VILNIAUS UNIVERSITETAS

Eugenija Bieliauskienė

BANKROTO TIKIMYBĖ IR GERBER-SHIU FUNKCIJA DISKRETAUS LAIKO RIZIKOS MODELIUI SU SKIRTINGAI PASISKIRSČIUSIOMIS ŽALOMIS

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2012

Disertacija rengta 2007-2011 metais Vilniaus Universitete.

Mokslinis vadovas:

Prof. dr. Jonas Šiaulys (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Konsultantas:

Prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija ginama Vilniaus Universiteto Matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas:

Prof. habil. dr. Vygantas Paulauskas (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Nariai:

Prof. habil. dr. Romanas Januškevičius (Lietuvos Edukologijos Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Prof. habil. dr. Jonas Kazys Sunklodas (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Prof. dr. Romas Baronas (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, informatika - 09P)

Doc. dr. Kristina Šutienė (Kauno Technologijos Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Oponentai:

Prof. habil. dr. Algimantas Bikelis (Vytauto Didžiojo universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P)

Prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius (Vilniaus Universiteto Matematikos ir Informatikos Institutas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2012 m. birželio 14 d. 15 val. Matematikos ir Informatikos fakulteto 103 auditorijoje.

Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225, Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2012 m. gegužės 14 d. Su disertacija galima susipažinti Vilniaus Universiteto bibliotekoje (Universiteto g. 3, LT-01122 Vilnius)

Vilnius University

Eugenija Bieliauskienė

Ruin probability and Gerber-Shiu function for the discrete time risk model with inhomogeneous claims

Summary of Doctoral Dissertation

Physical sciences, Mathematics (01P)

Vilnius, 2012

The scientific work was carried out in 2007-2011 at Vilnius University.
Scientific supervisor:

Prof. dr. Jonas Šiaulys (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01P)

Consultant:

Prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01P)

The dissertation will be defended in the Council of Mathematics of Vilnius University:

Chairman:

Prof. habil. dr. Vygantas Paulauskas (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01P)

Members:

Prof. habil. dr. Romanas Januškevičius (Lithuanian University of Educational Sciences, Physical Sciences, Mathematics – 01P)

Prof. habil. dr. Jonas Kazys Sunklodas (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01P)

Prof. dr. Romas Baronas (Vilnius University, Physical Sciences, Informatics – 09P)

Doc. dr. Kristina Šutienė (Kaunas University of Technology, Physical Sciences, Mathematics – 01P)

Opponents:

Prof. habil. dr. Algimantas Bikelis (Vytautas Magnus University, Physical Sciences, Mathematics – 01P)

Prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius (Vilnius University Institute of Mathematics and Informatics, Physical Sciences, Mathematics – 01P).

The official defense of dissertation will be held at 3 p.m., June 14, 2012, at the public session of the Council of Mathematics in Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, 103 hall.

Address: Naugarduko str. 24, LT-03225, Vilnius, Lithuania.

The summary of dissertation was distributed on May 14, 2012. The dissertation is available at the library of Vilnius University (Universiteto str. 3, LT-01122 Vilnius).

1 Įvadas

Šiuolaikinė draudimo matematikos teorija buvo pradėta vystyti XX a. pradžioje, kai švedų aktuaras Filipas Lundbergas pasiūlė sudėtinį Puasono rizikos modelį [14]. Šis modelis aprašo draudimo įmonės turimo sutarčių portfelio elgseną, kurią įtakoja turimas pradinis kapitalas, draudėjų mokamos įmokos bei išmokamos žalos. Vėliau jau klasikiniu tapęs Lundbergo modelis buvo plečiamas, tobulinamas, bendrinamas, ir šiuo metu yra nagrinėjama daugybė modelio variacijų. Šiame disertaciniame darbe nagrinėjamas modifikuotas diskretaus laiko rizikos modelis, kai žalos pasiskirsčiusios skirtingai.

Rizikos modeliuose nagrinėjamas draudiko turtas, esantis virš įsipareigojimų, dar vadinamas mokumu – tai papildoma apsauga draudėjams, kad esant nuostoliams didesniems nei numatyta, būtų iš ko juos išmokėti. Pastaraisiais metais draudimo įmonių mokumui Europoje skiriama daug dėmesio siekiant užtikrinti, kad draudimo įmonės bankroto tikimybė per vienerius metus neviršytų 0.5 proc. Harmonizavus mokumo atsargos skaičiavimo reikalavimus visoje Europoje, būtų sumažinta rizika, kad draudikas neišgalės vykdyti įsipareigojimų, o draudimo įmonės bankroto atveju draudėjų nuostoliai būtų mažesni. Be to, draudimo priežiūros institucijos turėtų daugiau galimybių stebėti rinką ir, atsiradus poreikiui (draudiko turimo turto lygiui nukritus žemiau minimalių reikalavimų), galėtų iškart reaguoti. Tokiu būdu būtų užtikrinamas draudimo rinkos finansinis stabilumas ir patikimumas.

1.1 Tikslai ir uždaviniai

Šio disertacinio darbo tikslas – išvesti diskretaus laiko rizikos modelio su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis pagrindinių rizikos matų išraiškas. Tam buvo iškelti šie uždaviniai:

- Praplėsti klasikinį diskretaus laiko rizikos modelį, nagrinėjant skirtingai pasiskirsčiusias žalas (bet vis dar nepriklausomas).
- Rasti procedūras bankroto tikimybių ir Gerber-Shiu funkcijos tikslioms reikšmėms skaičiuoti.
- Analizuoti baigtinio ir begalinio laiko kritines modelio charakteristikas. Nevienodai pasiskirsčiusių žalų begalinio laiko kritinių charakteristikų analizė yra tikras iššūkis.

- Begalinio laiko kritinių charakteristikų nagrinėjimą išskaidyti atsižvelgiant į pradinį kapitalą. Atskirai nagrinėti atvejus, kai kapitalas nulinis ir kai jis teigiamas.

- Išnagrinėti nors vieną konkretų diskretaus laiko rizikos modelio atvejį, kai žalos pasiskirsčiusios pagal skirtingus geometrinius dėsnius.

- Rasti procedūrą diskretaus laiko rizikos modelio su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalos ir kintančiomis racionaliomis įmokomis kritinių charakteristikų skaičiavimui.

1.2 Mokslinio darbo naujumas

Šiame disertaciniame darbe nagrinėjamas diskretaus laiko rizikos modelis su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis. Kiti autoriai, pavyzdžiui, De Kok [6], Lefèvre ir Picard [12], yra nagrinėję tokį klasikinio modelio praplėtimą, tačiau jie apsiribojo tik baigtinio laiko bankroto tikimybės analize. Šiame darbe išvestos rekursinės formulės leidžia greitai suskaičiuoti baigtinio laiko bankroto tikimybę ir Gerber-Shiu funkciją.

Taip pat norėtųsi atkreipti dėmesį, kad begalinio laiko bankroto tikimybė ir Gerber-Shiu funkcija diskretaus laiko rizikos modeliui su nevienodai pasiskirsčiusiomis žalomis literatūroje išvis nėra nagrinėjama. Be to, baigtinio laiko Gerber-Shiu funkcija, nors ir yra natūralus begalinio laiko Gerber-Shiu funkcijos praplėtimas, buvo apibrėžta bei pradėta nagrinėti tik prieš metus ir tik klasikinio rizikos modelio atveju. Tai padarė nepriklausomai vieni nuo kitų Šiaulys ir Kočetova 2010 metais [17], Kuznetsov ir Morales 2011 metais [11]. Todėl šio darbo rezultatai yra pirmieji modelių su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis srityje.

Be to, darbe nagrinėjamas ir modelis su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis, įgyjančiomis racionalias reikšmes. Jam irgi pateikiama formulė baigtinio laiko bankroto tikimybėms rasti.

