreguoto proceso riba yra Gauso procesas. Disertacinio darbo pagrindinis tikslas buvo išplėsti šiuos žinomus rezultatus bei išnagrinėti atsitiktinių procesų ir laukų su begaline dispersija agregavimą, taip pat apibrėžti nepriklausomų atsitiktinių procesų agregavimo schemą, kuri baigtinės dispersijos atveju duoda nebūtinai Gauso procesą.

2. Aktualumas

Agreguoti duomenys yra dažniausiai randami, saugomi ir naudojami daugelyje sričių tokių kaip ekonomika, taikomoji statistika, sociologija, georgafija ir kt. Tuo tarpu, neagreguotus (panelinius) duomenis yra labai sunku gauti, jeigu jie apskritai yra prieinami. Tai motyvuoja tirti agregavimo ir deagregavimo problemą.

Viena iš svarbiausių priežasčių, kodėl vienalaikis agregavimas tapo tyrimų objektu, yra galimybė agreguojant duomenis gauti ilgos atminties procesus. Agregavimas paaiškina ilgos atminties atiradimą laiko eilutėse, taip pat jis yra vienas iš būdų simuliuoti ilgos atminties procesus. Agreguodami trumpos atminties neergodiškus procesus galime gauti ilgos atminties ergodišką procesą, kuris gali būti naudojamas mikro ir makro kintamųjų prognozavimui.

3. Disertacijos struktūra

Disertacija parašyta anglų kalba. Disertaciją sudaro aštuoni skyriai ir literatūros sąrašas. Pirmajame skyriuje yra įvadas, apžvelgiami tikslai ir uždaviniai. Antrajame skyriuje aprašomi kitų autorių gauti rezultatai, apžvelgiami literatūros šaltiniai. Trečiajame skyrelyje aprašoma AR(1) procesų, turinčių begalinę dispersiją ir bendrus triukšmus, agregavimo schema. Ketvirtajame skyriuje nagrinėjamas AR(1) procesų su begaline dispersija agregavimas, kai triukšmai yra individualūs. Penktasis skyrius yra skirtas trikampio masyvo agregavimui. Šeštajame skyriuje nagrinėjamas laukų su begaline dispersija agregavimas ir ribinio agreguoto lauko atminties struktūra. Septintajame skyriuje aprašoma bankroto tikimybės asimptotika, kai žalos modeliuojamos α-stabliu agreguotu procesu. Ir galiausiai aštuntajame skyriuje pateikiamos išvados. Bendra darbo apimtis 191 puslapis.

4. Tikslas, uždaviniai ir pagrindiniai rezultatai

Vienas iš pagrindinių disertacijos tikslų buvo ištirti atsitiktinių procesų ir laukų agregavimą begalinės dispersijos atveju. Kitas svarbus uždavinys buvo aprašyti nepriklausomų baigtinės dispersijos procesų agregavimo schemą, kurią naudojant gaunamas ribinis agreguotas procesas yra nebūtinai Gauso procesas. Apžvelkime kiek detaliau disertacijoje sprendžiamus uždavinius ir pagrindinius rezultatus:

- *AR(1) procesų su begaline dispersija agregavimas (3 ir 4 disertacijos skyriai).* Pagrindinis šio tyrimo tikslas buvo ištirti atsitiktinių procesų agregavimą begalinės dispersijos atveju ir taip išplėsti P. Zaffaronio [19] rezultatus, gautus baigtinės dispersijos atvejui. Sekdami šio straipsnio idėja, mes nagrinėjame AR(1) procesų, kurių koeficientai yra atsitiktiniai ir triukšmai priklauso $\alpha-$stabilaus dėsnio traukos sričiai, agregavimą. Gauname sąlygas, kurioms esant, ribinis agreguotas procesas egzistuoja ir kada jis turi ilgos atminties savybę tam tikra prasme. Kadangi nagrinėjame procesų agregavimą begalinės dispersijos atveju, antros eilės savybės, kaip spektrinis tankis ir kovariacinė funkcija, yra neapibrėžtos. Todėl naudojame ilgos atminties apibrėžimus, kurie nereikalauja baigtinės dispersijos (žr. disertacijos skyrelį 2.3). Disertacijoje daugiausiai dėmesio skiriame ilgąjai atminčiai pagal pasiskirstymą, kurios apibrėžimą įvedė Cox [5]. Šis ilgos atminties apibrėžimas yra paremtas proceso dalinių sumų ribiniu elgesiu. Sakome, kad stacionari laiko eilutė $\{Y(t), t \in \mathbb{Z}\}$ turi *ilgą atmintį pagal pasiskirstymą*, jeigu jos dalinių sumų procesas konverguoja baigtiniamačių skirstinių prasme į procesą su *priklausomais* prieaugiais, ir *trumpą atmintį pagal pasiskirstymą*, jeigu dalinių sumų procesas konverguoja į procesą su *nepriklausomais* prieaugiais.

Apžvelkime pagrindinius šio tyrimo rezultatus. Tarkime, turime AR(1) procesą,

$$X(t) = aX(t-1) + \varepsilon(t), \qquad t \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

čia a, $a \in [0, 1)$, yra atsitiktinis koeficientas, kurio tankio funkcija[1] yra reguliariai kintanti vieneto aplinkoje,

$$\phi(a) \sim C(1-a)^{\beta}, \quad \text{kai } a \uparrow 1, \text{ su } 0 < C < \infty,\ \beta \in (-1, \infty). \tag{4}$$

Tarkime, kad triukšmai $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys tokį patį skirstinį kaip ir juos generuojantis atsitiktinis dysis ε. Sakykime, ε priklauso $\alpha-$stabilaus dėsnio traukos sričiai (žymėsime $\varepsilon \in D(\alpha)$) bei tenkina sąlygas $\mathrm{E}|\varepsilon|^p < \infty$, $0 < p < \alpha$, kai $0 < \alpha < 2$, $\mathrm{E}|\varepsilon|^2 < \infty$, kai $\alpha = 2$, ir $\mathrm{E}\varepsilon = 0$, jei $1 < \alpha \leq 2$. Esant šioms prielaidoms,

[1] Tokia tankio funkcijos forma mūsų uždaviniui yra įdomiausia, nes ribinio agreguoto proceso ilgos atminties savybė labai priklauso nuo atsitiktinio koeficiento a koncentracijos prie nestacionarumo rėžimo. Jeigu $|a| \leq C < 1$ beveik tikrai su kažkokia konstanta C, tada ribinis agreguotas procesas ilgos atminties neturės. O mūsų tikslas gauti agreguotą procesą su ilga atmintimi.

disertacijoje nagrinėjamas AR(1) procesų agregavimas dviem atvejais (žr. 1 lentelę).

