VILNIAUS UNIVERSITETAS

Milda Pranckevičiūtė

# AUKŠTO DAŽNIO DUOMENŲ AGREGAVIMAS IR VERTĖS POKYČIO RIZIKA

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2011

Disertacija rengta 2006-2010 metais Vilniaus universitete

**Mokslinis vadovas:**

Prof. habil. dr. Alfredas Račkauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

**Disertacija ginama Vilniaus universiteto matematikos mokslo krypties taryboje:**

**Pirmininkas:**

Prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

**Nariai:**

Prof. habil. dr. Romanas Januškevičius (Vilniaus Pedagoginis universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Doc. dr. Danutė Krapavickaitė (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Prof. habil. dr. Vygantas Paulauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Doc. dr. Marijus Vaičiulis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

**Oponentai:**

Prof. habil. dr. Algimantas Bikelis (Vytauto Didžiojo universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Doc. dr. Virmantas Kvedaras (Vilniaus universitetas, socialiniai mokslai, ekonomika – 04S)

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2011 m. rugsėjo mėn. 16 d. 15 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete, Zigmo Žemaičio auditorijoje. Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225, Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2011 m. rugpjūčio mėn.

Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

Milda Pranckevičiūtė

# High frequency data aggregation and Value-at-Risk

Summary of Doctoral Dissertation

Physical sciences, Mathematics (01P)

Vilnius, 2011

The scientific work was carried out during 2006-2010 at Vilnius University

Scientific supervisor:

Prof. habil. dr. Alfredas Račkauskas (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01P)

**The dissertation will be defended in the council of Mathematics of Vilnius University:**

**Chairman:**
Prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01P)
**Members:**
Prof. habil. dr. Vygantas Paulauskas (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01P)
Prof. habil. dr. Romanas Januškevičius (Vilnius Pedagogical University, Physical Sciences, Mathematics – 01P)
Doc. dr. Danutė Krapavickaitė (Vilnius Gediminas Technical University, Physical Sciences, Mathematics – 01P)
Doc. dr. Marijus Vaičiulis (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01P)
**Oponents:**
Prof. habil. dr. Algimantas Bikelis (Vytautas Magnus University, Physical Sciences, Mathematics – 01P)
Doc. dr. Virmantas Kvedaras (Vilnius University, Social Sciences, Economics – 04S)

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on September 16, 2011, 3 p.m. in Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, Zigmas Žemaitis Hall (101). Address: Naugarduko str. 24, LT-03225, Vilnius, Lithuania.
The summary of dissertation was distributed in August, 2011.
The dissertation is available at the Library of Vilnius University.

# 1 Įvadas

Pastaraisiais metais rizikų valdymas tapo vienu pagrindinių uždavinių kredito įstaigų veikloje. Globali krizė finansų sektoriuje paskatino rinkos dalyvius skirti daugiau dėmesio rizikos vertinimui. Tikslus rizikos įvertinimas yra ypatingai svarbus, nes kredito įstaigos naudoja rizikos įverčius skaičiuodamos kapitalo poreikį ir valdydamos galimus nuostolius. Rinkos rizika apibūdinama kaip rizika, kylanti dėl nežinomo finansinių priemonių kainų kitimo ateityje. Kredito įstaigos susiduria su rinkos rizika dėl savo portfeliuose laikomų įvairių finansinių priemonių, tokių kaip akcijos, skolos vertybiniai popieriai, užsienio valiuta, biržos prekės ir išvestinės finansinės priemonės. Nuo 1996 m., kai Bazelio bankų priežiūros komitetas patvirtino naujus kapitalo poreikio skaičiavimo reikalavimus ir leido taikyti vidinius rizikos vertinimo modelius, rinkos rizikai vertinti kredito įstaigos dažniausiai renkasi vertės pokyčio rizikos (*value-at-risk*) modelį. Tai toks statistinis modelis, kurį taikant su tam tikra tikimybe įvertinamas didžiausias galimas nustatyto laikotarpio nuostolis, kredito įstaigos patiriamas dėl neigiamų taikomos finansinės priemonės vertės pokyčių. Rizikos įvertis, gautas pasitelkus vertės pokyčio rizikos modelį, gali būti naudojamas tiek skaičiuojant kapitalo poreikį pagal priežiūros institucijų reikalavimus, tiek valdant rizikingų portfelio pozicijų rinkos riziką.