1.3 Metodai

Disertacijoje naudojami šiuolaikinės tikimybių teorijos ir statistikos metodai. Pateikiamų pavyzdžių skaitinės vertės suskaičiuotos *Maple* programine kalba.

1.4 Darbo struktūra

Disertacinis darbas yra suskaidytas į septynias dalis. Pirmose dviejose dalyse yra apžvelgiami klasikiniai rizikos modeliai bei jų išplėtimai. Trečioje dalyje supažindinama su disertacijoje nagrinėjamu modeliu, pagrindinėmis sąvokomis bei žymėjimais. Kitose trijose dalyse pateikiami pagrindiniai rezultatai, jų įrodymai, skaitiniai pavyzdžiai su iliustracijomis. Paskutinėje dalyje nagrinėjamas specialus modelio atvejis, kai žalos pasiskirsčiusios pagal geometrinį dėsnį. Taip pat prieduose yra pateikiami pagrindinių rezultatų kodai Maple programine kalba.

Pirmame skyriuje aprašomi klasikiniai rizikos modeliai: Sparre Andersen [16], sudėtinis Puasono rizikos modelis [5], [9], [15], [18], sudėtinis binominis rizikos modelis [9]. Parodoma, kaip jie vienas su kitu susiję. Pristatomi pagrindiniai rizikos matai, toliau nagrinėjami darbe – bankroto tikimybė ir Gerber-Shiu funkcija. Apžvelgiami Gerber ir Shiu [10], Li ir Garrido [13] darbai, pristatomi ir įvairių kitų autorių rezultatai.

Antrame skyriuje apžvelgiami klasikinių modelių praplėtimai, artimiausi disertaciniame darbe nagrinėjamam diskretaus lauko rizikos modeliui su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis. Pristatomi De Kok [6], Picard ir Lefèvre [12] rezultatai.

Trečiame skyriuje detaliai aprašomas darbe nagrinėjamas diskretaus laiko rizikos modelis su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis ir pagrindinės sąvokos: draudiko rezervai, bankroto laikas, baigtinio ir begalinio laiko bankroto tikimybės, baigtinio ir begalinio laiko Gerber-Shiu diskontuota baudos funkcija.

Toliau pristatomi autorės [1], [2], [3], [4] straipsniuose publikuoti rezultatai. Ketvirtame skyriuje nagrinėjama baigtinio laiko bankroto tikimybė. Gaunama tiksli rekursinė formulė, kurios pagalba galima baigtinio laiko bankroto tikimybę išreikšti per trumpesnio laiko bankroto tikimybių sumą. Pateikiami keli skaitiniai pavyzdžiai, iliustruojantys formulės veikimą. Tada nagrinėjamas dar bendresnis diskretaus laiko rizikos modelis su žalomis, galinčiomis įgyti reikšmes iš racionaliųjų skaičių aibės su tam tikrais apribojimais. Įrodomos dvi teoremos, kurių pagalba modelis su racionaliomis žalomis suvedamas į modelį su diskrečiomis žalomis ir suskaičiuojama baigtinio laiko bankroto tikimybė. Pateikiamas skaitinis pavyzdys.

Penktajame skyriuje nagrinėjama begalinio laiko bankroto tikimybės problema. Skirtingai pasiskirsčiusių žalų atveju suskaičiuoti šią tikimybę yra tikrai nelengva, jei nėra daroma jokių prielaidų apie žalų skirstinius. Išvedama rekursinė formulė, kuria norint pasinaudoti jau reikia padaryti tam tikras prielaidas apie žalų skirstinius. Pateikiamas pavyzdys, kai žalos pasiskirsčiusios cikliškai, kas realiame pasaulyje būtų sezoniniai žalų svyravimai arba ekonomikos pakilimo ir nuopuolio ciklai.

Šeštasis skyrius yra pats didžiausias ir apimantis daugiausiai rezultatų. Jame analizuojama Gerber-Shiu funkcija – baigtinio laiko ir begalinio laiko. Įrodomos teoremos ir gaunamos rekursinės išraiškos. Be to, gaunama tiksli begalinio laiko Gerber-Shiu funkcijos išraiška, kai pradinis kapitalas lygus 0. Pateikiamas algoritmas, kaip naudojant gautas rekursines formules, galima rasti Gerber-Shiu funkcijos vertes. Disertacinio galo pabaigoje, Priede, pateikiamas Maple programos kodas, kurio pagalba galima tai suskaičiuoti. Viskas iliustruojama gausiais pavyzdžiais bei spalvotais brėžiniais. Parodoma, kad begalinio laiko bankroto tikimybė priklauso net ir nuo žalų skirstinių eilės sekoje. Pavaizduojama priklausomybė nuo pradinio kapitalo ar nagrinėjamo periodo trukmės, nubraižomi funkcijos verčių paviršiai.

Disertacijos pabaigoje pateikiamas atskiras pavyzdys, kai žalos pasiskirsčiusios skirtingai pagal geometrinį dėsnį. Analizuojami du atvejai su skirtingais parametrais. Gaunamos baigtinio laiko bankroto tikimybės, kurios pavaizduotos ir grafiškai.

2 Pagrindiniai rezultatai

2.1 Sąvokos

Rizikos teorijoje diskretaus laiko rizikos modelis yra skirtas draudimo įmonės turto analizei ir jo pagalba yra nagrinėjamos draudimo įmonei kylančios rizikos. Laikoma, kad draudiko turtą kiekvienu laiko momentu įtakoja trys veiksniai: turimas pradinis kapitalas, gaunamos įmokos ir mokamos išmokos (žalos). Klasikinio diskretaus laiko rizikos modelio atveju įvykstančios žalos yra nepriklausomos ir vienodai pasiskirsčiusios. Šiame disertaciniame darbe nagrinėjamas modelis atsisakant prielaidos apie vienodą žalų pasiskirstymą (tačiau vis dar paliekant prielaidą, kad jos nepriklausomos), kadangi realiame pasaulyje stebima tiek infliacija, tiek ekonominio pakilimo ir nuosmukio ciklai, todėl modelis su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis geriau atvaizduotų realybę.

Pateikiame apibrėžimus, kurie išsamiai aprašyti disertacijos 3 skyriuje.

1 apibrėžimas. *Laikysime, kad draudiko turtas kiekvienu laiko momentu* $t \in \{0\} \cup \mathbb{N} =: \mathbb{N}_0$ *yra apibrėžiamas lygybe*

$$U_u^{(j)}(t) = u + t - \sum_{i=1}^{t} Z_{i+j},$$

kur patenkintos tokios sąlygos:

• *pradinis kapitalas* $u = U_u^{(j)}(0) \in \mathbb{N}_0$*;*

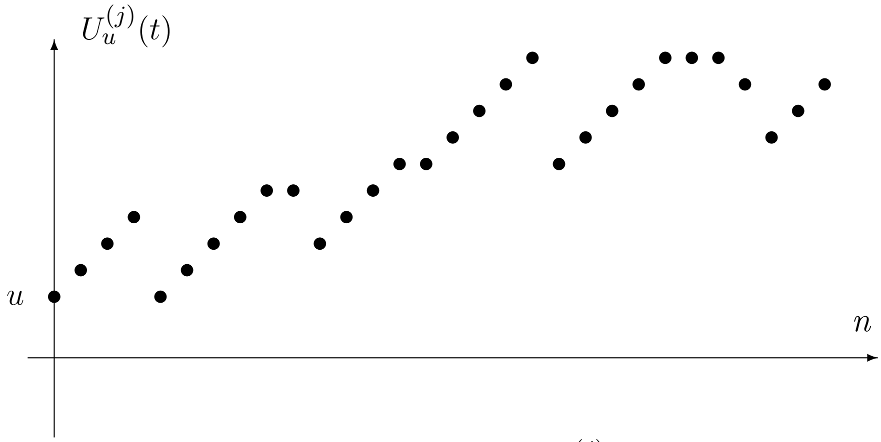
• *žalos* $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ *yra nepriklausomi neneigiami atsitiktniai dydžiai, sveikąsias reikšmes įgyjantys su lokaliomis tikimybėmis* $(j, k \in \mathbb{N}_0)$*:*

$$h_k^{(j)} = \mathbb{P}\left(Z_{1+j} = k\right)$$

. Aišku, kad seką $Z_1, Z_2, \ldots$ nusako pasiskirstymo funkcijų šeima

$$H^{(j)}(x) = \mathbb{P}(Z_{1+j} \leqslant x) = \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} h_i^{(j)}, x \in \mathbb{R}.$$

Kaip matome iš draudiko turto apibrėžimo, gaunamos įmokos yra pastovios ir lygios 1. Kai $j = 0$, modelį vadinsime *baziniu.* Viena iš galimų proceso $U_u^{(j)}(t)$ trajektorijos realizacijų pateikiama 1 paveiksle.



