ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Justa Krasauskaitė

TIKIMYBINIŲ MATŲ CHARAKTERINGOSIOS TRANSFORMACIJOS

Magistro darbas

Darbo vadovas
prof. habil. dr. A. Laurinčikas

Šiauliai, 2007

Turinys

ĮVADAS 2

1. PAGALBINIAI REZULTATAI 4

2. TIKIMYBINIAI MATAI ERDVĖJE $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}(\mathbb{Y}))$ 8

3. ATITIKTIS TARP MATŲ IR JŲ CHARAKTERINGŲJŲ TRANSFORMACIJŲ 15

4. TOLYDUMO TEOREMOS ERDVĖJE $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$ 18

IŠVADOS 24

SUMMARY 25

LITERATŪRA 26

ĮVADAS

Tikimybiniai matai yra vienos iš svarbiausių įrankių tiriant atsitiktinius reiškinius bei dydžius. Asimtotinį šių objektų elgesį charaktrerizuoja tikimybinių matų konvergavimas, daržniausiai yra naudojamas silpnas konvergavimas. Todėl tikimybinių matų įvairiose erdvėse tyrimas yra svarbus tikimybių teorijos uždavinys.

Tegul, kaip įprasta, $\mathbb{R}$ yra visų realiųjų skaičių aibė, o $\mathbb{C}$ yra kompleksinė plokštuma. Magistro darbe yra nagrinėjami tikimybiniai matai ir jų silpnasis konvergavimas Dekarto sandaugoje $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$. Tam tikslui yra naudojamos charakteringosios transformacijos.

Simboliu $\mathcal{B}(S)$ žymėsime erdvės S Borelių aibės klasę ir tegul, trumpumo dėlei, $\mathbb{X} = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$. Erdvės $\mathbb{X}$ taškams naudosime žymenį $(x, re^{i\varphi})$. Tegu P yra tikimybinis matas, apibrėžtas erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$, ir

$$P_{\mathbb{R}}(A) = P(A \times \mathbb{C}), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Tuomet funkcijas

$$w(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\tau x} dP_{\mathbb{R}}, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

ir

$$w(\tau_1, \tau_2, k) = \int_{\mathbb{X}} e^{i(\tau_1 x + k\varphi)} r^{i\tau_2} dP, \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z},$$

vadiname mato P charakteringosiomis transformacijomis. Funkcijos $w(\tau_1, \tau_2, k)$ apibrėžime pointegralinę funkciją laikome lygia nuliui, jei $r = 0$.

Egzistuoja glaudus ryšys tarp mato P ir jo charkteringųjų transformacijų. Tai rodo toks tvirtinimas.

3.1 teorema. *Tikimybinis matas P yra vienareikšmiškai apibrėžiamas savo charakteringosiomis transformacijomis* $(w(\tau), w(\tau_1, \tau_2, k))$.

Charakteringosios transformacijos yra naudingas objektas tiriant tikimybinių matų konvergavimą erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$.

Tegul P_n, $n \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ yra sveikųjų teigiamų skaičių aibė), ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$. Sakome, jog P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P erdvės $\mathbb{X}$ prasme, jei P_n silpnai konverguoja į P ir papildomai

$$\lim_{n\to\infty} P_n(\mathbb{R}\times\{0\}) = P(\mathbb{R}\times\{0\}).$$

Šis apibrėžimas primena tikimybinių matų konvergavimą erdvės $\mathbb{C}$ prasme, kuris buvo nagrinėtas [3] ir [4] darbuose.

Magistro darbe yra gauti kai kurie rezultatai apie matų erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$ konvergavimą.

5.1 teorema. *Tegul P_n yra tikimybinis matas erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$, o $(w_n(\tau), w_n(\tau_1, \tau_2, k))$ yra jo charakteringosios transformacijos, $n \in \mathbb{N}$. Tarkime, jog P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja erdvės $\mathbb{X}$ prasme į kurį nors tikimybinį matą P erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$. Tuomet*

$$\lim_{n\to\infty} w_n(\tau) = w(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} w_n(\tau_1, \tau_2, k) = w(\tau_1, \tau_2, k), \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

Čia $(\omega(\tau), \omega(\tau_1, \tau_2, k))$ yra mato P charakteringosios transformacijos.

5.2 teorema. *Tegul P_n ir $(w_n(\tau), w_n(\tau_1, \tau_2, k))$ yra apibrėžti 5.1 teoremoje. Tarkime, kad*

$$\lim_{n\to\infty} w_n(\tau) = w(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} w_n(\tau_1, \tau_2, k) = w(\tau_1, \tau_2, k), \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z},$$

o funkcijos $w(\tau)$, $w(\tau_1, 0, 0)$ ir $w(0, \tau_2, 0)$ yra tolydžios atitinkamai taškuose $\tau = 0$, $\tau_1 = 0$ ir $\tau_2 = 0$. Tuomet erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja erdvės $\mathbb{X}$ prasme į matą P. Šiuo atveju $(w(\tau), w(\tau_1, \tau_2, k))$ yra mato P charakteringosios transformacijos.

Įrodytos teoremos gali būti pritaikytos analizinėje skaičių teorijoje nagrinėjant funkcijų, apibrėžiamų Dirichlė eilutėmis, reikšmių pasiskirstymą.

1. PAGALBINIAI REZULTATAI

1. apibrėžimas. Tarkime, kad Ω yra netuščia aibė. Jos poaibių sistema $\mathcal{F}$ vadinama σ-algebra (σ-kūnu), jei

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. $A^c \in \mathcal{F}$, kai $A \in \mathcal{F}$,
3. $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{F}$, kai $A_m \in \mathcal{F}$, $m = 1, 2, \ldots$

2. apibrėžimas. Neneigiama aibės funkcija P, tenkinanti sąlygas

1. $P(\Omega) = 1$,
2. $P(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} P(A_m)$ visoms tokioms aibėms $A_m \in \mathcal{F}$, kad $A_k \cap A_l = \emptyset$, $k \neq l$, vadinama tikimybiniu matu.

3. apibrėžimas. Tarkime, kad $\mathcal{A}$ yra aibių sistema. Mažiausias σ - kūnas, kuriam priklauso ši sistema vadinamas aibių sistemos $\mathcal{A}$ genetruotu σ - kūnu. Jei S - metrinė erdvė, tai jos visų atvirų aibių sistemos generuotas σ - kūnas vadinamas erdvės S Borelio aibių klase ir žymimas $\mathcal{B}(S)$.

