ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

INA JASAITĖ
Matematikos specialybės, magistratūros II kurso studentė

PIRMOS EILĖS DALINIŲ IŠVESTINIŲ SISTEMOS SU STIPRIU EILĖS IŠSIGIMIMU SPRENDINIŲ STRUKTŪRA

Darbo vadovas: Prof. Donatas Jurgaitis

ŠIAULIAI, 2007

TURINYS

ĮVADAS

Gamtoje nuolat vyksta įvairūs procesai. Nagrinėjant tokius procesus dažniausiai yra sudaromi matematiniai modeliai. Norint tiksliau aprašyti fizikinį procesą reikia naudoti diferencialines lygtis, nes bet kuriame realiame procese vyksta judėjimas, jeigu tas procesas neužgesęs, o proceso greitį aprašo tą procesą nusakančios funkcijos išvestinė.

Diferencialinė lygtis – lygybė, siejanti nepriklausomus kintamuosius, nežinomą funkciją ir jos išvestines [1]. Jei diferencialinėje lygtyje yra tik vienas nepriklausomas kintamasis, ją vadiname paprastąja diferencialine lygtimi, priešingu atveju – diferencialine dalinių išvestinių lygtimi. Išsprendę tiriamojo vyksmo matematinio modelį – diferencialinę lygtį ir atsižvelgę į pradinius duomenis, randame to vyksmo kitimo dėsnį, o iš jo randame įvairias procesą apibrėžiančias charakteristikas.

Kuo sudėtingesni procesai, tuo sudėtingesnės diferencialinės lygtys, dažniau vartojamos diferencialinės lygtys dalinėmis išvestinėmis. Tiriant kelių tarpusavyje susijusių sudėtingų procesų vyksmą, sudaromos diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistemos. Tokių sistemų sprendinių analizinių išraiškų radimas yra dažnai nelengvas uždavinys. Be to, tokių uždavinių sprendimą apsunkina diferencialinių lygčių išsigimimas. Diferencialinės lygties išsigimimas reiškia, kad tam tikrų taškų aplinkose mažėja diferencialinės eilė. Sunkiausia yra spręsti diferencialines lygtis su ireguliariuoju eilės išsigimimu, kai išsigimimo laipsnis yra didesnis už ieškomosios funkcijos išvestinės, prieš kurią yra išsigimimo daugiklis, eilę. Analizinėje ireguliariai išsigimstančių paprastųjų diferencialinių lygčių sistemų teorijoje, taikant matricų algebros priemones kartais labai sunku užrašyti ir iki galo išsiaiškinti tokių sistemų sprendinių struktūrą ir savybes vien todėl, kad tų sprendinių strukūra labai įvairi.

Šio darbo tikslai:

1. Išspręsti sistemą, susidedančią iš keturių lygčių pirmos eilės dalinių išvestinių su x laipsniu $p+1$ eilės išsigimimu, kai p – bet koks sveikasis neneigiamas skaičius.
2. Patikrinti, kaip pasikeistų sistemos sprendiniai nuo koeficientų esančių prie dalinių išvestinių.

Lygčių sistemą spręsime apibendrintųjų laipsninių eilučių metodu [5]. Šis metodas plačiai taikomas tiesinių diferencialinių lygčių ir jų sistemų, kurių eilė išsigimsta tam tikruose taškuose, sprendimui. Nagrinėsime su atvejus: bendrąjį ir kai sistemos koeficientų pagrindinė matrica yra specialiosios struktūros. Ieškosime sistemos analizinių sprendinių visur, išskyrus galbūt sistemos išsigimimo taškus. Darbe apibendrinsime kai kuriuos analizinės išsigimusių paprastųjų diferencialinių lygčių teorijos teiginius, išsiaiškinsime naujas idėjas, kurias reikia panaudoti tam, kad sėkmingai išspręstume išsigimusias dalinių išvestinių diferencialines lygtis.

§1. Uždavinio formulavimas

Šiame darbe nagrinėjama keturių tiesinių diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistema:

$$\begin{cases} x^{p+1}\left(a\dfrac{\partial u_2}{\partial x}+b\dfrac{\partial u_2}{\partial y}+b\dfrac{\partial u_3}{\partial x}+c\dfrac{\partial u_3}{\partial y}+A\dfrac{\partial u_4}{\partial z}\right)+\sum\limits_{j=1}^{4}a_{1j}(x,y,z)u_j=0 \\ x^{p+1}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+\dfrac{\partial u_4}{\partial y}-\dfrac{\partial u_3}{\partial z}\right)+\sum\limits_{j=1}^{4}a_{2j}(x,y,z)u_j=0 \\ x^{p+1}\left(-\dfrac{\partial u_4}{\partial x}+\dfrac{\partial u_1}{\partial y}+\dfrac{\partial u_2}{\partial z}\right)+\sum\limits_{j=1}^{4}a_{3j}(x,y,z)u_j=0 \\ x^{p+1}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x}-\dfrac{\partial u_2}{\partial y}+\dfrac{\partial u_1}{\partial z}\right)+\sum\limits_{j=1}^{4}a_{3j}(x,y,z)u_j=0 \end{cases} \qquad (1)$$

Šioje sistemoje:

p - natūralusis skaičius,

x, y, z – nepriklausomi kompleksiniai kintamieji,

$u_i(x,y,z)$, $i = 1,2,3,4$ – ieškomosios funkcijos,

a,b,c,A – konstantos.

Lygčių sistemos (1) koeficientai yra išdėstomi konverguojančia $x=0$ aplinkoje laipsnine eilute:

$$a_{ij}(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{ij}^{(k)}(y,z)x^k,\ k\in Z_0,\ i,j=1,2,3,4$$

(1) sistemą užrašydami matricine forma naudosime tokius žymenis:

- $u(x,y,z)=\begin{pmatrix} u_1(x,y,z) \\ u_2(x,y,z) \\ u_3(x,y,z) \\ u_4(x,y,z) \end{pmatrix}$ - ieškomasis keturmatis vektorius stulpelis.
- $(x,y,z)=\{a_{ij}(x,y,z)=const\}, i=1,2,3,4,\ j=1,2,3,4$ - ketvirtos eilės kvadratinė matrica, sudaryta iš žinomų funkcijų, kurioms galioja dėstiniai konverguojančiomis išsigimimo taškų aplinkoje x laipsnių eilutėmis. Atskiru atveju šios funkcijos gali būti konstantos.

- $E=\begin{pmatrix}0 & a & b & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_1=\begin{pmatrix}0 & b & c & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & A\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ - matricos,

  sudarytos iš koeficientų, esančių prie ieškomųjų funkcijų dalinių išvestinių atitinkamai pagal kintamąjį x, $\frac{\partial u_i}{\partial x}, y, \frac{\partial u_i}{\partial y}, z, \frac{\partial u_i}{\partial z}$.

- $O=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ - nulinis vektorių stulpelis.

Pasinaudoję minėtais žymenimis (1) diferencialinių lygčių sistemą užrašome kaip atricinę dalinių išvestinių diferencialinių lygtį:

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial u}{\partial x}+I_1\frac{\partial u}{\partial y}+I_2\frac{\partial u}{\partial z}\right)+A(x,y,z)\cdot u(x,y,z)=O\,. \tag{2}$$

(1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą nagrinėsime policindre $P(x,y,z)=\{(x,y,z)\,|\,|x|<r,\ |y|<r_1,\ |z|<r_2\}$. Ieškosime (1) sistemos sprendinių analizinių visur išskyrus gal būt išsigimimo hiperplokštumos x=0 taškus.

§2. Dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos sprendinių struktūra reguliaraus išsigimimo atveju

Paprastumo dėlei vietoje (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą nagrinėkime matricinę dalinių išvestinių diferencialinę lygtį (2). (2) matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties eilė taškuose x=0 išsigimsta, ir lygtis iš pirmos eilės matricinės diferencialinės lygties tampa tokia algebrine lygčių sistema:

$$A(x,y,z)\cdot u(x,y,z)=O\,.$$

Ieškosime (2) matricinės diferencialinės lygties sprendinių, kurie būtų analiziniai visur, išskyrus galbūt eilės išsigimimo taškus. Todėl (2) matricinę dalinių išvestinių diferencialinę lygtį spręsime apibendrintųjų laipsninių eilučių metodu, t.y. ieškomąją funkciją $u(x,y,z)$ dėstome x laipsnių eilute.

Įvedame reikalavimą, kad (2) matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties koeficientų matricos $A(x,y,z)$ elementams galioja dėstinys laipsnine x laipsnių eilute:

$$A(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}x^k\cdot A_k(y,z). \qquad (2)$$

Hiperplokštumos x=0 taškai yra (1) sistemos reguliarūs eilės išsigimimo taškai kada $p=0$. Nagrinėkime (2) matricinę dalinių išvestinių diferencialinę lygtį ir joje imkime $p=0$. Gauname tokią lygtį:

$$x\cdot\left(E\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}+I_1\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}+I_2\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}A_k(y,z)\cdot x^k\cdot u(x,y,z)=O \qquad (3a)$$

Šiame paragrafe suformuluosime pagrindinius rezultatus apie šios lygties sprendinius. Detalią informaciją apie tai galime rasti [4].

