ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Irmina Dobilienė
matematikos specialybės
II kurso studentė

KAI KURIŲ DIRICHLĖ EILUČIŲ NULIAI

Magistro darbas

Darbo vadovas
prof. habil. dr. A. Laurinčikas

ŠIAULIAI, 2007

Turinys

1. Įvadas

Tegul $s = \sigma + it$ yra kintamasis, o $\{a_m\}$ yra kompleksinių skaičių seka. Tuomet eilutė

$$\sum_{m\,=\,1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}, \quad \sigma > \sigma_0,$$

yra vadinama Dirichlė eilute. Dirichlė eilutės yra svarbios analizinėje skaičių teorijoje, nes jomis yra apibrėžiamos dzeta ir L-funkcijos. Pavyzdžiui, garsioji Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m\,=\,1}^{\infty} \frac{1}{m^s}.$$

Vienas iš svarbiausių ir sudėtingiausių Rymano dzeta funkcijos ir jos apibendrinimų problemų yra nulių išsidėstymas. Todėl nulių problema yra svarbi visoms funkcijoms, apibrėžimams, Dirichlė eilutėms. Magistro darbe yra gauti nulių skaičiaus įverčiai įvairiose srityse specialioms Dirichlė eilutėms. Tegul $\alpha = \frac{a}{q}$, $(a,\ q) = 1$, $1 < a < q$. Tegul pusplokštumėje $\sigma > 1$

$$Z_1(s,\ \alpha) = \sum_{\substack{m\,=\,1 \\ (m,\ q)=1}}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\alpha m}}{m^s}$$

ir

$$Z_2(s, \alpha) = \sum_{m\,=\,1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\alpha m}}{m^s}.$$

Aišku, kad

$$Z_1(s,\ \frac{1}{2}) = \sum_{\substack{m\,=\,1 \\ (m,\ q)=1}}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^s} = L(s,\ \chi^{(2)}),$$

o

$$Z_2(s,\ \frac{1}{2}) = \sum_{\substack{m\,=\,1 \\ (m,\ q)=1}}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^s} = (2^{1-s} - 1)\zeta(s).$$

Čia $L(s,\ \chi^{(2)})$ yra Dirichlė L-funkcija su charakteriu mod 2. Taigi, funkcijos $Z_1(s,\ \alpha)$ ir $Z_2(s,\ \alpha)$ yra klasikinių funkcijų apibendrinimas.

Magistro darbe yra gauti tokie rezultatai.

6.1 teorema. *Tegul egzistuoja toks skaičius $m \in \mathbb{N}$, $(m,\ q) = 1$, kad $(m-1)^2 \not\equiv 0(mod\ q)$. Tuomet bet kuriems σ_1 ir σ_2, $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, egzistuoja tokia konstanta $c = c(\alpha,\ \sigma_1,\ \sigma_2) > 0$, kad pakankamai dideliems T funkcija $Z_1(s,\ \alpha)$ turi daugiau negu cT nulių, gulinčių stačiakampyje*

$$\sigma_1 < \sigma < \sigma_2, \ \mid t \mid < T.$$

6.2 teorema. *Tegul q yra toks, jog egzistuoja bent du primityvūs charakteriai moduliu q. Tuomet funkcijai $Z_2(s,\ \alpha)$ yra teisingas 6.1 teoremos tvirtinimas.*

6.1 ir 6.2 teoremose yra informacija apie funkcijų $Z_1(s,\ \alpha)$ ir $Z_2(s,\ \alpha)$ nulių skaičių juostoje $\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$. Pasirodo, jog šios funkcijos turi nulių ir pusplokštumėje $\sigma > 1$.

7.1 teorema. *Tegul q yra bekvadratis skaičius. Tuomet egzistuoja tokia konstanta $c = c(\alpha) > 0$, kad pakankamai dideliems T funkcija $Z_1(s,\ \alpha)$ turi daugiau negu cT nulių, gulinčių begaliniame stačiakampyje*

$$\sigma > 1,\ \mid t \mid < T.$$

7.2 teorema. *Tegul q yra pirminis skaičius. Tuomet funkcijai $Z_2(s,\ \alpha)$ yra teisingas 7.1 teoremos tvirtinimas.*

2. Dirichlė eilutės

Tarkime, jog

$$\sum_{m\,=\,1}^{\infty} a_m$$

yra skaitinė eilutė. Sakome, jog ši eilutė konverguoja, jeigu jos dalinė suma

$$S_n = \sum_{m\,\leq\,n} a_m$$

turi baigtinę ribą, kai $n \to \infty$.

Panašiai yra apibrėžiamos ir funkcinės eilutės

$$\sum_{m\,=\,1}^{\infty} f_m(s), s \in D,$$

konvergavimas. Tarkime, jog ši eilutė konverguoja srityje D ir turi sumą $F(s)$. Jeigu eilutės dalinė suma

$$F_n(s) = \sum_{m\,\leq\,n} f_n(s),$$

kai $n \to \infty$, artėja prie sumos $f(s)$ tolygiai atžvilgiu s srityje D, tai sakome, jog eilutė konverguoja toje srityje tolygiai. Tai reiškia, jog kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks nepriklausantis nuo s numeris N, kad visiems $n \geq N$ nelygybė

$$| F_n(s) - F(s) | < \varepsilon$$

galioja visiems $s \in D$.

Šiame skyrelyje pateikiame kai kuriuos faktus apie Dirichlė eilutes. Kaip minėjome įvade, Dirichlė eilutė turi pavidalą

$$\sum_{m\,=\,1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}. \tag{2.1}$$

Tokios Dirichlė eilutės yra vadinamos paprastosiomis. Galime nagrinėti bendrąsias Dirichlė eilutes

$$\sum_{m\,=\,1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_{m^s}},$$

kur $\{\lambda_m\}$ yra griežtai didėjanti teigiamų skaičių seka

$$\lim_{n\,\to\,\infty} \lambda_m = +\infty.$$

Dirichlė eilutės analizėje yra sutinkamos rečiau negu, sakysime, laipsninės eilutės, tačiau jos yra labai naudingos skaičių teorijoje.

Vienas iš svarbiausių funksninių eilučių teorijos uždavinių yra jų konvergavimo sritis. Pavyzdžiui, laipsninių eilučių konvergavimo sritis yra skritulys. Dirichlė eilutėms yra teisingas toks tvirtinimas.

2.1 teorema. *Dirichlė eilutės konvergavimo sritis yra pusplokštumė.*

Taigi, (2.1) eilutė konverguoja srityje $\sigma > \sigma_0$ ir diverguoja srityje $\sigma < \sigma_0$. Skaičius σ_0 yra vadinamas Dirichlė eilutės konvergavimo abscise.

Yra eilučių, kurios konverguoja su visomis s reikšmėmis. Šiuo atveju $\sigma_0 = -\infty$. Pasitaiko taip pat eilučių, kurios diverguoja su visomis s reikšmėmis. Tuomet $\sigma_0 = +\infty$.

Apie Dirichlė eilutės konvergavimą tiesėje $\sigma = \sigma_0$ nieko negalima pasakyti. Ji gali konverguoti, gali ir diverguoti. Kiekvienu konkrečiu atveju konvergavimą tiesėje $\sigma = \sigma_0$ reikia nagrinėti atskirai.

Dažnai yra naudinga tokia teorema apie Dirichlė eilutės tolygų konvergavimą.

2.2 teorema. *Tarkime, jog (2.1) eilutė konverguoja taške $s = s_0$, o $\delta > 0$ yra bet koks skaičius, mažesnis už $\frac{\pi}{2}$. Tuomet ši eilutė konverguoja tolygiai s plokštumos srityje, apibrėžiamoje nelygybe*

$$| \, arg(s - s_0) \, | \leq \frac{\pi}{2} - \delta.$$

Tegul σ_0 yra (2.1) eilutės konvergavimo abscisė, o $f(s)$ yra jos suma. Taikymuose yra naudinga žinoti funkcijos $f(s)$ analizines savybes. Paprasčiausias tokio tipo tvirtinimas yra tokia teorema.