1 pav.: Viena iš galimų proceso $U_u^{(j)}(n)$ trajektorijų

Pagrindinis rizikos valdymo uždavinys – tai įvertinti draudimo įmonės veiklą bei prisiimamą riziką. Kiekvienu laiko momentu draudiko turimas kapitalas gali likti teigiamas, tapti neigiamu arba lygiu nuliui. Situacija, kai draudiko kapitalas krenta žemiau ar tampa lygus nuliui, vadinama *nemokumu* arba *bankrotu.* Atitinkamai, bankroto laikas yra pirmasis laiko momentas, kai įvyksta bankrotas.

2 apibrėžimas. *Modelio bankroto laikas – tai apibendrintas atsitiktinis dydis, apibrėžiamas lygybe:*

$$T_u^{(j)} = \begin{cases} \min\left\{t \geqslant 1 : U_u^{(j)}(t) \leqslant 0\right\}, \\ \infty\,,\ \textit{jeigu}\ \ U_u^{(j)}(t) > 0\ ,\ \textit{visiems}\ \ t \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Vienas iš pagrindinių rizikos matų, vertinant prisiimamą riziką, yra *bankroto tikimybė*.

3 apibrėžimas. *Baigtinio laiko bankroto tikimybė - tai tikimybė subankrutuoti iki tam tikro laiko $t \in \mathbb{N}$, kai pradinis turtas $u \in \mathbb{N}_0$ ir modelio postūmio parametras $j \in \mathbb{N}_0$:*

$$\psi^{(j)}(u,t) = \mathbb{P}\left(T_u^{(j)} \leqslant t\right).$$

Begalinio laiko bankroto tikimybė - tai tikimybė apskritai kada nors subankrutuoti. Būtent:

$$\psi^{(j)}(u) = \mathbb{P}\left(T_u^{(j)} < \infty\right) = \lim_{t\to\infty} \psi^{(j)}(u,t).$$

Kitas šiame disertaciniame darbe naudojamas rizikos matas yra Gerber-Shiu funkcija

4 apibrėžimas. *Baigtinio ir begalinio laiko Gerber-Shiu funkcija modeliui su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis apibrėžiamos taip:*

$$\phi_\delta^{(j)}(u,t) = \mathbb{E}[e^{-\delta T_u^{(j)}} \mathbb{1}_{\{T_u^{(j)} \leqslant t\}}],$$

$$\phi_\delta^{(j)}(u) = \mathbb{E}[e^{-\delta T_u^{(j)}} \mathbb{1}_{\{T_u^{(j)} < \infty\}}],$$

kur $\delta \geqslant 0$, $t \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{N}_0$ ir $j \in \mathbb{N}_0$.

Kai $\delta = 0$, Gerber-Shiu funkcija sutampa su bankroto tikimybe, t.y.:

$$\phi_0^{(j)}(u,t) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_u^{(j)} \leqslant t\}}] = \mathbb{P}(T_u^{(j)} \leqslant t) = \psi^{(j)}(u,t),$$

$$\phi_0^{(j)}(u) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_u^{(j)} < \infty\}}] = \mathbb{P}(T_u^{(j)} < \infty) = \psi^{(j)}(u).$$

Apibrėžę pagrindines sąvokas, pristatysime disertacinio darbo rezultatus. Visos teoremos įrodomos diskretaus laiko rizikos modeliui su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis, įgyjančiomis neneigiamas sveikas reikšmes, išskyrus 3, 4 ir 5 teoremas, kur papildomos modelio sąlygos aprašomos atskirai.

Pirmosios penkios teoremos pateikia baigtinio ir begalinio laiko bankroto tikimybių suskaičiavimo metodus, o paskutiniosios trys teoremos leidžia suskaičiuoti baigtinio ir begalinio laiko Gerber-Shiu funkcijos reikšmes.

2.2 Baigtinio ir begalinio laiko bankroto tikimybės

Pirmosios dvi teoremos pateikia rekursines formules baigtinio bei begalinio laiko bankroto tikimybių suskaičiavimui. Čia ir vėliau skliausteliuose nurodomas teoremos numeris, pagal kurį teoremą su pilnu įrodymu galima rasti disertaciniame darbe.

1 teorema (4.1). *Diskretaus laiko rizikos modelio su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis baigtinio laiko bankroto tikimybės*

$$\psi^{(j)}(u,t) := \mathbb{P}\left(u + n - \sum_{i=1}^{n} Z_i^{(j)} \leqslant 0 \text{ } \textit{kažkuriam} \text{ } n \in \{1,2,\ldots,t\}\right)$$

kiekvienam $j, u \in \mathbb{N}_0$ *tenkina šias lygybes:*

$$\begin{aligned} \psi^{(j)}(u,1) &= 1 - H^{(j)}(u), \\ \psi^{(j)}(u,t) &= \psi^{(j)}(u,1) + \sum_{k=0}^{u} \psi^{(j+1)}(u+1-k, t-1)\ h_k^{(j)}, \end{aligned}$$

$t = 2, 3, \ldots$.

2 teorema (5.1). *Sakykime, kad patenkintos diskretaus laiko rizikos modelio su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis sąlygos. Tada begalinio laiko bankroto tikimybės*

$$\psi^{(j)}(u) = \mathbb{P}\left(u + n - \sum_{i=1}^{n} Z_{i+j} \leqslant 0, \quad \textit{kažkuriam } n \in \mathbb{N}\right)$$

visiems $j, u \in \mathbb{N}_0$ *tenkina šią lygybę:*

$$\begin{aligned} \psi^{(j)}(u) &= \psi^{(j)}(0) + \sum_{r=1}^{u} (\psi^{(j)}(r) - \psi^{(j+1)}(r) H^{(j)}(u-r)) \\ &\quad - \sum_{r=0}^{u-1} (1 - H^{(j)}(r)). \end{aligned}$$

2.3 Diskretaus laiko rizikos modelis su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis, įgyjančiomis racionalias reikšmes

Kitos trys teoremos nagrinėja modifikuotą diskretaus laiko rizikos modelį su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis, įgyjančiomis neneigiamas racionalias reikšmes. Be to, gaunamos įmokos gali kisti bėgant laikui ir kartu su pradiniu kapitalu gali įgyti neneigiamas racionalias reikšmes.

Apibrėžiame draudiko turtą kiekvienu laiko momentu $t \in \mathbb{N}$ taip:

$$U(n) = u + \sum_{i=1}^{t} c_i - \sum_{i=1}^{t} Z_i, \quad \text{kur}$$

• dydžiai $u, c_1, c_2, \ldots$ yra neneigiami ir priklauso racionaliųjų skaičių aibei $\mathbb{Q}$;

• žalos $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, įgyjantys neneigiamas racionalias reikšmes;

• egzistuoja toks natūralusis skaičius α, su kuriuo $\alpha u \in \mathbb{Z}$, $\alpha c_i \in \mathbb{Z}$ $(i \in \mathbb{N})$ ir $\alpha D_k^{(j)} \in \mathbb{Z}$ $(j \in \mathbb{N}_0,\ k \in \mathbb{N})$, kur $D_k^{(j)}$ yra a.d. Z_{1+j} įgyjamos racionalios reikšmės su tikimybe $h_k^{(j)}$.