Daugėjant finansinės informacijos ir jai apdoroti tinkančios naujos technologijos, didėja aukšto dažnio duomenų prieinamumas ir jų panaudojimo atliekant analizę galimybės. Duomenų aibės fiksuoja tokią informaciją aukštu dažniu. Ji apibūdina įvykius, susijusius su konkrečios finansinės priemonės taikymu, t.y. jos ypatumus (pvz., sandorio kainą, šalis ir pan.) ir įvykio fiksavimo laiką. Aukšto dažnio duomenys buvo pradėti kaupti dvidešimto amžiaus devintojo dešimtmečio pradžioje. Netrukus pasirodė pirmosios publikacijos, kuriose empiriškai nagrinėjami aukšto dažnio duomenys ir ieškoma stilizuotų faktų (žr., pavyzdžiui, [14], [21]). Šiek tiek vėliau, Engle (2000) įvedė ultra aukšto dažnio duomenų sąvoką, norėdamas pabrėžti, kad tokios duomenų aibės turi pilną informaciją apie visus finansinės priemonės įvykius ir jų ypatumus. Aukšto dažnio duomenų eilutė yra nereguliari, nes laiko tarpas tarp dviejų stebėjimų - atsitiktinis dydis. Didžioji dalis ekonometrinių modelių skirti reguliarių laiko eilučių analizei, todėl dirbti su nereguliariais duomenimis gana sudėtinga. Vis dėlto galima ir tiesioginė aukšto dažnio duomenų eilutės analizė, tam sudaromi specialūs modeliai (žr., pavyzdžiui, [7]). Kitas nereguliarios laiko eilutės paruošimo analizei būdas - duomenų agregavimas, kuris ir yra pasitelkiamas šioje disertacijoje.

## 1.1 Tikslai ir uždaviniai

Pagrindinė disertacijos tema - duomenų agregavimo įtakos vertinant rinkos riziką tyrimas. Tam pasitelkiamas vertės pokyčio rizikos modelis. Disertacijoje keliami šie tikslai:

- Apibrėžti agreguotų duomenų vertės pokyčio rizikos modelį ir ištirti jo įvertinių priklausomybę nuo pasirinktos duomenų agregavimo taisyklės.
- Sudaryti funkcinį GARCH modelį su vienmačiu agreguotų grąžų kintamumu ir išnagrinėti jo savybes.
- Apibrėžti funkcinį GARCH modelį Hilberto erdvėje ir išnagrinėti jo savybes.
- Pristatyti duomenų agregavimo problemą nagrinėjant aukšto dažnio duomenų stilizuotus faktus.

## 1.2 Metodai

Disertacijoje naudojami šiuolaikiniai tikimybių teorijos, statistikos ir funkcinės analizės metodai.

## 1.3 Darbo mokslinis naujumas

Disertacijoje pristatomas naujas požiūris į rinkos rizikos vertinimą dienos bėgyje, pasitelkiant vertės pokyčio rizikos modelį agreguotiems aukšto dažnio duomenims. Be to, disertacijoje sudaromi ir nagrinėjami du nauji funkciniai GARCH tipo modeliai. Pirmame kintamumas priklauso nuo tam tikrų funkcinių grąžų savybių, o antrasis modelis apibrėžiamas Hilberto erdvėje su vienmačiu kintamumu.

## 1.4 Darbo struktūra

Disertacija parašyta anglų kalba. Ją sudaro įvadas, keturi skyriai, bendrosios išvados, du priedai ir literatūros sąrašas. Pirmame disertacijos skyriuje pristatomas vertės pokyčio rizikos modelis: aptariama nuostolio sąvoka, apibrėžiamas vertės pokyčio rizikos modelis, aprašomas dažniausiai tyrimams taikomas praeities duomenimis pagrįstas vertės pokyčio rizikos modelis. Apibrėžiamas agreguotų duomenų vertės pokyčio rizikos modelis ir pateikiamas praktinis tyrimas apie su JAV doleriu (USD) lyginamų valiutų - bendros Europos Sąjungos valiutos euro (EUR), Didžiosios Britanijos svaro sterlingų (GBP) ir Japonijos jenos