2.3 teorema. *Funkcija $f(s)$ yra analizinė pusplokštumoje $\sigma > \sigma_0$.*

Sakome, jog (2.1) eilutė konverguoja absoliučiai, jei konverguoja eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{| \, a_m \, |}{m^\sigma}.$$

Dirichlė eilutės absoliutaus konvergavimo sritis yra taip pat pusplokštumė.

Šiuos ir kitus tvirtinimus apie Dirichlė eilutes galima rasti, pavyzdžiui, [1] knygelėje.

3. Dirichlė charakteriai

Imkime sveikąjį skaičių $k > 1$, ir tegul

$$k = 2^{\alpha_0}\, p_1^{\alpha_2}\, \ldots\, p_r^{\alpha_r} \tag{3.1}$$

yra skaičiaus k kanoninis skaidinys.

Pažymėkime $g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_r$ pirmykštes šaknis moduliais $p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \ldots,\ p_r^{\alpha_r}$. Tada, kaip žinoma, kiekvienam natūraliajam skaičiui l, $(l,\ k) = 1$, egzistuoja tokie skaičiai $\gamma,\ \gamma_0,\ \gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_r$, kad

$$l \equiv (-1)^{\gamma} 5^{\gamma_0} (mod\ 2^{\alpha_0}),\ \ l \equiv g_i^{\gamma_i} (mod\ p_i^{\alpha_i}), \tag{3.2}$$

$$0 \leq \gamma \leq\ 2,\ 0 \leq \gamma < 2^{\alpha_0 - 2},\ 0 \leq \gamma_i < \varphi(p_i^{\alpha_i}) = p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1).$$

Čia $\varphi(m)$ yra Oilerio funkcija.

Kiekvienam $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r$ ir kiekvienam l, $0 < l < k$, $(l,\ k) = 1$, egzistuoja tiktai viena tokio tipo sistema $\gamma,\ \gamma_0,\ \gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_r$. Kai $\alpha_0 = 1$, pirmąjį lyginį reikia pakeisti lyginiu $l \equiv 1 (mod\ 2)$; γ ir γ_0 nėra.

Tegul dabar $\varepsilon,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_r$ yra bet kurios šaknys iš vieneto atitinkamai eilės $2\ \cdot 2^{\alpha_0 - 2} \cdot\ \varphi(p_1^{\alpha_1})\ \cdot\ \ldots\ \cdot\ \varphi(p_r^{\alpha_r})$. Tokią šaknų iš vieneto sistemą galima pasirinkti $2\ \cdot 2^{\alpha_0 - 2}\ \cdot\ \varphi(p_1^{\alpha_1})\ \cdot\ \ldots\ \cdot\ \varphi(p_r^{\alpha_r})$ būdais.

Apibrėžiame funkciją $\chi(n) = \chi(n;\ \varepsilon,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \ldots\ \varepsilon_r)$ formule

$$\chi(n) = \begin{cases} \varepsilon^{\gamma}\ \varepsilon_0^{\gamma_0}\ \varepsilon_1^{\gamma_1}\ \ldots\ \varepsilon_r^{\gamma_r},\ jei\ \ (l,\ k) = 1, \\ 0,\ jei\ \ (l,\ k) = 1, \end{cases} \tag{3.3}$$

kur skaičiai $\gamma,\ \gamma_0,\ \gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_r$, kai $(l,\ k) = 1$, yra apibrėžti (3.2) formulėmis. Jeigu $\varepsilon,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_r$ parinkti visais galimais būdais, tai mes gausime $\varphi(k)$ funkcijų aibę.

Šitos funkcijos, apibrėžtos visų natūraliųjų skaičių aibėje, vadinamos charakteriais moduliu k. Atskiru atveju, charakteris gautas, kai $\varepsilon\ =\ \varepsilon_0\ =\ \varepsilon_1\ =\ \ldots\ =\ \varepsilon_r\ =\ 1$, yra vadinamas pagrindiniu charakteriu ir žymimas $\chi_0(l) = \chi_0$.

Iš χ_0 apibrėžimo gauname, kad

$$\chi_0(l) = \begin{cases} 1,\ jei\ \ (l,\ k) = 1, \\ 0,\ jei\ \ (l,\ k) \neq 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

Be to kiekvienam charakteriui $\chi(1) = 1$.

Nesunku matyti, kad

$$\chi(m) = \chi(n),\ \ m \equiv (mod\ k), \tag{3.5}$$

ir

$$\chi(m)\chi(n) = \chi(m\ n) \tag{3.6}$$

visiems m ir n.

Pagrindinis charakterių savybės nusakomos tokiomis teoremomis.

3.1 teorema. *Teisinga lygybė*

$$\sum_{l\ mod\ k} \chi(l) = \begin{cases} \varphi(k), \ jei \ \ \chi = \chi_0, \\ 0, \ jei \ \ \chi \neq \chi_0, \end{cases}$$

kur l perbėga pilną likinių mod k sistemą.

Įrodymas. Kad įrodyti teoremą, pasinaudosime sąryšiu

$$\sum_{l\ mod\ k} \chi(l) = \sum_{\gamma,\ \gamma_0,\ \dots\ \gamma_r} \varepsilon^{\gamma}\ {\varepsilon_0}^{\gamma_0}\ \dots\ \varepsilon_r^{\gamma_r} \ = \sum_{\gamma} \varepsilon^{\gamma} \sum_{\gamma_0} \varepsilon_0^{\gamma_0}\ \dots \sum_{\gamma_r} \varepsilon_r^{\gamma_r}, \tag{3.7}$$

kuriame sumuojama pagal visus

$$0 \leq \gamma < 2,\ 0 \leq \gamma_0 < 2^{\alpha_0 - 2},\ \dots,\ 0 \leq \gamma_r < \varphi(p_r^{\alpha_r}).$$

Jeigu bent vienas iš skaičių $\varepsilon = \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_r$ nelygus 1, t.y., jeigu χ yra nepagrindinis charakteris, tai atitinkama suma lygi nuliui, kadangi kiekvienai m-tojo laipsnio šakniai iš vieneto $\xi \neq 1$ teisinga lygybė

$$\xi^0\ +\ \xi^1\ +\ \xi^2\ +\ \dots\ +\ \xi^{m-1} = 0.$$

Kai $\varepsilon = \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_r = 1$, (3.7) suma įgyja reikšmę

$$2\ \cdot\ 2^{\alpha_0 - 2} \varphi(p_1^{\alpha_1})\ \cdot\ \dots\ \cdot\ \varphi(p_r^{\alpha_r}),$$

kas ir įrodo pirmąją teoremos lygybę.

3.2 teorema. *Teisinga lygybė*

$$\sum_{\chi} \chi(l) = \begin{cases} \varphi(k), \ jei \ \ l \equiv l(mod\ k), \\ 0, \ jei \ \ l \equiv l(mod\ k), \end{cases}$$

kur χ perbėga visus charakterius mod k.

Įrodymas. Teisingas sąryšis

$$\sum_{\chi} \chi(l) = \sum_{\varepsilon,\ \varepsilon_0\ \dots\ \varepsilon_r} \varepsilon^{\gamma}\ {\varepsilon_0}^{\gamma_0}\ \dots\ \varepsilon_r^{\gamma_r} = \sum_{\varepsilon} \varepsilon^{\gamma} \sum_{\varepsilon_0} \varepsilon_0^{\gamma_0} \dots \sum_{\varepsilon_r} \varepsilon_r^{\gamma_r}, \tag{3.8}$$

kur, esant pastoviai sistemai $\gamma,\ \gamma_0,\ \dots\ \gamma_r$, atitinkančiai l, sumuojama pagal šaknis iš vieneto $\varepsilon,\ \varepsilon_0,\ \ldots,\ \varepsilon_r$ eilės $2\ \cdot\ 2^{\alpha_0-2}\ \varphi(p_1^{\alpha_1})\ \cdot\ \ldots\ \cdot\ \varphi(p_r^{\alpha_r})$. Jeigu bent vienas iš skaičių γ nelygus nuliui, t.y., jeigu $l \not\equiv 1(mod\ k)$, tai atitinkama suma virsta nuliu, nes

$$\sum_{\xi} \xi^a = 0,\ a \not\equiv 0(mod\ m),$$

jeigu ξ perbėga visas m-tojo laipsnio šaknis iš vieneto.