AR(1) procesų agregavimas, $\varepsilon(t) \in D(\alpha)$, $0 < \alpha \le 2$	
Bendri triukšmai	Individualūs triukšmai
Individai: $X_i(t) = a_i X_i(t-1) + \varepsilon(t)$, $i = 1, \ldots, N$.	$X_i(t) = a_i X_i(t-1) + \varepsilon_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$.
Agreguotas procesas: $\bar{X}_N(t) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i(t), \quad t \in \mathbb{Z}.$	$\bar{X}_N(t) := \frac{1}{N^{1/\alpha}}\sum_{i=1}^{N} X_i(t), \quad t \in \mathbb{Z}.$
Agreguoto proceso riba[2,3]: kai $1/\alpha - 1 < \beta$, $\mathfrak{X}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{E}[a^j]\varepsilon(t-j), \quad t \in \mathbb{Z},$	Agreguoto proceso riba[4,5]: kai $\beta > 0$, $\mathfrak{X}(t) = \sum_{s \le t} \int_0^1 a^{t-s} M_s(da), \quad t \in \mathbb{Z},$ čia $M_s(\cdot)$, $s \in \mathbb{Z}$, yra $\alpha-$stablaus atsitiktinio mato nepriklausomos kopijos.
Agreguoto proceso $\mathfrak{X}(t)$ atmintis *pagal pasiskirstymą*: $\beta > 0$, trumpa atmintis, $1/\alpha - 1 < \beta < 0$, ilga atmintis.	Agreguoto proceso $\mathfrak{X}(t)$ atmintis *pagal pasiskirstymą*: $\beta > \max(\alpha - 1{,}0)$, trumpa atmintis, $0 < \beta < \max(\alpha - 1{,}0)$, ilga atmintis.
Baigtinės dispersijos atveju ($\alpha = 2$): $\mathrm{Cov}(\mathfrak{X}(t),\mathfrak{X}(t+h)) \sim Ch^{-2\beta-1}.$ Ilga atmintis: kai $-1/2 < \beta < 0$.	$\mathrm{Cov}(\mathfrak{X}(t),\mathfrak{X}(t+h)) \sim Ch^{-\beta}.$ Ilga atmintis: kai $0 < \beta < 1$.

1 lentelė. AR(1) procesų, turinčių triukšmus priklausančius $\alpha-$stabilaus dėsnio traukos sričiai, agregavimas

[2] $\mathrm{E}\big[|\bar{X}_N(t) - \mathfrak{X}(t)|^p \big| \mathcal{A}\big] \to 0$ beveik tikrai, kai $N \to \infty$, $\forall\, t \in \mathbb{Z}$, $1 \le p < \alpha$. Čia $\mathcal{A} := \sigma\{a_1, a_2, \ldots\}$ yra $\sigma-$algebra generuota atsitiktinių dydžių $a_1, a_2, \ldots$; $\mathrm{E}\big[|\bar{X}_N(t) - \mathfrak{X}(t)|^p\big] \to 0$, kai $N \to \infty$, $0 < p < \alpha \le 1$.

[3] Kai $-1 < \beta < 1/\alpha - 1$, slenkantis vidurkis $\mathfrak{X}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{E}[a^j]\varepsilon(t-j)$ yra neapibrėžtas.

[4] Baigtiniamačių skirstinių prasme

[5] Kai $\beta \in (-1{,}0)$, tada ribinis procesas išsigimsta $N^{-1/\alpha(1+\beta)} \sum_{i=1}^{N} X_i(t) \to_{\mathrm{fdd}} \tilde{Z}$. Ribinis procesas $\tilde{Z}$ yra $\alpha(1+\beta)-$stabilus atsitiktinis dydis, nepriklausnatis nuo laiko t. Taškas $\beta = 0$ yra kritinis taškas skiriantis du visiškai skirtingus ribinio agreguoto proceso atvejus.

Kaip matome iš lentelės, bendrų triukšmų atveju ribinis agreguotas procesas yra slenkantis vidurkis, turintis ilgą atmintį pagal pasiskirstymą, kai $1/\alpha - 1 < \beta < 0$. Taip yra todėl, kad atitinkamai normuotos šio slenkančio vidurkio dalinės sumos konverguoja į trupmeninį Lévy judesį su savipanašumo parametru $H = -\beta + 1/\alpha$, α-stabiliais baigtiniamačiais skirstiniais ir stacionariais *priklausomais* prieaugiais (žr. 3 disertacijos skyrius, 3.4.3. teiginys). Tuo tarpu individualių triukšmų atveju, ribinio agreguoto proceso $\{\mathfrak{X}(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$ dalinės sumos baigtiniamačių skirstinių prasme konverguoja į $\alpha-$stabilų procesą su savipanašumo indeksu $H = 1 - \beta/\alpha$ ir *priklausomais* prieaugiais, kai $1 < \alpha < 2$ ir $0 < \beta < \alpha - 1$ (žr. 4 skyrių, 4.3.2 teoremą). Taigi, agreguojant AR(1) procesus su atsitiktiniu koeficientu ir begaline dispersija, galime gauti ilgos atminties procesus. Ilgos atminties savybė priklauso nuo atsitiktinio koeficiento ir triukšmo pasiskirstymo funkcijų. Detalus šio uždavinio rezultatų aprašymas yra pateiktas disertacijos 3 ir 4 skyruose, bei straipsniuose [16], [17].