Tarkime, kad P_n ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$.

4. apibrėžimas. Jei su kiekviena realia, tolydžia funkcija f erdvėje S

$$\int\limits_S f dP_n \to \int\limits_S f dP, \quad n \to \infty,$$

tai sakome, kad matas P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P. Tai žymėsime simboliu $P_n \Longrightarrow P$

1.1 teorema. $P_n \Longrightarrow P$ tada ir tik tada, kai iš bet kokio posekio $\{P_{n'}\}$ galima išskirti tokį posekį $\{P_{n''}\}$, kad $P_{n''} \Longrightarrow P$.

5. apibrėžimas. Apibrėžtų erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ tikimybinių matų seka $\{P\}$ vadinama reliatyviai kompaktiška, jei bet kokia elementų iš $\{P\}$ seka turi silpnai konverguojantį posekį.

6. apibrėžimas. Apibrėžtų erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ tikimybinių matų seka $\{P\}$ vadinama suspausta, jei bet kokiam $\varepsilon > 0$ egzistuoja tokia kompaktiška aibė K, kad $P(K) > 1 - \varepsilon$ visiems P iš $\{P\}$.

1.2 teorema. *Jei tikimybinių matų seka* $\{P\}$ *yra suspausta, tai ji yra ir realiatyviai kompaktiška.*

1.3 teorema. *Tegul* $P_n, n \in \mathbb{N}$ *ir* P *yra tikimybiniai matai erdvėje* $(S, \mathcal{B}(S))$*. Tuomet* $P_n, n \to \infty$*, silpnai konverguoja į matą* P *tada ir tik tada, kai kiekvienas posekis* $\{P_{n,1}\} \subset \{P_n\}$ *turi savyje tokį kitą posekį* $\{P_{n,2}\}$*, kad* $P_{n,2}, n \to \infty$*, silpnai konverguoja į* P*.*

Teoremų 1.1, 1.2, 1.3 įrodymus galime rasti [1] monografijoje.

7. apibrėžimas. Tegul P yra tikimybinis matas erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$. Aibė $A \in (S, \mathcal{B}(S))$ yra vadinama mato tolydumo aibe, jeigu $P(\partial A) = 0$. Čia ∂A yra aibės A kraštas.

Mums bus reikalingas toks silpnojo kponvergavimo ekvivalentumas.

1.4 teorema. *Tikimybinis matas* P_n*, kai* $n \to \infty$*, silpnai konverguoja į matą* P *tada ir tik tada, jeigu kiekvienai mato* P *tolydumo aibei* A

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A).$$

Teorema yra dalis 1.1 teoremos iš [1].

1.5 teorema. *Tikimybinis matas* P *erdvėje* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *yra vienareikšmiškai apibrėžiamas savo charakteringąja funkcija.*

Prisiminsime tikimybinių matų konvergavimą erdvėse $\mathbb{R}$ ir $\mathbb{C}$.

Tegul P yra tikimybinis matas erdvėje $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Šio mato charakteringoji funkcija $f(\tau)$ yra apibrėžiama formule

$$f(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\tau x} dP.$$

1.6 teorema. *Tegu* P_n *yra tikimybinis matas erdvėje* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*, o* $f_n(\tau)$ *yra jo charakteringoji funkcija,* $n \in \mathbb{N}$*. Tarkime, kad* P_n*, kai* $n \to \infty$*, silpnai konverguoja į matą* P*. Tuomet* $f_n(\tau)$ *konverguoja į mato* P *charakteringąją funkciją. Konvergavimas yra tolydus kiekviename baigtiniame intervale.*

1.7 teorema. *Tegu* P_n *ir* f_n *yra apibrėžti 1.6 teoremoje, jeigu*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\tau) = f(\tau),$$

o funkcija τ yra tolydi taške $\tau = 0$, tai tada matas P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į kurį nors matą P erdvėje $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Šiuo atveju f yra mato P charakteringoji funkcija.

1.6 ir 1.7 teoremų įrodymus galima rasti [2].

Tegul P_n yra tikimybinis matas erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$. Mato P charakteringoji transformacija $w(\tau, k)$ yra apibrėžiama formule

$$w(\tau, k) = \int\limits_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} |z|^{i\tau} e^{ik \arg z} dP, \quad \tau \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

1.8 teorema. *Tikimybinis matas P erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ apibrėžiamas vienareikšmiškai savo charakteringąja transformacija $w(\tau, k)$.*

8. apibrėžimas. *Tegul P ir P_n yra tikimybiniai matai erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$. Sakome, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja erdvės $\mathbb{C}$ prasme į matą P, jeigu P_n, kai $n \to \infty$ silpnai konverguoja į P ir papildomai*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(\{0\}) = P(\{0\}).$$

Yra teisingos tokios tolydumo teoremos.

1.8 teorema. *Tegul P_n ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$, o $w_n(\tau, k)$ ir $w(\tau, k)$ yra jų charakteringosios transformacijos. Jeigu P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja erdvės $\mathbb{C}$ prasme į matą P, tai tada*

$$\lim_{n\to\infty} w_n(\tau, k) = w(\tau, k), \quad \tau \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

1.9 teorema. *Tegul P_n yra tikimybinis matas erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$, o $w_n(\tau, k)$ jo charakteringoji transformacija, $n \in \mathbb{N}$. Tarkime, kad*

$$\lim_{n\to\infty} w_n(\tau, k) = w(\tau, k), \quad \tau \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z},$$

ir funkcija $w(\tau, k)$ yra tolydi taške $\tau = 0$. Tuomet erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P, į kurį kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja erdvės

$\mathbb{C}$ *prasme matas* P_n.

Šių teoremų įrodymai duoti [3] ir [4].