1 teorema. *Jeigu visi* (3a) *matricinės dalinių išvestinių direncialinės lygties koeficientų* $A(x,y,z)$ *dėstinio laipsnine eilute koeficientai* $A_k(y,z)$, k = 0,1,2… *priklauso nuo kintamųjų y ir z, tai* (3a) *formalūs sprendiniai išreiškiami tokia apibendrinta laipsnine x laipsnių eilute:*

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho(y,z)}\cdot u_k(y,z,\ln x), \qquad (4)$$

čia $u_k(y,z,\ln x)$ nežinomi koeficientai, o $\rho(y,z)$ - nežinoma funkcija parametras. Trumpumo dėlei žymėsime $\ln x=s$ ir tai bus kevirtasis nepriklausomas kintamasis.

Darbe [4] įrodyta, kad funkcija $\rho(y,z)$ randama iš lygties

$$\det\left(E\rho(y,z)+A_0(y,z)\right)=0\,. \tag{5}$$

(5) lygybė funkcijos $\rho(y,z)$ atžvilgiu yra ketvirtojo laipsnio algebrinė lygtis, kuri virš kompleksinių skaičių lauko turi keturias $\rho_i(y,z)$, i = 1,2,3,4 šaknis.

Laipsninės eilutės (4) koeficientams apskaičiuoti gauname rekurentinę formulę

$$u_k=-\left(E(\rho+k)+A_0\right)^{-1}\left(E\frac{\partial u_{k-1}}{\partial s}+I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+sI_1\frac{\partial\rho}{\partial y}u_{k-1}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+sI_2\frac{\partial\rho}{\partial z}u_{k-1}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l\right). \tag{6}$$

Iš šios rekurentinės formulės visi (4) koeficientai $u_k(y,z,s), k=1,2...$ randami vienareikšmiškai pagal laisvai pasirinktą $u_0(y,z)$, kuri yra analizinė kintamųjų y ir z funkcija.

2 teorema. *Jei* (3a) *matricinės dalinių išvestinių diferencialinių lygčių koeficientų dėstinio laipsnine eilute pirmoji matrica A_0 nepriklauso nuo kintamųjų y ir z, t.y. $A_0(y,z)\equiv A$, o kiti $A(x,y,z)$ dėstinio laipsnine eilute koeficientai gali priklausyti nuo kintamųjų y ir z, tai matricinės diferencialinės lygties formalieji sprendiniai išreiškiami taip:*

$$u_i(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho_i}u_k(y,z), i=1,2,3,4, \tag{7}$$

čia ρ_i nepriklauso nuo kintamųjų y ir z ir yra parametras.

Apibendrintų laipsninių eilučių metodu nesunkiai gauname (žiūr. [4]), kad parametras ρ yra lygties

$$\det\left(E\rho(y,z)+A_0(y,z)\right)=0 \tag{8}$$

šaknis.

(8) lygties – parametro ρ ketvirtojo laipsnio algbrinė lygtis, kuri virš kompleksinių skaičių lauko turi keturias ρ_i, i = 1,2,3,4 šaknis.

Eilutės (7) koeficientams apskaičiuoti gauname rekurentinę formulę:

$$u_k=-\left(E(\rho+k)+A_0\right)^{-1}\left(I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l\right),\ k=0,1,2... \tag{9}$$

iš šios rekurentinės formulės visi (7) eilutės koeficientai $u_k(y,z)$, $k=1,2...$ vienareikšmiškai randami pagal laisvai pasirinktą $u_0(y,z)$, kuri yra analizinė kintamųjų y ir z funkcija.

Laipsninių eilučių (4) ir (7) konvergavimas tiriamas mažoranto metodu. Pilną konvergavmo tyrimą rasite darbe [4].

3 teorema. *Jeigu* (1) *sistemos nusakantosios lygties šaknys realios, skirtingos, jų skirtumai nėra sveikieji saičiai, bei šios savybės galioja visoje kintamųjų y ir x kitimo srityje, tai dalinių išvesinių diferencialinės sistemos srityje* $|x| < \frac{r_1 r_2 \varepsilon}{4}, |y| < \frac{r_1}{2}, |z| < \frac{r_2}{2}$ turi keturias atskirųjų sprendinių *šeimas* $u_i(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho_i(y,z)} \cdot u_k(y,z,\ln x), i = 1,2,3,4$, *srityje* $|x| < \frac{r_1 r_2 \varepsilon}{4}, |y| < \frac{r_1}{2}, |z| < \frac{r_2}{2}$, *4 tokio tipo atskirųjų sprendinių šeimos:*

$$u_i(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho_i} \cdot u_k(y,z), i = 1,2,3,4,$$

čia ρ_i *- viena iš (1)sistemos nusakančios lygties* $\det(E\rho + A_0) = 0$ *šaknų,* $\rho_i(y,z)$ *- viena iš* (1) *sistemos nusakančios lygties* $\det(E\rho(y,z) + A_0(y,z)) = 0$ *šaknų. Laipsninių eilučių koeficientai randami iš tokių rekurentinių formulių:*

$$u_k(x,y,s) = -e^{-ks} \int e^{ks} E^{-1} \left(s\left(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) u_1 + \sum_{l=3}^{k+2} A_l u_{k+2-l} + I_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) ds + C(s).$$

$$u_k(y,z) = -(E(\rho + k) + A_0)^{-1} \left(I_1 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l} u_l \right),$$

kai k $=1,2\ldots$

$u_0(y,z)$ *abiem atvejais laisvai pasirenkama analizinė kintamųjų y ir z funkcija.*

§3. Matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties su stipriu eilės išsigimimu sprendimas

Nagrinėsime (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sprendinius kada p natūralusis skaičius. Kad užrašymai būtų trumpesni spręsime matricines dalines išvestinių diferencialines lygtis (2). Ieškosime, kaip ir atveju p=0 analizinių visur išskyrus gal būt išsigimimo daugdaros taškus sprendinių.

Nagrinėsime atvejį, kai p=1. Tuomet turime lygtį:

$$x^2\left(E\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}+I_1\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}+I_2\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}A_k(y,z)x^k u(x,y,z)=0\,.$$

(2) lygtyje ieškomąjį vektorių stulpelį pakeisime kitu, t.y. nauju ieškomu vektorių stulpelio keitiniu

$$u(x,y,z)=\exp\left\{-B_0\frac{x^{-p}}{p-1}-B_1\frac{x^{-p-1}}{p-1}-\mathrm{K}\ -B_{p-1}x^{-1}\right\}\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho(y,z)}u_k(y,z,s).$$

Čia $s=lnx$ – naujas nepriklausomas kintamasis, $\rho(y,z)$ - funkcija parametras.

Kai p=1, tai

$$u(x,y,z)=\exp\left\{-B_0x^{-1}\right\}\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho(y,z)}u_k(y,z,s). \tag{10}$$

Matricos $A(x,y,z)$ ir funkcijos $u(x,y,z)$ sandauga yra tokia:

$$A\cdot u=\sum_{k=0}^{\infty}x^k\cdot A(y,z)\cdot\exp\left\{-Bx^{-1}\right\}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}x^{\rho(y,z)}u_k(y,z,s)=\exp\left\{-B_0x^{-1}\right\}\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho(y,z)}\sum_{l=0}^{k}A_{k-l}(y,z)u_l(y,z,s),$$

diferencijuodami (10) lygybę pagal kintamuosius *x, y* ir *z* gauname tokias lygybes:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{k=0}^{\infty}((k+\rho)x^{k+\rho-1}exp\left\{-B_0x^{-1}\right\}u_k+x^{k+\rho}\exp\left\{-B_0x^{-1}\right\}\frac{\partial\left\{-B_0x^{-1}\right\}}{\partial x}u_k+x^{k+\rho}\exp\left\{-B_0x^{-1}\right\}\frac{\partial u_k}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}), \tag{11}$$

čia $\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{1}{x}$, be to (11) išraiškoje: $\frac{\partial\left\{-B_0x^{-1}\right\}}{\partial x}=B_0x^{-2}$;

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(x^{k+\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}s\cdot\exp\left\{-B_0x^{-1}\right\}u_k+x^{k+\rho}\exp\left\{-B_0x^{-1}\right\}\frac{\partial\left\{-B_0x^{-1}\right\}}{\partial y}u_k+x^{k+\rho}\exp\left\{-B_0x^{-1}\right\}\frac{\partial u_k}{\partial y}\right), \tag{12}$$

čia $\dfrac{\partial\left\{-B_0x^{-1}\right\}}{\partial y}=-x^{-1}\dfrac{\partial B_0}{\partial y}$;

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(x^{k+\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}s\cdot\exp\left\{-B_0x^{-1}\right\}u_k+x^{k+\rho}\exp\left\{-B_0x^{-1}\right\}\frac{\partial\left\{-B_0x^{-1}\right\}}{\partial z}u_k+x^{k+\rho}\exp\left\{-B_0x^{-1}\right\}\frac{\partial u_k}{\partial z}\right), \tag{13}$$

čia $\dfrac{\partial\left\{-B_0x^{-1}\right\}}{\partial z}=-x^{-1}\dfrac{\partial B_0}{\partial z}$.