Baigtinio laiko bankroto tikimybė, kaip ir visame disertaciniame darbe, yra

$$\psi_{\mathbb{Q}}^{(j)}(u,t) = \mathbb{P}\left(T_u^{(j)} \leqslant t\right).$$

Dabar suformuluosime pagalbinę teoremą, kurios pagalba vėliau bus suskaičiuojama baigtinio laiko bankroto tikimybė modeliui su žalomis, įgyjančiomis racionalias reikšmes.

3 teorema (4.3)**.** *Tarkime, kad* $u \in \mathbb{N}_0$*; a.d.* $Z_1, Z_2, \ldots$ *yra nepriklausomi ir įgyja sveikąsias reikšmes;* $h_k^{(j)} = \mathbb{P}(Z_{1+j} = k)$ *visiems* $k \in \mathbb{Z}$ *ir* $j \in \mathbb{N}_0$*. Tada tikimybės*

$$\tilde{\psi}^{(j)}(u,t) := \mathbb{P}\left(u+n-\sum_{i=1}^{n} Z_{i+j} \leqslant 0,\ \textit{kažkuriam}\ \ n \in \{1,\ldots,t\}\right)$$

visiems $j, u \in \mathbb{N}_0$ *tenkina šias lygybes:*

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}^{(j)}(u,1) &= \sum_{k>u} h_k^{(j)},\\ \tilde{\psi}^{(j)}(u,t) &= \tilde{\psi}^{(j)}(u,1) + \sum_{k=-\infty}^{u} \tilde{\psi}^{(j+1)}(u+1-k,t-1)\ h_k^{(j)}.\end{aligned}$$

Verta atkreipti dėmesį, kad a.d. $Z_1, Z_2, \ldots$ nebūtinai įgyja tik neneigiamas reikšmes ir todėl šių atsitiktinių dydžių nevadiname žalomis.

4 teorema (4.5)**.** *Baigtinio laiko bankroto tikimybė* $\psi_{\mathbb{Q}}(u,t)$*, visiems* $u, t \in \mathbb{N}_0$ *sutampa su tikimybe* $\tilde{\psi}^{(0)}(\alpha u, t)$*, kur sveikareikšmiai a.d.* $\widehat{Z}_{1+j}$*,* $j \in \mathbb{N}_0$ *yra pasiskirstę su tokiomis tikimybėmis:*

$$\widehat{h}^{(j)}_{\alpha D_k^{(j)} - \alpha c_j - 1} = \mathbb{P}\left(\widehat{Z}_{1+j} = \alpha D_k^{(j)} - \alpha c_j - 1\right) = h_k^{(j)}, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Ši teorema įrodoma tiesiogiai pasinaudojus tuo, kad egzistuoja natūralusis α ir visiems fiksuotiems $j, n \in \mathbb{N}_0$ galioja

$$\alpha U(n) = \alpha u + n - \sum_{i=1}^{n} (\alpha Z_i - \alpha c_i - 1) = \alpha u + n - \sum_{i=1}^{n} \widehat{Z}_i\,.$$

Pagal 4 teoremą baigtinio laiko bankroto tikimybė $\psi_{\mathbb{Q}}^{(0)}(u,t)$ modelyje su racionalias reikšmes įgyjančiomis žalomis gali būti suskaičiuota naudojantis 3 teorema, pritaikius atitinkamą modelio transformaciją. Pastebime, kad dėl modelio apribojimų transformuoti a.d. $\widehat{Z}_{1+j}$ $(j \in \mathbb{N}_0)$ gali įgyti tik baigtinę aibę neigiamų reikšmių.

5 teorema (4.7)**.** *Baigtinio laiko bankroto tikimybė $\psi_{\mathbb{Q}}(u,t)$, visiems $u, t \in \mathbb{N}_0$ sutampa su baigtinio laiko bankroto tikimybe $\psi^{(0)}\left(\alpha u, \sum\limits_{i=1}^{t} \alpha c_i\right)$, kur a.d. $\widehat{Z}_i$, $i \in \mathbb{N}$ yra pasiskirstę su tokiomis tikimybėmis:*

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\widehat{Z}_l = \alpha D_k^{(i-1)}) = h_k^{(i-1)}, \ k \in \mathbb{N}_0, \quad jei \quad l = \sum\limits_{m=1}^{i} \alpha c_m, \\ \mathbb{P}(\widehat{Z}_l = k) = \mathbb{1}_{\{k=0\}}, \quad kitur. \end{cases}$$

Akivaizdu, kad pasirinktam α ir visiems fiksuotiems $j, n \in \mathbb{N}_0$, turime

$$\alpha U(n) = \alpha u + \sum_{i=1}^{n} \alpha c_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha Z_i.$$

Kadangi $\alpha c_i \in \mathbb{N}$ visiems $i \in \mathbb{N}$, tai nagrinėjamas modelis yra ekvivalentus įprastam diskretaus laiko rizikos modeliui, kai žalos įgyja sveikąsias neneigiamas reikšmes.

$$\underbrace{E_0, \ldots, E_0}_{\alpha c_1 - 1}, \alpha Z_1, \underbrace{E_0, \ldots, E_0}_{\alpha c_2 - 1}, \alpha Z_2, \ldots, \tag{1}$$

kur a.d. E_0 pasiskirstę pagal išsigimusį dėsnį, t.y.

$$\mathbb{P}(E_0 = k) = \mathbb{1}_{\{k=0\}}.$$

Pastebime, kad žalos Z_t $(t \in \mathbb{N})$ iš pradinio modelio transformuojasi į a.d. αZ_t su lygiai išdalintais skaičiais $\sum\limits_{i=1}^{t} \alpha c_i$ transformuotame modelyje (1). Iš čia ir seka 5 teoremos įrodymas.

2.4 Baigtinio ir begalinio laiko Gerber-Shiu funkcija

Dabar grįžtame prie įprasto diskretaus laiko rizikos modelio su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis, įgyjančiomis sveikas neneigiamas reikšmes. Pateikiame tris teoremas, kurių pagalba randamos baigtinio ir begalinio laiko Gerber-Shiu funkcijos reikšmės.

6 teorema (6.3)**.** *Sakykime, kad patenkintos modifikuoto diskretaus laiko rizikos modelio sąlygos. Tada baigtinio laiko Gerber-Shiu funkcija visiems* $j \in \mathbb{N}_0$, $u \in \mathbb{N}_0$ *ir* $\delta \geqslant 0$ *tenkina šias lygybes:*

$$\begin{aligned}
\phi_\delta^{(j)}(u,1) &= e^{-\delta}\Big(1 - H^{(j)}(u)\Big),\\
\phi_\delta^{(j)}(u,t) &= \phi_\delta^{(j)}(u,1) + e^{-\delta}\sum_{k=0}^{u}\phi_\delta^{(j+1)}(u+1-k,t-1)h_k^{(j)}, \ t=2,3,\dots
\end{aligned}$$