Su $\gamma = \gamma_0 = \gamma_1 = \ldots = \gamma_r$ (3.8) sumos reikšmė vėl lygi

$$2\ \cdot\ 2^{\alpha_0-2}\varphi(p_1^{\alpha_1})\ \cdot\ \ldots\ \cdot\ \varphi(p_r^{\alpha_r})\ =\ \varphi(k),$$

kas ir įrodo teoremos lygybę.

3.3 teorema. *Jei* $(l,k)=1$, *tai*

$$\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi}\chi(n)\bar{\chi}(l) = \begin{cases} 1,\ n \equiv l(mod\ k), \\ 0,\ n \not\equiv l(mod\ k). \end{cases}$$

Įrodymas. Kiekvienam charakteriui χ funkcija $\bar{\chi}$ nusakoma formule

$$\bar{\chi}(l) = \chi^{-1}(l),$$

jei $(l,\ k)=1$, nes χ reikšmės su $(l,\ k)=1$ visada yra šaknų iš vieneto sandauga. Tegul dabar l' yra lyginio $l'l \equiv 1(mod\ k)$ sprendinys. Tada akivazdu, kad $(l',\ k)=1$, ir kadangi $\chi(1)=1$, iš (3.5) ir (3.6) formulių gauname, jog

$$\chi(l)\chi(l') = 1.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$\sum_{\chi}\chi(n)\bar{\chi}(l)\ =\ \sum_{\chi}\chi(n)\chi^{-1}(l)\ =\ \sum_{\chi}\chi(n)\chi(l')\ =\ \sum_{\chi}\chi(nl').$$

Iš paskutinio sąryšio ir 3.2 teoremos gauname teoremos tvirtinimą, nes lyginiai $n \equiv l(mod\ k)$ ir $nl' \equiv 1(mod\ k)$ bei $n \not\equiv l(mod\ k)$ ir $nl' \not\equiv 1(mod\ k)$ yra ekvivalentūs.

Charakterio apibrėžimas yra gana sudėtingas. Todėl yra patogu žinoti tokį tvirtinimą.

3.4 teorema. *Kiekviena funkcija $f(n)$, apibrėžta visų natūraliųjų skaičių aibėje, ir tenkinanti sąlygas:*

1. $f(n)=0, (n,\ k)>1,\ f(n)\neq 0, (n,\ k)=1,$

2. $f(m) = f(n), m \equiv n (mod\ k)$,

3. $f(m\ n) = f(m) f(n)$ *bet kuriems natūraliesiems* m *ir* n,
yra viena iš charakteriu moduliu k.

Įrodymas. Iš tikrųjų, pirmiausia, iš 3 turime, kad $f(1) = f(1)f(1)$. Kadangi iš 1 $f(1) \neq 0$, tai $f(1) = 1$. Toliau elementariojoje skaičių teorijoje įrodoma, kad egzistuoja tokie skaičiai $\omega,\ \omega_0,\ \ldots\ \omega_r$, kad bet kurį skaičių l, $0 \leq l < k, (l,\ k) = 1$, galima vieninteliu būdu išreikšti pavidalu

$$l \ \equiv \ \omega^{\gamma}\ \omega_0^{\gamma_0}\ \ldots\ \omega_r^{\gamma_r} (mod\ k), \tag{3.9}$$

kur $\gamma,\ \gamma_0,\ \ldots,\ \gamma_r$ turi tokias pat reikšmes, kaip ir formulėje (3.2). Be to, galioja sąryšiai

$$\omega^2 \ \equiv \ \omega_0^{2\alpha_0 - 2} \ \equiv \ \ldots \ \equiv \ \omega_r^{\varphi(p_r^{\alpha_r})} \ \equiv \ 1 (mod\ k).$$

Atsižvelgę į 2 ir 3, iš paskutinio sąryšio gauname

$$\{f(\omega)\}^2 \ = \ f(\omega^2) \ = \ f(1) \ = \ 1.$$

Taigi, $f(\omega) = \pm 1$. Analogiškai gauname, kad $f(\omega_0),\ f(\omega_1),\ \ldots$ turi būti $2^{\alpha_0 - 2}, \varphi(p_1^{\alpha_1}), \ldots$ eilės šaknys iš vieneto. Kadangi $f(l) = f^{\gamma}(\omega)\ f^{\gamma_0}(\omega_0)\ \ldots\ f^{\gamma_r}(\omega_r)$, tai aišku, kad f yra charakteris.

Todėl charakterį mod k galima apibrėžti kaip funkciją, kuri tenkina 1, 2, 3 sąlygas.

Akivaizdu, kad dviejų charakterių $\chi'(n)$ ir $\chi''(n)$ sandauga

$$\chi'(n)\chi''(n) = \chi(n)$$

taip pat yra charakteris.

3.5 teorema. *Jokie du charakteriai iš charakterių aibės* $\varphi(k)$ *nėra lygūs.*

Įrodymas. Tegul, pavyzdžiui, (3.3) sąryšyje

$$\chi'(n) \ = \ \chi'(n, \varepsilon', \varepsilon'_0,\ \ldots,\ \varepsilon'_r),$$

$$\chi''(n) \ = \ \chi''(n, \varepsilon'',\ \varepsilon''_0,\ \ldots,\ \varepsilon''_r).$$

Tada arba $\varepsilon' \neq \varepsilon''$, arba bent vienam i, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ r$, $\varepsilon'_i \ \neq \ \varepsilon''_i$.

Jeigu turime pastarąjį atvejį, tai aišku, kad $\chi'(l) \ \neq \ \chi''(l)$ tokiam l, kuriam $\gamma \ = \ \gamma_0 \ = \ \ldots \ = \ \gamma_{i-1} \ = \ \gamma_{i+1} \ = \ \ldots \ = \ \gamma_r \ = \ 0,\ \gamma_i = 1$. Jeigu su $k = 1$ apibrėžtume vienintelį charakterį $\chi(n) = \chi_0(n) = 1$ visiems natūraliesiems skaičiams n, tai tas charakteris pasižymėtų visomis anksčiau apibrėžtų charakterių savybėmis.

Apibrėžimo sritį charakteriui $\chi(n)$ galima praplėsti nuliui ir sveikiesiems neigiamiems skaičiams. Tam reikėtų padaryti prielaidą, kad 2 sąlyga tenkinama visiems sveikiesiems skaičiams. Su $k = 1$ reikia imti $\chi(0) = 1$ ir $\chi(m) = 1$ su $m \neq 0$ (kadangi $(m,\ 1) = 1$ kiekvienam sveikąjam m); su $k > 1$ imame $\chi(0) = 0$, nes $(0,\ k) = k > 1$.

Šiame skyrelyje mes naudojomės [2] monografija.

4. Dirichlė L-funkcijos

Tegul χ yra Dirichlė charakteris moduliu k. Tuomet Dirichlė L-funkcija $L(s,\ \chi)$ apibrėžiama formule

$$L(s,\chi) = \sum_{m\ =\ 1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s} = \prod_p (1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1},\ Re\ s = \sigma > 1.$$

Kadangi $|\ \chi(n)\ | = 1$ arba 0, tai pastaroji eilutė konverguoja absoliučiai srityje $\sigma > 1$, ir funkcija $L(s,\ \chi)$, apibrėžta šia eilute, yra analizinė šioje srityje. Atskiru atveju, su $k = 1$ egzistuoja tik pagrindinis charakteris, ir $L(s,\ \chi)$ virsta Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$. Dauguma $L(s,\ \chi)$ savybių yra analogiškos funkcijos $\zeta(s)$ savybėms, tačiau funkcijos $L(s,\ \chi)$, $\chi \neq \chi_0$, elgesys skiriasi nuo funkcijos $L(s,\ \chi_0)$.