Gautąsias (11), (12) ir (13) išraiškas įrašę į (2) matricinę diferencialinių lygčių sistemą, atlikę pertvarkius ir iškėlę prieš skliaustus reiškinį $\exp\left\{-B_0x^{-1}\right\}$, kuris nelygus nuliui ir kurį užrašome:

$$e^{-B_0x^{-1}}, \tag{14}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{l} E((k+\rho)x^{k+\rho+1}u_k+x^{k+\rho}B_0u_k+x^{k+\rho+1}\dfrac{\partial u_k}{\partial s})+I_1(x^{k+\rho+2}\dfrac{\partial\rho}{\partial y}s\cdot u_k-x^{k+\rho+1}\dfrac{\partial B_0}{\partial y}u_k+x^{k+\rho+2}\dfrac{\partial u_k}{\partial y}) \\ +I_2(x^{k+\rho+2}\dfrac{\partial\rho}{\partial y}s\cdot u_k-x^{k+\rho+1}\dfrac{\partial B_0}{\partial z}u_k+x^{k+\rho+2}\dfrac{\partial u_k}{\partial z})+x^{k+\rho}\sum\limits_{l=0}^{k}A_{k-l}u_l \end{array}\right).$$

Tam, kad galiotų ši lygybė, būtina, kad koeficientai prie visų x laipsnių būtų nuliui. Lyginkime koeficientus prie vienodų x laipsnių nuliui.

Koeficientas prie x lapsnių ρ yra toks:

$$x^{\rho}: EB_0u_0+A_0u_0=0,$$

$$(EB_0+A_0)u_0=0.$$

Gavome tiesinių homogeninių lygčių sistemą, kurioje u_0 yra nežinomas keturmatis vektorius stulpelis. Iš tiesinės algebros kurso yra žinoma, kad tiesinių homogeninų lygčių sistema turi nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai

$$\det(EB_0 + A_0) = 0 \tag{15}$$

(15) lygybė skaliarinės funkcijos $b_0(y,z)$ atžvilgiu yra ketvirtojo laipsnio lygtis, kuri bendruoju atveju virš kompleksinių skaičių lauko turi keturias šaknis.

Koeficientas prie x laipsniu $\rho+1$ yra toks:

$$x^{\rho+1} : E(\rho u_0 + B_0 u_1 + \frac{\partial u_0}{\partial s}) - I_1 \frac{\partial B_0}{\partial y} u_0 - I_2 \frac{\partial B_0}{\partial z} u_0 + A_1 u_0 + A_0 u_1 = 0$$

$$(EB_0 + A_0)u_1 + (E\rho - I_1 \frac{\partial B_0}{\partial y} - I_2 \frac{\partial B_0}{\partial z} + A_1)u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = 0\,;$$

Pareikalaukime, kad $u_0(x,y,s)$ nepriklausytų nuo s, o $(EB_0 + A_0) = 0$ ir laikykime, kad u_1 pasirenkame bet kokį, tuomet

$$(E\rho - I_1 \frac{\partial B_0}{\partial y} - I_2 \frac{\partial B_0}{\partial z} + A_1)u_0 = 0 \tag{16}$$

(16) sistema yra tiesinių homogeninių lygčių sistema. Iš tiesinės algebros kurso yra žinoma, kad tiesinių homogeninių lygčių sistema turės nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai

$$\det(E\rho - I_1 \frac{\partial B_0}{\partial y} - I_2 \frac{\partial B_0}{\partial z} + A_1) = 0\,. \tag{17}$$

(17) lygybė – parametro ρ ketvirtojo laipsnio algebrinė lygtis, kuri virš kompleksinių skaičių lauko turi keturias $\rho, i = 1,2,3,4$ šaknis. Tarkime, kad visos šaknys yra skirtingos, o jų skirtumai nėra sveikieji skaičiai.

Koeficientas prie x laipsniu $\rho+2$ yra toks:

$$x^{\rho+2}: E((1+\rho)u_1 + B_0 u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial s}) + I_1(\frac{\partial \rho}{\partial y} s \cdot u_0 - \frac{\partial B_0}{\partial y} u_1 + \frac{\partial u_0}{\partial y}) + I_2(\frac{\partial \rho}{\partial z} s u_0 - \frac{\partial B_0}{\partial z} u_1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}) +$$
$$+ A_2 u_0 + A_1 u_1 + A_0 u_2 = 0$$

$$(EB_0 + A_0)u_2 + (E\rho - I_1 \frac{\partial B_0}{\partial y} - I_2 \frac{\partial B_0}{\partial z} + A_1)u_1 + (s(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z}) + A_2)u_0 +$$
$$+ Eu_1 + E\frac{\partial u_1}{\partial s} + I_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_0}{\partial z} = 0.$$

Pagal (14) ir (15) lygybes pertvarkę pastarąją lygtį turime:

$$Eu_1 + E\frac{\partial u_1}{\partial s} + (A_2 + s(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z}))u_0 + I_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_0}{\partial z} = 0. \tag{18}$$

Išspręskime šią lygtį. Tarkime, kad $u_1 = u_1(s)$, nes ieškosime pačių paprasčiausių šios lygties sprendinių. Tuoment (18) lygtis yra tiesinė:

$$u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial s} = -E^{-1}((A_2 + s(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z}))u_0 + I_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_0}{\partial z}) = 0\ .$$

Prilyginame šios lygybės kairiąją pusę nuliui. Tuomet gauname pirmos eilės homogeninę diferencialinę lygtį kintamojo s atžvilgiu:

$$u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial s} = 0\ . \tag{19}$$

Išsprendę atitinkamą homogeninę lygtį ir perrašę diferencialinę lygtį taip, kad būtų patogu integruoti, spręsime ją konstantos varijavimo metodu:

$$\int \frac{du_1}{u_1} = -\int ds.$$

Suintegravę ir pertvarkę gauname:

$$u_1(y,z,s) = e^{-s}C(s). \tag{20}$$

Dabar reikia nustatyti $C(s)$. Pastarosios išraiškos išvestinė pagal s yra:

$$\frac{\partial u_1}{\partial s} = e^{-s}(C'(s) - C(s)). \tag{21}$$

Į (19) lygtį įrašę (20) ir (21) išraiškas ir atlikę pertvarkius gauname, kad

$$C(s) = -\int E^{-1}e^{s}((A_2 + s(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}))u_0 + I_1\frac{\partial u_0}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_0}{\partial z})ds. \tag{22}$$

(22) įrašome į (20) ir gauname u_1 išraišką per u_0:

$$u_1(y,z,s) = -e^{-s}\int E^{-1}e^{s}((A_2 + s(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}))u_0 + I_1\frac{\partial u_0}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_0}{\partial z})ds, \tag{23}$$

čia $u_0(y,z)$ laisvai pasirenkamas, bet koks.

Koeficientas prie x laipsniu $\rho+3$ yra toks:

$$x^{\rho+3}: E((2+\rho)u_2 + B_0u_3 + \frac{\partial u_2}{\partial s}) + I_1(\frac{\partial\rho}{\partial y}s\cdot u_1 - \frac{\partial B_0}{\partial y}u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial y}) + I_2(\frac{\partial\rho}{\partial z}s\cdot u_1 - \frac{\partial B_0}{\partial z}u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial z}) +$$
$$+ A_3u_0 + A_2u_1 + A_1u_2 + A_0u_3 = 0,$$

$$\begin{aligned}&(EB_0 + A_0)u_3 + (E\rho - I_1\frac{\partial B_0}{\partial y} - I_2\frac{\partial B_0}{\partial z} + A_1)u_2 + (A_2 + s(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}))u_1 + \\ &+ A_3u_0 + 2Eu_2 + E\frac{\partial u_2}{\partial s} + I_1\frac{\partial u_1}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_1}{\partial z} = 0.\end{aligned} \tag{24}$$

Pagal (15) ir (16) lygybes atlikę pertvarkius pastarajai lygčiai turime:

$$2Eu_2 + E\frac{\partial u_2}{\partial s} + (A_2 + s(I_1\frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial \rho}{\partial z}))u_1 + A_3u_0 + I_1\frac{\partial u_1}{\partial y} + I_2\frac{u_1}{\partial z} = 0. \qquad (25)$$

Išspręskime pastarąją lygtį. Tarkime, kad $u_1 = u_1(s)$, nes ieškosime pačių paprasčiausių šios lygties sprendinių. Tuomet (25) lygtis yra tiesinė:

$$2u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial s} = E^{-1}((A_2 + s(I_1\frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial \rho}{\partial z}))u_1 + A_3u_0 + I_1\frac{\partial u_1}{\partial y} + I_2\frac{u_1}{\partial z}) = 0.$$

Prilyginame šios lygybės kairiąją pusę nuliui. Tuomet gauname pirmos eilės homogeninę diferencialinę lygtį kintamojo s atžvilgiu:

$$2u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial s} = 0. \qquad (26)$$

Išsprendę atitinkamą homogeninę lygtį ir perrašę diferencialinę lygtį taip, kad būtų patogu integruoti, spręsime ją konstantos varijavimo metodu:

$$\int \frac{du_2}{u_2} = -2\int ds.$$

Suintegravę ir pertvarkę gauname:

$$u_2(y,z,s) = e^{-2s}C(s). \qquad (27)$$

Reikia nustatyti $C(s)$. Pastarosios išraiškos išvestinė pagal s yra:

$$\frac{\partial u_2}{\partial s} = e^{-2s}(C'(s) - 2C(s)). \qquad (28)$$

Į (25) lygtį įrašę (27) ir (28) išraiškas ir atlikę pertvarkius gauname $C(s)$:

$$C(s) = -\int E^{-1} e^{-2s} ((A_2 + s(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z}))u_1 + A_3 u_0 + I_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + I_2 \frac{u_1}{\partial z})ds. \tag{29}$$

(29) įrašome į (30) ir gauname u_2 išraišką per u_1 ir u_0:

$$u_2(y, z, s) = e^{-2s} \int e^{2s} E^{-1} ((A_2 + s(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z}))u_1 + A_3 u_0 + I_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + I_2 \frac{u_1}{\partial z})ds. \tag{30}$$

Pagal (18) ir (24) nesunku išvesti jau supaprastintą rekurentinę formulę, kurią sutvarkę pagal anksčiau minėtus būdus gauname u_k išraišką per $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$:

$$u_k(y, z, s) = e^{-ks} \int e^{ks} E^{-1} ((A_k + s(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z}))u_1 + \sum_{l=3}^{k+2} A_l u_{k+2-l} + I_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + I_2 \frac{u_1}{\partial z})ds + C(s). \tag{31}$$

Kadangi laipsninės eilutės nustatymui pakanka vienos rekurentinės formulės, todėl (31) integravimo konstanta $C(s)$ galime pasirinkti laisvai arba paprasčiausiai prilyginti ją nuliui.

