

Об аффинных связностях на касательных расслоениях и их сечениях

Ангеле БАШКЕНЕ (ШУ)
e-mail: baskiene@fm.su.lt

На касательное расслоение $T(M_n)$ n -мерного дифференцируемого многообразия M_n можно смотреть как на n -мерное дифференцируемое многообразие над алгеброй комплексных, двойных или дуальных чисел. В настоящей работе для изучения соотношения между связностями на $T(M_n)$ и на их сечениях используется алгебра $R(\epsilon)$ дуальных чисел [1].

1. Рассмотрим алгебру $R(\epsilon)$ дуальных чисел $x + \epsilon y$, $x, y \in R$, $\epsilon^2 = 0$, структурный тензор γ_{ab}^c ($a, b, \dots = 1, 2$) которой имеет координаты

$$\gamma_{11}^1 = \gamma_{12}^2 = \gamma_{21}^2 = 1, \quad \gamma_{11}^2 = \gamma_{12}^1 = \gamma_{21}^1 = \gamma_{22}^2 = \gamma_{22}^1 = 0. \quad (1)$$

Произвольная аналитическая, т.е. дифференцируемая, дуальная функция $F(X^i)$ n дуальных переменных: $X^i = x^i + \epsilon y^i$ ($i, j, \dots = 1, 2, \dots, n$) имеет вид

$$F(X^i) = f(x^i) + \epsilon \left(y^j \frac{\partial f}{\partial x^j} + A(x^i) \right), \quad (2)$$

где $f(x^i)$, $A(x^i)$ – произвольные дифференцируемые действительные функции n действительных переменных x^i .

Аналитическое продолжение F^* действительной функции $f(x^i)$ n действительных переменных x_i в алгебру $R(\epsilon)$ получим при $A(x^i) = 0$:

$$F^*(X^i) = f(x^i) + \epsilon y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}. \quad (3)$$

Рассмотрим n -мерное дифференцируемое многообразие $M_n(x^i)$ и ее касательное расслоение $T(M_n)(x^A)$, $A, B, \dots = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, 2n$, где x^i – координаты точки $x \in M_n$ в локальной системе координат, x^{n+i} – координаты вектора \vec{v}_x в той же системе координат.

На $T(M_n)$ можно смотреть как на n -мерное гладкое, т.е. дифференцируемое, многообразие $M_n^{R(\epsilon)}$ над алгеброй $R(\epsilon)$ дуальных чисел. Действительно, каждой точке $(x^A) = (x^i, x^{n+i}) \in T(M_n)$ поставим в соответствие элементы $X^i = x^i + \epsilon x^{n+i}$ алгебры $R(\epsilon)$. При переходе на

базе M_n к новым локальным координатам $x^{i'} = x^{i'}(x^j)$ на $T(M_n)$ получим преобразование локальных координат x^A по формулам

$$\begin{aligned} x^{i'} &= x^{i'}(x^j), \\ x^{(n+i)'} &= x^{n+j} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

На $M_n^{R(\epsilon)}(X^i)$ мы переходим к новым голоморфным координатам $X^{i'} = x^{i'}(x^i) + \epsilon \cdot x^{n+j} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}$, являющимся аналитическими продолжениями функций $x^{i'}(x^j)$ в алгебру $R(\epsilon)$.

Следовательно, $T(M_n)(x^A)$ является действительной моделью пространства $M_n^{R(\epsilon)}(X^i)$.

Рассмотрим на $M_n^{R(\epsilon)}$ $R(\epsilon)$ -гладкую связность [1]:

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^i(X^l) = {}^1\tilde{\Gamma}_{jk}^i + \epsilon \left({}^2\tilde{\Gamma}_{jk}^i \right) = \Gamma_{jk}^i(x^l) + \epsilon \left(x^{n+l} \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} + T_{jk}^i(x^l) \right), \quad (4)$$

где Γ_{jk}^i – коэффициенты аффинной связности, T_{jk}^i – тензорное поле на базе M_n . Тогда на касательном расслоении $T(M_n)$ возникает объект аффинной связности Ω_{BC}^A [1], где

$$\Omega_{jbkc}^{ia} = {}^d\tilde{\Gamma}_{jk}^i \gamma_{dh}^a \gamma_{bc}^h, \quad a, b, \dots, = 1, 2, \quad i1 = i, \quad i2 = n + i. \quad (5)$$

Компоненты этой связности в силу (1), (4) имеют вид:

$$\Omega_{jk}^i = \Omega_{j,n+k}^{n+i} = \Omega_{n+j,k}^{n+i} = \Gamma_{jk}^i, \quad \Omega_{jk}^{n+i} = x^{n+l} \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} + T_{jk}^i, \quad (6)$$

остальные $\Omega_{jbkc}^{ia} = 0$.