2. TIKIMYBINIAI MATAI ERDVĖJE $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}(\mathbb{Y}))$

Tegul γ yra vienetinis apskritimas $\{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ kompleksinėje plokštumoje, $\mathbb{T} = \mathbb{R} \times \gamma$, o $\mathbb{Y} = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$. Sandaugos $\mathbb{Y}$ taškus žymėsime (x, y, α) su $x, y \in \mathbb{R}$ ir $\alpha \in \gamma$. Tikimybinio mato P erdvėje $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}(\mathbb{Y}))$ Furjė transformacija $f(\tau_1, \tau_2, k)$, $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, yra apibrėžiama formule

$$f(\tau_1, \tau_2, k) = \int\limits_{\mathbb{Y}} e^{i(\tau_1 x + \tau_2 y)} \alpha^k dP.$$

Tikimybinių matų erdvėje $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}(\mathbb{Y}))$ tyrimą pradėsime tokia teorema.

2.1 teorema. *Tikimybinis matas P yra vienareikšmiškai apibrėžiamas savo Furjė transformacija $f(\tau_1, \tau_2, k)$.*

Įrodymas. Imkime du matus P_1 ir P_2 erdvėje $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}(\mathbb{Y}))$ su jų Furjė transformacijomis $f_1(\tau_1, \tau_2, k)$ ir $f_2(\tau_1, \tau_2, k)$. Mums reikia įrodyti, kad iš lygybės

$$f_1(\tau_1, \tau_2, k) = f_2(\tau_1, \tau_2, k), \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z},$$

visoms aibėms $A \in \mathcal{B}(\mathbb{Y})$ išplaukia lygybė

$$P_1(A) = P_2(A).$$

Aišku, jog pastarąją lygybę pakanka įrodyti aibėms A, turinčioms pavidalą $A = (a, b] \times (c, d] \times l$, kur l apskritimo γ laukas ir $-\infty < a < b < \infty$, $-\infty < c < d < \infty$.

Realių skaičių aibėje $\mathbb{R}$ apibrėžiame funkciją $\psi(u)$ formule

$$\psi(u) = \begin{cases} 1, & \text{kai } u \leq 0, \\ 1 - u, & \text{kai } 0 \leq u \leq 1, \\ 0, & \text{kai } u \geq 1, \end{cases}$$

ir tegul $\psi_n(u) = \psi(nu)$. Simboliu $\rho(x, A)$ žymėsime taško x atstumą iki aibės

A, t.y.

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y),$$

o $\rho_1(\alpha, l)$ yra taško α atstumas iki lanko l. Apibrėžiame funkcijas

$$\begin{aligned} g_{1,n}(x) &= \psi_n(\rho(x, (a, b])), \\ g_{2,n}(y) &= \psi_n(\rho(y, (c, d])), \\ g_{3,n}(\alpha) &= \psi_n(\rho_1(\alpha, l)), \end{aligned} \tag{1}$$

ir tegul I_A yra aibės A indfikatorius. Tuomet iš funkcijos $\psi(u)$ apibrėžimo ir (1) gauname, kad

$$\lim_{n\to\infty} g_{1,n}(x) = I_{(a,b]}(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} g_{1,n}(y) = I_{(c,d]}(y),$$

$$\lim_{n\to\infty} g_{1,n}(\alpha) = I_l(\alpha).$$

Todėl

$$P_j(A) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{Y}} g_{1,n}(x) g_{2,n}(y) g_{3,n}(\alpha) dP_j, \quad j = 1, 2.$$

Vadinasi pakanka įrodyti, jog visiems $n \in \mathbb{N}$ yra teisinga lygybė

$$\int\limits_{\mathbb{Y}} g_{1,n}(x) g_{2,n}(y) g_{3,n}(\alpha) dP_1 = \int\limits_{\mathbb{Y}} g_{1,n}(x) g_{2,n}(y) g_{3,n}(\alpha) dP_2. \tag{2}$$

Fiksuojame $n \in \mathbb{N}$, imame $0 < \varepsilon < 1$ ir parenkame tokius skaičius $K_1 > 0$ ir $K_2 > 0$, kad funkcijos $g_{1,n}(x)$ ir $g_{2,n}(y)$ būtų lygios 0 atitinkamai už intervalų $[-K_1, K_1]$ ir $[-K_2, K_2]$ ribų ir be to, galiotų nelygybė

$$P_j(\mathbb{Y} \backslash A_{K_1,K_2}) < \varepsilon, \quad j = 1, 2, \tag{3}$$

kur

$$A_{K_1,K_2} = \big\{(x, y, \alpha) \in \mathbb{Y} : |x| \le K_1, |y| \le K_2\big\}.$$

Kadangi $g_{j,n}(-K_j) = g_{j,n}(K_j)$, funkciją $g_{j,n}(x)$ pagal Vejerštraso teoremą [5] galima aproksimuoti tolygiai intervale $[-K_j, K_j]$ baigtine triginometrine suma

$$\sum_{m_j} a_{j,m_j} e^{\frac{im_j \pi x}{K_j}},$$

kuri yra periodinė su periodu $2K_j$, $j = 1, 2$. Panašiai funkcija $g_{3,n}(\alpha)$ yra aproksimuojama tiesine kombinacija apskritiminių funkcijų

$$\sum_{m_3} b_{m_3} \alpha^{m_3}.$$

Iš šių pastabų gauname, kad sandauga $g_{1,n}(x)g_{2,n}(y)g_{3,n}(\alpha)$ yra aproksimuojama tolygiai stačiakampyje

$$[-K_1, K_1] \times [-K_2, K_2]$$

baigtine suma

$$g(x, y, \alpha) = \sum_{m_1, m_2, m_3} a_{1,m_1} a_{2,m_2} b_3 e^{\frac{im_1 \pi x}{K_1}} e^{\frac{im_2 \pi y}{K_2}} \alpha^{m_3}.$$

Sumą parenkame taip, kad visiems $(x, y, \alpha) \in A_{K_1,K_2}$ būtų patenkinta nelygybė

$$\big|g_{1,n}(x)g_{2,n}(y)g_{3,n}(\alpha) - g(x, y, \alpha)\big| < \varepsilon. \tag{4}$$