- *AR(1) procesų trikampio masyvo agregavimas (5 disertacijos skyrius)*. Šio tyrimo tikslas yra išlpėsti aukščiau gautus rezultatus ir apibrėžti *nepriklausomų* AR(1) procesų agregavimo schemą, kuri rezultate duotų ribinį agreguotą procesą $\mathfrak{X}(t) := \lim_{N\to\infty} \bar{X}_N(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, kuris turi baigtinę dispersiją ir yra nebūtinai Gauso procesas arba turi begalinę dispersija ir yra nebūtinai $\alpha-$stabilus procesas. Tuo tikslu nagrinėjame agregavimą procesų

$$X_i^{(N)}(t) = a_i X_i^{(N)}(t-1) + \varepsilon_i^{(N)}(t), \qquad t \in \mathbb{Z}, \quad i = 1,2,\ldots,N,$$

kurie yra nepriklausomos kopijos AR(1) proceso $X^{(N)}(t) = aX^{(N)}(t-1) + \varepsilon^{(N)}(t)$, $t \in \mathbb{Z}$. Čia a yra atsitiktinis koeficientas nepriklausomas nuo triukšmų $\{\varepsilon^{(N)}(t), t \in \mathbb{Z}\}$ ir tenkinantis savybę $0 \le a < 1$ beveik tikrai; triukšmai $\{\varepsilon^{(N)}(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$, $N = 1,2,\ldots$ sudaro trikampį masyvą iš nepriklausomų atsitiktinių dydžių, priklausančių be galo dalaus atsitiktinio dydžio W traukos sričiai:

$$\sum_{t=1}^{N} \varepsilon^{(N)}(t) \quad \to_{\mathrm{d}} \quad W.$$

Be galo dalaus a.d. W characteristinės funkcijos logaritmas yra lygus

$$V(\theta) := \log \mathrm{E}e^{\mathrm{i}\theta W} \;=\; \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta y} - 1 - \mathrm{i}\theta y \mathbf{1}(|y| \le 1))\pi(\,\mathrm{d}y) - \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2 + \mathrm{i}\theta\mu, \tag{5}$$

čia $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \ge 0$ ir π yra Lévy matas.

Tariant, kad $\mathrm{E}\varepsilon^{(N)} = 0$, $N\mathrm{E}(\varepsilon^{(N)})^2 \le C$, (baigtinės dispersijos atveju) arba, kad egzistuoja $0 < \alpha < 2$ toks kad $N\mathrm{P}(|\varepsilon^{(N)}| > x) \le Cx^{-\alpha}$, $x > 0$, (begalinės dispersijos atveju), ir $\mathrm{E}[(1-a)^{-1}] < \infty$, disertacijoje įrodyta (5.2.7 teorema), kad egzistuoja ribinis agreguotas procesas, kuris yra išreikštas stochastinio integralo pavidalu:

$$\bar{X}_N(t) := \sum_{i=1}^{N} X_i^{(N)}(t) \ \to_{\mathrm{fdd}} \mathfrak{X}(t) \ := \ \sum_{s\le t} \int_{[0,1)} x^{t-s} M_s(\,\mathrm{d}x), \qquad t\in\mathbb{Z}, \tag{6}$$

čia $\{M_s, s\in\mathbb{Z}\}$ yra nepriklausomos kopijos be galo dalaus atsitiktinio mato M virš [0,1) su kontroliniu matu $\Phi(\,\mathrm{d}x) := \mathrm{P}(a\in\,\mathrm{d}x)$. Šio atsitiktinio mato Lévy charakteristikos (μ,σ,π) yra tokios pačios kaip ir atsitiktinio dydžio W iš (5).

Ribinio agreguoto proceso $\{\mathfrak{X}(t),\, t\in\mathbb{Z}\}$, apibrėžto (6), ilgos atminties savybes tiriame esant prielaidai, kad atsitiktinio dydžio a tankis ϕ tenkina (4) su $\beta>0$ ir $\mathrm{Var}(W)<\infty$, $\mathrm{E}W=0$. Tokiu atveju, atsitiktinio dydžio W characteristinės funkcijos logaritmas $V(\theta)$ yra lygus

$$V(\theta) \ = \ \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta y} - 1 - \,\mathrm{i}\theta y)\pi(\,\mathrm{d}y) - \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2. \tag{7}$$

Agreguotas procesas $\{\mathfrak{X}(t),\, t\in\mathbb{Z}\}$ turi baigtinę dispersiją ir kovariacinę funkciją

$$r(t) \ := \ \mathrm{Cov}(\mathfrak{X}(t),\mathfrak{X}(0)) \ = \ \mathrm{Var}(W)\,\mathrm{E}\Big[\frac{a^t}{1-a^2}\Big]. \tag{8}$$

Iš (4) ir (8) plaukia, kad $r(t)\sim Ct^{-\beta}$, $t\to\infty$. Ribinis agreguotas procesas turi absoliučiai nesumuojamas kovariacijas ir *kovariacinę ilgą atmintį*, kai $0<\beta<1$. Tuo tarpu *ilgoji atmintis pagal pasiskirstymą* priklauso nuo proceso dalinių sumų ribinio elgesio. Penktajame disertacijos skyriuje įrodėme, kad agreguoto proceso $\{\mathfrak{X}(t),\, t\in\mathbb{Z}\}$ dalinės sumos gali turėti keturias skirtingas ribas priklausančias nuo paramatrų β, σ ir Lévy mato π elgesio nulio aplinkoje. Sakykime, kad egzistuoja $\alpha_0>0$ ir $c^{\pm}\ge 0, c^+ + c^- > 0$, kad

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha_0}\pi(\{u>x\}) = c^+, \qquad \lim_{x\to 0} x^{\alpha_0}\pi(\{u\le -x\}) = c^-. \tag{9}$$

Tada, dalinės sumos $S_n(\tau) := \sum_{t=1}^{[n\tau]}\mathfrak{X}(t)$ turi keturias skirtingas ribas (žr. 5 disertacijos skyrių, 5.3.1. teoremą):

(i). jei $0<\beta<1$, $\sigma>0$, $S_n(\tau)$ riba yra trupmeninis Brauno judesys su savipanašumo parametru $H=1-\beta/2$,

(ii). jei $0<\beta<1$, $\sigma=0$, $1+\beta<\alpha_0<2$, $S_n(\tau)$ riba yra α_0-stablus procesas su priklausomais prieaugiais ir savipanašumo parametru $H=1-\beta/\alpha_0$,

(iii). jei $0<\beta<1$, $\sigma=0$, $0<\alpha_0<1+\beta$, $S_n(\tau)$ riba yra $(1+\beta)-$stablus Lévy procesas su nepriklausomais prieaugiais,

(iv). jei $\beta>1$, $S_n(\tau)$ riba yra Brauno judesys.