4.1 teorema. *Tegul $\sigma > 1$. Tuomet kiekvienam charakteriui χ mod k*

$$L(s,\ \chi) = \prod_{p \nmid k} (1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1}. \tag{4.1}$$

Atskiru atveju srityje $\sigma > 1$ yra teisinga formulė

$$L(s,\ \chi_0) = \prod_{p \nmid k} (1 - \frac{1}{p^s})\zeta(s). \tag{4.2}$$

Pavyzdžiui, kai $k = 2$, turime tik pagrindinį charakterį χ_0, todėl

$$L(s,\ \chi_0) = \prod_{p>2} (1 - \frac{1}{p^s})^{-1} = (1 - 2^{-s})\zeta(s).$$

Kai $k = 3$, turime du charakterius χ_0 ir χ_1. $\chi_0 = 0,\ 1,\ 1$ ir $\chi_1 = 0,\ 1,\ -1$ su $n \equiv 0,\ 1,\ 2(mod\ 3)$. Tuomet

$$L(s,\ \chi_0) = (1 - 3^{-s})\zeta(s),$$

$$L(s,\ \chi_1) = \sum_{n\ =\ 0}^{\infty} \{(3n+1)^{-s} - (3n+2)^{-s}\}.$$

Kai $k = 4$, turime du charakterius χ_0 ir χ_1. $\chi_0 = 0,\ 1,\ 0,\ 1$ ir $\chi_1 = 0,\ 1,\ 0,\ -1$ su $n \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3(mod\ 4)$. Tuomet

$$L(s,\ \chi_0) = (1 - 2^{-s})\zeta(s),$$

$$L(s,\ \chi_1) = \sum_{n\ =\ 0}^{\infty} \{(4n+1)^{-s} - (4n+3)^{-s}\}.$$

4.2 teorema. *Tiesėje* $\sigma = 1$ $L(s,\ \chi) \neq 0$ *kiekvienam* $\chi(mod\ k)$.

Iš 4.2 teoremos išplaukia, kad (4.1) išraišką galima logaritmuoti

$$\log L(s,\ \chi) = \sum_{p\,\nmid\,k} ln(1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1} = \sum_{p\,\nmid\,k} \sum_{m\,=\,1}^{\infty} \frac{\chi(p^m)}{mp^{ms}},\ \sigma > 1.$$

4.3 teorema. *Jei* $\chi \neq \chi_0$, *tai eilutė*

$$\sum_{m\,=\,1} \frac{\chi(m)}{m^s}$$

konverguoja ir srityje $0 < \sigma \leq 1$. *Visos funkcijos* $L(s,\ \chi)$ *yra analiziškai pratęsiamos į sritį* $0 < \sigma \leq 1$ *ir ten yra reguliarios, išskyrus funkciją* $L(s,\ \chi_0)$. *Ji taške* $s = 1$ *turi pirmos eilės polių.*

Šios teoremos ir kitų šio skyrelio tvirtinimų įrodymus galima rasti [2] monografijoje.

5. Funkcijų $Z_1(s,\ \alpha)$ ir $Z_2(s,\ \alpha)$ analizinis pratęsimas

Tegul $\varphi(q)$ yra Oilerio funkcija, t.y., $\varphi(q)$ yra sveikųjų teigiamų skaičių, neviršijančių q ir tarpusavyje pirminių su q, skaičius. Be to, tegul χ_k yra Dirichlė charakteriai moduliu q, o $L(s,\ \chi_k)$ yra atitnkamos Dirichlė L-funkcijos.

5.1 teorema *Funkcijos $Z_1(s,\ \alpha)$ ir $Z_2(s,\ \alpha)$ yra analitiškai pratęsiamos į visą s-plokštumą, išskyrus, galbūt, tašką $s = 1$, kuris yra jų paprastasis polius.*

Įrodymas. Tegul $\sigma > 1$. Tuomet

$$Z_1(s, \alpha) = \sum_{\substack{m\ =\ 1 \\ (m,\ q)=1}}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \alpha m}}{m^s} = \sum_{\substack{l\ =\ 1 \\ (l,\ q)=1}}^{q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \alpha m}}{(kq+l)^s}.$$

Iš čia ir 3.2 teoremos randame, kad

$$Z_1(s,\ \alpha) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(mod\ q)} \bar{\chi}(l) \sum_{m\ =\ 1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s} =$$

$$= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{l\ =\ 1}^{\infty} e^{2\pi i \alpha l} \sum_{\chi(mod\ q)} \bar{\chi}(l) L(s, \chi) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{l\ =\ 1}^{\infty} e^{2\pi i \alpha l} \sum_{\chi(mod\ q)} \bar{\chi}(l) L(s,\ \chi) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{k\ =\ 0}^{\varphi(q)-1} \eta_k(\alpha) L(s,\ \chi_k), \tag{5.1}$$

kur

$$\eta_k(\alpha) = \sum_{l\ =\ 1}^{q} e^{2\pi i \alpha l} \bar{\chi}_k(l).$$

Tegul χ_0 yra pagrindinis charakteris moduliu q. Tuomet funkcijos $L(s,\ \chi_k)$, $k \neq 0$, yra sveikosios funkijos, t.y., analizinės visoje s-plokštumoje, o funkcija $L(s, \chi_0)$ taške $s = 1$ turi polių. Todėl (5.1) lygybė duoda funkcijos analizinį pratęsimą į visą s-plokštumą, išskyrus, galbūt, tašką $s = 1$. Jei $\eta_0(\alpha) = 0$, tai tuomet funkcija $Z_1(s,\ \alpha)$ yra sveikoji funkcija.

Panašiai samprotaujame ir funkcijos $Z_2(s, \alpha)$ atveju. Tegul $\sigma > 1$.

$$Z_2(s,\ \alpha) = \sum_{l\ =\ 1}^{q} \sum_{k\ =\ 0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \alpha l}}{(kq+l)^s} =$$

$$= \sum_{l\ =\ 1}^{q} \frac{e^{2\pi i \alpha l}}{(q,\ l)^s} \sum_{k\ =\ 0}^{\infty} \frac{1}{(\frac{k\ q}{q,\ l} + \frac{l}{(q,\ l)})^s} =$$

$$= \sum_{l\,=\,1}^{q} \frac{e^{2\pi i\alpha l}}{(q,\ l)^s \varphi(\frac{q}{(q,\ l)})} \sum_{\chi (mod\ \frac{q}{(q,\ l)})} \bar{\chi}(\frac{l}{(q,\ l)}) L(s,\ \chi) =$$

$$= Z_1(s,\ \alpha) + \sum_{\substack{l\,=\,1 \\ (l,\ q)>1}}^{a} \frac{e^{2\pi i\alpha l}}{(q,\ l)^s \varphi(\frac{q}{(q,\ l)})} \sum_{\chi (mod\ \frac{q}{(q,\ l)})} \bar{\chi}(\frac{l}{(q,\ l)}) L(s,\ \chi).$$

Ši lygybė ir duoda funkcijos $Z_2(s,\ \alpha)$ analizinį pratęsimą.

5.2 teorema. *(5.1) lygybėje bent du skaičiai $\eta_k(\alpha)$ yra nelygūs nuliui.*

Įrodymas. Aišku, kad bent vienas iš skaičių $\eta_k(\alpha)$ yra nelygus nuliui. Tegul tik vienas $\eta(\alpha) \neq 0$. Tuomet iš (5.1), kai $\sigma > 1$, turime, kad

$$\sum_{\substack{m\,=\,1 \\ (m,\ q)=1}}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\alpha l}}{m^s} = \eta(\alpha)\varphi^{-1}(q) \sum_{m\,=\,1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}.$$

Iš čia visiems $m,\ (m,\ q) = 1$, teisinga lygybė

$$e^{2\pi i\alpha m} = \eta(\alpha)\eta^{-1}(q)\chi(m).$$

Tačiau, tai nėra galima, nes $\chi(m)$ yra pilnai multiplikatyvi funkcija, t.y., $\chi(m\ n) = \chi(m)\chi(n)$ visiems m ir n, tuo tarpu kairioji pusė $e^{2\pi i\alpha m}$ nėra multiplikatyvi funkcija.

6. Funkcijų $Z_1(s,\ \alpha)$ ir $Z_2(s,\ \alpha)$ nulių skaičiaus įverčiai juostoje $\frac{1}{2} < \sigma < 1$

Šiame skyrelyje panagrinėsime funkcijų $Z_1(s,\ \alpha)$ ir $Z_2(s,\ \alpha)$ nulių juostoje $\frac{1}{2} < \sigma < 1$.