При $T_{jk}^i(x^l) = 0$ получим полный лифт аффинной связности Γ . Этот лифт является действительной реализацией связности $\tilde{\Gamma}$, полученной аналитическим продолжением связности Γ в $R(\epsilon)$.

2. Сечение $\sigma: M_n \rightarrow T(M_n)$ касательного расслоения $T(M_n)$ зададим уравнением

$$x^{n+i} = \sigma^i(x^j). \quad (7)$$

Пусть на $T(M_n)$ дана связность Ω_{BC}^A (6). Оснастим секущую поверхность $\sigma(M_n)$ (7) вертикальными площадками, т.е. касательными пространствами к слою.

Условие параллельного переноса в индуцированной связности $G_{jk}^i(x^l)$ имеет вид [2]:

$$\partial_k x_i^A - G_{ki}^l x_l^A + \Omega_{CB}^A x_k^C x_i^B = \sum_j b_{ik}^{n+j} n_{n+j}^A, \quad (8)$$

где

$$x_i^A = \delta_i^A + \frac{\partial \sigma^j}{\partial x^i} \delta_{n+j}^A, \quad n_{n+j}^A = \delta_{n+j}^A. \quad (9)$$

Из (8) при $A = j$ в силу (6), (9) имеем $-G_{ki}^j + \Omega_{CB}^j x_k^C x_i^B = 0$, откуда $G_{ki}^j = \Gamma_{ki}^j$.

Итак, если на касательном расслоении задана $R(\epsilon)$ -гладкая связность, то на сечении $\sigma(M_n)$ при вертикальном оснащении индуцированная связность совпадает со связностью на базе.

Найдем необходимые и достаточные условия для того, чтобы сечение $\sigma(M_n)$ было автопараллельным, т.е., чтобы для каждого вектора $\vec{v} \in T_x(\sigma(M_n))$ и каждой кривой κ в $\sigma(M_n)$, проходящей через точку $x \in \sigma(M_n)$, параллельный перенос вектора \vec{v} вдоль кривой приводит к вектору, касательному к $\sigma(M_n)$. В формулах (8) полагая $b_{ij}^{n+k} = 0$, при $A = n + j$ получим

$$\frac{\partial^2 \sigma^j}{\partial x^k \partial x^i} + \Omega_{CB}^{n+j} x_k^C x_i^B - G_{ki}^l \frac{\partial \sigma^j}{\partial x^l} = 0.$$

Учитывая $G_{ki}^l = \Gamma_{ki}^l$ и (6), имеем:

$$\frac{\partial^2 \sigma^j}{\partial x^i \partial x^k} + \Gamma_{km}^j \frac{\partial \sigma^m}{\partial x^i} + \Gamma_{li}^j \frac{\partial \sigma^l}{\partial x^k} + \sigma^l \frac{\partial \Gamma_{ki}^j}{\partial x^l} + T_{ki}^j - \Gamma_{ki}^l \frac{\partial \sigma^j}{\partial x^l} = 0. \quad (10)$$

Теорема. *Необходимые и достаточные условия автопараллельности сечения σ (7) являются (10) формулы.*

Например, в связности полного лифта ($T_{ki}^j = 0$) нулевое сечение ($\sigma^l = 0$) является автопараллельным. Если $M_n = R^n$ ($\Gamma_{jk}^i = 0$), то в связности полного лифта условие автопараллельности сечения $\sigma(M_n)$ (7) имеет вид $\frac{\partial^2 \sigma_j}{\partial x^i \partial x^k} = 0$. Отсюда имеем уравнения всех автопараллельных сечений: $\sigma^j = C_k^j x^k + C^j$, C_k^j, C^j – постоянные.

3. Будем искать аналитическое продолжение дуальной функции $f(x^i) = f^1(x^i) + \epsilon f^2(x^i)$, заданной на сечении $\sigma(M_n)$, т.е. такую $R(\epsilon)$ -гладкую функцию $F(X^i)$, которая вдоль сечения совпадает с данной функцией.

Произвольная $R(\epsilon)$ -дифференцируемая функция имеет (2) вид:

$$F(X^i) = a(x^i) + \epsilon \left(x^{n+j} \frac{\partial a}{\partial x^j} + b(x^i) \right), \quad X^i = x^i + \epsilon x^{n+i}.$$

Так как

$$F(X^i)|_{\sigma} = a(x^i) + \epsilon \left(\sigma^j \frac{\partial a}{\partial x^j} + b(x^i) \right) = f^1(x^i) + \epsilon f^2(x^i),$$

то

$$a(x^i) = f^1(x^i), \quad b(x^i) = f^2(x^i) - \sigma^j \frac{\partial f^1}{\partial x^j},$$

$$F(X^i) = f^1(x^i) + \epsilon \left(x^{n+j} \frac{\partial f^1(x^i)}{\partial x^j} + f^2(x^i) - \sigma^j \frac{\partial f^1}{\partial x^j} \right). \quad (11)$$