Iš šių rezultatų galima padaryti tokias išvadas:

1 išvada. *Procesas* $\{\mathfrak{X}(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$, *apibrėžtas* (6),

- *turi ilgą atmintį pagal pasiskirstymą (i) ir (ii) atvejais, ir trumpą atmintį pagal pasiskirstymą atvejais (iii) ir (iv).*

- *turi kovariacinę ilgą atmintį atvejais (i), (ii) ir (iii), ir kovariacinę trumpą atmintį atveju (iv).*

Detalesnį šio uždavinio tyrimo aprašymą galima rasti penktajame disertacijos skyriuje, ir priimtame spausdinti straipsnyje [15]. Tačiau turime pažymėti, kad AR(1) procesų agregavimo tyrimas dar nėra pilnai baigtas. Dar yra daug įdomių klausimų šia tema. Keli iš jų: kas yra agreguoto proceso, apibrėžto (6), dalinių sumų riba begalinės dispersijos atveju? Kas yra ribinis agreguotas procesas ir kokias savybes jis tenkina, jeigu į individų elgesį aprašantį modelį įtraukiame bendrus triukšmus, kurie priklauso be galo dalaus dėsnio traukos sričiai? Kas atsitinka, jeigu AR(1) modelis priklauso nuo atsitiktinio koeficiento, kuris kinta laike?

• *Atsitiktinių laukų agregavimas (6 disertacijos skyrius).* Šio tyrimo tikslas buvo išplėsti agregavimo schemą nuo vienmačių procesų iki atsitiktinių laukų. Laukų (de)agregavimo uždavinys baigtinės dispersijos atveju nagrinėjamas darbuose [1], [9], [10], [12]. Tuo tarpu mūsų uždavinys yra ištirti laukų agregavimą begalinės dispersijos atveju. Disertacijoje nagrinėjama artimiausio kaimyno autoregresinių laukų agregavimo schema, apibrėžiamas agreguotas laukas, randama jo riba, kai individų skaičius auga į begalybę. Turint ribinį lauką, tolesnis tikslas yra ištirti jo ilgos atminties savybes. Šios savybės stirpriai priklauso nuo individus aprašančio modelio. Todėl disertacijoje ilgos atminties savybė nagrinėjama dviem konkrečiais atvejais (kai individai aprašomi trijų ir keturių kaimynų laukais). Kiekvienu atveju randamos ribinio agreguoto proceso dalinių sumų ribos. Įvedama nauja idėja kaip galima būtų apibūdinti priklausomybę lauke, įvedama anizotropinės/izotropinės ilgos atminties pagal pasiskirstymą sąvoka.

Apibrėžkime artimiausio kaimyno atsitiktinį lauką

$$X(t,s) \;=\; \sum_{|u|+|v|=1} a(u,v)X(t+u,s+v) + \varepsilon(t,s), \qquad (t,s) \in \mathbb{Z}^2, \tag{10}$$

čia $\{\varepsilon(t,s),(t,s) \in \mathbb{Z}^2\}$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, turintys tokį patį skirstinį kaip ir juos generuojantis atsitiktinis dydis ε, kuris priklauso $\alpha-$stabilaus dėsnio traukos sričiai (žymėsime $\varepsilon \in D(\alpha)$, $0 < \alpha \le 2$); *atsitiktiniai* koeficientai $a(t,s)$, $a(t,s) \ge 0$ b.t., yra nepriklausomi nuo triukšmų $\{\varepsilon(t,s),(t,s)\in\mathbb{Z}^2\}$ ir tenkina tokią salygą

$$A \ := \sum_{|t|+|s|=1} a(t,s) \ < \ 1, \qquad \text{b.t.}, \tag{11}$$

kuri garantuoja lygties (10) stacionaraus sprendinio egzistavimą. Lygties (10) stacionarus sprendinys yra išreikštas konverguojančia eilute

$$X(t,s) \ = \sum_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2} g(t-u,s-v,a)\varepsilon(u,v), \qquad (t,s)\in\mathbb{Z}^2, \tag{12}$$

čia $g(t,s,a)$, $(t,s)\in\mathbb{Z}^2$ yra atsitiktinė Gryno funkcija; $a=(a(t,s),|t|+|s|=1)$ yra atsitiktinių koeficientų vektorius. Gryno funkcija gali būti užrašyta tokiu pavidalu

$$g(t,s,a) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} A^k p_k(t,s), \qquad (t,s)\in\mathbb{Z}^2, \qquad a\in\boldsymbol{A}, \tag{13}$$

čia A yra atsitiktinių koeficientų suma, apibrėžta (11); $p_k(t,s)=\mathrm{P}(W_k=(t,s)|W_0=(0,0))$ yra tikimybė, kad atsitiktinis klaidžiojimas $\{W_k,k=0,1,\dots\}$ per k žingsnių iš nulinio taško pateks į tašką (t,s); $\boldsymbol{A}:=\{a(t,s)\in[0,1),\ \sum_{|t|+|s|=1}a(t,s)<1\}\subset\mathbb{R}^4$.

Tegu $\{X_i(t,s),(t,s)\in\mathbb{Z}^2\}$, $i=1,2,\dots$, yra nepriklausomos lauko (12) kopijos. Tegu Φ žymi atsitiktinio vektoriaus $a=(a(t,s),|t|+|s|=1)\in\boldsymbol{A}$ pasiskirstymą, kurį vadinsime *maišančiuoju skirstiniu*. Apibrėžkime agreguotą lauką kiekviename gardelės taške kaip normuotą individualių nepriklausomų laukų sumą

$$\bar{X}_N(t,s):=N^{-1/\alpha}\sum_{i=1}^{N}X_i(t,s), \qquad (t,s)\in\mathbb{Z}^2. \tag{14}$$

Tuomet prie tam tikrų sąlygų maišančiąjam skirstiniui Φ, agreguotas laukas $\bar{X}_N(t,s)$ baigtiniamačių skirstinių prasme konverguoja į lauką, išreikštą stochastiniu intergalu (6 disertacijos skyrius, 6.3.4 teiginys):

$$\mathfrak{X}(t,s) \ = \sum_{(u,v)\in\mathbb{Z}^2}\int_{\boldsymbol{A}} g(t-u,s-v,a)M_{u,v}(\,\mathrm{d}a), \qquad (t,s)\in\mathbb{Z}^2, \tag{15}$$

čia $\{M_{u,v}(\,\mathrm{d}a),\ (u,v)\in\mathbb{Z}^2\}$ yra nepriklausomos $\alpha-$stabilaus atsitiktinio mato kopijos.