Iš apibrėžimo išplaukia, kad

$$\big|g_{1,n}(x)g_{2,n}(y)g_{3,n}(\alpha)\big| \leq 1. \tag{5}$$

Todėl iš čia ir (4) gauname, kad visiems $(x, y, \alpha) \in A_{K_1,K_2}$

$$\begin{aligned} \big|g(x, y, \alpha)\big| &= \big|g_{1,n}(x)g_{2,n}(y)g_{3,n}(\alpha) + \big(g(x, y, \alpha) - g_{1,n}(x)g_{2,n}(y)g_{3,n}(\alpha)\big)\big| \leq \\ &\leq \big|g_{1,n}(x)g_{2,n}(y)g_{3,n}(\alpha)\big| + \big|g(x, y, \alpha) - g_{1,n}(x)g_{2,n}(y)g_{3,n}(\alpha)\big| < \\ &< 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Iš čia ir funkcijos $g(x, y, \alpha)$ periodiškumo turime, kad visiems $(x, y, \alpha) \in$

$\mathbb{Y}\backslash A_{K_1,K_2}$ teisinga nelygybė

$$\begin{aligned}\big|g_{1,n}(x)g_{2,n}(y)g_{3,n}(\alpha)-g(x,y,\alpha)\big| &\leq \big|g_{1,n}(x)g_{2,n}(y)g_{3,n}(\alpha)\big|+\big|g(x,y,\alpha)\big| \\ &< 1+1+\varepsilon=2+\varepsilon. \qquad (6)\end{aligned}$$

Iš (3), (4) ir (6) randame , kad

$$\int\limits_{\mathbb{Y}}\big|g_{1,n}(x)g_{2,n}(y)g_{3,n}(\alpha)-g(x,y,\alpha)\big|dP_j=$$

$$=\Big(\int\limits_{A_{K_1,K_2}}+\int\limits_{\mathbb{Y}\backslash A_{K_1,K_2}}\Big)\big|g_{1,n}(x)g_{2,n}(y)g_{3,n}(\alpha)-g(x,y,\alpha)\big|dP_j<\varepsilon+(2+\varepsilon)\varepsilon<4\varepsilon,$$

$$j=1,2.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{Y}}g_{1,n}(x)g_{2,n}(y)g_{3,n}(\alpha)dP_1-\int\limits_{\mathbb{Y}}g_{1,n}(x)g_{2,n}(y)g_{3,n}(\alpha)dP_2\Big|$$

$$\leq\Big|\int\limits_{\mathbb{Y}}g(x,y,\alpha)dP_1-\int\limits_{\mathbb{Y}}g(x,y,\alpha)dP_2\Big|+\int\limits_{\mathbb{Y}}\big|g_{1,n}(x)g_{2,n}(y)g_{3,n}(\alpha)-g(x,y,\alpha)\big|dP_1$$

$$+\int\limits_{\mathbb{Y}}\big|g_{1,n}(x)g_{2,n}(y)g_{3,n}(\alpha)-g(x,y,\alpha)\big|dP_2<\Big|\int\limits_{\mathbb{Y}}g(x,y,\alpha)dP_1-\int\limits_{\mathbb{Y}}g(x,y,\alpha)dP_2\Big|$$

$$+4\varepsilon+4\varepsilon<\Big|\int\limits_{\mathbb{Y}}g(x,y,\alpha)dP_1-\int\limits_{\mathbb{Y}}g(x,y,\alpha)dP_2\Big|+8\varepsilon. \qquad (7)$$

Iš teoremos sąlygų ir Furjė transformacijų apibrėžimo turime lygybę

$$\int\limits_{\mathbb{Y}}g(x,y,\alpha)dP_1=\int\limits_{\mathbb{Y}}g(x,y,\alpha)dP_2.$$

Todėl iš čia ir (7), kai $\varepsilon \to 0$, gauname (2) lygybę, ko ir pakanka teoremos tvirtinimo įrodymui.

Toliau panagrinėsime tikimybinių matų erdvėje $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}(\mathbb{Y}))$ silpnąjį konvergavimą.

2.2 teorema. *Tegul P_n yra tikimybinis matas erdvėje $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}(\mathbb{Y}))$, o $f_n(\tau_1, \tau_2, k)$ yra jo Furjė transformacija, $n \in \mathbb{N}$. Tarkime, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į kurį nors matą P erdvėje $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}(\mathbb{Y}))$. Tuomet*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\tau_1, \tau_2, k) = f(\tau_1, \tau_2, k), \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z},$$

o $f(\tau_1, \tau_2, k)$ mato P Furjė transformacija.

Įrodymas. Funkcija $e^{i(\tau_1 x + \tau_x)}\alpha^k$ yra tolydi ir aprėžta erdvėje $\mathbb{Y}$. Todėl teoremos tvirtinimas yra betarpiška Furjė transformacijos apibrėžimo ir silpnojo matų konvergavimo apibrėžimo išvada.

2.3 teorema. *Tegul P_n ir $f_n(\tau_1, \tau_2, k)$, $n \to \infty$, yra apibrėžti 2.2 teoremoje. Tarkime, kad*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\tau_1, \tau_2, k) = f(\tau_1, \tau_2, k), \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z},$$

o funkcijos $f(\tau_1, 0, 0)$ ir $f(0, \tau_2, 0)$ yra tolydžios atitinkamai taškuose $\tau_1 = 0$ ir $\tau_2 = 0$. Tuomet erdvėje $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}(\mathbb{Y}))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P, į kurį, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja matas P_n. Šiuo atveju, $f(\tau_1, \tau_2, k)$ yra mato P Furjė transformacija.

Įrodymas. Apibrėžiame matus

$$P_{\mathbb{R},n}(A) = P_n(A \times \mathbb{T}), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

ir

$$P_{\mathbb{T},n}(A) = P_n(\mathbb{R} \times A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{T}).$$

Yra žinoma, jog matų šeima $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra suspausta, jei yra suspaustos marginaliųjų matų šeimos $\{P_{\mathbb{R},n} : n \in \mathbb{N}\}$ ir $\{P_{\mathbb{T},n} : n \in \mathbb{N}\}$. Todėl pirma mes gausime pastarųjų šeimų suspaustumą. Pradėsime nuo šeimos $\{P_{\mathbb{T},n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Tegul

$$f_n(\tau_2, k) = f_n(0, \tau_2, k), \quad \tau_2 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

Tuomet funkcija $f_n(\tau_2, k)$ yra mato $P_{\mathbb{T},n}$ Furjė transformacija. Iš teoremos sąlygų turime, kad