Gautąjį rezultatą suformuluokime kaip teoremą.

4 teorema. *(1) matricinės diferencialinės lygties formalūs sprendiniai, kai* $p = 1$, *yra tokie:*

$$u(x, y, z) = e^{-B_0 x^{-1}} \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho(y,z)} u_k(y, z, s).$$

Eilutės koeficientai randami iš tokios rekurentinės formulės:

$$u_k(y, z, s) = e^{-ks} \int e^{ks} E^{-1} ((A_k + s(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z}))u_1 + \sum_{l=3}^{k+2} A_l u_{k+2-l} + I_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + I_2 \frac{u_1}{\partial z})ds + C(s).$$

ρ *randamas iš lygties:* $\det(E\rho - I_1 \frac{\partial B_0}{\partial y} - I_2 \frac{\partial B_0}{\partial z} + A_1) = 0$.

B_0 *yra toks*: $B_0 = -A_0 E^{-1}$.

§4. Formaliųjų sistemos sprendinių radimas

Nagrinėsime (2) matricinių dalinių išvestinių diferencialinę lygtį (p=1) kada šios matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties koeficientų matricos $A(x,y,z)$ elementams galioja dėstinys tokia – x laipsnių eilute:

$$A(x,y,z) = A_0 + A_1 + \sum_{k=2}^{\infty} x^k A_k(y,z) \tag{32}$$

Kada (2) matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties koeficientų matricos $A(x)$ dėstinio laipsnine eilute koeficientai nepriklauso nuo kintamųjų y ir z, tos lygties sprendinių ieškosime tokia apibendrinta laipsnine x laipsnių eilute

$$u(x,y,z) = \exp\left\{-B_0 x^{-1}\right\} \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho} u_k(y,z) \tag{33}$$

(2) matricinėje diferencialinėje lygtyje yra ieškomosios funkcijos dalinės išvestinės pagal kintamuosius x, y ir z, todėl randame tas išvestines. Diferencijuodami (33) pagal kintamuosius x, y, ir z, gauname tokias lygybes

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho) x^{k+\rho-1} \exp\left\{-B_0 x^{-1}\right\} u_k + B_0 x^{-2} \exp\left\{-B_0 x^{-1}\right\} u_k x^{k+\rho}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(x^{k+\rho} \exp\left\{-B_0 x^{-1}\right\} \frac{\partial\left\{-B_0 x^{-1}\right\}}{\partial y} u_k + x^{k+\rho} \exp\left\{-B_0 x^{-1}\right\} \frac{\partial u_k}{\partial y} \right) \tag{34}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(x^{k+\rho} \exp\left\{-B_0 x^{-1}\right\} \frac{\partial\left\{-B_0 x^{-1}\right\}}{\partial z} u_k + x^{k+\rho} \exp\left\{-B_0 x^{-1}\right\} \frac{\partial u_k}{\partial z} \right)$$

Gautas (35) išraiškas įrašę į (2) gauname:

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left[\begin{array}{l} E((k+\rho)x^{k+\rho-1} \exp\{-B_0 x^{-1}\} u_k + B_0 x^{-2} \exp\{-B_0 x^{-1}\} x^{k+\rho} u_k) + \\ + I_1 (x^{k+\rho} \exp\{-B_0 x^{-1}\} \frac{\partial\{-B_0 x^{-1}\}}{\partial y} u_k + x^{k+\rho} \exp\{-B_0 x^{-1}\} \frac{\partial u_k}{\partial y}) + \\ + I_2 (x^{k+\rho} \exp\{-B_0 x^{-1}\} \frac{\partial\{-B_0 x^{-1}\}}{\partial z} u_k + x^{k+\rho} \exp\{-B_0 x^{-1}\} \frac{\partial u_k}{\partial z}) + \sum_{l=0}^{k} A_k x^{k+\rho} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho} u_k \end{array} \right] = 0 \qquad (35)$$

Čia $\frac{\partial\{-B_0 x^{-1}\}}{\partial x} = B_0 x^{-2}$, $\frac{\partial\{-B_0 x^{-1}\}}{\partial y} = -x^{-1} \frac{\partial B_0}{\partial y}$, $\frac{\partial\{-B_0 x^{-1}\}}{\partial z} = -x^{-1} \frac{\partial B_0}{\partial z}$.

(36) lygybėje atlikę elementarius pertvarkius ir iškėlę prieš skliaustus $\exp\{-B_0 x^{-1}\}$, kuris nelygus nuliui, gauname:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{l} E(k+\rho)x^{k+\rho+1} u_k + E B_0 x^{k+\rho} u_k + I_1 x^{k+\rho+2} \frac{\partial u_k}{\partial y} - I_1 x^{k+\rho+1} \frac{\partial B_0}{\partial y} u_k + \\ + I_2 x^{k+\rho+2} \frac{\partial u_k}{\partial z} - I_2 x^{k+\rho+1} \frac{\partial B_0}{\partial z} u_k \end{array} \right) + x^{k+\rho} \sum_{l=0}^{k} A_{k-l} u_l = 0 \qquad (36)$$

Kad surastume (33) eilutės koeficientus $u_k(y,z)$, $k = 0,1,2,...,p$, lyginame nuliui koeficientą prie vienodų x-o laipsnių (37) lygybėje.

$$x^{\rho}: \quad (EB_0 + A_0)u_0 = 0 \qquad (37)$$

Gavome tiesinių homogeninių lygčių sistemą, kurioje u_0 yra nežinomas keturmatis vektorius stulpelis. Iš tiesinės algebros kurso yra žinoma, kad tiesinių homogeninių lygčių sistema turi nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai

$$\det(EB_0 + A_0) = 0 . \qquad (38)$$

Pastaroji lygybė funkcijos $b_0(y,z)$ atžvilgiu yra ketvirtojo laipsnio lygtis, kuri bendruoju atveju virš kompleksinių skaičių lauko turi keturias šaknis.

Tęsiame toliau:

$$x^{\rho+1}: \quad (EB_0 + A_0)u_1 + (E\rho - I_1 \frac{\partial B_0}{\partial y} - I_2 \frac{\partial B_0}{\partial z} + A_1)u_0 = 0 \qquad (39)$$

Sakykime, kad u_1 pasirenkame bet kokį, o $(EB_0 + A_0) = 0$, tuomet

$$(E\rho - I_1 \frac{\partial B_0}{\partial y} - I_2 \frac{\partial B_0}{\partial z} + A_1)u_0 = 0 \tag{40}$$

(40) sistema yra tiesinių homogeninių lygčių sistema. Iš tiesinės algebros yra žinoma, kad tiesinių homogeninių lygčių sistema turės nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai

$$\det(E\rho - I_1 \frac{\partial B_0}{\partial y} - I_2 \frac{\partial B_0}{\partial z} + A_1) = 0 \tag{41}$$

(41) lygybė yra parametro ρ ketvirtojo laipsnio algebrinė lygtis, kuri virš kompleksinių skaičių lauko turi keturias šaknis. Tarkime, kad visos šaknys yra skirtingos, o jų skirtumai nėra sveikieji skaičiai.

$$x^{\rho+2}: \quad (EB_0 + A_0)u_2 + (E(1+\rho) - I_1 \frac{\partial B_0}{\partial y} - I_2 \frac{\partial B_0}{\partial z} + A_1)u_1 + A_2 u_0 + I_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_0}{\partial z} = 0 \tag{42}$$

(37), (39) ir (42) koeficientas prie bet kokio *x*-o laipsnio $x^{\rho+k}$, kai $k = 0,1,2,\ldots$ randamas iš tokios rekurentinės formulės

$$(EB_0 + A_0)u_k + (E(k-1+\rho) - I_1 \frac{\partial B_0}{\partial y} - I_2 \frac{\partial B_0}{\partial z} + A_1)u_{k-1} + A_2 u_{k-2} + I_1 \frac{\partial u_{k-2}}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_{k-2}}{\partial z} = 0 \tag{44}$$

Liko rasti kitus (33) lygybės koeficientus. Tai padarysime u_k išsireikšdami per u_{k-1} ir u_{k-2}.

$$u_k = -(EB_0 + A_0)^{-1} \cdot (E(k-1+\rho) - I_1 \frac{\partial B_0}{\partial y} - I_2 \frac{\partial B_0}{\partial z} + A_1)u_{k-1} + I_1 \frac{\partial u_{k-2}}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_{k-2}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-2} A_{k-l} u_l = 0 \tag{45}$$

Teorema 5. *(1) matricinės diferencialinės lygties formalūs sprendiniai, kai p=*1, *yra tokie:*

$$u(x,y,z) = e^{-B_0 x^{-1}} \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho(y,z)} u_k(y,z).$$

Eilutės koeficientai randami iš tokios rekurentinės formulės:

$$u_k = -(EB_0 + A_0)^{-1} \cdot (E(k-1+\rho) - I_1 \frac{\partial B_0}{\partial y} - I_2 \frac{\partial B_0}{\partial z} + A_1)u_{k-1} + I_1 \frac{\partial u_{k-2}}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_{k-2}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-2} A_{k-l} u_l = 0$$

ρ *randamas iš lygties:* $\det(E\rho - I_1 \frac{\partial B_0}{\partial y} - I_2 \frac{\partial B_0}{\partial z} + A_1) = 0$.