Toliau disetacijoje nagrinėjamos ribinio agreguoto proceso savybės dviem specialiais atvejais (kai individai aprašomi trijų ir keturių artimiausių kaimynų autoregresiniais laukais):

$$X(t,s)=\frac{A}{3}\Big(X(t-1,s)+X(t,s+1)+X(t,s-1)\Big)+\varepsilon(t,s), \tag{16}$$

$$X(t,s)=\frac{A}{4}\Big(X(t-1,s)+X(t+1,s)+X(t,s+1)+X(t,s-1)\Big)+\varepsilon(t,s), \tag{17}$$

esant prielaidai, kad triukšmai priklauso $\alpha-$stabilaus dėsnio traukos sričiai ir atsitiktinis koeficientas $A \in [0,1)$ turi tikimybinį tankį ϕ, reguliariai kintantį taško $a = 1$ aplinkoje:

$$\phi(a) \sim C(1-a)^{\beta}, \qquad a \uparrow 1, \quad \exists C > 0,\ 0 < \beta < \alpha - 1,\ 1 < \alpha \le 2. \tag{18}$$

(Atvejis $0 < \alpha < 1$ nedavė ilgos atminties procesų atveju). Modelius (16) ir (17) atitinkamai žymėsime kaip 3N ir 4N modelius. Abiem atvejais lygčių (16), (17) sprendiniai yra stacionarūs ir gali būti užrašyti pavidalu (12), su Gryno funkcijom g_3 ir g_4 atitinkamai. Bendra Gryno funkcijos išraiška užrašyta formule (13). Gryno funkcijų asimptotinis elgesys lemia ribinio agreguoto lauko savybes. Disertacijoje, skaičiuojant ribinio agreguoto lauko dalinių sumų ribas, naudotos tokios Gryno funkcijų asimptotikos[6]:

- $t > 0,\ s \in \mathbb{R},\ z > 0,$

$$\sqrt{\lambda} g_3\Big([\lambda t], [\sqrt{\lambda} s], 1 - \frac{z}{\lambda}\Big) \to h_3(t,s,z) := \frac{3}{2\sqrt{\pi t}} \mathrm{e}^{-3zt - \frac{s^2}{4t}}, \tag{19}$$

- $(t,s) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ z > 0,$

$$g_4\Big([\lambda t], [\lambda s], 1 - \frac{z}{\lambda^2}\Big) \to h_4(t,s,z) := \frac{2}{\pi} K_0\Big(2\sqrt{z(t^2+s^2)}\Big), \tag{20}$$

čia K_0 yra antro tipo modifikuota Beselio funkcija.

Tegu $\mathfrak{X}_3(t,s)$ ir $\mathfrak{X}_4(t,s)$ žymi ribinius agreguotus laukus 3N ir 4N kaimynų atvejais (ribinio lauko bendra išraikška yra (15)). Naudojantis aukščiau užrašytomis Gryno funkcijų asimptotikomis, disertacijoje gautos tokios dalinių sumų ribos (6.5.3, 6.5.4, 6.6.2 teoremos):

- $$n^{-H} \sum_{t=1}^{[nx]} \sum_{s=1}^{[\sqrt{n} y]} \mathfrak{X}_3(t,s) \to_{\mathrm{fdd}} V_3(x,y), \qquad x,y > 0, \qquad H := \frac{\frac{1}{2} + \alpha - \beta}{\alpha}, \tag{21}$$
- $$n^{-H_*} \sum_{t=1}^{[nx]} \sum_{s=1}^{[ny]} \mathfrak{X}_3(t,s) \to_{\mathrm{fdd}} V_{3\star}(x,y), \qquad x,y > 0, \qquad H_* := \frac{1 + \alpha - \beta}{\alpha}, \tag{22}$$
- $$n^{-H} \sum_{t=1}^{[nx]} \sum_{s=1}^{[ny]} \mathfrak{X}_4(t,s) \to_{\mathrm{fdd}} V_4(x,y), \qquad x,y > 0, \qquad H := \frac{2(\alpha - \beta)}{\alpha}, \tag{23}$$

čia

$$V_3(x,y) := \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+} \mathcal{M}(\mathrm{d}u,\, \mathrm{d}v,\, \mathrm{d}z) \int_0^x \int_0^y h_3(t-u, s-v, z)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s; \tag{24}$$

[6]Ieškant Gryno funkcijų asimptotikų, "parametrizacija"nuo λ, $\lambda \to \infty$, buvo parinkinėjama taip, kad ribinė funkcija egzistuotų ir būtų ne triviali.

$$
\begin{aligned}
V_{3\star}(x,y) &:= \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+} \mathcal{M}(\,\mathrm{d}u,\,\mathrm{d}v,\,\mathrm{d}z)\mathbf{1}(0<v\le y)\int_0^x 12\mathrm{e}^{-3(t-u)z}\mathbf{1}(t-u>0)\,\mathrm{d}t, && (25)\\
V_4(x,y) &:= \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+} \mathcal{M}(\,\mathrm{d}u,\,\mathrm{d}v,\,\mathrm{d}z)\int_0^x\int_0^y h_4(t-u,s-v,z)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s, && (26)
\end{aligned}
$$

$\mathcal{M}$ yra $\alpha-$stabilus atsitiktinis matas virš $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+$.

Vienmačiu atveju tikrinome ar procesas turi ilgą atmintį, naudodami Cox [5] įvestą ilgos atminties pagal pasiskirstymą apibrėžimą. Sakėme, kad procesas turi ilgą atmintį, jeigu jo dalinės sumos konverguoja baigtiniamačių skirstinių prasme į procesą su priklausomais prieaugiais. Todėl kilo idėja laukų atvejui įvesti panašų apibrėžimą, kuris būtų paremtas prieaugių priklausomumu.

Lauko $\{V(x,y)\}$ prieaugiu ant stačiakampio $K:=\{(s,t)\in\mathbb{R}^2_+ : u<s\le x,\, v<t\le y\}$, vadiname skirtumą

$$
V(K) := V(x,y) - V(u,y) - V(x,v) + V(u,v). \tag{27}
$$

Sakome, kad stacionarus atsitiktinis laukas $\{Y(t,s),(t,s)\in\mathbb{Z}^2\}$ turi anizotropinę (izotropinę) ilgąją atmintį pagal pasiskirstymą su parametrais $H_1,H_2>0, H_1\neq H_2$ $(H_1=H_2)$, jeigu

$$
n^{-H_1}\sum_{t=1}^{[nx]}\sum_{s=1}^{[n^{H_1/H_2}y]} Y(t,s) \;\;\to_{\mathrm{fdd}}\;\; V(x,y), \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2_+, \tag{28}
$$

ir $\{V(x,y)\}$ yra atsitiktinis laukas su *priklausomais prieaugiais* bet kuria kryptimi. Sakome, kad laukas $\{V(x,y)\}$ turi nepriklausomus prieaugius ℓ kryptimi (ℓ yra tiesė einanti pre koordinačių pradžią), jei bet kuriai kitai statmenai tiesei ℓ', $\ell'\perp\ell$, ir bet kuriems dviems stačiakampiams $K,K'\subset\mathbb{R}^2_+$ atskirtiems tiese ℓ', prieaugiai $V(K)$ ir $V(K')$ ant stačiakampių K ir K' yra nepriklausomi. Kitu atveju, sakome, kad $\{V(x,y)\}$ turi priklausomus prieaugius kryptimi ℓ.