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\tau_2, k) = f_n(0, \tau_2, k) \overset{def}{=} f(\tau_2, k), \quad \tau_2 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Tegul $u > 0$. Tuomet pasinaudoję Fubinio teorema [4, 1.74 teorema] apie integravimo tvarkos keitimą ir Furjė transformacijos apibrėžimu, gauname

$$\frac{1}{u}\int\limits_{-u}^{u} \big(1 - f_n(\tau_2, 0)\big) d\tau_2 = \frac{1}{u}\int\limits_{-u}^{u} \left(1 - \int\limits_{\mathbb{T}} e^{i\tau_2 y} dP_{\mathbb{T},n}\right) d\tau_2 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{u}\int\limits_{-u}^{u} \big(1 - e^{i\tau_2 y}\big) d\tau_2\right) dP_{\mathbb{T},n} - \int\limits_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{u}\left(1 - \frac{e^{i\tau_2 y}}{iy}\right)\Bigg|_{-u}^{u}\right) dP_{\mathbb{T},n} =$$

$$= 2\int\limits_{\mathbb{T}} \left(1 - \frac{\sin uy}{uy}\right) dP_{\mathbb{T},n} \geq \int\limits_{(y,\alpha)\in\mathbb{T}, |y|\geq \frac{2}{u}} \left(1 - \frac{1}{|uy|}\right) dP_{\mathbb{T},n} \geq$$

$$\geq P_{\mathbb{T},n}\left((y, \alpha) \in \mathbb{T} : |y| \geq \frac{2}{u}\right). \tag{9}$$

Dabar pasinaudosime funkcijos $f(\tau_2, 0)$ tolydumu taške $\tau_2 = 0$. Turime, kad kiemvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $u > 0$, kad

$$\frac{1}{u}\int\limits_{-u}^{u} \big|1 - f(\tau_2, 0)\big| d\tau_2 < \varepsilon.$$

Iš čia, (8) bei Lebego teoremos apie aprėžtą konvergavimą [5] gauname, kad egzistuoja toks $n_0 \in \mathbb{N}$, kad visiems $n \geq n_0$ yra patenkinta nelygybė

$$\frac{1}{u}\int\limits_{-u}^{u} \big|1 - f_n(\tau_2, 0)\big| d\tau_2 < 2\varepsilon.$$

Ši nelygybė kartu su (9) nelygybe parodo, jog visiems $n \geq n_0$

$$P_{\mathbb{T},n}\bigg((y,\alpha) \in \mathbb{T} : |y| \geq \frac{2}{u}\bigg) < 2\varepsilon. \tag{10}$$

Mažindami u galime pasiekti, kad paskutinioji lygybė išliktų teisinga ir visiems $n < n_0$. Kadangi aibė $K = \big\{(y,\alpha) \in \mathbb{T} : |y| \leq \frac{2}{u}\big\}$ yra kompaktiška erdvėje $\mathbb{T}$, tai iš (10) turime, kad visiems $n \in \mathbb{N}$ teisinga nelygybė

$$P_{\mathbb{T},n}(K) > 1 - 2\varepsilon.$$

Pagal apibrėžimą tai reiškia, kad tikimybinių matų šeima $\{P_{\mathbb{T},n} : n \in \mathbb{N}\}$ yra suspausta.

Matų šeimos $\{P_{\mathbb{R},n} : n \in \mathbb{N}\}$ suspaustumas yra įrodomas analogiškai.

Iš pastarųjų 2 šeimų suspaustumo, kaip buvo minėta, gauname, kad matų šeima $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra suspausta. Iš čia išplaukia pagal 1.2 teoremą, kad matų šeima $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra reliatyviai kompaktiška. Todėl kiekvienas posekis $\{P_{n_1}\} \subset \{P_n\}$, turi savyje kitą posekį $\{P_{n_2}\}$, silpnai konverguojantį, kai $n_2 \to \infty$, į kurį nors matą P_2 erdvėje $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}(\mathbb{Y}))$. Be to, funkcija yra $f(\tau_1, \tau_2, k)$ mato P Furjė transformacija. Pagal 2.1 teoremą turime, kad matas P yra visų silpnai konverguojančių posekių ribinis matas. Todėl teorema yra 1.3 ir 2.2 teoremų išvada.

3. ATITIKTIS TARP MATŲ IR JŲ CHARAKTERINGŲJŲ TRANSFORMACIJŲ

Tegul $\mathbb{X} = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, o $(x, re^{i\varphi})$ yra erdvės $\mathbb{X}$ taškai. Tegul P yra tikimybinis matas erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$, ir

$$P_{\mathbb{R}}(A) = P(A \times \mathbb{C}), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Tuomet funkcijos

$$w(\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\tau x} dP_{\mathbb{R}}, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

ir

$$w(\tau_1, \tau_2, k) = \int\limits_{\mathbb{X}} e^{i(\tau_1 x + ky)} r^{i\tau_2} dP, \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z},$$

yra vadinamos mato P charakteringosiomis transformacijomis.

Šiame skyrelyje įrodysime tokį tvirtinimą.

3.1 teorema. *Tikimybinis matas P yra vienareikšmiškai apibrėžiamas savo charakteringosiomis transformacijomis $(w(\tau), w(\tau_1, \tau_2, k))$.*

Įrodymas. Pirmiausia pastebime, kad viena funkcija $w(\tau_1, \tau_2, k)$ negali vienareikšmiškai apibrėžti mato P. Pavyzdžiui, tarkime, kad matas P_j turi vienetinę masę taške $(x_j, 0)$, $j = 1, 2$, $x_1 \neq x_2$. Tuomet $w_1(\tau_1, \tau_2, k) = w_2(\tau_1, \tau_2, k) = 0$ nors $P_1 \neq P_2$. Kitais žodžiais tariant, jeigu $r = 0$, tai funkcija $w(\tau_1, \tau_2, k)$ neskiria matų erdvės $\mathbb{X}$ komponentėje $\mathbb{R}$.