B_0 *yra toks*: $B_0 = -A_0 E^{-1}$.

§5. Sistemos sprendimas bendru atveju

Nagrinėsime (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sprendinius. Nagrinėsime atvejį, kai $p>0$, t.y. $p=1$. Tuomet turime lygtį:

$$x^2(E\frac{\partial u}{\partial x}+I_1\frac{\partial u}{\partial y}+I_2\frac{\partial u}{\partial z})+\sum_{k=0}^{\infty}A_k(y,z)x^k u(x,y,z)=0\,. \qquad (46)$$

Spręsime matricines dalines išvestinių diferencialines lygtis. (2) lygtyje ieškomąjį vektorių stulpelį pakeisime kitu, t.y. nauju ieškomu vektorių stulpelio keitiniu

$$u(x,y,z)=\exp\{-B_0(y,z)x^{-1}\}\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho(y,z)}u_k(y,z,\ln x) \qquad (47)$$

$\rho(y,z)$ - funkcija parametras, o $\ln x = s$

Matricos $A(x,y,z)$ ir funkcijos $u(x,y,z)$ sandauga yra tokia:

$$A(x,y,z)=\exp\{-B_0(y,z)x^{-1}\}\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho(y,z)}\sum_{l=0}^{k}A_{k-l}(y,z)u_l(y,z,s)\,,$$

diferencijuodami (40) lygybę pagal kintamuosius *x*, *y*, *z* gauname tokias lygybes:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{k=0}^{\infty}((k+\rho)x^{k+\rho-1}exp\{-B_0x^{-1}\}u_k+x^{k+\rho}\exp\{-B_0x^{-1}\}\frac{\partial\{-B_0x^{-1}\}}{\partial x}u_k+x^{k+\rho}\exp\{-B_0x^{-1}\}\frac{\partial u_k}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x})\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(x^{k+\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}s\cdot\exp\{-B_0x^{-1}\}u_k+x^{k+\rho}\exp\{-B_0x^{-1}\}\frac{\partial\{-B_0x^{-1}\}}{\partial y}u_k+x^{k+\rho}\exp\{-B_0x^{-1}\}\frac{\partial u_k}{\partial y}\right) \qquad (48)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(x^{k+\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}s\cdot\exp\{-B_0x^{-1}\}u_k+x^{k+\rho}\exp\{-B_0x^{-1}\}\frac{\partial\{-B_0x^{-1}\}}{\partial z}u_k+x^{k+\rho}\exp\{-B_0x^{-1}\}\frac{\partial u_k}{\partial z}\right)$$

Gautąsias (48) išraiškas įrašę į (46) matricinę diferencialinių lygčių sistemą, atlikę pertvarkius ir iškėlę prieš skliaustus reiškinį

$$\exp\{-B_0(y,z)x^{-1}\} \neq 0 \tag{49}$$

gauname

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{l} E((k+\rho)x^{k+\rho+1}u_k + x^{k+\rho}B_0u_k + x^{k+\rho+2}\dfrac{\partial u_k}{\partial s}) + I_1(x^{k+\rho+2}\dfrac{\partial \rho}{\partial y}s\cdot u_k - x^{k+\rho+1}\dfrac{\partial B_0}{\partial y}u_k + x^{k+\rho+2}\dfrac{\partial u_k}{\partial y}) \\ + I_2(x^{k+\rho+2}\dfrac{\partial \rho}{\partial y}s\cdot u_k - x^{k+\rho+1}\dfrac{\partial B_0}{\partial z}u_k + x^{k+\rho+2}\dfrac{\partial u_k}{\partial z}) + x^{k+\rho}\sum_{l=0}^{k}A_{k-l}u_l \end{array}\right) \tag{50}$$

Tam, kad galiotų ši lygybė, būtina, kad koeficientai prie visų x laipsnių būtų lygi nuliui. Lyginkime koeficientus prie vienodų *x* laipnių nuliui.

Koeficientas prie *x* laipsnių ρ yra toks:

$$x^{\rho} : EB_0u_0 + A_0u_0 = 0\,,$$

$$(EB_0 + A_0)u_0 = 0\,.$$

Gavome tiesinių homogeninių lygčių sistemą, kurioje u_0 yra nežinomas keturmatis vektorius stulpelis. Iš tiesinės algebras kurso yra žinoma, kad tiesinių homogeninų lygčių sistema turi nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai

$$\det(EB_0 + A_0) = 0\,. \tag{51}$$

(51) lygybė skaliarinės funkcijos $b_0(y,z)$ atžvilgiu yra ketvirtojo laipsnio lygtis, kuri bendruoju atveju virš kompleksinių skaičių lauko turi keturias šaknis.

Koeficientas prie *x* laipsniu $\rho+1$ yra toks:

$$x^{\rho+1} : E(\rho u_0 + B_0u_1 + \frac{\partial u_0}{\partial s}) - I_1\frac{\partial B_0}{\partial y}u_0 - I_2\frac{\partial B_0}{\partial z}u_0 + A_1u_0 + A_0u_1 = 0$$

$$(E\rho - I_1 \frac{\partial B_0}{\partial y} - I_2 \frac{\partial B_0}{\partial y} + A_1)u_0 + (EB_0 + A_0)u_1 = 0$$

Pareikalaukime, kad $u_0(x, y, s)$ nepriklausytų nuo s, o $(EB_0 + A_0) = 0$ ir laikykime, kad u_1 pasirenkame bet kokį, tuomet

$$(E\rho - I_1 \frac{\partial B_0}{\partial y} - I_2 \frac{\partial B_0}{\partial z} + A_1)u_0 = 0 \tag{52}$$

(52) sistema yra tiesinių homogeninių lygčių sistema. Iš tiesinės algebros kurso yra žinoma, kad tiesinių homogeninių lygčių sistema turės nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai

$$\det(E\rho - I_1 \frac{\partial B_0}{\partial y} - I_2 \frac{\partial B_0}{\partial z} + A_1) = 0\,. \tag{53}$$

(53) lygybė – parametro ρ ketvirtojo laipsnio algebrinė lygtis, kuri virš kompleksinių skaičių lauko turi keturias $\rho, i = 1,2,3,4$ šaknis. Tarkime, kad visos šaknys yra skirtingos, o jų skirtumai nėra sveikieji skaičiai.

Koeficientas prie *x* laipsniu $\rho + 2$ yra toks:

$$x^{\rho+2}: \begin{aligned} &(EB_0 + A_0)u_2 + (E\rho - I_1 \frac{\partial B_0}{\partial y} - I_2 \frac{\partial B_0}{\partial z} + A_1)u_1 + (s(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z} + A_2)u_0 + Eu_1 + \\ &+ E\frac{\partial u_1}{\partial s} + I_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_0}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{54}$$

Pareikalaukime, kad $u_0(x, y, s)$ nepriklausytų nuo s, o $(EB_0 + A_0) = 0$ ir laikykime, kad u_1 ir u_2 pasirenkame bet kokius, tuomet

$$(s(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z} + A_2)u_0 + Eu_1 + E\frac{\partial u_1}{\partial s} + I_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_0}{\partial z} = 0 \tag{55}$$

Pertvarkę pastarąją lygtį turime:

$$Eu_1 + E\frac{\partial u_1}{\partial s} + (A_2 + s(I_1\frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial \rho}{\partial z}))u_0 + I_1\frac{\partial u_0}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_0}{\partial z} = 0. \tag{56}$$

Išspręskime šią lygtį. Tarkime, kad $u_1 = u_1(s)$, nes ieškosime pačių paprasčiausių šios lygties sprendinių. Tuomet (56) lygtis yra tiesinė:

$$u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial s} = -E^{-1}((A_2 + s(I_1\frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial \rho}{\partial z}))u_0 + I_1\frac{\partial u_0}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_0}{\partial z}) = 0\,. \tag{57}$$

Prilyginame šios lygybės kairiąją pusę nuliui. Tuomet gauname pirmos eilės homogeninę diferencialinę lygtį funkcijos *s* atžvilgiu:

$$u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial s} = 0\,. \tag{58}$$

Išsprendę atitinkamą homogeninę lygtį ir perrašę diferencialinę lygtį taip, kad būtų patogu integruoti, spręsime ją konstantos varijavimo metodu:

$$\int \frac{du_1}{u_1} = -\int ds.$$

Suintegravę ir pertvarkę gauname:

$$u_1(y,z,s) = e^{-s}C(s). \tag{59}$$

Dabar reikia nustatyti *C(s*). Pastarosios išraiškos išvestinė pagal *s* yra:

$$\frac{\partial u_1}{\partial s} = e^{-s}(C'(s) - C(s)). \tag{60}$$

Į (56) lygtį įrašę (57) ir (58) išraiškas ir atlikę pertvarkius gauname, kad

$$C(s) = -\int E^{-1} e^{s} ((A_2 + s(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z}))u_0 + I_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_0}{\partial z})ds. \quad (61)$$

(61) įrašome į (59) ir gauname u_1 išraišką per u_0:

$$u_k(y,z,s) = -e^{-s} \int E^{-1} e^{s} ((A_2 + s(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z}))u_0 + I_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_0}{\partial z})ds, \quad (62)$$

čia $u_0(y,z)$ laisvai pasirenkamas, bet koks.