Reikia pastabėti, kad remiantis šiais apibrėžimais, laukai $V_3(x,y)$ (24) ir $V_4(x,y)$ (26) turi priklausomus prieaugius visomis kryptimis. Tuo tarpu 3N atveju paėmę dalines sumas augančias vienodais greičiais abiem kryptimis, gauname lauką $V_{3\star}(x,y)$ (25), kuris turi nepriklausomus prieaugius vertikalia kryprimi. Taigi galima padaryti tokias išvadas:

2 išvada. *(6 disertacijos skyrius, 6.5.6 teiginys) 3N atveju, ribinis agreguotas laukas* $\{\mathfrak{X}_3(t,s)\}$ *turi anizotropinę ilgą atmintį su parametrais* $H_1=H=\frac{\frac{1}{2}+\alpha-\beta}{\alpha}, H_2=2H_1$ *ir neturi izotropinės ilgos atminties pagal pasiskirstymą.*

3 išvada. *(6 disertacijos skyrius, 6.6.3 teiginys) 4N atveju, ribinis agreguotas laukas* $\{\mathfrak{X}_4(t,s)\}$ *turi izotropinę ilgą atmintį pagal pasiskirstymą.*

Anizotropinės/izotropinės ilgos atminties pagal pasiskirstymą apibrėžimą pritaikėme konkretiems atvejams. Bet aišku jis reikalauja tolesnio tyrimo. Atviras klausimas ar visais atvejais tikrai nesusikirs anizotropinė ir izotropinė atmintis pagal šiuos naujus apibrėžimus.

- *Deagregavimo uždavinys (5.4 disertacijos skyrelis).* Deagregavimo uždavinio pagrindinė idėja yra: turint ribinio agreguoto proceso stebinius, įvertinti individualių procesų savybes, rasti bendrų atsitiktinių parametrų skirstinius. Tarkime turime realizaciją ribinio agreguoto proceso $\{\mathfrak{X}(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$, kuris yra gautas agreguojant nepriklausomus AR(1) procesus:

$$X_i(t) = a_i X_i(t-1) + \varepsilon_i(t), \qquad t \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{29}$$

čia a, a_i, $i = 1{,}2, \ldots, N$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, kurių tankio funkcija $\phi(x)$ yra nežinoma. Tikslas yra gauti "gerą"tankio $\phi(x)$ įvertį. Straipsnių [4], [11] autoriai pasiūlė suderintą tankio funkcijos įvertį per Gegenbauerio polinomus, darydami prielaidą, kad $\{\varepsilon_i(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$, $i = 1{,}2, \ldots, N$ yra seka nepriklausomų balto triukšmo kopijų ir kad ribinis agreguotas procesas $\{\mathfrak{X}(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$ yra Gauso. Mes įrodėme, kad toks tankio įvertis yra suderintas ir kai ribinis agreguotas procesas nėra Gauso. Parodėme, kad tankio įverčio, išreikšto per Gegenbauerio polinomus ar per Jacobi polinomus, suderinamumui užtenka turėti ribinio agreguoto proceso[7] baigtinį ketvirtą momentą. Tačiau kai ribinis agreguotas procesas $\{\mathfrak{X}(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$ nėra Gauso, maišančio tankio įverčio, išreikšto per Gegenbauerio ar Jacobi polinomus, asimptotinis normalumas dar lieka atviru klausimu. Tuo tarpu asimptotinis normalumas Gauso atveju įrodytas straipsnyje [4] (2.1 teorema).

- *Bankroto tikimybės asimptotika (7 disertacijos skyrius)* . Šio uždavinio tikslas buvo rasti *bankroto tikimybės*

$$\psi(u) := \mathrm{P}\Big(\sup_{n \geq 0}(Y(1) + \cdots + Y(n) - n\mu) > u\Big) \tag{30}$$

asimptotiką, kai $u \to \infty$. Čia laikome, kad μ yra žinoma konstanta ir 'žalos' $\{Y(t) \equiv \mathfrak{X}(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$ yra modeliuojamos maišančiuoju α-stabiliu slenkančiu vidurkiu,

$$\mathfrak{X}(t) \ = \ \sum_{s \leq t} \int_0^1 a^{t-s} M_s(da), \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{31}$$

čia $M_s(\cdot)$, $s \in \mathbb{Z}$, yra $\alpha-$stablaus atsitiktinio mato nepriklausomos kopijos. Šis procesas yra gaunamas agreguojant nepriklausomus AR(1) procesus su sunkiauodegiais triukšmais.

Tokios draudimo tikimybės asimptotiką nagrinėjo Mikosh ir Samorodnitsky [13]. Autoriai gavo bankroto tikimybės gęsimo greitį $\psi(u) \sim C\, u^{-(\alpha-1)}$, kai žalos yra aprašomos silpnai

[7] Tyrimui darėme prielaidą, kad ribinis agreguotas procesas $\{\mathfrak{X}(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$ yra gautas agreguojant nepriklausomus AR(1) procesus su triukšmais priklausančiais be galo dalaus dėsnio W traukos sričiai, t.y. ribinis agreguotas procesas $\{\mathfrak{X}(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$ yra apibrėžtas (6) formule.

priklausomais SαS stacionariais procesais, ir visiškai kitą asimptotiką $\psi(u) \sim C\, u^{-\alpha(1-H)}$, kai žalos yra aprašomos trupmeninio SαS judesio su savipanašumo indeksu $H \in (1/\alpha, 1)$ prieaugiais. Pastebėkime, kad $\alpha-$stabilaus trupmeninio judesio prieaugiai turi ilgą atmintį pagal pasiskirstymą. Dėl tokių atradimų, Mikosch ir Samorodnitsky ([13], p.1817) pasiūlė bankroto tikimybės asimptotiką kaip alternatyvų ilgos atminties apibrėžimą SαS procesams.