6.1 teorema. *Tegul egzistuoja toks skaičius $m \in \mathbb{N}$, $(m,\ q) = 1$, kad $(m-1)^2 \not\equiv 0(mod\ q)$. Tuomet bet kuriems σ_1 ir σ_2, $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, egzistuoja tokia konstanta $c = c(\alpha,\ \sigma_1,\ \sigma_2) > 0$, kad pakankamai dideliems T funkcija $Z_1(s, \alpha)$ turi daugiau negu cT nulių, gulinčių stačiakampyje*

$$\sigma_1 < \sigma < \sigma_2,\ \mid t \mid < T.$$

6.1 teoremos įrodymas remiasi tokiu tvirtinimu. Tegul $meas\{A\}$ yra mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matas.

6.1 lema. *Tegul $0 < r < \frac{1}{4}$; tegul $\chi_1, \ldots, \chi_n$ yra poromis neekvivalentūs Dirichlė charakteriai, o $f_1(s), \ldots, f_n(s)$ yra funkcijos, analizinės ir neturinčios nulių skritulyje $\mid s \mid < r$ ir tolydžios uždarame skritulyje $\mid s \mid \leq r$. Tada bet kokiam $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \to \infty} (\frac{1}{2\ T}) meas\{\tau \in [-T,\ T], \max_{1 \leq j \leq n} \max_{|s| \leq r} \mid L(s + \frac{3}{4} + i\pi, \chi_j) - f_j(s) \mid < \varepsilon\} > 0.$$

Ši lema vadinama S. M. Voronino teorema apie L-funkcijų universalumą. Jos įrodymas yra duotas [4] monografijoje.

6.1 teoremos įrodymas. Iš (5.1) lygybės turime, kad funkcijos $Z_1(s,\ \alpha)$ nuliai sutampa su L-funkcijų tiesinės kombinacijos

$$\sum_{k\ =\ 0}^{\varphi(q)-1} \eta_k(\alpha) L(s,\ \chi_k)$$

nuliais.

Pagal 5.2 teoremą šitoje tiesinėje kombinacijoje bent du skaičiai $\eta_k(\alpha)$ yra nelygūs nuliui. Neribodami bendrumo, galime laikyti, kad $\eta_0(\alpha) \neq 0,\ \eta_1(\alpha) \neq 0$. Tegul

$$\sigma\ =\ \frac{(\sigma_1\ +\ \sigma_2)}{2},$$

$$f_1(s)\ =\ \eta_0^{-1}(\alpha)[(s - \sigma)\ +\ 3],$$

$$f_2(s)\ =\ -3\eta_1^{-1}(\alpha),$$

$$f_3(s)\ =\ \ldots\ =\ f_{\varphi(q)-1}(s) = \delta > 0.$$

Skaičius σ yra parenkamas taip, kad būtų tenkinama nelygybė

$$q\varphi(q)\delta < (\frac{1}{20})(\sigma_2 - \sigma_1). \tag{6.1}$$

Pagal 6.1 lemą egzistuoja tokia konstanta $c = c(\alpha,\ \sigma_1,\ \sigma_2) > 0$, kad su pakankamai dideliais T

$$meas\{\tau \in [-T,\, T],\ \max_{0\le k\le\varphi(q)-1}\ \max_{|s-\frac{3}{4}|=\max(|\sigma_1-\frac{3}{4}|,|\sigma_2-\frac{3}{4}|)} \mid L(s+i\tau,\chi_k) - f_k(s) \mid < \delta\} > cT. \tag{6.2}$$

Todėl tiems τ, kuriems teisinga (6.2) nelygybė, turime, kad

$$\mid \sum_{k\ =\ 0}^{\varphi(q)-1} \eta_k(\alpha) L(s\ +\ i\tau, \chi_k) - \sum_{k\ =\ 0}^{\varphi(q)-1} \eta_k(\alpha) f_k(s) \mid < q\varphi(q)\delta, \tag{6.3}$$

nes

$$\mid \eta_k(\alpha) \mid \le q,\ \ k = 0, \dots, \varphi(q) - 1.$$

Iš funkcijų $f_k(s)$ apibrėžimo gauname, kad

$$\sum_{k\ =\ 0}^{\varphi(q)-1} \eta_k(\alpha) f_k(s) = (s - \sigma) + R,$$

kur

$$\mid R \mid \le q\varphi(q)\delta,$$

ir

$$\mid \eta_k(\alpha) \mid \le q,\ \ k = 0, \dots \varphi(q) - 1.$$

Tokiu būdu iš čia, iš (6.3) ir (6.1) nelygybių ir δ apibrėžimo gauname, jog

$$\max_{|s-\sigma|=\frac{(\sigma_2-\sigma_1)}{2}} \mid \sum_{k\ =\ 0}^{\varphi(q)-1} \eta_k(\alpha) L(s\ +\ i\tau, \chi_k) - (s - \sigma) \mid < 2q\varphi(q)\delta < \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{10}.$$

Pastaroji nelygybė reiškia, kad funkcijos $s - \sigma$ ir

$$\sum_{k\ =\ 0}^{\varphi(q)-1} \eta_k(\alpha) L(s\ +\ i\tau, \chi_k) - (s - \sigma)$$

skritulyje $\mid s - \sigma \mid \le \frac{(\sigma_2-\sigma_1)}{2}$ tenkina Rušė teoremos (Tegul funkcijos $f(s)$ ir $g(s)$ yra anlizinės ant kontūro L ir jo viduje, ir ant kontūro L galioja nelygybės $f(s) \ne 0$ ir $\mid f(s) \mid < \mid g(s) \mid$. Tuomet kontūro L viduje funkcijos $f(s)$ ir $f(s)\ +\ g(s)$ turi tą patį nulių skaičių [3].) sąlygas. Kadangi funkcija $s - \sigma$ skritulio $\mid s - \sigma \mid \le \frac{(\sigma_2-\sigma_1)}{2}$ viduje turi tiksliai vieną nulį, tai pagal Rušė teoremą ir funkcija

$$\sum_{k\ =\ 0}^{\varphi(q)-1} \eta_k(\alpha) L(s\ +\ i\tau, \chi_k) - (s-\sigma)$$

tame pačiame skritulyje turi vieną nulį. Tačiau tokių $\tau \in [-T,\ T]$ matas pagal (6.2) yra didesnis už cT, o tai ir duoda teoremos įrodymą.

6.2 teorema. *Tegul q yra toks, jog egzistuoja bent du primityvūs charakteriai moduliu q. Tuomet funkcija $Z_2(s,\ \alpha)$ yra teisingos 6.1 teoremos tvirtinimas.*

Įrodymas. Įrodymo kelias lieka toks pat, kaip ir 6.1 teoremos įrodyme. Tačiau iškyla kai kurie sunkumai pritaikant universalumo teoremą (6.1 lemą), kadangi tarp charakterių pagal modulius $q \diagup (q,\ l),\ l = 1, \ldots, q$, gali būti ekvivalenčių.

Tegul A_1 yra visų charakterių moduliu q aibė. Aibei A_2 priskirsim tuos charakterius moduliais $q \diagup (q,\ l), (q,\ l) > 1$, kurie poromis nėra ekvivalentūs, o taip pat nėra poromis ekvivalentūs su aibės A_1 charakteriais. Tarkime, kad $A = A_1 \bigcup A_2$.

Pagal teoremos sąlygas egzistuoja bent du primityvūs charakteriai moduliu q. Tegul χ_1 ir χ_2 yra primityvūs charakteriai. Tada atitinkantys tokius charakterius skaičiai $\eta_1(\alpha)$ ir $\eta_2(\alpha)$ nėra lygūs nuliui. Iš tikrųjų, kadangi $(a,\ q) = 1$, tai

$$\chi_i(a)\tau(\bar{\chi}_i) = \sum_{l\ =\ 1}^{q} e^{\frac{2\pi i l}{q}} \bar{\chi}_i(l) = \eta_i(\alpha),\ i = 1,\ 2,$$

kur $\tau(\chi_i)$ - Gauso suma. Bet primityviems charakteriams [2] $\tau(\chi_i) \neq 0$, todėl iš čia išplaukia, kad $\eta_i(\alpha),\ i = 1,\ 2.$

Kaip ir įrodant 6.1 teoremą, darome prielaidą, kad

$$f_{\chi_1}(s) = \eta_1^{-1}(\alpha)[(s-\sigma)+3],\ \sigma = \frac{(\sigma_1\ +\ \sigma_2)}{2},$$

$$f_{\chi_2}(s) = -3\eta_2^{-1}(\alpha),$$

$$f_{\chi}(s) = \delta > 0$$

likusiems $\chi \in A$. Skaičius δ bus nusakytas vėliau.

