Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 119–125

Однородное характеристическое сингулярное интегральное уравнение с бесконечным индексом логарифмического порядка

Пятрас АЛЕКНА (ŠU)
e-mail: mat.kat@fm.su.lt

Рассмотрим однородное характеристическое сингулярное интегральное уравнение

$$(K^0\phi)(t)=a(t)\phi(t)+b(t)\frac{t+i}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(\tau)\mathrm{d}\tau}{(\tau+i)(\tau-t)}=0,\quad t\in L=(-\infty,+\infty) \quad (1)$$

в предположениях:

1) $a(t)-b(t)=g_1(t)\exp\left\{i[\alpha_1\cdot h(-t)\ln^p|t|+\alpha_2\cdot h(t)\ln^p|t|]\right\}$,
2) $a(t)+b(t)=g_2(t)\exp\left\{i[\beta_1\cdot h(-t)\ln^p|t|+\beta_2\cdot h(t)\ln^p|t|]\right\}$, где $h(\pm t)\equiv 0$, при $|t|\leqslant R$; $\quad h(t)=\begin{cases}0 \text{ при } & t<-R,\\ 1 \text{ при } & t>R,\end{cases}\quad R>e$;
3) $p\in\mathbb{N}\quad(p>1)$; $\quad\alpha_i,\beta_i$ – вещественные постоянные $(i=1,2)$, $(\alpha_2-\beta_2)^2+(\alpha_1-\beta_1)^2\neq 0$;
4) $g_k(t)\in\mathbf{H}_{[L]}(\eta_k),\quad 0<\eta_k\leqslant 1,\quad g_k(t)\neq 0,\quad t\in L(k=1,2)$.

Здесь через $\mathbf{H}_{[L]}(\eta_k)$, $\quad 0<\eta_k\leqslant 1$, обозначен класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера на сомкнутой прямой. Функция $f(t)\in\mathbf{H}_{[L]}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Гельдера в окрестности любой точки вещественной прямой равномерно на всей прямой, ее односторонние пределы на бесконечности существуют и совпадают между собой.

Будем рассматривать уравнение (1) в классе $\widetilde{\mathbf{H}}$ функций, ограниченных для $-\infty\leqslant t\leqslant+\infty$, удовлетворяющих условию Гельдера на любом конечном промежутке вещественной прямой.

Очевидно, что $\mathbf{H}_{[L]}\subset\widetilde{\mathbf{H}}$. Оказалось ([1], [2]), что класс $\widetilde{\mathbf{H}}$ достаточно удобен для исследования разрешимости интегральных уравнений с бесконечним индексом степенного порядка. Схема исследования уравнении (1) заимствована из работы [2].

Введем функцию, заданную аналогом интеграла типа Коши, плотностью которого служит искомое решение $\phi \in \widetilde{\mathbf{H}}$ интегрального уравнения (1):

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{z+i}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\tau)\mathrm{d}\tau}{(\tau+i)(\tau-z)}, \quad z \in D^{\pm} = \{z : \pm\mathrm{Im}\, z > 0\}. \tag{2}$$

Для $\phi \in \widetilde{\mathbf{H}}$ интеграл (2) сходится при любом конечном $z \in D^{\pm}$, является аналитической функцией в $D^{\pm}$, причем $\Phi^{-}(-i) = 0$, и для любых $-\infty < t < +\infty$ имеют место формулы Сохоцкого-Племели ([3], с. 39):

$$\phi(t) = \Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t), \tag{3}$$

$$\frac{t+i}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\tau)\mathrm{d}\tau}{(\tau+i)(\tau-t)} = \Phi^{+}(t) + \Phi^{-}(t). \tag{4}$$

Интеграл, стоящий в левой части равенства (4), будем называть аналогом сингулярного интеграла.

Подставляя в уравнение (1) значения $\phi(t)$ и сингулярного интеграла из формул (3) и (4), получим, что функция $\Phi^{\pm}(z)$ удовлетворяет краевому условию однородной задачи Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости:

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t), \quad t \in L, \tag{5}$$

где

$$G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} = G_0(t)G_1(t), \tag{6}$$

$$G_0(t) = \frac{g_1(t)}{g_2(t)}, \quad \kappa = Ind_L G_0(t), \tag{7}$$

$$G_1(t) = e^{i\{\lambda_1 h(-t)\ln^p|t| + \lambda_2 h(t)\ln^p|t|\}}, \tag{8}$$

$$\lambda_1 = \alpha_1 - \beta_1 \quad \lambda_2 = \alpha_2 - \beta_2, \quad \lambda_2 \neq \lambda_1, p \in \mathbb{N} \quad (p > 1).$$

Обозначим через $\widetilde{\mathbf{B}}^{\pm}$ – класс функций, аналитических в $D^{\pm}$, ограниченных в любой области $D^{\pm}_{R_1} = \{z : (|z| < R_1) \cap (\pm Imz > 0)\}$ и непрерывных вплоть до L, а через $\mathbf{B}^{\pm}$ – подкласс $\widetilde{\mathbf{B}}^{\pm}$, состоящий из функций $\Phi^{\pm}(z)$, ограниченных в $D^{\pm}$, удовлетворяющих условию $\Phi^{-}(-i) = 0$.