Įrodymas. Teorema įrodoma tiesiogiai pasinaudojus Gerber-Shiu funkcijos apibrėžimu, žalų $Z_{1+j}, Z_{2+j}, Z_{3+j}, \dots$ nepriklausomumu ir tuo, kad žalų sekos $Z_{1+(j+1)}$, $Z_{2+(j+1)}, Z_{3+(j+1)}, \dots$ pasiskirstymas sutampa su pasiskirstymu sekos $Z_{2+j}, Z_{3+j}, Z_{4+j}, \dots$:

$$\begin{aligned}
\phi_\delta^{(j)}(u) &= \mathbb{E}\left[e^{-\delta T_u^{(j)}}\mathbb{1}_{\{T_u^{(j)}<\infty\}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\delta T_u^{(j)}}\sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{1}_{\{T_u^{(j)}=m\}}\right] = \sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[e^{-\delta m}\mathbb{1}_{\{T_u^{(j)}=m\}}\right]\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}e^{-\delta m}\mathbb{P}\left(S_1^{(j)}<u,\dots,S_{m-1}^{(j)}<u, S_m^{(j)}\geqslant u\right) = e^{-\delta}\mathbb{P}\left(S_1^{(j)}\geqslant u\right) + \sum_{m=2}^{\infty}e^{-\delta m}\\
&\cdot\ \mathbb{P}\left(S_1^{(j)}<u, S_2^{(j)}-S_1^{(j)}<u-S_1^{(j)},\dots,S_{m-1}^{(j)}-S_1^{(j)}<u-S_1^{(j)}, S_m^{(j)}-S_1^{(j)}\geqslant u-S_1^{(j)}\right)\\
&= e^{-\delta}\mathbb{P}\left(S_1^{(j)}\geqslant u\right) + \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{u}e^{-\delta m}h_k^{(j)}\\
&\cdot\ \mathbb{P}\left(S_2^{(j)}-S_1^{(j)}<u-k+1,\dots,S_{m-1}^{(j)}-S_1^{(j)}<u-k+1, S_m^{(j)}-S_1^{(j)}\geqslant u-k+1\right)\\
&= e^{-\delta}\mathbb{P}\left(S_1^{(j)}\geqslant u\right) + e^{-\delta}\sum_{k=0}^{u}h_k^{(j)}\sum_{l=1}^{\infty}e^{-\delta l}\\
&\cdot\ \mathbb{P}\left(S_1^{(j+1)}<u-k+1,\dots,S_{l-1}^{(j+1)}<u-k+1, S_l^{(j+1)}\geqslant u-k+1\right)\\
&= e^{-\delta}\mathbb{P}\left(S_1^{(j)}\geqslant u\right) + e^{-\delta}\sum_{k=0}^{u}h_k^{(j)}\phi_\delta^{(j+1)}(u-k+1)\\
&= e^{-\delta}\mathbb{P}\left(S_1^{(j)}\geqslant u\right) + e^{-\delta}\sum_{r=1}^{u+1}h_{u-r+1}^{(j)}\phi_\delta^{(j+1)}(r). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Taigi,

$$\begin{aligned}
\sum_{u=0}^{w}\phi_\delta^{(j)}(u) &= \sum_{u=0}^{w}e^{-\delta}\mathbb{P}\left(S_1^{(j)}\geqslant u\right) + e^{-\delta}\sum_{u=0}^{w}\sum_{r=1}^{u+1}h_{u-r+1}^{(j)}\phi_\delta^{(j+1)}(r)\\
&= e^{-\delta}\sum_{u=0}^{w}\Big(1-H^{(j)}(u)\Big) + e^{-\delta}\sum_{r=1}^{w+1}\phi_\delta^{(j+1)}(r)\sum_{u=r-1}^{w}h_{u-r+1}^{(j)}\\
&= e^{-\delta}\sum_{u=0}^{w}\Big(1-H^{(j)}(u)\Big) + e^{-\delta}\sum_{r=1}^{w}\phi_\delta^{(j+1)}(r)H^{(j)}(w-r+1) + e^{-\delta}\phi_\delta^{(j+1)}(w+1)h_0^{(j)}.
\end{aligned}$$

Todėl

$$\begin{aligned}
e^{-\delta}\phi_\delta^{(j+1)}(w+1)h_0^{(j)} &= \phi_\delta^{(j)}(0)+\sum_{r=1}^{w}\Big(\phi_\delta^{(j)}(r)-e^{-\delta}\phi_\delta^{(j+1)}(r)H^{(j)}(w-r+1)\Big)\\
&\quad -e^{-\delta}\sum_{r=0}^{w}\Big(1-H^{(j)}(r)\Big).
\end{aligned}$$

Be to, iš (2) lygybės išplaukia, kad

$$e^{-\delta}h_0^{(j)}\phi_\delta^{(j+1)}(w+1) = \phi_\delta^{(j)}(w)-e^{-\delta}\sum_{r=1}^{w}h_{w-r+1}^{(j)}\phi_\delta^{(j+1)}(r)-e^{-\delta}\Big(1-H^{(j)}(w)\Big).$$

Tad

$$\begin{aligned}
\phi_\delta^{(j)}(w) &= e^{-\delta}\sum_{r=1}^{w}h_{w-r+1}^{(j)}\phi_\delta^{(j+1)}(r)+e^{-\delta}\Big(1-H^{(j)}(w)\Big)+\phi_\delta^{(j)}(0)\\
&\quad +\sum_{r=1}^{w}\Big(\phi_\delta^{(j)}(r)-e^{-\delta}\phi_\delta^{(j+1)}(r)H^{(j)}(w-r+1)\Big)-e^{-\delta}\sum_{r=0}^{w}\Big(1-H^{(j)}(r)\Big)\\
&= \phi_\delta^{(j)}(0)+\sum_{r=1}^{w}\Big(\phi_\delta^{(j)}(r)-e^{-\delta}\phi_\delta^{(j+1)}(r)H^{(j)}(w-r)\Big)-e^{-\delta}\sum_{r=0}^{w-1}\Big(1-H^{(j)}(r)\Big).
\end{aligned}$$

Teoremos įrodymas išplaukia iš paskutinės lygybės. □

Kitų dviejų teoremų pagalba galima rasti begalinio laiko bankroto tikimybę. Tačiau, nepadarius jokių prielaidų apie žalų skirstinius, jos suskaičiuoti praktiškai būtų neįmanoma.

7 teorema (6.1)**.** *Sakykime, kad patenkintos modifikuoto diskretaus laiko rizikos modelio sąlygos. Tada begalinio laiko Gerber-Shiu funkcija* $\phi_\delta^{(j)}(u)$ *visiems* $j,u\in\mathbb{N}_0$ *ir* $\delta\geqslant 0$ *tenkina lygybę*

$$\begin{aligned}
\phi_\delta^{(j+1)}(u)H^{(j)}(0) &= e^{\delta}\phi_\delta^{(j)}(0)+\sum_{r=1}^{u-1}\Big(e^{\delta}\phi_\delta^{(j)}(r)-\phi_\delta^{(j+1)}(r)H^{(j)}(u-r)\Big)\\
&\quad -\sum_{r=0}^{u-1}\Big(1-H^{(j)}(r)\Big).
\end{aligned}$$

8 teorema (6.5)**.** *Sakykime, kad patenkintos modifikuoto diskretaus laiko rizikos modelio sąlygos. Tada*

$$\begin{aligned}
\phi_\delta^{(j)}(0) &= e^{-\delta}\Big(1-H^{(j)}(0)\Big)+e^{-2\delta}\Big(h_0^{(j)}(1-H^{(j+1)}(1))\Big)\\
&\quad +\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\delta(m+2)}\sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_m\in\{0,1,\ldots\}\\ i_1\leqslant 1, i_1+i_2\leqslant 2,\ldots,\\ i_1+\ldots+i_m\leqslant m}}h_0^{(j)}h_{i_1}^{(j+1)}h_{i_2}^{(j+2)}\cdots h_{i_m}^{(j+m)}\left(1-H^{(j+m+1)}\left(m+1-\sum_{n=1}^{m}i_n\right)\right),
\end{aligned}$$

visiems $j\in\mathbb{N}_0$ *ir* $\delta\geqslant 0$.