Koeficientas prie x laipsniu $\rho + 3$ yra toks:

$$x^{\rho+3} : E((2+\rho)u_2 + B_0 u_3 + \frac{\partial u_2}{\partial s}) + I_1(\frac{\partial \rho}{\partial y} s \cdot u_1 - \frac{\partial B_0}{\partial y} u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial y}) + I_2(\frac{\partial \rho}{\partial z} s \cdot u_1 - \frac{\partial B_0}{\partial z} u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial z}) +$$
$$+ A_3 u_0 + A_2 u_1 + A_1 u_2 + A_0 u_3 = 0,$$

$$\begin{aligned} &(EB_0 + A_0)u_3 + (E\rho - I_1 \frac{\partial B_0}{\partial y} - I_2 \frac{\partial B_0}{\partial z} + A_1)u_2 + (A_2 + s(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z}))u_1 + \\ &+ A_3 u_0 + 2Eu_2 + E \frac{\partial u_2}{\partial s} + I_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (63)$$

Atlikę pertvarkius pastarajai lygčiai turime:

$$2Eu_2 + E \frac{\partial u_2}{\partial s} + (A_2 + s(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z}))u_1 + A_3 u_0 + I_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + I_2 \frac{u_1}{\partial z} = 0. \quad (64)$$

Išspręskime pastarąją lygtį. Tarkime, kad $u_1 = u_1(s)$, nes ieškosime pačių paprasčiausių šios lygties sprendinių. Tuomet (64) lygtis yra tiesinė:

$$2u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial s} = E^{-1}((A_2 + s(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z}))u_1 + A_3 u_0 + I_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + I_2 \frac{u_1}{\partial z}) = 0.$$

Prilyginame šios lygybės kairiąją pusę nuliui. Tuomet gauname pirmos eilės homogeninę diferencialinę lygtį funkcijos s atžvilgiu:

$$2u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial s} = 0. \tag{65}$$

Išsprendę atitinkamą homogeninę lygtį ir perrašę diferencialinę lygtį taip, kad būtų patogu integruoti, spręsime ją konstantos varijavimo metodu:

$$\int \frac{du_2}{u_2} = -2\int ds.$$

Suintegravę ir pertvarkę gauname:

$$u_2(y,z,s) = e^{-2s}C(s). \tag{66}$$

Reikia nustatyti $C(s)$. Pastarosios išraiškos išvestinė pagal s yra:

$$\frac{\partial u_2}{\partial s} = e^{-2s}(C'(s) - 2C(s)). \tag{67}$$

Į (64) lygtį įrašę (66) ir (67) išraiškas ir atlikę pertvarkius gauname $C(s)$:

$$C(s) = -\int E^{-1}e^{-2s}((A_2 + s(I_1\frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial \rho}{\partial z}))u_1 + A_3u_0 + I_1\frac{\partial u_1}{\partial y} + I_2\frac{u_1}{\partial z})ds. \tag{68}$$

(66) įrašome į (68) ir gauname u_2 išraišką per u_1 ir u_0:

$$u_2(y,z,s) = e^{-2s}\int e^{2s}E^{-1}((A_2 + s(I_1\frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial \rho}{\partial z}))u_1 + A_3u_0 + I_1\frac{\partial u_1}{\partial y} + I_2\frac{u_1}{\partial z})ds. \tag{69}$$

Dabar jau nesunku išvesti jau supaprastintą rekurentinę formulę, kurią sutvarkę pagal anksčiau minėtus būdus gauname u_k išraišką per $u_0, u_1, \mathrm{K}\ , u_{k-1}$:

$$u_k(y,z,s) = e^{-ks}\int e^{ls}E^{-1}((A_2 + s(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}))u_1 + \sum_{l=3}^{k+2}A_l u_{k+2-l} + I_1\frac{\partial u_1}{\partial y} + I_2\frac{u_1}{\partial z})ds + C(s). \tag{70}$$

Kadangi laipsninės eilutės nustatymui pakanka vienos rekurentinės formulės, todėl integravimo (70) konstanta $C(s)$ galime pasirinkti laisvai arba paprasčiausiai prilyginti ją nuliui.

Gautąjį rezultatą suformuluokime kaip teoremą.

6 teorema. *(1) matricinės diferencialinės lygties formalūs sprendiniai, kaip* $p=1$, *yra tokie:*

$$u(x,y,z) = e^{-B_0x^{-1}}\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho(y,z)}u_k(y,z,\ln x).$$

Eilutės koeficientai randami iš tokios rekurentinės formulės:

$$u_k(y,z,\ln x) = e^{-k\ln x}\int e^{k\ln x}E^{-1}((A_2 + \ln x(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}))u_1 + \sum_{l=3}^{k+2}A_l u_{k+2-l} + I_1\frac{\partial u_1}{\partial y} + I_2\frac{u_1}{\partial z})d\ln x + C(\ln x).$$

ρ *randamas iš lygties:* $\det(E\rho - I_1\frac{\partial B_0}{\partial y} - I_2\frac{\partial B_0}{\partial z} + A_1) = 0$.

B_0 *yra toks*: $B_0 = -A_0E^{-1}$.

§6. Sprendimas apibendrintų laipsninių eilučių metodu

Nagrinėkime (2) matricinių dalinių išvestinių diferencialinių lygčių atveju, kada p=1. Atvejais, kada p=1 suformuluosime apibendrintus rezultatus:

$$x^2(E\frac{\partial u}{\partial x}+I_1\frac{\partial u}{\partial y}+I_2\frac{\partial u}{\partial z})+\sum_{k=0}^{\infty}A_k(y,z)x^k u(x,y,z)=0\,, \tag{71}$$

Šiuo atveju sprendinys ieškomas tokia apibendrinta x-o laipsnio eilute

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho(y,z)}u_k(y,z,s)\,.$$

Čia $s=\ln x$, $\rho(y,z)$ - kažkokia funkcija parametras. Pastarąją eilutę išsidiferencijuojame pagal kintamuosius x, y, z ir gauname

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho-1}((k+\rho)u_k+\frac{\partial u_k}{\partial s}) \tag{72}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}(s\frac{\partial \rho}{\partial y}u_k+\frac{\partial u_k}{\partial y}) \tag{73}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}(s\frac{\partial \rho}{\partial z}u_k+\frac{\partial u_k}{\partial z}) \tag{74}$$

Įrašę (59), (60), (61) į (58) gauname

$$\sum_{k=0}^{\infty}\begin{matrix}(E(k+\rho)u_k x^{k+\rho+1}+E\dfrac{\partial u_k}{\partial s}x^{k+\rho+1}+s(I_1\dfrac{\partial \rho}{\partial y}+I_2\dfrac{\partial \rho}{\partial z})u_k x^{k+\rho+2}+\\ +(I_1\dfrac{\partial u_k}{\partial y}+I_2\dfrac{\partial u_k}{\partial z})x^{k+\rho+2}+\displaystyle\sum_{l=0}^{k}A_l u_{k-l}x^{k+\rho})=0\end{matrix} \tag{75}$$

Kad rastume eilutės $u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho(y,z)}u_k(y,z,s)$ koeficientus, (75) lygybėje lyginame nuliui koeficientus prie vienodų x-o laipsnių. Mažiausias x-o laipsnis (75) eilutėje ρ.

$$x^{\rho}: A_0 u_0 = 0 \tag{76}$$

Tęsiame toliau:

$$x^{\rho+1}: \qquad E(\rho + A_1)u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial s} + A_0 u_1 = 0 \tag{77}$$

$$x^{\rho+2}: \ (E(1+\rho) + A_1)u_1 + E\frac{\partial u_1}{\partial s} + I_1\frac{\partial u_0}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_0}{\partial z} + s(I_1\frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial \rho}{\partial z})u_0 + A_2 u_0 + A_0 u_2 = 0\,. \tag{78}$$

Iš (76), (77) ir (78) seka, kad koeficientas bet kokio x-o laipsnio $k+\rho$, $k = 0,1,2,3...$ yra randamas iš šios rekurentinės formulės

$$(E(k+\rho) + A_1)u_k + E\frac{\partial u_k}{\partial s} + I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + s(I_1\frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial \rho}{\partial z})u_{k-1} + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l}u_l = 0 \tag{79}$$

Iš (77), kai $k = 1$ gauname

$$E(\rho + A_1)u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial s} + A_0 u_1 = 0$$

Iš tiesinės algebros kurso žinome, kad tiesinių homogeninių lygčių sistema turės nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai

$$\det(E\rho + A_1) = 0\,,$$

Išsireiškiame u_k per u_{k-1}:

$$E((k+\rho) + A_1)u_k + E\frac{\partial u_k}{\partial s} = -(I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + s(I_1\frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial \rho}{\partial z})u_{k-1} + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l}u_l) \tag{80}$$

Mus domina patys paprasčiausi (80) lygties sprendiniai. Todėl y,z laikysime konstantomis. Tada funkcija u_k priklauso tik nuo s, t.y. $u=u(s)$. $u(s)$ atžvilgiu (80) lygtis yra tiesinė diferencialinė lygtis, todėl ją spręsime varijavimo metodu.