Основная проблема исследования – установить равносильность интегрального уравнения (1) в классе $\widetilde{\mathbf{H}}$ и краевой задачи (5) в классе $\mathbf{B}^{\pm}$.

Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости в классе $\mathbf{B}^{\pm}$ достаточно хорошо изучена [4].

Для аналогов интеграла типа Коши и сингулярного интеграла введем обозначения:

$$(\mathbf{S}^{\pm}\phi)(z) = \frac{z+i}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(\tau)\mathrm{d}\tau}{(\tau+i)(\tau-z)}, \quad z \in D^{\pm}, \tag{9}$$

$$(\mathbf{S}\phi)(t) = \frac{t+i}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(\tau)\mathrm{d}\tau}{(\tau+i)(\tau-t)}, \quad t \in L. \tag{10}$$

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Однородное характеристическое сингулярное интегральное уравнение* (1) *в предложениях* 1) – 4) *в классе* $\widetilde{\mathbf{H}}$ *равносильно однородной краевой задаче Римана с плюс-бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости* (5)–(8) *в классе* $\mathbf{B}^{\pm}$.

Доказательство. Пусть $\phi(t) \in \widetilde{\mathbf{H}}$ – решение уравнения (1) в предложениях 1) – 4). Тогда кусочно-аналитическая функция

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\pm}(z) = (S^{\pm}\phi)(z) = \frac{z+i}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(\tau)\mathrm{d}\tau}{(\tau+i)(\tau-z)}, \quad z \in D^{\pm} \tag{11}$$

является решением задачи (5) в классе $\mathbf{B}^{\pm}$. Остается доказать, что это решение является ограниченным. Для этого воспользуемся формулой общего решения однородной краевой задачи (5) – (8) в классе ограниченных функций $\mathbf{B}^{\pm}$.

Известно ([2] – [4]), что любое решение однородной задачи (5) в классе $\mathbf{B}^{\pm}$ может быть получено следующим образом. Сначала строится каноническая функция

$$X_0^{\pm}(z) = \exp\left\{\frac{z+i}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G_0(\tau)}{(\tau+i)(\tau-z)}\mathrm{d}\tau\right\} \tag{12}$$

вспомогательной задачи с коэффициентом (7). Далее, функция $G_1(t)$, заданная формулой (8), факторизуется в виде:

$$G_1(t) = \frac{X_1^+(t)}{X_1^-(t)}, \quad t \in L,$$

где вспомогательные аналитические в $D^\pm$ функции $X_1^\pm(z)$ определяются формулой

$$X_1^\pm(z) = \exp\left\{i\lambda_1\Psi_1^\pm(z) + i\lambda_2\Psi_2^\pm(z)\right\}. \qquad (13)$$

Здесь$\Psi_k^\pm(z)(k = 1, 2)$ – аналитические в $D^\pm$ функции, такие что

$$h(-t)\ln^p|t| = \Psi_1^+(t) - \Psi_1^-(t), \quad h(t)\ln^p|t| = \Psi_2^+(t) - \Psi_2^-(t), \quad t \in L. \qquad (14)$$

Следуя, например ([3], с. 74), в качестве $\Psi_k^\pm(z)$ можно выбрать аналитические в $D^\pm$ функции

$$\Psi_1^\pm(z) = -\omega_{p+1}(-z), \quad \Psi_2^\pm(z) = \omega_{p+1}(z),$$

где функции $\omega_{p+1}(z)$ определены рекурентными соотношениями

$$\begin{aligned}
&\omega_1(z) = -\frac{1}{2\pi i}\ln z,\\
&\omega_2(z) = -\frac{1}{4\pi i}\ln^2 z + \frac{1}{2}\ln z,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\omega_p(z) = -\frac{1}{2p\pi i}\ln^p z - \sum_{k=1}^{p-1} C_{p-1}^k \frac{(2\pi i)^k}{k+1}\omega_{p-k}(z), \quad (p > 1),
\end{aligned} \qquad (15)$$

где C_{p-1}^k – биномиальные коэффициенты, а ветвь функции $\omega_1(z)$ с линией разреза по лучу $\arg z = 0$ выбрана так, чтобы $\omega_1^+(t) - \omega_1^-(t) = 1$ при $t > R$.