Пусть $\tilde{\Gamma}_{jk}^i(X^l)$ (4) – дуальные компоненты $R(\epsilon)$ -гладкой связности на касательном расслоении, а $\sigma(M_n)$ (7) – сечение $T(M_n)$. Рассмотрим компоненты этой связности вдоль сечения:

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^i(x^l + \epsilon \sigma^l(x^m)) = \sigma \tilde{\Gamma}_{jk}^i(x^l) = {}^1\Sigma_{jk}^i(x^l) + \epsilon \left({}^2\Sigma_{jk}^i(x^l) \right).$$

Так как в силу (4)

$$\sigma \tilde{\Gamma}_{jk}^i(x^l) = \Gamma_{jk}^i(x^l) + \epsilon \left(\sigma^l \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} + T_{jk}^i(x^l) \right),$$

то

$$\Gamma_{jk}^i = {}^1\Sigma_{jk}^i, \quad T_{jk}^i = {}^2\Sigma_{jk}^i - \sigma^l \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l}.$$

Применяя (11), находим аналитические продолжения функций $\sigma \tilde{\Gamma}_{jk}^i(x^l)$:

$${}^1\Sigma_{jk}^i + \epsilon \left(x^{n+l} \frac{\partial {}^1\Sigma_{jk}^i}{\partial x^l} + {}^2\Sigma_{jk}^i - \sigma^l \frac{\partial {}^1\Sigma_{jk}^i}{\partial x^l} \right)$$

$$= \Gamma_{jk}^i + \epsilon \left(x^{n+l} \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} + T_{jk}^i \right) = \tilde{\Gamma}_{jk}^i(X^l). \quad (12)$$

Видим, что коэффициенты $\tilde{\Gamma}_{jk}^i(X^l)$ $R(\epsilon)$ -гладкой связности получаются аналитическим продолжением дуальных функций $\sigma \tilde{\Gamma}_{jk}^i(x^l)$.

Согласно формуле (5) вещественные компоненты $\sigma \Omega_{jbkc}^{ia}$ этой связности имеют вид:

$$\sigma \Omega_{jk}^i = \sigma \Omega_{n+j,k}^{n+i} = \sigma \Omega_{j,n+k}^{n+i} = {}^1\Sigma_{jk}^i,$$

$$\sigma \Omega_{jk}^{n+i} = x^{n+l} \frac{\partial {}^1\Sigma_{jk}^i}{\partial x^l} + {}^2\Sigma_{jk}^i - \sigma^l \frac{\partial {}^1\Sigma_{jk}^i}{\partial x^l},$$

остальные $\sigma \Omega_{jbkc}^{ia}$ равны 0.

Рассмотрим векторное расслоение $E = \bigcup_{x \in \sigma(M_n)} T_x(T(M_n))$, определенное касательными пространствами к $T(M_n)$ вдоль сечения $\sigma(M_n)$. Линейную связность в таком расслоении можно задать при помощи дуальных коэффициентов $\sigma\Theta_{jk}^i(x^l) = {}^1\Theta_{jk}^i(x^l) + \epsilon({}^2\Theta_{jk}^i(x^l))$. Вектор $V^i = v^i + \epsilon v^{n+i}$ переносится параллельно вдоль кривой $x^i = x^i(t)$, $x^{n+i} = \sigma^i(x^l(t))$, если $dV^i + \sigma\Theta_{jk}^i dx^j V^k = 0$.

С помощью формулы (11) из коэффициентов $\sigma\Theta_{jk}^i$ связности в E построим $R(\epsilon)$ -гладкую связность $\tilde{\Theta}_{jk}^i(X^l) = {}^1\tilde{\Theta}_{jk}^i + \epsilon({}^2\tilde{\Theta}_{jk}^i)$ в касательном расслоении.

Вектор V^i переносится параллельно вдоль кривой $X^i = X^i(t)$, на $M_n^{R(\epsilon)}$, если

$$\frac{\partial V^i}{dt} = \frac{dV^i}{dt} + \tilde{\Theta}_{jk}^i \frac{dX^j}{dt} V^k = 0.$$

Вдоль кривой на сечении $\sigma(M_n)$

$$\frac{dV^i}{dt} + \sigma\tilde{\Theta}_{jk}^i(x^l) \frac{\partial X^j}{\partial x^l} \frac{dx^l}{dt} V^k = 0, \quad \sigma\tilde{\Theta}_{jk}^i = \tilde{\Theta}_{jk}^i|_{\sigma} = {}^1\Xi_{jk}^i + \epsilon({}^2\Xi_{jk}^i).$$