Prisilyginame kairiąją (80) lygybės pusę nuliui.

$$E((k+\rho) + A_1)u_k + E\frac{\partial u_k}{\partial s} = 0 \tag{81}$$

Atskiriame kintamuosius:

$$\frac{du_k}{u_k} = -((k+\rho) + A_1)ds \tag{82}$$

Suintegruojame abi (82) lygybės puses ir gauname:

$$\ln u_k = -s((k+\rho)+A_1)+C(s) \tag{83}$$

Iš (83), randame kam lygus u_k:

$$u_k = e^{-((k+\rho)+A_1)}C(s) \tag{84}$$

šioje lygybėje yra nežinoma funkcija $C(s)$. Kad ją rastume (84) lygybę diferencijuojame pagal s ir gauname

$$u_k' = C'e^{-s((\rho+k)+A_1)} - C'((\rho+k)+A_1)e^{-s((\rho+k)+A_1)} \tag{85}$$

(84) ir (85) įrašę į (80) gauname

$$\begin{aligned}&((k+\rho)+A_1)C\cdot e^{-s((\rho+k)+A_1)} + C'e^{-s((\rho+k)+A_1)} - C((\rho+k)+A_1)e^{-s((\rho+k)+A_1)} = \\ &= -(s(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z})u_{k-1} + I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l)\end{aligned} \tag{86}$$

(86) lygybėje sutraukę panašius narius gauname

$$C'e^{-s((\rho+k)+A_1)} = -(s(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z})u_{k-1} + I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l \tag{87}$$

Ši diferencialinė lygtis $C(s)$ atžvilgiu yra tiesinė diferencialinė lygtis su atskiriamais kintamaisiais. Atskyrę kintamuosius gauname

$$dC = e^{-s((\rho+k)+A_1)}\cdot(s(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z})u_{k-1} + I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l)ds \tag{88}$$

Abi puses suintegruojame ir gauname

$$C = -\int e^{s((\rho+k)+A_1)}\cdot(s(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z})u_{k-1} + I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l)ds \tag{89}$$

(89) įrašę į (84), gauname kam lygūs u_k, kai k=1,2,…

$$u_k = -e^{-((k+\rho)+A_1)}\int e^{s((\rho+k)+A_1)}\cdot(s(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z})u_{k-1} + I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l)ds \tag{90}$$

Lieka ištirti eilutės konvergavimą. Tai atliksime mažorantų metodu. Tarkime, kad $u_k(y,z,s)$ mažorantė yra

$$u_k(y,z,s) \ll Q^k(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{-\alpha(k)}\cdot|s|^{\beta(k)}I\,, \tag{91}$$

kur Q - kažkokia konstanta; I - ketvirtos eilės vektorius stulpelis, kurio visi elementai - vienetai; $\alpha(k)$ ir $\beta(k)$ - kažkokia tai dydžiai, kuriuos nustatysime vėliau. Kadangi $A_k(y,z)$ yra holomorfinė funkcija, tai jos mažorantė yra:

$$A_k(y,z) \ll M^k(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{-1}, \tag{92}$$

kur M – kažkokia pastovi ketvirtos eilės kvadratinė matrica. Iš $\rho(y,z,s)$ apibrėžimo seka, kad šios funkcijos mažorantę galima imti tokią

$$\rho(y,z) << P(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{-1}, \tag{93}$$

kur P - kažkokia konstanta.

(91), (92), (93) įrašę į rekurentinę formulę (79) gauname

$$u_k(y,z,s) << \begin{aligned} &((\rho+k)+A_1)^{-1}(Q^k|\beta(k)||y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{-\alpha(k)}\cdot|s|^{\beta(k)-1}I+ \\ &+s\cdot P\cdot L\left(|y-y_0|^{-2}\cdot|z-z_0|^{-1}+|y-y_0|^{-1}\cdot|z-z_0|^{-2}\right)\cdot Q^{k-1}\cdot \\ &\cdot(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{\alpha(k-1)}\cdot|s|^{\beta(k)-1}\cdot I+L\cdot Q^{k-1}|\alpha(k-1)|\cdot|s|^{\beta(k)-1}\cdot \\ &\cdot\left(|y-y_0|^{-\alpha(k-1)-1}\cdot|z-z_0|^{-\alpha(k-1)}+|y-y_0|^{-\alpha(k-1)}\cdot|z-z_0|^{-\alpha(k-1)-1}\right)+ \\ &+\sum_{l=0}^{k-1}M^{k-l}Q\cdot(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{-\alpha(l)-1}|s|^{\beta(l)}\cdot I) \end{aligned} \tag{94}$$

kur L – ketvirtos eilės kvadratinė matrica, kurios visi elementai vienetai. Toliau pasirenkame $\alpha(k)=2k$, $\beta(k)=k$. Tuomet $u_k(y,z,s)$ mažorantė yra

$$Q^k(|y-y_0|\cdot|z-z_0|)^{-2k}\cdot|s|^k \tag{95}$$

Įrašę $\alpha(k)=2k$ ir $\beta(k)=k$ išraiškas į (94) gauname

$$u_k(y,z,s) << \begin{aligned} &((\rho+k)+A_1)^{-1}Q^k\left(|y-y_0||z-z_0|\right)^{-2k}\cdot|s|^k\cdot(|s|^{-1}\cdot I+P(|z-z_0|+|y-y_0|)\cdot \\ &\cdot\frac{1}{Q}|2k-2||y-y_0||z-z_0|\cdot(|y-y_0|+|z-z_0|)\cdot L+\sum_{l=0}^{k-1}M^{k-l}Q^{l-k}\cdot(|y-y_0||z-z_0|)^{2k-2l-1}|s|^{l-k})\cdot I \end{aligned} \tag{96}$$

Į (96) įeina $|s|^{-1}$ arba $\dfrac{1}{\ln x}$. Kadangi ieškosime sprendinių, kai $x\to 0$ tai $|\ln x|\to\infty$. Iš to seka, kad $|s|^{-1}<\varepsilon$, kur $\varepsilon\to 0$. Kadangi $|y-y_0|<\frac{r_1}{2}$; $|z-z_0|<\frac{r_2}{2}$, tai iš (96) gauname

$$u_k(y,z,s) < Q^k\left(|y-y_0||z-z_0|\right)^{-2k}|s|^k\cdot\left[\begin{aligned} &((\rho+k)+A_1)^{-1}\cdot k\cdot\varepsilon+((\rho+k)+A_1)^{-1}\cdot\frac{P(r_1+r_2)}{2Q}L+ \\ &+((\rho+k)+A_1)^{-1}\cdot\frac{|2k-2|r_1r_2(r_1+r_2)}{8Q}L+((\rho+k)+A_1)^{-1}\cdot \\ &\cdot r_1r_2(4QM^{-1}-r_1r_2L)^{-1} \end{aligned}\right]\cdot I \tag{97}$$

Laužtiniuose skliaustuose antrasis ir ketvirtasis dėmenys k augant į begalybę artėja į nulį. Konstanta Q pasirinkime taip, kad (97) lygybės laužtiniuose skliaustuose esančių pirmojo ir trečiojo dėmenų suma nebūtų didesnė už 1. Tuomet $u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho(y,z)} u_k(y,z,s)$ eilutės koeficientams galioja šis įvertis:

$$|u_k(y,z)| < Q^k \left(|y-y_0||z-z_0|\right)^{-2k} |s|^k \cdot I \tag{98}$$

(98) eilutės įvertis garantuoja eilutės konvergavimą, kai

$$|x| < \frac{(r_1 r_2)}{16Q}; |y-y_0| < \frac{r_1}{2}; |z-z_0| < \frac{r_2}{2} \tag{99}$$

ε artėjant į nulį, gautojo sprendinio konvergavimas yra labai mažas. Todėl sprendinio ieškome kitokia apibendrinta x-o laipsnių eilute.

Gautą rezultatą suformuluosime kaip teoremą:

Teorema 7: *(1) matricinės diferencialinės lygties formalūs sprendiniai, kai* $p=1$, *yra tokie:*

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho(y,z)} u_k(y,z,s),$$

eilutės koeficientai randami iš tokios rekurentinės formulės:

$$E((k+\rho)+A_1)u_k + E\frac{\partial u_k}{\partial s} = -(I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + s(I_1\frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial \rho}{\partial z})u_{k-1} + \sum_{l=0}^{k-1} A_{k-l}u_l),$$

gauti sistemos sprendiniai konverguoja, kai

$$|x| < \frac{(r_1 r_2)}{16Q}; |y-y_0| < \frac{r_1}{2}; |z-z_0| < \frac{r_2}{2}.$$

IŠVADOS

Nagrinėjami sistemos sprendiniai, kai eilės išsigimimas reguliarus (p=0) ir pirmasis sistemos koeficientų dėstinio laipsnine eilute narys nepriklauso nuo kintamųjų y ir z, reiškiami laipsnine x laipsnių eilute ir ta išraiška yra tokia:

$$u_k(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(y,z)\,,$$

ρ randamas iš lygties

$$\det(E\rho+A_0)=0\,,$$

o eilutės koeficientai randami iš rekurentinės formulės:

$$u_k=-(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\left(I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l\right).$$

Jei duotosios lygčių sistemos koeficientų dėstinio laipsnine eilute pirmoji matrica A_0 priklauso nuo kintamųjų y ir z, $A_0(y,z)$, tai matricinės diferencialinės lygties sprendiniai yra :

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}\cdot u_k(y,z,\ln x)\,,$$

ρ yra tokios lygties $\det(E\rho+A_0)=0$ yra viena iš šaknų, u_k randami iš tokios rekkurentinės formulės:

$$u_k=-(E(\rho+k)+A_0)^{-1}\left(E\frac{\partial u_{k-1}}{\partial s}+I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+sI_1\frac{\partial \rho}{\partial y}u_{k-1}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+sI_2\frac{\partial \rho}{\partial z}u_{k-1}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l\right)/$$

Pastarieji sprendiniai be laipsninių turi logaritminius ypatingumus.