Tegul $\mathbb{X}_0 = \mathbb{R} \times (\mathbb{C} \backslash \{0\})$. Tuomet funkcija $h : \mathbb{X}_0 \to \mathbb{Y}$, apibrėžta formule

$$h(x, re^{i\varphi}) = (x, \log r, e^{i\varphi}),$$

yra tolydi, todėl ir mati. Vadinasi,

$$w(\tau_1, \tau_2, k) = \int\limits_{\mathbb{X}} e^{i(\tau_1 x + ky)} r e^{i\varphi\tau_2} dP = \int\limits_{\mathbb{Y}} e^{i(\tau_1 x + \tau_2 y)} \alpha^k dP h^{-1}, \tag{11}$$

$$\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

Čia matas $Ph^{-1}(A)$ yra apibrėžiamas formule

$$Ph^{-1}(A) = P(h^{-1}A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}).$$

Tegul $\beta = w(0,0,0) = P(\mathbb{X}_0)$. Tarkime, kad $\beta \neq 0$, ir erdvėje $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}(\mathbb{Y}))$ apibrėžiame tikimybinį matą $\hat{P}$ formule

$$\hat{P}(A) = \frac{P(h^{-1}A)}{\beta} = \frac{Ph^{-1}(A)}{\beta}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}) \tag{12}$$

Iš čia išreiškiame $Ph^{-1}(A)$ ir įstatę į (11), gauname,

$$w(\tau_1, \tau_2, k) = \beta \int\limits_{\mathbb{Y}} e^{i(\tau_1 x + \tau_2 y)} \alpha^k d\hat{P}, \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}. \tag{13}$$

Tegul

$$\hat{f}(\tau_1, \tau_2, k) = \int\limits_{\mathbb{Y}} e^{i(\tau_1 x + \tau_2 y)} \alpha^k d\hat{P}, \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z},$$

yra mato $\hat{P}$ Furjė transformacija. Tuomet (13) formulę galima perrašyti pavidalu

$$\hat{f}(\tau_1, \tau_2, k) = \frac{w(\tau_1, \tau_2, k)}{\beta}, \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}. \tag{14}$$

Iš 2.1 teoremos turime, kad matas $\hat{P}$ yra vienareikšmiškai apibrėžiamas savo Furjė transformacija $\hat{f}(\tau_1, \tau_2, k)$. Todėl iš (14) gauname, kad jis yra vienareikšmiškai apibrėžiamas ir funkcija $w(\tau_1, \tau_2, k)$. Vadinasi matas $P(A)$ yra vienareikšmiškai apibrėžiamas $w(\tau_1, \tau_2, k)$ visoms aibėms $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, $A \subset \mathbb{X}_0$. Atskiru atveju, $P(A \times (\mathbb{C} \backslash \{0\}))$ yra vienareikšmiškai apibrėžiamas visoms aibėms $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$. Kadangi matas $P(A \times \mathbb{C})$ vienareikšmiškai apibrėžiamas, iš čia gauname, kad $P(A \times \{0\})$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, yra taip pat vienareikšmiškai apibrėžiamas funkcijomis $w(\tau)$ ir $w(\tau_1, \tau_2, k)$. Tai rodo, kad $P(A)$ visoms aibėms $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, $A \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = \emptyset$, yra vienareikšmiškai apibrėžiamas charakteringosiomis transformacijomis. Taigi atveju $\beta \neq 0$ teorema įrodyta.

Tegul $\beta = 0$, t.y., $P(\mathbb{X}_0) = w(0,0,0) = 0$. Iš čia turime, kad $P(A) = 0$

visoms aibėms $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$, $A \in \mathbb{X}_0$, yra vienareikšmiškai apibrėžta. Šiuo atveju visoms aibėms A,

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}), A = A_1 \times A_2, A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{C}), 0 \in A_2,$$

turime

$$P(A) = P(A_1 \times A_2) = P(A_1 \times (A_2 \backslash \{0\})) + P(A_1 \times \{0\}) = P(A_1 \times \{0\}).$$

Tačiau

$$P(A_1 \times \{0\}) = P(A_1 \times \mathbb{C}) - P(A_1 \times (\mathbb{C} \backslash \{0\})) = P(A_1 \times \mathbb{C}) = P_{\mathbb{R}}(A_1),$$

todėl yra vienareikšmiškai apibrėžiama funkcija $w(\tau)$. Teorema visais atvejais įrodyta.

4. TOLYDUMO TEOREMOS ERDVĖJE $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$

Šiame skyrelyje gausime pagrindinius darbo rezultatus apie silpnąjį tikimybinį matų konvergavimą erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$. Šiam tikslui naudosime charakteringąsias transformacijas.

Visų pirma apibrėšime silpnąjį tikimybinių matų konvergavimą erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$. Tegul P_n, $n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$. Sakome, jog P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P erdvės $\mathbb{X}$ prasme, jei P_n silpnai konverguoja į P ir papildomai

$$\lim_{n\to\infty} P_n(\mathbb{R} \times \{0\}) = P(\mathbb{R} \times \{0\}).$$

5.1 teorema. *Tegul P_n yra tikimybinis matas erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$, o $(w_n(\tau), w_n(\tau_1, \tau_2, k))$ yra jo charakteringosios transformacijos, $n \in \mathbb{N}$. Tarkime, jog P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja erdvės $\mathbb{X}$ prasme į kurį nors tikimybinį matą P erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$. Tuomet*

$$\lim_{n\to\infty} w_n(\tau) = w(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} w_n(\tau_1, \tau_2, k) = w(\tau_1, \tau_2, k), \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

Čia $(\omega(\tau), \omega(\tau_1, \tau_2, k))$ yra mato P charakteringosios transformacijos.

Įrodymas. Kadangi P_n, kai $n \to \infty$, sipnai konverguoja į P, tai iš čia turime, kad $P_{\mathbb{R},n}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į $P_{\mathbb{R}}$. Todėl turime atitinkamų charakteringųjų funkcijų konvergavimą

$$\lim_{n\to\infty} w_n(\tau) = w(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Tegul

$$\beta = w(0, 0, 0) = \int\limits_{\mathbb{X}_0} dP = P\big(\mathbb{R} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})\big).$$

Kadangi

$$\lim_{n\to\infty} P_n(\mathbb{R}\times\{0\}) = P(\mathbb{R}\times\{0\}),$$

tai pažymėję

$$\beta_n = w_n(0,0,0),$$

gauname

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta.$$

Jeigu $\beta \neq 0$, tai gauname, kad matas $\hat{P}_n$, kai $n\to\infty$, silpnai konverguoja į matą $\hat{P}$. Todėl iš 2.2 teoremos išplaukia atitinkamų Furjė transformacijų konvergavimas

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(\tau_1,\tau_2,k) = \hat{f}(\tau_1,\tau_2,k), \quad \tau_1,\tau_2\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{Z}.$$

Iš čia pasinaudoję (14) tipo formule randame, kad

$$\lim_{n\to\infty} w_n(\tau_1,\tau_2,k) = w(\tau_1,\tau_2,k), \quad \tau_1,\tau_2\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{Z}.$$

Jeigu $\beta = 0$, tai ribinis matas P yra sukoncentruotas aibėje $(\mathbb{R}\times\{0\})$, o jo charakteringoji transformacija $w(\tau_1,\tau_2,k)\equiv 0$. Todėl iš charakteringų transformacijų apibrėžimo gauname, kad

$$\lim_{n\to\infty} w_n(\tau_1,\tau_2,k) \equiv 0.$$

Teorema įrodyta.