(JPY) - pozicijos vertės pokyčio rizikos modelio įvertinių priklausomybę nuo duomenų agregavimo taisyklės (pataškio, didžiausios vertės, mažiausios vertės ir vidutinės vertės). Antrojo disertacijos skyriaus pradžioje nagrinėjamas pataškis GARCH modelis rizikos vertinimo kontekste. Apibrėžiamas naujas funkcinis $\rho - \mathrm{GARCH}(1,1)$ modelis ir analizuojamos jo savybės. Galiausiai pateikiama keletas apibrėžtojo modelio pavyzdžių, kai agreguotų grąžų tankio funkcija yra žinoma. Trečiame disertacijos skyriuje pristatomas naujas $\mathrm{GARCH}(1,1)$ modelis Hilberto erdvėje su vienmačiu kintamumu. Nagrinėjamos modelio savybės - stacionaraus sprendinio egzistavimas, parametrų suderinamumas ir asimptotinis normalumas, atliekama liekanų analizė. Ketvirtame disertcijos skyriuje pateikiama trumpa aukšto dažnio duomenų stilizuotų faktų apžvalga. Ilga atmintis, kaip vienas svarbiausių stilizuotų faktų, nagrinėjama absoliučioms valiutos kursų grąžoms, pasitelkiant klasikinę R/S statistiką ir vertinant Hursto eksponentę. Skyriaus pabaigoje pristatomas empirinis tyrimas apie Hursto indekso priklausomybę nuo agregavimo taisyklės dienos metu, pasitelkiant su USD lyginamų valiutų kursų - EUR, GBP ir JPY - stebėjimus.

# 2 Pagrindiniai rezultatai

Nagrinėkime nereguliarią laiko eilutę $\{(\tau_j, y_j)\}_{j=1}^{N}$, kur $\tau_j$ ir $y_j$ žymi $j$-ojo stebėjimo atitinkamai laiką ir vertę. Fiksuokime $\delta > 0$ laiko tarpą tarp dviejų stebėjimų ir sakykime $\tau_t^* = t\delta$, $t = 1, \ldots, N^*$. Pritaikę tam tikrą agregavimo taisyklę $g$, galime apibrėžti reguliarią duomenų eilutę:

$$y_t^* = y_t^*(g) = g(\{(\tau_j, y_j), \tau_j \in (\tau_{t-1}^*, \tau_t^*]\}), \quad t = 1, \ldots, N^*. \tag{1}$$

Taip apibrėžtas agregavimas reiškia, kad agreguotoji stebėjimo vertė $y_t^*$ yra sudaryta panaudojant informaciją nuo laiko momento $\tau_{t-1}^*$ iki laiko momento $\tau_t^*$. Pastebėkime, kad agregavimo taisyklės $g$ iš (1) dimensija nėra fiksuota, todėl galime nagrinėti tiek baigtinės, tiek begalinės dimensijos agregavimo schemas. Pavyzdžiui, Brownlees ir Gallo (2006) pasiūlė keletą vienmačių agregavimo taisyklių, kurios apibrėžiamos imant pirmą, paskutinę, didžiausią, mažiausią ar sumą verčių $y_j$ iš intervalo $(\tau_{t-1}^*, \tau_t^*]$. Be to, siūloma taikyti metodus, pagrįstus interpoliavimu, t.y. reikšmė taške $\tau_t^*$ apskaičiuojama interpoliuojant prieš tai einantį ir sekantį stebėjimą (žr., pavyzdžiui, [7]). Šiuo atveju, kai agreguojant duomenis sudaroma reguliari vienmatė laiko eilutė, duomenų analizei taikomi standartiniai ekonometriniai modeliai. Dar vienas aukšto dažnio duomenų apdorojimo variantas - funkcinių duomenų konstravimas. Ramsay ir Silverman (1997) pristatė keletą metodų, kuriais remiantis neapdoroti duomenys gali būti išreiškiami funkciniu pavidalu. Funkcinius duomenis galima sukonstruoti ir tiesiogiai. Pavyzdžiui, aukšto dažnio duomenų maksimalios vertės eilutė sudaroma iš tokių nemažėjančių funkcijų:

$$y_t^*(s) = \max\{y_j | \tau_j \in (\tau_{t-1}^*, (1-s)\tau_{t-1}^* + s\tau_t^*]\}, \quad s \in [0,1].$$

Agreguoti funkciniai duomenys gali būti nagrinėjami pasitelkiant funkcinių duomenų analizės modelius.