Įrodymas. Teoremą įrodysime laikydami, kad $j = 0$. Bendras atvejis, kai $j \in \mathbb{N}_0$, įrodomas analogiškai. Iš bankroto laiko ir Gerber-Shiu funkcijos apibrėžimų seka, kad

$$\begin{aligned}
\phi_\delta^{(0)}(0) &= \mathbb{E}\left(e^{-\delta T_0^{(0)}} \mathbb{1}_{\{T_0^{(0)}<\infty\}}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\delta m} \mathbb{1}_{\{T_0^{(0)}=m\}}\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\delta m} \mathbb{P}(T_0^{(0)} = m). \qquad (3)
\end{aligned}$$

Išvedame, kad

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_0^{(0)} = 1) &= \mathbb{P}(Z_1 \geqslant 1) = \mathbb{P}(Z_1 > 0) = 1 - H^{(0)}(0), \\
\mathbb{P}(T_0^{(0)} = 2) &= \mathbb{P}(Z_1 + Z_2 \geqslant 2, Z_1 < 1) = \mathbb{P}(Z_2 \geqslant 2, Z_1 = 0) = h_0^{(0)}(1 - H^{(1)}(1)), \\
\mathbb{P}(T_0^{(0)} = 3) &= \mathbb{P}(Z_1 + Z_2 + Z_3 \geqslant 3, Z_1 + Z_2 < 2, Z_1 < 1) \\
&= h_0^{(0)} h_0^{(1)}(1 - H^{(2)}(2)) + h_0^{(0)} h_1^{(1)}(1 - H^{(2)}(1)), \\
\mathbb{P}(T_0^{(0)} = 4) &= \mathbb{P}(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 \geqslant 4, Z_1 + Z_2 + Z_3 < 3, Z_1 + Z_2 < 2, Z_1 < 1) \\
&= h_0^{(0)} h_0^{(1)} h_0^{(2)}(1 - H^{(3)}(3)) + h_0^{(0)} h_0^{(1)} h_1^{(2)}(1 - H^{(3)}(2)) + h_0^{(0)} h_0^{(1)} h_2^{(2)} \\
&\quad \cdot (1 - H^{(3)}(1)) + h_0^{(0)} h_1^{(1)} h_0^{(2)}(1 - H^{(3)}(2)) + h_0^{(0)} h_1^{(1)} h_1^{(2)}(1 - H^{(3)}(1)),
\end{aligned}$$

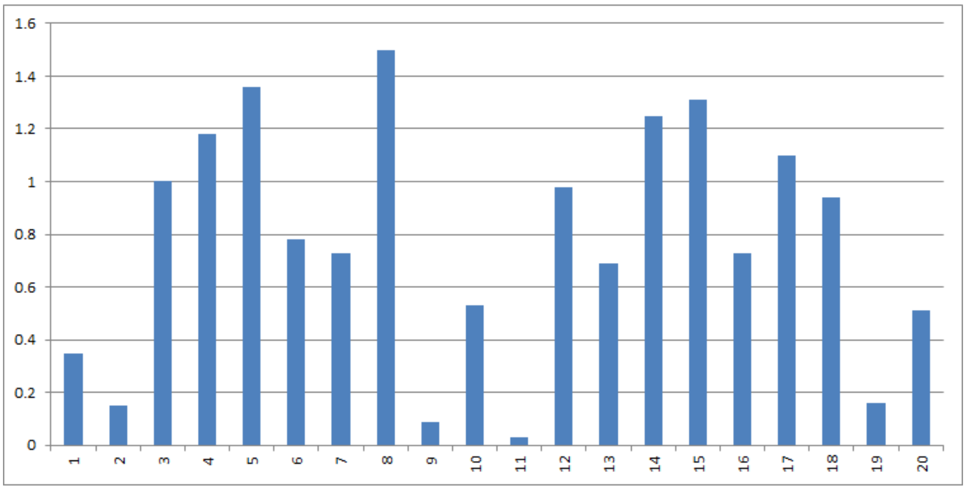
ir bet kuriam $m \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(T_0 = m + 2) = \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_m \in \{0,1,\ldots\} \\ i_1 \leqslant 1, i_1 + i_2 \leqslant 2, \ldots, \\ i_1 + \ldots + i_m \leqslant m}} h_0^{(0)} h_{i_1}^{(1)} h_{i_2}^{(2)} \cdots h_{i_m}^{(m)} \left(1 - H^{(m+1)}\left(m + 1 - \sum_{n=1}^{m} i_n\right)\right).$$

Teoremos įrodymas išplaukia iš paskutinės ir trečios (3) lygybių. $\square$

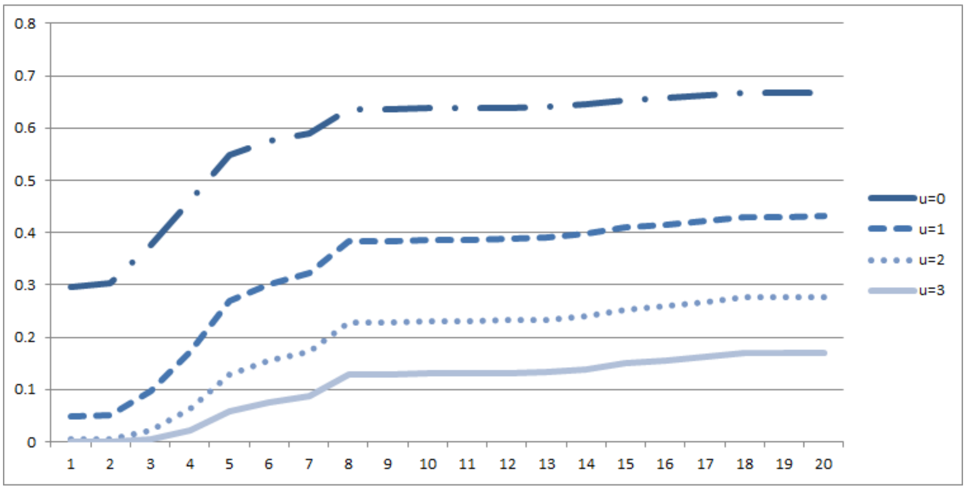
2.5 Pavyzdžiai

1 pavyzdys. Nagrinėkime žalų seką $Z_1, Z_2, \ldots$, kurios žalos pasiskirsčiusios pagal Puasono dėsnį su chaotiškais parametrais $\mu_i \in (0, 1.5)$, $i \in \mathbb{N}$ (žiūr. 2 pav.). Visų pirma suskaičiuosime baigtinio laiko bankroto tikimybes, kai pradinis kapitalas u kinta nuo 0 iki 3 visiems laiko momentams iki 20. Rezultatai pateikiami 3 paveiksle. Akivaizdžiai matyti, kad tikimybė bankrutuoti, kai pradinis kapitalas 0, yra labai aukšta ir, bėgant laikui, artėja prie 0.7, o tuo tarpu pradinį kapitalą padidinus vos vienu vienetu, tikimybė bankrutuoti krenta beveik perpus. Kadangi žalos pasiskirsčiusios pagal Puasono dėsnius su skirtingais parametrais, bėgant laikui, bankroto tikimybės didėja netolygiai ir atsiranda šuoliukai tais laiko momentais, kai žala pasiskirsčiusi pagal dėsnį su didesniu vidurkiu.



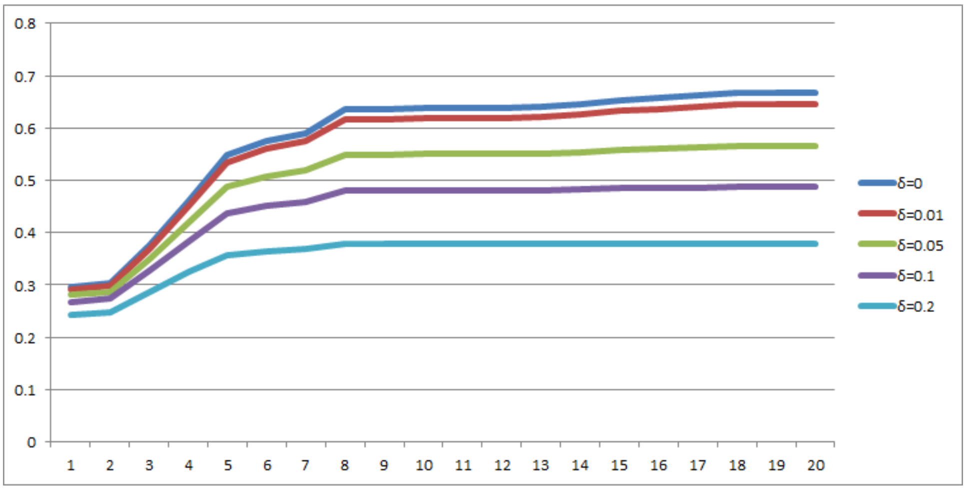
2 pav.: μ parametrai

Kitame, 4 paveiksle, pateikiamos nagrinėjamos žalų sekos su chaotiškais parametrais Gerber-Shiu funkcijos vertės, kai pradinis kapitalas $u = 0$, δ įgyja reikšmes 0, 0.01, 0.05, 0.1, ir 0.2, o t kinta nuo 1 iki 20. Iš šio paveikslo matyti, koks yra Gerber-Shiu funkcijos jautrumas δ parametrui – jam padidėjus nuo 0 iki 0.05, baigtinio laiko Gerber-Shiu funkcija nukrenta 0.1.