Dabar suformuluosime ir įrodysime teoremą, atvirkštinę 5.1 teoremai.

5.2 teorema. *Tegul P_n ir $(w_n(\tau), w_n(\tau_1,\tau_2,k))$ yra apibrėžti 5.1 teoremoje. Tarkime, kad*

$$\lim_{n\to\infty} w_n(\tau) = w(\tau), \quad \tau\in\mathbb{R},$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} w_n(\tau_1,\tau_2,k) = w(\tau_1,\tau_2,k), \quad \tau_1,\tau_2\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{Z},$$

o funkcijos $w(\tau)$, $w(\tau_1,0,0)$ ir $w(0,\tau_2,0)$ yra tolydžios atitinkamai taškuose

$\tau = 0$, $\tau_1 = 0$ ir $\tau_2 = 0$. Tuomet erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja erdvės $\mathbb{X}$ prasme į matą P. Šiuo atveju $(w(\tau), w(\tau_1, \tau_2, k))$ yra mato P charakteringosios transformacijos.

Įrodymas. Tegul

$$P_n = w_n(0, 0, 0).$$

Pagal teoremos sąlygą turime, kad

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = w(0, 0, 0) \overset{def}{=} \beta.$$

Tarkime, kad $\beta \neq 0$. Tuomet egzistuoja toks skaičius $n \in \mathbb{N}$, kad $\beta_n \neq 0$, kai $n \geq n_0$. Tarkime, kad $n \geq n_0$, ir (12) formule apibrėžiame matą $\hat{P}_n$ erdvėje $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}(\mathbb{Y}))$. Tegul $\hat{f}_n(\tau_1, \tau_2, k)$ yra mato $\hat{P}_n$ Furjė transformacija. Tuomet iš (14) formulės turime, kad

$$\hat{f}_n(\tau_1, \tau_2, k) = \frac{w_n(\tau_1, \tau_2, k)}{\beta_n}, \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

Kadangi

$$\lim_{n\to\infty} w_n(\tau_1, \tau_2, k) = w(\tau_1, \tau_2, k), \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

ir funkcijos $w(\tau)$, $w(\tau_1, 0, 0)$ ir $w(0, \tau_2, 0)$ yra tolydžios atitinkamai taškuose $\tau = 0$, $\tau_1 = 0$ ir $\tau_2 = 0$, tai iš čia gauname, jog egzistuoja riba

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(\tau_1, \tau_2, k) = \hat{f}(\tau_1, \tau_2, k), \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z},$$

o funkcijos $\hat{f}(\tau_1, 0, 0)$ ir $\hat{f}(0, \tau_2, 0)$ yra tolydžios atitinkamai taškuose $\tau_1 = 0$ ir $\tau_2 = 0$. Todėl iš 2.2 teoremos turinio, kad erdvėje $(\mathbb{Y}, \mathcal{B}(\mathbb{Y}))$ egzistuoja toks tikimybinis matas $\hat{P}$, į kurį, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja matas $\hat{P}_n$, be to, $\hat{f}(\tau_1, \tau_2, k)$ yra mato $\hat{P}$ Furjė transformacija.

Simboliu ∂A žymėsime aibės A kraštą. Primename, jog kraštą sudaro tokie taškai, kurių kiekvienoje aplinkoje yra taškų, priklausančių aibei A ir nepriklausančių aibei A. 3 skyrelyje buvome apibrėžę funkciją $h : \mathbb{X}_0 \to \mathbb{Y}$ formule

$$h(x, re^{i\varphi}) = (x, \log r, e^{i\varphi})$$

ir matėme, kad ji yra tolydi. Nesunku matyti, jog jos atvirkštinė funkcija yra taip pat tolydi. Iš čia turime, jog funkcija h yra homeomorfinė. Todėl [1] kiekvienai aibei $A \in \mathcal{B}(\mathbb{Y})$ yra teisinga lygybė

$$\partial(h^{-1}A) = h^{-1}(\partial A). \tag{15}$$

Kadangi $\hat{P}_n$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į $\hat{P}$ ir

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta,$$

tai iš mato $\hat{P}$ apibrėžimo turime, kad erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P, kad

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A)$$

visoms aibėms $A = h^{-1}B$, kur $B \in \mathcal{B}(\mathbb{Y})$ ir $P(h^{-1}\partial B) = 0$. Tada pagal (15) lygybę

$$P(\partial h^{-1}B) = P(\partial A).$$

Todėl gauname, kad

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A) \tag{16}$$

visoms mato P tolydumo aibėms A, neturinčioms taškų $(x, 0)$. Atskiru atveju,

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})) = P(A \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})) \tag{17}$$

visoms mato $P(A \times \mathbb{C}) = P_{\mathbb{R}}(A)$ toludumo aibėms A. Be to, kadangi

$$\lim_{n\to\infty} w_n(\tau) = w(\tau)$$

ir funkcija $w(\tau)$ yra tolydi taške $\tau = 0$, tai turime, kad

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A \times \mathbb{C}) = P(A \times \mathbb{C})$$

visoms mato $P_{\mathbb{R}}$ tolydumo aibėms. Iš čia ir (17) visoms mato $P_{\mathbb{R}}$ tolydumo aibėms A gauname sąryšį

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A \times \{0\}) = P(A \times \{0\}). \tag{18}$$

Tarkime, kad $B \supset 0$ yra mato $P_{\mathbb{C}}$, $P_{\mathbb{C}}(B) = P(\mathbb{R} \times B)$ tolydumo aibė. Tada iš (16)-(18) išplaukia, kad kiekvienai mato $P_{\mathbb{R}}$ tolydumo aibei A

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P_n(A \times B) &= \lim_{n\to\infty} P_n(A \times ((\mathbb{C} \setminus \{0\}) \setminus B^c) \cup \{0\}) \\
&= \lim_{n\to\infty} P_n(A \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) - \lim_{n\to\infty} P_n(A \times B^c) \\
&+ \lim_{n\to\infty} P_n(A \times \{0\}) = P(A \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})) \\
&- P(A \times B^c) + P(A \times \{0\}) = P(A \times B).
\end{aligned}$$

Taigi gavome, kad matas P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į P.