Mes apskaičiavome bankroto tikimybės asimptotiką žaloms, modeliuotoms ribiniu agreguotu procesu $\{\mathfrak{X}(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$, apibrėžtu formule (31). Įrodėme, kad tokiu atveju, kai $0 < \beta < \alpha - 1$, bankroto tikimybė gęsta greičiu $\psi(u) \sim Cu^{-\alpha(1-H)}$, $u \to \infty$, su $H = 1 - (\beta/\alpha) \in [1/\alpha, 1)$. Tai reikštų, kad turime ilgąją atmintį. Tuo tarpu, kai $\beta > \alpha - 1$, bankroto tikimybės asimptotika $\psi(u) \sim Cu^{-(\alpha-1)}$ nusako trumpą atmintį. Šis rezultatas sutampa su kitomis ketvirtame disertacijos skyriuje nagrinėtomis proceso $\{\mathfrak{X}(t),\, t \in \mathbb{Z}\}$ ilgos atminties charakteristikomis.

5. Išvados

Disertaciniame darbe išnagrinėtas AR(1) procesų su begaline dispersija agregavimas, trikampio masyvo agregavimas ir artimiausio kaimyno autoregresinių laukų su begaline dispersija agregavimas. Kiekvienu atveju:

- apibrėžiamas agreguotas procesas/laukas;
- randama agreguoto proceso/lauko riba, kuri vadinama ribiniu agreguotu procesu/lauku;
- turint ribinį agreguotą procesą/lauką, nagrinėjamos jo ilgos atminties savybės. Skaičiuojamos jo dalinių sumų asimptotikos, iš kurių padaromos išvados apie ilgą atmintį;
- procesų atveju, ilgai atminčiai nusakyti naudojamas ilgos atminties pagal pasiskirstymą apibrėžimas, kuris buvo įvestas Cox [5]. Tuo tarpu laukų atveju, siūloma nauja anizotropinės/izotropinės ilgos atminties pagal pasiskirstymą idėja, kuri kaip ir Cox [5] atveju yra paremta prieaugių priklausomumu.

Apibendrinant galima būtų pasakyti, kad agreguojant tiek AR(1) procesus, turinčius begalinę dispersiją, tiek laukus, galime gauti ilgą atmintį, kuri priklauso nuo idividus aprašančių modelių atsitiktinių parametrų bei triukšmų savybių.

6. Uždavinių naujumas

Disertacijos rezultatų naujumas yra:

- trikampio masyvo agregavimo schema;
- AR(1) procesų, turinčių begalinę dispersiją, agregavimo schema bendrų ir individualių triukšmų atvejais;
- artimiausio kaimyno laukų, turinčių begalinę dispersiją, agregavimo schema;
- laukų anizotropinės ir izotropinės ilgos atminties pagal pasiskirstymą idėja.

Šie uždaviniai yra nauji ir nebuvo anksčiau spręsti mokslinėje literatūroje.

7. Aprobacija

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti šiose mokslinėse konferencijose, kurios vyko Lietuvoje ir užsienyje:

- 50-oji Lietuvos matematikų draugijos konferencija, Vilnius, Lietuva, birželio 18 - 19, 2009.
- 10-oji tarptautinė Vilniaus konferencija "Tikimybių teorija ir matematinė statistika", Vilnius, Lietuva, birželio 28 - liepos 2, 2010.
- 1-oji LMA Jaunųjų mokslininkų konferencija "Fizinių ir technologijos mokslų tarpdalykiniai tyrimai", Vilnius, Lietuva, vasario 8, 2011.
- 2-oji LMA Jaunųjų mokslininkų konferencija "Fizinių ir technologijos mokslų tarpdalykiniai tyrimai", Vilnius, Lietuva, vasario 14, 2012.
- Doktorantų diena "Journée des doctorants", Nantas, Prancūzija, balandžio 26, 2012.
- 53-oji Lietuvos matematikų draugijos konferencija, Klaipėda, Lietuva, birželis 11 - 12, 2012.
- Konferencija "Non-stationarity in Statistics and Risk Management", Luminy, Marselis, Prancūzija, sausio 21 - 25, 2013.
- Pirmoji vokiečių-lenkų jungtinė konferencija "First German-Polish Joint Conference on Probability and Mathematical Statistics", Torunė, Lenkija, birželio 6-9, 2013.

8. Publikacijos

Disertacijos rezultatai yra publikuoti šiuose straipsniuose:

1. D. Puplinskaitė, D. Surgailis, *Aggregation of random-coefficient AR(1) process with infinite variance and common innovations.* Lithuanian Math. J., **49** (4), 446-463, 2009.

2. D. Puplinskaitė, D. Surgailis, *Aggregation of a random-coefficient AR(1) process with infinite variance and idiosyncratic innovations.* Adv. Appl. Probab., **42** (2), 509-527, 2010.

3. K. Perilioglu, D. Puplinskaitė, *Asymptotics of the ruin probability with claims modeled by α-stable aggregated AR(1) process.* Turkish J. Math., **37** (1), 129-138, 2013.

4. A. Philippe, D. Puplinskaitė, D. Surgailis, *Contemporaneous aggregation of triangular array of random-coefficient AR(1) processes.* 2013, priimtas spausdinimui žurnale J. Time Ser. Anal.

9. Summary

The aggregation of random processes and fields has been studied in this doctoral dissertation. First, we discuss the aggregation of autoregressive random-coefficient AR(1) processes with innovations belonging to the domain of attraction of an α-stable law. We investigate separately the aggregation of AR(1) processes with common innovations and idiosyncratic innovations. We obtain conditions under which the limit aggregated process exists and exhibits long memory in a certain sense. Since in our case the variance of the aggregated process is infinite and second order properties, as spectral density or covariance function, are not defined, we use alternative definitions of long memory which do not require finite variance, e.g. distributional long memory.

In the second step we generalize previous results and describe the aggregation of triangular array. We discuss an aggregation of independent random-coefficient AR(1) models with innovations belonging to the domain of attraction of an infinitely divisible law W. We obtain conditions under which the limit aggregated process exists and is represented as a mixed infinitely divisible moving average $\mathfrak{X}(t)$ (formula (6), page 10). Using Cox's definition of distributional long memory and assuming that the limit aggregated process admits finite variance, we investigate its long memory properties. We study partial sums of the limit aggregated process and show that these partial sums may exhibit four different limit

behaviors depending on the distribution of random coeffitient of AR(1) model and the Lévy triplet of infinitely divisible law W.