Pagal 6.1 lemą egzistuoja toks $c = c(\alpha,\ \sigma_1,\ \sigma_2) > 0$, kad su pakankamai dideliais T

$$meas\{\tau \in [-T,\ T], \max_{\chi \in A} \max_{|s-\frac{3}{4}| = \max(|\sigma_1 - \frac{3}{4}|, |\sigma_2 - \frac{3}{4}|)} \mid L(s+i\tau, \chi) - f_{\chi}(s) \mid < \delta\} > cT. \tag{6.4}$$

Tegul $\chi \in A,\ \chi \neq \chi_1, \chi_2$. Tada tiems τ, kuriems galioja (6.4) nelygybė, su $\sigma \geq \frac{1}{2}$

$$\mid (q,\ l)^{-s-i\pi} L(s\ +\ i\pi, \chi) - f_\chi(s)(q,\ l)^{-s} \mid \leq$$

$$\leq \mid (q,\ l)^{-s-i\pi} L(s+i\pi, \chi) - (q,\ l)^{-s-i\pi} f_\chi(s) \mid\ +\ \mid f_\chi(s) \mid\mid (q,\ l)^{-s-i\pi} - (q,\ l)^{-s} \mid < 3\delta. \tag{6.5}$$

Jeigu charakteris χ' moduliu $q/(q,\ l) = q'$, $(q,\ l) > 1$ nepriklauso aibei A, tai jis ekvivalentus vienam charakteriui χ'' modulio q'' iš A. Tegul charakteriai χ' ir χ'' yra generuoti primityvaus charakterio $\bar{\chi}$. Tada

$$L(s,\ \chi') = L(s,\ \tilde{\chi}) \prod_{p|q'} (1 - \tilde{\chi}(p)p^{-s}) =$$

$$= L(s,\ \tilde{\chi}) \prod_{p|q''} (1 - \tilde{\chi}(p)p^{-s}) \times$$

$$\times \prod_{p|q'} (1 - \tilde{\chi}(p)p^{-s}) \prod_{p|q''} (1 - \tilde{\chi}(p)p^{-s})^{-1} =$$

$$= L(s,\ \chi'') g(s,\ \tilde{\chi}, q', q''),$$

kur

$$g(s) = g(s,\ \tilde{\chi}, q', q'') =$$

$$= \prod_{p|q'} (1 - \tilde{\chi}(p)p^{-s}) \prod_{p|q''} (1 - \tilde{\chi}(p)p^{-s})^{-1}.$$

Todėl τ, tenkinantiems (6.4) nelygybę, teisinga nelygybė

$$\mid (q,\ l)^{-s-i\pi} L(s\ +\ i\pi, \chi') - (q,\ l)^{-s} f_{\chi''}(s) g(s) \mid \leq$$

$$\leq \mid q,\ l)^{-s-i\pi} L(s\ +\ i\pi, \chi'') g(s+i\pi) -$$

$$-(q,\ l)^{-s-i\pi} f_{\chi''}(s) g(s+i\pi) \mid +$$

$$+ \mid f_{\chi''} \mid\mid (q,\ l)^{-s-i\pi} g(s+i\pi) -$$

$$-(q,\ l)^{-s} g(s) \mid < 3\delta e^{2q}. \tag{6.6}$$

Tokiu būdu, remiantis (6.4) ir (6.5) visiems τ, tenkinantiems (6.4) nelygybę, gauname, jog

$$\mid Z_2(s+i\tau, \alpha) - \sum_{l\ =\ 1}^{q} e^{2\pi i\alpha l} (q,\ l)^{-s} \varphi^{-1}(q/(q,\ l)) \times$$

$$\times \sum_{\chi\ mod\ q/(q,\ l)} \bar{\chi}(l/(q,\ l)) f_\chi(s) \mid 3\delta q^3 e^{2q}. \tag{6.7}$$

Pagal funkcijų $f_\chi(s)$ parinkimą ir pagal (6.6) turime, jog

$$\sum_{l\,=\,1}^{q} e^{2\pi i\alpha l}(q,\ l)^{-s}\varphi^{-1}(q/(q,\ l)) \sum_{\chi\ mod\ q/(q,\ l)} \bar{\chi}(l/(q,\ l))f_\chi(s) = (s-\sigma)+R,$$

kur

$$|\ R\ | \leq 3\delta q^3 e^{2q}. \tag{6.8}$$

Pareikalausime, kad skaičius δ tenkintų nelygybę

$$\delta < (12q^3e^{2q})^{-1}(\sigma_2-\sigma_1). \tag{6.9}$$

2 teoremos įrodymas užbaigiamas Rušė teoremos pritaikymu panaudojant (6.7) - (6.9) nelygybes.

7.1 teorema. *Tegul q yra bekvadratis skaičius. Tuomet egzistuoja tokia konstanta $c = c(\alpha) > 0$, kad pakankamai dideliems T funkcija $Z_1(s,\ \alpha)$ turi daugiau negu cT nulių, gulinčių begaliniame stačiakampyje*

$$\sigma > 1,\ |\ t\ | < T.$$

Įrodymas. Tegul $g(m)$ pilnai multiplikatyvi funkcija, t.y., $g(m\ n) = g(m)g(n)$ visiems $m, n \in \mathbb{N}$ ir $|\ g(m)\ | = 1$ visiems $m \in \mathbb{N}$.

Tegul $\sigma > 1$. Tuomet iš sandaugos $\chi(m)g(m)$ multiplikatyvumo

$$L(s,\ \chi,\ g) = \sum_{m\,=\,1}^{\infty} \chi(m)g(m)m^{-s} = \prod_p (1-\chi(p)g(p)p^{-s})^{-1}.$$

Panagrinėkime funkciją

$$Z_1(s,\ \alpha,\ g) = \sum_{k\,=\,0}^{\varphi(q)-1} \eta_k(\alpha)L(s,\ \chi_k,\ g).$$

1 žingsnis. Įrodysime, kad bet kokiam $\varepsilon > 0$ egzistuoja tokia funkcija $g(m)$, kad funkcija $Z_1(\sigma,\ \alpha,\ g)$ intervale $1 < \sigma < 1+\varepsilon$ turi nulį. Pagrindinį charakterį moduliu q pažymėsime χ_0. Aišku, kad

$$\eta_0(\alpha) = \sum_{l\,=\,1}^{q} e^{2\pi i\alpha l}\bar{\chi}_0(l) = \sum_{\substack{l\,=\,1\\(l,\ q)=1}} e^{2\pi i\alpha l} \neq 0.$$

Ieškosime funkcijos $g(m)$ ir tokių σ reikšmių, kad tie k, su kuriais $\eta_k(\alpha) \neq 0$, tenkintų nelygybę

$$\eta_0(\alpha)\prod_p(1-\chi_0(p)g(p)p^{-\sigma})^{-1}=-Q\eta_k(\alpha)\prod_p(1-\chi_k(p)g(p)p^{-\sigma})^{-1}. \quad (6.10)$$

Čia Q reiškia skaičių $\eta_k(\alpha)$, $k=1,\dots,\varphi(q)-1$, nelygių nuliui, skaičių. Logaritmuodami (6.10) nelygybę, gauname

$$\sum_{\substack{p\\(p,\ q)=1}} g(p)p^{-\sigma}=c_1(k)+$$

$$+\sum_p(\sum_{l\,=\,1}^{\infty}\frac{1}{l}g^l(p)\chi_k^l(p)p^{-l\sigma}-\sum_{l\,=\,2}^{\infty}l^{-1}g^l(p)\chi_0^l(p)p^{-l\sigma}).$$

Pagrindinę logaritmo $\log(-Q\eta_k(\alpha)\eta_0^{-1}(\alpha))$ reikšmę pažymėsime $c_1(k)$. Iš čia randame, kad

$$\sum_{\substack{(p,\ q)=1\\p\equiv 1(mod\ q)}}(1-\chi_k(p))g(p)p^{-\sigma}=c_1(k)+\sum_p c_2(\sigma,\ k,\ p,\ g(p))p^{-2\sigma}, \quad (6.11)$$

dydis $c_2(\sigma,\ k,\ p,\ g(p))$ moduliu yra aprėžtas absoliučia konstanta.