Nereguliaraus arba stipraus išsigimimo atveju formalūs sprendiniai laipsninėmis eilutėmis neegzistuoja, o jų struktūra, p=1, yra tokia:

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho(y,z)}u_k(y,z,s)\,.$$

Čia sukonstruotos nagrinėjamos sistemos atskirųjų sprendinių šeimos priklauso nuo laisvai parenkamos kintamųjų y ir z funkcijos, t.y. ta funkcija priklauso nuo kintamųjų, pagal kuriuos nėra jokio išsigimimo. Paprastųjų diferencialinių lygčių teorijoje sprendiniai yra vienparametrinės kreivių šeimos.

Taip pat išnagrinėti atvejai:

1) kai parametras p=1, o

$$A(x,y,z) = A_0 + A_1 + \sum_{k=2}^{\infty} x^k A_k(y,z) .$$

sistemos sprendiniai ieškomi šia apibendrinta x-o laipsnio eilute

$$u(x,y,z) = \exp\left\{-B_0 x^{-1}\right\}\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho} u_k(y,z) ,$$

koeficientas $u_0(y,z)$ randamas iš šios lygybės

$$(EB_0 + A_0)u_0 = 0 ,$$

koeficientai u_k randami iš šios rekurentinės formulės

$$u_k = -(EB_0 + A_0)^{-1} \cdot (E(k-1+\rho) - I_1 \frac{\partial B_0}{\partial y} - I_2 \frac{\partial B_0}{\partial z} + A_1)u_{k-1} + I_1 \frac{\partial u_{k-2}}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_{k-2}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-2} A_{k-l} u_l = 0 .$$

2) Kai parametras p=1, o

$$A(x,y,z) = \sum_{k=2}^{\infty} x^k A_k(y,z) .$$

lygčių sistemos sprendinio ieškome tokia apibendrinta x- o laipsnių eilute

$$u(x,y,z) = \exp\left\{-B_0(y,z)x^{-1}\right\}\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho(y,z)} u_k(y,z,\ln s) ,$$

u_k randami rekurentiškai, naudojantis formule:

$$u_k(y,z,\ln s) = -e^{-\ln s}\int E^{-1} e^{\ln s}((A_2 + \ln s(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z}))u_0 + I_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_0}{\partial z}) d\ln s .$$

3) Kai p=1, o

$$A(x,y,z) = \sum_{k=2}^{\infty} x^k A_k(y,z)$$

sistemos sprendiniai ieškomi tokia apibendrinta x-o laipsnio eilute

$$u(x,y,z) = e^{-B_0 x^{-1}} \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho(y,z)} u_k(y,z,\ln x).,$$

eilutės koeficientai randami iš tokios rekurentinės formulės:

$$u_k(y,z,\ln x) = e^{-k\ln x}\int e^{k\ln x} E^{-1}((A_2 + \ln x(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z}))u_1 + \sum_{l=3}^{k+2} A_l u_{k+2-l} + I_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + I_2 \frac{u_1}{\partial z}) d\ln x + C(\ln x).$$

Čia vėl galioja išvada apie sprendinių šeimų priklausomybę nuo laisvai parenkamos funkcijos.

Visais atvejais sukonstruotos apskritai 4 (4 pirmos eilės dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistema) atskirųjų sprendinių šeimos.

SUMMARY

Under consideration solutions of the system, when the malformation of the system's queue is regular and first member of the system's coefficients power queue opt out variable y and z, stands for power x power queue and that form is:

$$u_k(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(y,z),$$

ρ finding from equation

$$\det(E\rho+A_0)=0,$$

and the coefficients of the queue are finding from recurrence formula:

$$u_k=-\left(E(\rho+k)+A_0\right)^{-1}\left(I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l\right),\ \text{k=1,2,…}$$

If the first matrix of given partial's differentials equations power queue depends from variable s and z, i.e. $A_0(y,z)$, so matrix differential's equation's solutions are:

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}\cdot u_k(y,z,\ln x),$$

ρ as follows algebraic equation

$$\det(E\rho+A_0)=0$$

one of the roots, u_k are finding from this recurrence formula:

$$u_k=-\left(E(\rho+k)+A_0\right)^{-1}\left(E\frac{\partial u_{k-1}}{\partial s}+I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+sI_1\frac{\partial\rho}{\partial y}u_{k-1}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+sI_2\frac{\partial\rho}{\partial z}u_{k-1}+\sum_{l=0}^{k-1}A_{k-l}u_l\right)I.$$

Latter solutions are special, because they without power equipments also have logarithmic equipments. Unregular or strong partial's differentials equations system's in a case of malformation formal solutions in a power queues not exist, and their structure, when p=1, are:

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho(y,z)}u_k(y,z,s).$$

Under consideration here was designed discrete's solutions families of the system without restraint selecting variables y and z function, i.e., that function depends from variables whereby none malformation. In theory of the regular differentials equations the solutions are family's of one-parameter curve's.

Also here were inspected these cases:

1) when parameter p=1, and

$$A(x,y,z)=A_0+A_1+\sum_{k=2}^{\infty}x^kA_k(y,z),$$

solutions of the system are finding by broad-brush x level of the queue

$$u(x,y,z)=\exp\{-B_0x^{-1}\}\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}u_k(y,z),$$

coefficient $u_0(y,z)$ follows:

$$(EB_0+A_0)u_0=0,$$

coefficients u_k finding from this recurrence formula

$$u_k = -(EB_0 + A_0)^{-1} \cdot (E(k-1+\rho) - I_1 \frac{\partial B_0}{\partial y} - I_2 \frac{\partial B_0}{\partial z} + A_1)u_{k-1} + I_1 \frac{\partial u_{k-2}}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_{k-2}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-2} A_{k-l} u_l = 0$$

2) when parameter is p=1, and

$$A(x,y,z) = \sum_{k=2}^{\infty} x^k A_k(y,z),$$

solutions of the system searching by broad-brush x level of the queue

$$u(x,y,z) = \exp\{-B_0(y,z)x^{-1}\} \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho(y,z)} u_k(y,z,\ln s),$$

u_k follows using this formula:

$$u_k(y,z,\ln s) = -e^{-\ln s} \int E^{-1} e^{\ln s}((A_2 + \ln s(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z}))u_0 + I_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} + I_2 \frac{\partial u_0}{\partial z}) d \ln s.$$

3) when p=1, and

$$A(x,y,z) = \sum_{k=2}^{\infty} x^k A_k(y,z)$$

solutions of the system finding by broad-brush level x of the queue

$$u(x,y,z) = e^{-B_0 x^{-1}} \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho(y,z)} u_k(y,z,\ln x).$$

Coefficients of the queue follows from:

$$u_k(y,z,\ln x) = e^{-k \ln x} \int e^{k \ln x} E^{-1}((A_2 + \ln x(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z}))u_1 + \sum_{l=3}^{k+2} A_l u_{k+2-l} + I_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + I_2 \frac{u_1}{\partial z}) d \ln x + C(\ln x).$$

Here are valid a consequence about dependency of solution's families without restraint generic function.

Generally, in all senses there are designed 4 (4 partial's derived diferencials equations of the first queue's system) families of the discrete solutions.

LITERATŪRA

1. Golokvosčius P. “Diferencialinės lygtys”. Vadovėlis aukštosioms mokykloms, Vilnius, TEV, 2000.
2. Bulota K., Survila P. “Algebra ir skaičių teorija” 2 dalis. Vilnius, “Mokslas”, 1977.
3. Kvedaras B. Matricų teorija” 2 dalis. Vilnius, 2000.
4. Stanislovaitytė G. Dalinių išvestinių sistemos su eilės išsigimimu sprendimas. Bakalauro darbas, Šiauliai. 2005.
5. Kvedaras B., Sapogovas M. “Skaičiavimo metodai”, Vilnius, 1999.
6. Šiaučiūnas D. Stipriai išsigimstančių pirmos eilės diferencialinių lygčiių sistemų dalinėmis išvestinėmis sprendiniai. Magistro darbas, Šiauliai.
7. Fichtengolocas G. “Matematinės analizės pagrindai” 2 tomas. Vilnius, “Mintis”, 1967.
8. Jurgaitis D. “Dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos su kintamais koeficientais supaprastinimo klausimu”. Lietuvos matematikos Rinkinys 42, Vilnius, 2002, (178-183 psl.).
9. Zvezdova, J. “Dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos su pusiau reguliariu išsigimimu sprendimas. Bakalauro darbas, Šiauliai, 2003.