Kadangi

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta,$$

tai panašiu būdu randame, kad ir

$$\lim_{n\to\infty} P_n(\mathbb{R} \times \{0\}) = P(\mathbb{R} \times \{0\}).$$

Taigi atveju, kai $\beta \neq 0$, teorema yra įrodyta.

Tegul $\beta = 0$. Tuomet

$$\lim_{n\to\infty} P_n(\mathbb{R} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})) = 0.$$

Iš čia gauname, kad

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A) = 0$$

visoms aibėms $A \in \mathbb{R} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Kadangi

$$\lim_{n\to\infty} w_n(\tau) = w(\tau),$$

turime, kad visoms mato $P_{\mathbb{R}}$ tolydumo aibėms

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A \times \mathbb{C}) = P(A \times \mathbb{C}).$$

Iš čia ir sąryšio

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})) = 0$$

gauname, jog

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A \times \{0\}) = P(A \times \mathbb{C}) = P(A \times \{0\}).$$

Kadangi

$$\lim_{n\to\infty} P_n(\mathbb{R} \times \{0\}) = 1,$$

gauname, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja erdvės $\mathbb{X}$ prasme į matą P, kurio visa masė sukoncentruota aibėje $\mathbb{R} \times \{0\}$.

Visais atvejais iš silpno mato konvergavimo apibrėžimo turime, kad $(w(\tau), w(\tau_1, \tau_2, k))$ yra matų P charakteringosios transformacijos.

IŠVADOS

Tegul $\mathbb{R}$ realių skaičių aibė , o $\mathbb{C}$ kompleksinių skaičių plokštuma ir $\mathbb{X} = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$. Erdvės $\mathbb{X}$ taškai yra žymimi $(x, re^{i\varphi})$. Tegul $\mathcal{B}(S)$ erdvės S Borelio aibių klasė, P yra tikimybinis matas erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$, o

$$P_{\mathbb{R}}(A) = P(A \times \mathbb{C}), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Mato P charakteringosiomis transformacijomis yra vadinamos funkcijos

$$w(\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\tau x} dP_{\mathbb{R}}, \quad \tau \in \mathbb{R}$$

ir

$$w(\tau_1, \tau_2, k) = \int\limits_{\mathbb{X}} e^{i(\tau_1 x + k\varphi)} r^{i\tau_2} dP, \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

Magistro darbe nustatyta, jog matas P yra vienareikšmiškai apibrėžiamas savo charakteringosiomis transformacijomis $(w(\tau), w(\tau_1, \tau_2, k))$. Ši atitiktis tarp mato ir jo charakteringųjų transformacijų tam tikra prasme yra tolydi.

Tegu P_n, $n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$. Sakome, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P erdvės $\mathbb{X}$ prasme, jeigu P_n, kai $n \to \infty$ silpnai konverguoja į P, taip pat ir papildomai

$$\lim_{n \to \infty} P(\mathbb{R} \times \{0\}) = P(\mathbb{R} \times \{0\}).$$

Darbe gauta, jog iš silpno matų konvergavimo erdvės $\mathbb{X}$ prasme išplaukia charakteringųjų transformacijų konvergavimas ir atvirkščiai, jeigu charakteringosios transformacijos konverguoja į funkcijas tolydžias nuliniame taške, tai iš čia išplaukia matų silpnas konvergavimas erdvės $\mathbb{X}$ prasme.

SUMMARY

CHARACTERISTIC TRANSFORMS OF PROBABILITY MEASURES

Let $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$ denotes the set of all real and complex numbers, respectively. Denote $\mathbb{X} = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$. The space $\mathbb{X}$ are denoted by $(x, re^{i\varphi})$. Let $\mathcal{B}(S)$ stand for the doss of Borel sets of space S, let P be a probability measure on $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$, and

$$P_{\mathbb{R}}(A) = P(A \times \mathbb{C}), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

The functions

$$w(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\tau x} dP_{\mathbb{R}}, \quad \tau \in \mathbb{R}$$

and

$$w(\tau_1, \tau_2, k) = \int_{\mathbb{X}} e^{i(\tau_1 x + k\varphi)} r^{i\tau_2} dP, \quad \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

are called the characteristic transforms of the measure P.

In de work it is obtained that the measure P is uniquely determined by its characteristic transforms $(w(\tau), w(\tau_1, \tau_2, k))$. This correspondence between the measures P and its characteristic transforms is some sense continuous.

Let P_n, $n \in \mathbb{N}$, and P be probability measures on $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$. We say that P_n, as $n \to \infty$, converges weakly in the sense of $\mathbb{X}$ to the measure P if P_n converges weakly to P as $n \to \infty$, and, additionally,

$$\lim_{n \to \infty} P(\mathbb{R} \times \{0\}) = P(\mathbb{R} \times \{0\}).$$

It is obtained, that the weak convergence in the sense of $\mathbb{X}$ implies the convergence of characteristic transforms, and, on the contrary, if the characteristic transforms converge weakly to the functions continuous at zero, then from this the weak convergence in the sense of $\mathbb{X}$ for the probability measures fallows.

LITERATŪRA

1. П. Биллингсли, Сходимост вероятносных мер, Москва, 1977.

2. J. Kubilius, Tikimybių teorija ir matematinė statistika, Vilniaus universiteto leidykla, 1996.

3. A. Laurinčikas, The distribution of values of complex - values funkctions, Lietuvos matematikos rinkinys, 15(2), 1975, 123-134 (in Russian).

4. A. Laurinčikas, Limit Theorems for the Riemann Zeta - Function. - Kluwer, Dordrecht, 1996.

5. V. Rudinas, Matematinės analizės pagrindai, Vilnius, Mokslas, 1978.