Išskaidysime visus pirminius skaičius į klases moduliu q, tarpusavyje pirminius su q. Pirminis $p\in P_r$, jeigu $p\equiv r(mod\,q)$. Dabar (6.11) lygčių sistemą galima užrašyti pavidalu

$$\sum_r{}'(1-\chi_k(r))\sum_{p\,\in\,P_r}g(p)p^{-\sigma}=c_1(k)+\sum_p c_2(\sigma,\ k,\ p,\ g(p))p^{-2\sigma}. \quad (6.12)$$

Brūkšnelis čia reiškia, kad r perbėga redukuotą likinių sitemą moduliu q, išskyrus vienetinę klasę. (6.12) sistema turi $\varphi(q)-1$ nežinomųjų

$$\sum_{p\in P_r}g(p)$$

ir Q lygčių. Bendruoju atveju $Q\le\varphi(q)-1$. Įrodysime, kad (6.12) sistemos matricos rangas lygus Q. Iš čia seks, kad (6.12) sistema suderinta.

Parodysime, kad iš lygybės

$$\sum_r{}' z_r(1-\chi_k(r))=0,\ k=1,\dots,\varphi(q)-1, \quad (6.13)$$

išplaukia, kad visi $z_r = 0$. Iš (6.13) gauname, kad

$$\sum_r{}' z_r(1 - \chi_k(r)) = 0, \ k = 1, \ldots, \varphi(q) - 1.$$

Padauginę paskutinę lygybę iš $\bar{\chi_k}(m), \ m \not\equiv 1(mod \ q)$, ir sumuodami pagal visus k, randame

$$\sum_r{}' z_r \sum_{k=0}^{\varphi(q)-1} \bar{\chi_k}(m) - \sum_{k=0}^{\varphi(q)-1} \chi_k(r)\bar{\chi_k}(m) = 0,$$

iš kur iškart turime, kad $z_m = 0$. Tokiu būdu, mes įrodėme, kad eilės $\varphi(q) - 1$ determinantas

$$| \ 1 - \chi_k(r) \ |,$$

$k = 1, \ldots, \varphi(q) - 1, \ r \neq 1$ yra nelygus nuliui. Remiantis Laplaso teorema, gauname, kad (6.12) sistemos matricos rangas lygus Q.

Spręsdami (6.12) tiesinių lygčių sistemą, randame

$$\sum_{\substack{p \in P_r \\ r \neq 1}} g(p)p^{-\sigma} = c_3(r) + \sum_p c_4(r, \sigma, p, g(p))p^{-2\sigma}. \tag{6.14}$$

Pirminius skaičius $p \in P_r$ sunumeruosime didėjimo tvarka taip:

$$p_r, \ p_{r+q}, \ p_{r+2q}, \ldots$$

Gerai žinoma [2], kad fiksuotam q, kai $x \longrightarrow \infty$,

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \in P_r}} 1 \sim x(\varphi(q)\ln x)^{-1}.$$

Iš čia randame, kad, kai $x \longrightarrow \infty$,

$$p_n \sim n\varphi(q)q^{-1}\ln n. \tag{6.15}$$

Panaudodami ką tik apibrėžtą pirminių skaičių numeraciją, (6.14) lygybę galima užrašyti taip:

$$\sum_{\substack{n = 1 \\ n \equiv r(mod \ q)}} g(p_n)p_n^{-\sigma} = c_3(r) + \sum_{n=1}^{\infty} c_4(r, \ \sigma, \ p_n, \ g(p_n))p_n^{-2\sigma}, \tag{6.16}$$

$2 \leq r < q, \ (r, \ q) = 1$. Čia dydžiai $c_3(r)$ ir $c_4(r, \ \sigma, \ p_n, \ g(p_n))$ aprėžti kuria nors absoliučia konstanta C.

Tarkime, kad visiems $(n,\ q) = 1$

$$S_n = \sum_{\substack{m\ \leq\ n \\ m\ \equiv\ n(mod\ q)}} g(p_m)p_m^{-\sigma} - c_3(n) - \sum_{m\ \leq\ n} c_4(n, \sigma, p_m, g(p_m))p_m^{-2\sigma}. \quad (6.17)$$

Jeigu įrodysime, kad $S_n \longrightarrow 0$, kai $n \longrightarrow \infty$ ir perbėga likinių klasę moduliu q, tai (6.17) bus įrodyta. Naudosimės indukcija.

Tegul $n_0 > q$ yra natūralusis skaičius, kuris bus nusakytas vėliau. Tarkime, kad

1. $g(p_m) = 1,\ jeigu\ m\ \leq\ n_0;$

2. $g(p_m) = 1,\ jeigu\ S_{m-q} = 0\ ir\ m > n_0;$

3. $g(p_m)\ =\ -S_{m-q} \mid S_{m-q} \mid^{-1},\ jeigu\ m > n_0\ ir\ S_{m-q} \neq 0.$

Jeigu ε pakankamai mažas, tai atsižvelgiant į (6.15), visiems $2\ \leq\ r\ <\ q,\ (r,\ q) = 1$, turime

$$\sum_{\substack{m<n_0 \\ m\ \equiv\ r(mod\ q)}} p_m^{-\sigma} > 2 \sum_{\substack{m\ \leq\ n_0 \\ m\ \equiv\ r(mod\ q)}} p_m^{-1} + 2C(1 + \zeta(2)).$$

Aišku, kad paskutinė nelygybė nepasikeis, jeigu vietoje n_0 įrašysime $n \leq n_0$. Tokiu būdu, kai $n \leq n_0$, tai

$$\mid S_n \mid\leq \sum_{\substack{m\ \leq\ n \\ m\ \equiv\ n(mod\ q)}} p_m^{-1} + C(1 + \zeta(2)) < \frac{1}{2} \sum_{\substack{m\ >\ n \\ m\ \equiv\ n(mod\ q)}} p_m^{-\sigma}.$$

Dabar tegul $n > n_0$ ir

$$\mid S_{n-q} \mid< \frac{1}{2} \sum_{\substack{m\ >\ n-q \\ m\equiv n(mod\ q)}} p_m^{-\sigma}. \quad (6.18)$$

Tada turime

$$S_n = S_{n-q} + g(p_n)p_n^{-\sigma} - \sum_{m\ =\ n-q}^{n-1} c_3(m, \sigma, p_m, g(p_m))p_m^{-2\sigma}.$$

Iš čia, atsižvelgę į $g(p_m)$ parinkimą, gauname

$$\mid S_n \mid\leq C \sum_{m\ =\ n-q}^{n-1} p_m^{-2} + \mid\mid S_{n-q} \mid -p_n^{-\sigma} \mid\leq C \sum_{m\ =\ n-q}^{n-1} p_m^{-2} + \max(p^{-\sigma}, \mid S_{n-q} \mid -p_n^{-\sigma}).$$

Iš (6.15) matome, jog skaičių n_0 galima parinkti taip, kad su $n > n_0$ būtų teisingos nelygybės

$$2C\sum_{m\,=\,n-q}^{n-1} p_m^{-2} \le p_n^{-1-\varepsilon},$$

$$\sum_{\substack{m\,=\,n+q\\ m\,\equiv\,n(mod\ q)}} p^{-1-\varepsilon} \ge 3p_n^{-1}. \tag{6.19}$$

Tokiu būdu,

$$\mid S_n \mid \le \frac{1}{2}p_n^{-\sigma} + \max(p_n^{-\sigma}, \mid S_{n-q} \mid - p_n^{-\sigma}) = \max(\frac{3}{2}p_n^{-\sigma}, \mid S_{n-q} \mid - \frac{1}{2}p_n^{-\sigma}).$$

Remiantis (6.19) ir dėl S_{n-q} daryta prielaida gauname, kad

$$\mid S_n \mid \le \max(\frac{3}{2}p_n^{-\sigma},\ \frac{1}{2}\sum_{\substack{m\,>\,n\\ m\,\equiv\,n(mod\ q)}} p_m^{-\sigma}) \le \frac{1}{2}\sum_{\substack{m\,>\,n\\ m\,\equiv\,n(mod\ q)}} p_m^{-\sigma}.$$