Непосредственными вычислениями доказывается, что функция $\omega_p(z)$ при любом $p \in \mathbb{N}$ удовлетворяет соотношению

$$\omega_p^+(t) - \omega_p^-(t) = \ln^{p-1} t \quad \text{при} \quad t > R.$$

Тогда при соответствующем выборе ветви логарифмической функции имеем:

$$\begin{aligned}
X_1^+(re^{i\theta}) &= \exp\left\{-i\lambda_1\omega_{p+1}\left(re^{i(\theta+\pi)}\right) + i\lambda_2\omega_{p+1}\left(re^{i\theta}\right)\right\}, \ 0 < \theta < \pi,\\
X_1^-(re^{i\theta}) &= \exp\left\{-i\lambda_1\omega_{p+1}\left(re^{i(\theta-2\pi)}\right) + i\lambda_2\omega_{p+1}\left(re^{i\theta}\right)\right\}, \ \pi < \theta < 2\pi.
\end{aligned} \qquad (16)$$

Вычисляя наибольший член в формулах (16), замечаем, что равномерно по θ:

$$X_1^{\pm}(z) = \exp\left\{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2p\pi}\ln^p|z| + o(\ln^p|z|)\right\}, \quad \text{при} \quad |z|\to\infty. \tag{17}$$

Используя построенные функции $X_0^{\pm}(z)$ и $X_1^{\pm}(z)$, с помощью метода аналитического продолжения получаем общее решение однородной краевой задачи (5) – (8) в классе $\widetilde{\mathbf{B}}^{\pm}$ в виде:

$$\Phi^{\pm}(z) = X_0^{\pm}(z)X_1^{\pm}(z)F(z), \quad z\in D^{\pm}, \tag{18}$$

где $F(z)$ – произвольная целая функция. Следовательно, такой же вид должно иметь и общее решение в классе $\widetilde{\mathbf{B}}^{\pm}$, представленное аналогом интеграла типа Коши (11) с заданной плотностью $\phi(t)\in\widetilde{\mathbf{H}}$, т.е. $\widetilde{\Phi}^{\pm}(z)$ имеет вид (18).

Выясним, при каких условиях на целую фукцию $F(z)$ это решение $\widetilde{\Phi}^{\pm}(z) = X_0^{\pm}(z)X_1^{\pm}(z)F(z)\in\mathbf{B}^{\pm}$.

Из этого равенства имеем:

$$\ln|F(z)| = \ln|\widetilde{\Phi}^{\pm}(z)| - \ln|X_0^{\pm}(z)| - \ln|X_1^{\pm}(z)|. \tag{19}$$

Из асимптотического равенства (17) следует, что равномерно по θ

$$\ln|X_1^{\pm}(re^{i\theta})| \leqslant \left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2p\pi} + o(1)\right)\ln^p|z| \quad \text{при} \quad r=|z|\to\infty. \tag{20}$$

Для канонической функции $X_0^{\pm}(z)$ известна оценка ([3], с. 109):

$$X_0^{\pm}(z) = O\left(|z|^{-\kappa}\right), \quad |z|\to\infty. \tag{21}$$

Для интеграла (11) используем оценку ([1], с. 45)

$$|\widetilde{\Phi}^{\pm}(re^{i\theta})| \leqslant \frac{C_1 r}{|\sin\theta|} \quad \text{при} \quad r>R_0>R, \quad 0<|\theta|<\pi,$$

которую в силу аналога теоремы В.Х. Мацаева ([5], с. 102) можно упростить так:

$$|\widetilde{\Phi}^{\pm}(re^{i\theta})| \leqslant C_2 r \quad \text{при} \quad r>R_0>R. \tag{22}$$

Подставляя полученные оценки (20) – (22) в равенство (19), для любого $\epsilon>0$ получаем:

$$\ln|F(re^{i\theta})| \leqslant \left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2p\pi} + \epsilon\right)\ln^p r \quad \text{при} \quad r>R_0>R. \tag{23}$$

Отсюда следует, что целая функция $F(z)$ имеет нулевой порядок роста. Введем специальный уточненный порядок $\rho(r) = \frac{p \ln \ln r}{\ln r} > 0$ при $r \to \infty$ $\left(r^{\rho(r)} = \ln^p r\right)$ и обозначим σ_F тип целой функции $F(z)$ при введенном уточненном порядке $\rho(r)$.

Тогда из теоремы 2 ([4], с. 10) вытекает, что при $0 < \sigma_F < \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2p\pi}$ решение $\widetilde{\Phi}^{\pm}(z) \in \mathbf{B}^{\pm}$.

Если $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$, то, как видно из равенства (23), $F(re^{i\theta}) \to 0$ при $r \to \infty$ при любом фиксированном θ. Тогда по принципу Фрагмена-Линделефа $F(z) \equiv 0$. Следовательно, однородная задача (5) – (8) имеет только тривиальное решение $\widetilde{\Phi}^{\pm}(z) \equiv 0$.