Отсюда $\sigma\Theta_{lk}^i = \sigma\tilde{\Theta}_{jk}^i \frac{\partial X^j}{\partial x^l}$. Так как $\frac{\partial X^j}{\partial x^l} = \delta_l^j + \epsilon \frac{\partial \sigma^j}{\partial x^l}$, то

$$\sigma\Theta_{lk}^i = \left({}^1\Xi_{jk}^i + \epsilon({}^2\Xi_{jk}^i) \right) \left(\delta_l^j + \epsilon \frac{\partial \sigma^j}{\partial x^l} \right) = {}^1\Xi_{lk}^i + \epsilon \left({}^2\Xi_{lk}^i + \frac{\partial \sigma^j}{\partial x^l} {}^1\Xi_{jk}^i \right).$$

Таким образом,

$${}^1\Xi_{lk}^i = {}^1\Theta_{jk}^i, \quad {}^2\Theta_{lk}^i = {}^2\Xi_{lk}^i + \frac{\partial \sigma^j}{\partial x^l} {}^1\Xi_{jk}^i. \quad (13)$$

Коэффициенты $\tilde{\Theta}_{jk}^i(X^l)$ являются аналитическими продолжениями функций $\sigma\tilde{\Theta}_{jk}^i(x^l)$, заданных на сечении. В силу (13), (12)

$$\tilde{\Theta}_{jk}^i(X^l) = {}^1\Xi_{jk}^i(x^l) + \epsilon \left(x^{n+l} \frac{\partial {}^1\Xi_{jk}^i}{\partial x^l} + {}^2\Xi_{jk}^i(x^l) - \sigma^l \frac{\partial {}^1\Xi_{jk}^i}{\partial x^l} \right);$$

$$\tilde{\Theta}_{jk}^i = {}^1\Theta_{jk}^i + \epsilon \left(x^{n+l} \frac{\partial {}^1\Theta_{jk}^i}{\partial x^l} + {}^2\Theta_{jk}^i(x^l) - \frac{\partial \sigma^l}{\partial x^j} {}^1\Theta_{lk}^i - \sigma^l \frac{\partial {}^1\Theta_{jk}^i}{\partial x^l} \right). \quad (14)$$

Теорема. Связность $\sigma\Theta_{jk}^i(x^l)$ на векторном расслоении E можно однозначно продолжить до $R(\epsilon)$ -гладкой связности $\tilde{\Theta}_{jk}^i(X^l)$ на касательном расслоении по формуле (14).

Из формулы (5) нетрудно найти вещественные компоненты Θ_{jbkc}^{ia} этой связности:

$$\begin{aligned}\Theta_{jk}^i &= \Theta_{n+j,k}^{n+i} = \Theta_{j,n+k}^{n+i} = {}^1\Theta_{jk}^i, \\ \Theta_{jk}^{n+i} &= x^{n+l} \frac{\partial^1 \Theta_{jk}^i}{\partial x^l} + T_{jk}^i, \\ T_{jk}^i &= {}^2\Theta_{jk}^i - \frac{\partial \sigma^l}{\partial x^j} {}^1\Theta_{lk}^i - \sigma^l \frac{\partial^1 \Theta_{jk}^i}{\partial x^l},\end{aligned}$$

остальные $\Theta_{jb,kc}^{ia} = 0$.

Литература

- [1] В.В. Вишневский, А.П. Широков, В.В. Шурыгин, *Пространства над алгебрами*, из-во КТУ (1985).
[2] А.П. Норден, *Пространства аффинной связности*, Москва, Наука (1976).

Apie liečiamųjų sluoksniuotųjų ir jų pjūvių afiniškias sietis

А. Ваškienė

Nagrinėjama n -matės diferencijuojamosios daugdaros M_n liečiamoji sluoksniuotė $T(M_n)$ kaip n -matės dualiosios daugdaros $M_n^{R(\epsilon)}$ realusis modelis. Daugdaros $M_n^{R(\epsilon)}$ $R(\epsilon)$ -glodžioji sietis, pjūvio $\sigma(M_n)$ liečiamąsias erdves papildžius vertikaliaisiais vektoriais, indukuoja tame pjūvyje afiniają sietį. Rastos būtinos ir pakankamos sąlygos, kad $\sigma(M_n)$ tos sieties atžvilgiu būtų autolygiagretusis pjūvis.

Nagrinėjama vektorinė sluoksniuotė E , sudaryta iš daugdaros $T(M_n)$ liečiamųjų erdvių pjūvio $\sigma(M_n)$ taškuose. Įrodyta, jog naudojant darbe sukurtą dualiųjų funkcijų, apibrėžtų pjūvio taškuose, analizinius pratėjimus į dualiųjų skaičių algebrą $R(\epsilon)$, daugdaros E afiniają sietį galima vienareikšmiškai pratęsti iki $R(\epsilon)$ -glodžios afiniosios sieties liečiamojoje sluoksniuotėje.