2 žingsnis. Įrodysime, kad funkcija $Z_1(s,\ \alpha)$ turi nulį pusplokštumėje $Res > 1$. Tegul $\delta > 0$. Tada su $Res \ge 1+\delta$ bet kuriam $\varepsilon > 0$ rasime tokį $x > 0$, kad visiems $k = 0, \ldots, \varphi(q) - 1$

$$\mid L(s,\ \chi_k,\ g) - L(s+i\pi, \chi_k) \mid \le \mid \prod_{p\,\le\,x}(1-\chi_k(p)g(p)p^{-s})^{-1} - \prod_{p\,\le\,x}(1-\chi_k(p)p^{-s-i\pi})^{-1} + \frac{\varepsilon}{2q} \mid . \tag{6.20}$$

Tegul $f(p) = \arg g(p)$, $\| u \|$ yra u atstumas iki artimiausio sveikojo skaičiaus, o K yra eilutės

$$\sum_p p^{-1-\delta}$$

suma. Kadangi pirminių skaičių logaritmai tiesiškai nepriklausomi virš racionaliųjų skaičių lauko, tai pagal Kronekerio teoremą, egzistuoja toks τ, kad visiems $p\ \le\ x$

$$\| \tau \ln \frac{p}{2\pi} - \frac{f(p)}{2\pi} \| < \varepsilon(4\pi q)^{-1}e^{-5K}.$$

Todėl tokiems τ

$$\mid p^{-i\pi} - g(p) \mid \le\ 2 \mid \sin\frac{\tau \ln p - f(p)}{2} \mid < \varepsilon(2q)^{-1}e^{-5K}.$$

Iš čia, iš (6.20) ir iš funkcijų $Z_1(s,\ \alpha, g)$ ir $Z_1(s,\ \alpha)$ apibrėžimo, gauname, kad galima rasti tokį τ, kad su $Res \ge 1+\delta$

$$\mid Z_1(s,\ \alpha, g) - Z_1(s+i\tau,\ \alpha) \mid < \varepsilon. \tag{6.21}$$

Tegul $Z_1(\sigma_0,\ \alpha,\ g) = 0,\ \sigma_0 > 1$. Egzistuoja $\varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_1 < \sigma_0 - 1$ ir toks, kad

$Z_1(s,\ \alpha,\ g) \neq 0$ skritulyje $\mid s-\sigma_0 \mid = \varepsilon_1$. Paėmę $\delta = \sigma_0 - \varepsilon_1 - 1$ ir

$$\varepsilon = \min_{|s-\sigma_0|=\varepsilon_1} \mid Z_1(s,\ \alpha,\ g) \mid,$$

iš (6.21) ir Rušė teoremos, gauname, kad $Z_1(s+i\tau,\ \alpha)$ turi nulį pusplokštumėje $Res > 1$.

3 žingsnis. Įrodysime, kad teoremos teiginys yra teisingas. Įrodysime tokio $\rho = \beta + i\gamma,\ \beta > 1$, egzistavimą, kad $Z_1(\rho,\ \alpha) = 0$. Tegul ε_1, $0 < \varepsilon_1 < \beta - 1$ yra toks, kad $Z_1(s,\ \alpha) \neq 0$ skritulyje $\mid s - \rho \mid = \varepsilon_1$. Imkime

$$\varepsilon = \min_{|s-\rho|=\varepsilon_1} \mid Z_1(s,\ \alpha) \mid,\ Z_{1n}(s,\ \alpha) = \sum_{\substack{m\ \leq\ n \\ (m,\ q)=1}} e^{2\pi i\alpha m} m^{-s}.$$

Egzistuoja toks n, kad tolygiai pusplokštumėje $Res \geq \beta - \varepsilon_1$

$$\mid Z_1(s,\ \alpha) - Z_{1n}(s,\ \alpha) \mid < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.22}$$

Panaudoję Dirichlė principą, gauname, kad intervale $[-T,\ T]$ atsiras daugiau negu $c(\alpha)T,\ c(\alpha) > 0$, tokių skaičių τ, kad

$$\|\ (2\pi)^{-1}\tau \ln m\ \| < \mid (6\pi)^{-1}\varepsilon(\sum_{m\ \leq\ n} m^{-\beta+\varepsilon_1})^{-1},\ 1 \leq m \leq n.$$

Tiems τ su $Res \geq \beta - \varepsilon_1$

$$\mid Z_{1n}(s+i\pi,\ \alpha) - Z_{1n}(s,\ \alpha) \mid < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Todėl pagal (6.22) tiems patiems τ

$$\mid Z_1(s+i\pi,\ \alpha) - Z_1(s,\ \alpha) \mid < \varepsilon.$$

Vėl panaudojant Rušė teoremą, randame, kad funkcija $Z_1(s,\ \alpha)$ turi nulių kiekviename skritulyje $\mid s - \rho - i\tau \mid \leq \varepsilon_1$, o tai ir įrodo teoremą.

7.2 teoremos įrodymas. Teoremos sąlygoje turime

$$Z_2(s,\ \alpha) = Z_1(s,\ \alpha) + q^{-s}\zeta(s).$$

Todėl (6.10) lygybė virsta lygybe

$$(\eta_0(\alpha) + (q^\sigma - 1)^{-1}) \prod_p (1 - \chi_0(p)g(p)p^{-\sigma})^{-1} =$$

$$= -Q\eta_k(\alpha)\prod_p (1 - \chi_k(p)g(p)p^{-\sigma})^{-1}.$$

Tolimesnis įrodymas visiškai sutampa su 7.1 teoremos įrodymu, tiktai konstantos $c_1(k)$ ir $c_3(r)$ dar priklauso ir nuo σ.

7. Išvados

Tegul $\alpha = \frac{a}{q}$, $(a,\ q) = 1$, $1 < a < q$, yra duotas racionalus skaičius, $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o srityje $\sigma > 1$

$$Z_1(s,\ \alpha) = \sum_{\substack{m\ =\ 1\\(m,\ q)=1}}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\alpha m}}{m^s}$$

ir

$$Z_2(s,\ \alpha) = \sum_{m\ =\ 1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\alpha m}}{m^s}.$$

Funkcijos $Z_1(s,\ \alpha)$ ir $Z_2(s,\ \alpha)$ yra analiziškai pratęsiamos į visą s plokštumą, išskyrus, galbūt, tašką $s = 1$. Darbe nustatyta, kad esant papildomiems reikalavimams, funkcijos $Z_1(s,\ \alpha)$ ir $Z_2(s,\ \alpha)$ turi be galo nulių juostoje $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. Be to, jos turi be galo daug nulių ir pusplokštumėje $\sigma > 1$.

Zeros of some Dirichlet series

Summary

Let $\alpha = \frac{a}{q},\ (a,\ q) = 1,\ 1 < a < q$, be a given rational number, $s = \sigma + it$ be a complex variable and, for $\sigma > 1$

$$Z_1(s,\ \alpha) = \sum_{\substack{m\ =\ 1\\ (m,\ q)=1}}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\alpha m}}{m^s}$$

and

$$Z_2(s,\ \alpha) = \sum_{m\ =\ 1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i\alpha m}}{m^s}.$$

The function $Z_1(s,\ \alpha)$ and $Z_2(s,\ \alpha)$ are analytically continuable to the whole complex plane, except, maybe, for a simple pole at $s = 1$. It is proved that, under some additional hypotheses, the functions $Z_1(s,\ \alpha)$ and $Z_2(s,\ \alpha)$ have infinitely many zeros in the strop $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. However, these functions have also infinitely many zeros in the half-plane $\sigma > 1$.

LITERATŪRA

1. A. Laurinčikas, Rymano dzeta funkcijos teorijos pagrindai, Vilniaus universitetas, Vilnius, 1990.

2. К. Прахар, Распределение простых чисел, Мир, Москва, 1967.

3. С. М. Воронин, А. А. Карацуба, Дзета-функция Римана, Физматлит, Москва, 1994.

4. И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, Наука, 1967.