Теперь докажем обратное, что каждому решению однородной краевой задачи (5) – (8) $\widetilde{\Phi}^{\pm}(z) \in \mathbf{B}^{\pm}$ соответствует по формуле (3) решение интегрального уравнения (1) из класса $\widetilde{\mathbf{H}}$.

Возмем некоторое решение краевой задачи (5) – (8) $\widetilde{\Phi}_1^{\pm}(z) \in \mathbf{B}^{\pm}$. Обозначим разность предельных значений функции $\widetilde{\Phi}_1^{\pm}(z)$ через $\phi_1(t)$: $\phi_1(t) = \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)$. Очевидно $\phi_1(t) \in \widetilde{\mathbf{H}}$. Покажем, что функция $\phi_1(t)$ есть решение однородного интегрального уравнения (1). Для этого рассмотрим кусочно-аналитическую функцию

$$\Phi_2^{\pm}(z) = (\mathbf{S}^{\pm}\phi_1)(z), \quad z \in D^{\pm},$$

где оператор $\mathbf{S}^{\pm}$ определен в (9).

Поскольку $\phi_1(t) \in \widetilde{\mathbf{H}}$, то для $\Phi_2^{\pm}(z)$ верна формула Сохоцкого-Племели (3). Таким образом,

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = \phi_1(t) = \Phi_2^+(t) - \Phi_2^-(t), \quad t \in L,$$

откуда $\Phi_2^+(t) - \Phi_1^+(t) = \Phi_2^-(t) - \Phi_1^-(t)$.

В левой части полученного равенства – предельное значение функции, аналитической и ограниченной в D^+, а в правой части – предельное значение функции, аналитической и ограниченной в D^-. По теореме об аналитическом продолжении и обобщенной теореме Лиувилля ([3], с. 100) получим:

$$\Phi_2^+(z) - \Phi_1^+(z) = \Phi_2^-(z) - \Phi_1^-(z) = C.$$

Так как $\Phi_1^-(-i) = 0$ и $\Phi_2^-(-i) = 0$, то $C = 0$. Отсюда $\Phi_1^{\pm}(z) = \Phi_2^{\pm}(z)$.

Это означает, что функция $\Phi_1^{\pm}(z)$ представима аналогом интеграла типа Коши с плотностью $\phi_1(t)$, т.е. $\Phi_1^{\pm}(z) = (\mathbf{S}^{\pm}\phi_1)(z)$. Применяя формулы Сохоцкого-Племели для $\Phi_2^{\pm}(z) = (\mathbf{S}^{\pm}\phi_1)(z)$, видим, что функция $\phi_1(t)$ является решением однородного интегрального уравнения (1) в классе $\widetilde{\mathbf{H}}$. Доказательство теоремы завершено.

Следствие. Однородное характеристическое сингулярное интегральное уравнение (1) с бесконечным индексом логарифмического порядка в предложениях 1) – 4) при $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$ имеет бесконечно много решений в классе $\widetilde{\mathbf{H}}$, которые даются формулой

$$\phi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t),$$

где $\Phi^{\pm}(t)$ – предельные значения кусочно-аналитической функции $\Phi^{\pm}(z)$, заданной равенствами (18), в которых $F(z)$ – целая функция со специальным уточненным порядком $\rho(r) \to 0, \quad r \to \infty \quad (r^{\rho(r)} = \ln^p r)$ и типом $\sigma_F < \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2p\pi}$.

При $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$ уравнение (1) в классе $\widetilde{\mathbf{H}}$ имеет только тривиальное решение.

Литература

[1] Е.М. Конышкова, О характеристическом сингулярном интегральном уравнении с бесконечным индексом, *Известия вузов*, **8**(135), 43–51 (1973).

[2] M.D. Dubatovskaya, S.V.Rogozin, Однородное характеристическое уравнение с бесконечным индексом в исключительном случае, *Доклады АН Беларуси*, **40**(4), 19–23 (1996).

[3] Ф.Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, Москва (1977).

[4] П. Алекна, Об однородной краевой задаче Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости, *Liet. Matem. Rink.*, **13**(3), 5–13 (1973).

[5] Н.В. Говоров, М.И. Журавлева, Об оценке сверху модуля функции, аналитической в полуплоскости и плоскости с разрезом, *Известия СКНЦ ВШ*, Серия естественных наук, **4**, 102–103 (1973).

Logaritminės eilės begalinio indekso homogeninė charakteristinė integralinė singuliarioji lygtis

P. Alekna (ŠU)

Specialiai apibrėžus integralinės lygties koeficientus $a(t)$ ir $b(t)$ gauti homogeninės charakteristinės integralinės lygties aprėžti sprendiniai, įrodžius šios lygties ir ją atitinkančio homogeninio kraštinio Rymano uždavinio ekvivalentumą.