3 pav.: Baigtinio laiko bankroto tikimybės, kai žalos pasiskirsčiusios pagal Puasono dėsnį su chaotiškais parametrais. Čia $t = 1, 2, \ldots, 20$ ir $u = 0, 1, 2, 3$.

2 pavyzdys. Kitame pavyzdyje apžvelgsime begalinio laiko Gerber-Shiu funkcijos skaičiavimą. Kaip jau minėta anksčiau, nepadarius jokių prielaidų apie žalų pasi-



4 pav.: Baigtinio laiko Gerber-Shiu funkcijos vertės, kai žalos pasiskirsčiusios pagal Puasono dėsnį su chaotiškais parametrais. Čia $u = 0$, $t = 1, 2, \ldots, 20$ ir $\delta = 0$, 0.01, 0.05, 0.1, 0.2.

skirstymą, suskaičiuoti begalinio laiko kritines charakteristikas yra tikrai sudėtinga. Todėl tarsime, kad žalos pasiskirsčiusios cikliškai, t.y. kas trečios žalos pasiskirstymo funkcija pasikartoja. 1 lentelėje pateikiamos lokalios tikimybės, kur m - natūralusis skaičius. Akivaizdu, kad visų žalos sekų vidurkiai yra lygūs $0.1m$.

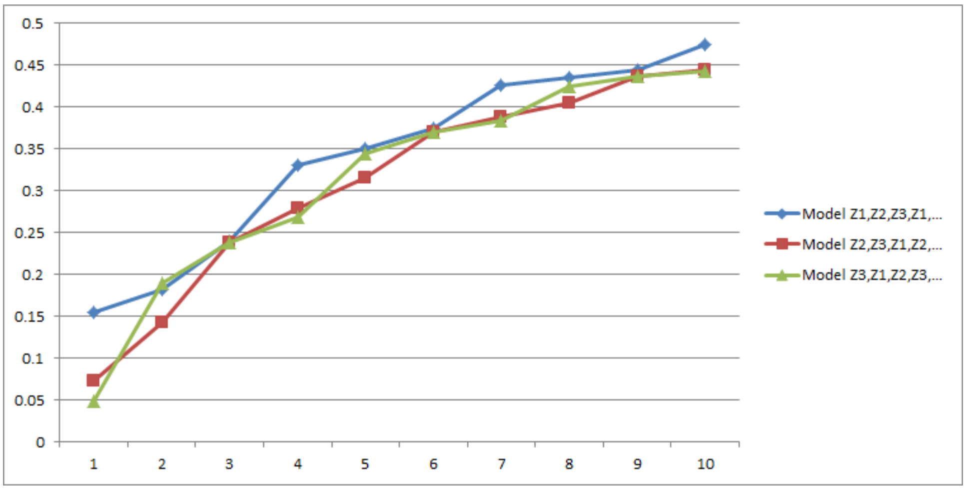
k	0	m
$\mathbb{P}(Z_1 = k)$	0.9	0.1

k	0	$2m$
$\mathbb{P}(Z_2 = k)$	0.95	0.05

k	0	$4m$
$\mathbb{P}(Z_3 = k)$	0.975	0.025

1 lentelė: Lokalios žalų Z_1, Z_2, Z_3 tikimybės

5 paveiksle pateikiamos begalinio laiko Gerber-Shiu funkcijos vertės natūraliesiems modelio parametrams μ, $\delta = 0.05$ ir postūmio parametrams $j = 0, 1, 2$. Žinoma, kad vienodai pasiskirsčiusių žalų atveju, begalinio laiko bankroto tikimybė, kai pradinis kapitalas lygus 0, yra lygi žalų vidurkiui (žiūr. [7], [8]). Tačiau skirtingai pasiskirsčiusių žalų atveju, kaip matyti iš 5 paveikslo, taip nebėra. Įdomu pastebėti, kad net žaloms su vienodais vidurkiais ($\mathbb{E}[Z]_1 = \mathbb{E}[Z]_2 = \mathbb{E}[Z]_3 = 0.1m$) begalinio laiko Gerber-Shiu funkcijos vertės pasikeičia pakeitus žalų išsidėstymą sekoje.



5 pav.: $\phi_\delta^{(0)}(0)$, $\phi_\delta^{(1)}(0)$, $\phi_\delta^{(2)}(0)$ vertės, kai $\delta = 0.05$. Skirtingai pasiskirsčiusių žalų vidurkis lygus $0.1\,m$ su $m = 1, 2, \ldots, 10$.

3 Apibendrinimas

3.1 Ginamos išvados

- Apibrėžtas diskretaus laiko rizikos modelis su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis bei pagrindinės jo charakteristikos. Išvestos rekursinės formulės, leidžiančios greitai suskaičiuoti bankroto tikimybių bei Gerber-Shiu funkcijos vertes.

- Išnagrinėtos baigtinio ir begalinio laiko kritinės modelio charakteristikos. Begalinio laiko atveju pateikiama rekursinė formulė, reikalaujanti pradinio atskaitos taško, kai pradinis kapitalas lygus 0. Šiam dydžiui apskaičiuoti papildomai įrodoma teorema bei pateikiami paskaičiavimo algoritmai.

- Pateiktas ir išnagrinėtas atskiras diskretaus laiko rizikos modelio atvejis su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis pagal geometrinį dėsnį.

- Apibrėžtas diskretaus laiko rizikos modelis su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis ir kintančiomis įmokomis, įgyjančiomis racionalias reikšmes. Randama procedūra tokio modelio baigtinio laiko bankroto tikimybei skaičiuoti.

3.2 Publikacijos ir pranešimai konferencijose

Disertacijos rezultatai buvo publikuoti šiuose straipsniuose:

1. Blaževičius, K., Bieliauskienė, E. ir Šiaulys, J. Finite time ruin probability in the inhomogeneous claim case. *Lithuanian Mathematical Journal 50* (2010), 260–270.

2. Bieliauskienė, E. ir Šiaulys, J. Infinite time ruin probability in inhomogeneous claims case. *Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai. 51* (2010), 352–356.

3. Bieliauskienė, E. Bankroto tikimybė skirtingai pasiskirsčiusioms žaloms: geometrinio dėsnio atvejis. *Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai. 52* (2011), 274–279.

4. Bieliauskienė, E. ir Šiaulys, J. Gerber-Shiu function in the discrete inhomogeneous claim case. *International Journal of Computer Mathematics* (accepted).

Šiose konferencijose buvo skaityti pranešimai:

1. Bieliauskienė, E. *Begalinio laiko bankroto tikimybė skirtingai pasiskirsčiusių žalų atveju.* LI Lietuvos Matematikų Draugijos konferencija, Šiaulių Universitetas, 2010 m. birželio 17-18, Šiauliai, Lietuva.