The next question of our research is to explain the aggregation scheme of random fields. We focus on the aggregation of independent random fields with infinite variance (innovations belong to the domain of attraction of an α-stable law). First, we explore the aggregation scheme of nearest-neighbor autoregressive random fields and specify what is the limit aggregated field. Further, we investigate the dependence structure of the limit aggregated field. The dependence structure of random field is more complicated than in a univariate process case. The dependence of random fields extends in all directions and can have different intensity in different directions. Since properties of the limit aggregated random field are highly dependent on the assumptions put on micro level (individual) fields, we investigate long memory properties of the limit aggregated field in two special cases: when individual models are described by (16) and (17), page 12. In order to describe the dependence structure of the aggregated random field we introduce the notion of anisotropic/isotropic distributional long memory, which is based on the dependence of increments of random field.

The next question of our interest is the disaggregation problem: having data from the limit aggregated process at hand to recover the distribution of individual processes. Suppose we have sample of the limit aggregated process, which is obtained via aggregation of independent random-coefficient AR(1) processes. Let $\phi(a)$ be an unknown density function of random coefficient of AR(1) model. The disaggregation problem in this case is to find a "good"estimator of the density function $\phi(a)$. The authors of papers [4], [11] proposed consistent estimator of this density function via Gegenbauer polynomials, under assumption that the limit aggregated process is Gaussian. Our aim was to show that this density estimator, proposed in [4], [11], is consistent not only in Gaussian case. We showed that for the consistency of the density estimator via Gegenbauer polynomials (or Jacobi polynomials) it is enough to have finite fourth moment of the limit aggregated process. This result is small extension of the disaggregation problem. It remains many interesting questions for the future. The main of them is how to solve disaggregation problem in infinite variance case.

In the last Chapter we found asymptotics of the ruin probability in a discrete time risk insurance model with stationary claims modeled by the aggregated heavy-tailed process. It is known, that the long memory properties of heavy-tailed claims can be discribed using asymptotics of the ruin probability (see [13]). The obtained results coincide with other characterizations of long memory of the aggregated process.

Literatūra

[1] T.T. Azomahou. Memory properties and aggregation of spatial autoregressive models. *J. Statist. Plan. Infer.*, 139:2581–2579, 2009.

[2] D. Celov. Time series aggregation, disaggregation and long memory. *Doctoral thesis*, 2008.

[3] D. Celov, R. Leipus, and A. Philippe. Time series aggregation, disaggregation and long memory. *Lithuanian Math. J.*, 47:379–393, 2007.

[4] D. Celov, R. Leipus, and A. Philippe. Asymptotic normality of the mixture density estimator in a disaggregation scheme. *J. Nonparametric Statist.*, 22:425–442, 2010.

[5] D.R. Cox. Long-range dependence: A review, in: H.A. David and H.T. David (Eds.). *Statistics: An Appraisal*, pages 55–74, 1984. Iowa State Univ. Press, Iowa.

[6] E. Gonçalves and C. Gouriéroux. Aggrégation de processus autoregressifs d'ordre 1. *Annales d'Economie et de Statistique*, 12:127–149, 1988.

[7] C.W.J. Granger. Long memory relationship and the aggregation of dynamic models. *J. Econometrics*, 14:227–238, 1980.

[8] C.W.J. Granger. *Aggregation of time series variables–A Survey.* Institute for Empirical Macroeconomics, Discussion Paper 1, Federal Reserve Bank of Minneapolis, 1988.

[9] F. Lavancier. Aggregation of isotropic random fields. *J. Statist. Plan. Infer.*, 141:3862–3866, 2011.

[10] F. Lavancier, R. Leipus, and D. Surgailis. Aggregation of anisotropic random-coefficient autoregressive random field. *Preprint.*

[11] R. Leipus, G. Oppenheim, A. Philippe, and M.-C. Viano. Orthogonal series density estimation in a disaggregation scheme. *J. Statist. Plan. Inf.*, 136:2547–2571, 2006.

[12] N. Leonenko and E. Taufer. Disaggregation of spatial autoregressive processes. *J. Spatial Statistics*, 3:1–20, 2013.

[13] T. Mikosch and G. Samorodnitsky. Ruin probability with claims modeled by a stationary ergodic stable process. *Ann. Probab.*, 28:1814–1851, 2000.

[14] G. Oppenheim and M.-C. Viano. Aggregation of random parameters ornstein-uhlenbeck or AR processes: some convergence results. *J. Time Ser. Anal.*, 25:335–350, 2004.

[15] A. Philippe, D. Puplinskaitė, and D. Surgailis. Contemporaneous aggregation of a triangular of random coefficient AR(1) processes. *Preprint.*

[16] D. Puplinskaitė and D. Surgailis. Aggregation of random coefficient AR(1) process with infinite variance and common innovations. *Lithuanian Math. J.*, 49:446–463, 2009.

[17] D. Puplinskaitė and D. Surgailis. Aggregation of random coefficient AR(1) process with infinite variance and idiosyncratic innovations. *Adv. Appl. Probab.*, 42:509–527, 2010.

[18] P. Robinson. Statistical inference for a random coefficient autoregressive model. *Scand. J. Statist.*, 5:163–168, 1978.

[19] P. Zaffaroni. Contemporaneous aggregation of linear dynamic models in large economies. *J. Econometrics*, 120:75–102, 2004.

Trumpos žinios apie autorių

Gimimo data ir vieta

1984 metų balandžio 8 diena, Vilniaus raj.

Išsilavinimas

- 1991–2003 Pabradės "Ryto"vid. mokykla,
- 2003–2007 Statistikos bakalauras, Vilniaus universitetas,
- 2007–2009 Matematikos magistras, Vilniaus universitetas,
- 2009–2013 Matematikos doktorantūros studijos, Vilniaus universitetas, Nanto universitetas.

Akademinio darbo patirtis

- 2010–2013 Asistentė, Vilniaus universitetas,
- 2011–2012 Jaunesnioji mokslo darbuotoja LMT projekte "Ilgos atminties ir sunkių uodegų modeliavimas finansuose ir draudoje"(Nr. MIP–036/2011).
- 2013–dabar Lektorė, Vilniaus universitetas,
- 2013–dabar Jaunesnioji mokslo darbuotoja LMT projekte "Netiesinė ilgoji atmintis, sunkios uodegos ir agregavimas"(Nr. MIP–063/2013).