2. Bieliauskienė, E. *Draudimo įmonės bankroto tikimybės analizė skirtingai pasiskirsčiusių žalų atveju.* Pirmoji jaunųjų mokslininkų konferencija "Fizinių ir technologijos mokslų tarpdalykiniai tyrimai", Lietuvos Mokslų Akademija, 2011 m. vasario 8 d., Vilnius, Lietuva.

3. Bieliauskienė, E. *Bankroto tikimybės analizė, kai žalos pasiskirsčiusios skirtingai pagal geometrinį dėsnį.* LII Lietuvos Matematikų Draugijos konferencija, Generolo Jono Žemaičio Lietuvos karo akademija, 2010 m. birželio 16-17, Vilnius, Lietuva.

Dalyvauta šiose tarptautinėse vasaros mokyklose:

1. Aktuarinių Studijų Zalcburgo Institutas: *Risk Management in Insurance*, 2008 m. kovo 26-29 dienomis Zalcburge, Austrijoje.

2. Group Consultatif Actuarial Europeen: *Solvency II and Enterprise Risk Management*, 2008 m. liepos 21-23 dienomis Lione, Prancūzijoje.

3. Group Consultatif Actuarial Europeen: *Testing and Disclosing Own Risk Models for Solvency Assessments (ORSA)*, 2011 m. gegužės 25-27 dienomis Lisabonoje, Portugalijoje.

3.3 Summary

In this thesis, the discrete time risk model with inhomogeneous claims is considered. This model is used for describing the insurer‘s capital and its components: initial capital, premiums received, and claims paid. The main risk measures, ruin probabilities and Gerber-Shiu function, are investigated and recursive formulas are obtained. These formulas give fast and accurate evaluation of the finite time ruin probabilities and Gerber-Shiu function.

However, the infinite time investigations require that the Gerber-Shiu function's values for the initial capital equal to 0 must be known. This is slightly more difficult due to the claim inhomogeneity and for this reason a theorem with explicit expression of the infinite time Gerber-Shiu function for a zero initial capital is proposed. However, for the calculation of the infinite time values, some assumption about underlying claim structure must be made. As a solution the cyclically distributed claims are proposed, the algorithms for application of the theorems are given and numerical examples with graphical output are presented. Finally, a special case of discrete time risk model with inhomogeneous claims distributed according geometric law is investigated.

In addition to the main results, another discrete time risk model with inhomogeneous claims acquiring rational values is investigated. Two theorems for evaluation of the finite time ruin probabilities are proved and some examples are presented.

3.4 Santrauka

Disertaciniame darbe nagrinėjamas diskretaus laiko rizikos modelis su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis. Šis modelis aprašo draudimo įmonės turtą įtakojančius veiksnius: pradinį kapitalą, gaunamas įmokas, išmokamas žalas. Išvedamos rekursinės formulės, kurių pagalba galima tiksliai ir greitai rasti baigtinio laiko bankroto tikimybių ir Gerber-Shiu funkcijos vertes.

Rekursinės formulės taip pat pateikiamos ir begalinio laiko kritinėms charakteristikoms, tačiau nevienodai pasiskirsčiusių žalų atveju iškyla papildomų sunkumų randant bankroto tikimybę ir Gerber-Shiu funkciją, kai pradinis kapitalas lygus 0. Tam įrodoma atskira teorema, tačiau nedarant jokių prielaidų apie žalų pasiskirstymus, apskaičiuoti vertes lengva tikrai nėra. Kaip išeitis pasiūloma cikliškai pasiskirsčiusių žalų struktūra ir pateikiami algoritmai, leidžiantys teoremas pritaikyti praktiškai. Demonstruojant teoremų ir rekursinių formulių veikimą, pateikiami skaitiniai pa-

vyzdžiai su grafinėmis iliustracijomis bei programų kodai. Galiausiai nagrinėjamas atskiras diskretaus laiko rizikos modelio atvejis, kai žalos pasiskirsčiusios skirtingai pagal geometrinį dėsnį.

Disertacijoje taip pat yra nagrinėjamas diskretaus laiko rizikos modelis su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis, kurios įgyja racionalias reikšmes, bei kintančiomis įmokomis ir pradiniu kapitalu, taip pat įgyjančiais racionalias reikšmes su tam tikra sąlyga. Įrodomos dvi teoremos, kaip rasti tokio modelio baigtinio laiko bankroto tikimybę, ir keli pavyzdžiai.

3.5 Trumpai apie autorę

Nors daug ką aš ir moku, bet matematiką tiesiog myliu.

Išsilavinimas

• 2007–2011 Doktorantūros studijos Vilniaus Universitete, Matematikos ir Informatikos fakultete;
• 2005–2007 Įgytas VU MIF matematikos magistro diplomas *cum laude*, specializacija – Finansų ir draudimo matematika;
• 2001–2005 Įgytas VU MIF statistikos bakalauro diplomas *cum laude*, specialybė – Finansų ir draudimo matematika;
• 1999–2001 Baigta Lietuvos Jaunųjų Matematikų Mokykla;
• 1989–2001 Su pagyrimu baigta Vilniaus "Minties" gimnazija.

Darbo patirtis

Nuo 2005 metų iki dabar dirba aktuare draudimo įmonėje ERGO Life Insurance SE, taip pat aktyviai dalyvauja Lietuvos Aktuarų Draugijos veikloje.

Literatūra

[1] Bieliauskienė, E. Bankroto tikimybė skirtingai pasiskirsčiusioms žaloms: geometrinio dėsnio atvejis. *Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai. 52* (2011), 274–279.

[2] Bieliauskienė, E., and Šiaulys, J. Gerber-shiu function in the discrete inhomogeneous claim case. *International Journal of Computer Mathematics.*

[3] Bieliauskienė, E., and Šiaulys, J. Infinite time ruin probability in inhomo-

geneous claims case. *Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai. 51* (2010), 352–356.

[4] Blaževičius, K., Bieliauskienė, E., and Šiaulys, J. Finite time ruin probability in the inhomogeneous claim case. *Lithuanian Mathematical Journal 50*, 3 (2010), 260–270.

[5] Cramér, H. On the mathematical theory of risk. *Skandia Jubilee Volume* (1930).

[6] De Kok, T. G. Ruin probabilities with compunding assets for discrete time finite horizon problems, independent period claim sizes and general premium structure. *Insurance: Mathematics and Economics 33* (2003), 645–658.

[7] Dickson, D. Some comments on the compound binomial model. *ASTIN Bulletin 24* (1994), 33–45.

[8] Dickson, D. *Insurance risk and ruin.* Cambridge Univ. Press, 2005.

[9] Gerber, H. Mathematical fun with compound binomial process. *ASTIN Bulletin 18* (1988).

[10] Gerber, H., and Shiu, E. On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal 2* (1998), 48–78.

[11] Kuznetsov, A., and Morales, M. Computing the finite-time expected discounted penalty function for a family of Levy processes. *Scandinavian Actuarial Journal* (2011), 1–31.

[12] Lefèvre, C., and Picard, P. A nonhomogeneous risk model for insurance. *Computers and Mathematics with Applications 51* (2006), 325–334.

[13] Li, S., and Garrido, J. On the time value of ruin in the discrete time risk model. *Business Economics Series 12* (2002), 02–18.

[14] Lundberg, F. *Approximerad framställning av sannolikhetsfunktionen. Å terförsäkring av kollektivrisker.* Almqvist och Wiksell, Uppsala, 1903.

[15] Shiu, E. The probability of eventual ruin in the compound binomial model. *ASTIN Bulletin 19* (1989).

[16] Sparre Andersen, E. On the collective theory of risk in the case of contagion between the claims. *Transactions XVth Int. Congress of Actuaries II*, 219–229.

[17] Šiaulys, J., and Kočetova, J. Investigation of Gerber-Shiu discounted penalty function on finite time horizon. *Information Technology and Control 39* (2010).

[18] Willmot, G. E. Ruin probabilities in the compound binomial model. *Insurance: Mathematics and Economics 12*, 2 (1993), 133–142.