Manoma, kad aukšto dažnio duomenys turėtų pagerinti rizikos modelių įvertinių kokybę, tačiau yra tik keletas publikacijų, kuriose vertės pokyčio rizika vertinama naudojant tokius duomenis. Tam tikruose straipsniuose (žr., pavyzdžiui, [2],[13]) nagrinėjamos reguliarizuotų duomenų eilutės ir remiamasi standartiniais vertės pokyčio rizikos modeliais. Kitose publikacijose (žr., pavyzdžiui, [5], [8]) sudaromi specialūs vertės pokyčio rizikos modeliai, tinkami nereguliariems aukšto dažnio duomenims. Aušto dažnio vertės pokyčio rizikos modeliai paprastai vertinami pasitelkiant nuo 5 iki 30 minučių grąžas, o jų įvertiniai naudojami rizikos valdymo dienos metu tikslais. Mūsų žiniomis, aukšto dažnio duomenų vertės pokyčio rizikos modeliai nėra taikomi vertinant riziką kapitalo poreikiui pagal priežiūros institucijų nustatytus reikalavimus apskaičiuoti. Taip yra dėl to, kad Bazelio bankų priežiūros komiteto (2006) išleistuose reikalavimuose vertės pokyčio rizikos modelių taikymui, teigiama, kad vertės pokyčio rizikos modelis privalo būti vertinamas pasitelkiant dienos duomenis. Akcijų rinkose dienos kainomis laikomos uždarymo kainos, o užsienio valiutų rinkoje, kur prekyba vyksta ištisą parą, dienos kaina fiksuojama tam tikru paros metu. Pavyzdžiui, Bloombergo sistemoje dienos valiutų kursai atitinka užfiksuotus dienos pabaigoje, o tuo tarpu Lietuvos bankas oficialų dienos valiutos kursą nustato sekančiai dienai pagal valiutų kursus, stebimus rinkoje apie 10 valandą Lietuvos laiku. Akivaizdu, kad tos pačios dienos Lietuvos banko nustatytas oficialus valiutos kursas ir valiutos kursas Bloombergo sistemoje skiriasi. Be to, dienos kainos gali būti apibrėžiamos kaip didžiausia, mažiausia ar vidutinė reikšmė visų kainų tos dienos bėgyje arba taikant dar sudėtingesnes agregavimo taisykles. Deja, oficialiuose priežiūros institucijų reikalavimuose vertės pokyčio rizikos modeliui nėra užsimenama apie duomenų agregavimą.

## 2.1 Vertės pokyčio rizikos modelis

Disertacijos pirmame skyriuje, apibendrinant klasikinį vertės pokyčio rizikos modelį iš [18], buvo apibrėžtas agreguotų duomenų vertės pokyčio rizikos modelis. Nagrinėkime finansinių priemonių agreguotų kainų eilutę $p_t(g)$ su agregavimo taisykle $g$ iš klasės $\mathcal{G}$, o $\tau_t := t\delta$ pažymėkime reguliarios kainų eilutės laiko momentų seką. Sakykime $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ yra funkcija, išreiškianti portfelio vertę per rizikos faktorius. Pasitelkiant logaritmines finansinių priemonių agreguotas kainas, portfelio nuostolį galime užrašyti:

$$L_{t+1}(g) = -[f\{\tau_{t+1}, \mathbf{Z}_t(g) + \mathbf{X}_{t+1}(g)\} - f\{\tau_t, \mathbf{Z}_t(g)\}], \tag{2}$$

čia $\mathbf{Z}_t(g) = (Z_{t,1}(g), ..., Z_{t,d}(g))^T = (\ln p_{t,1}(g), ..., \ln p_{t,d}(g))^T$ yra rizikos faktoriai, o $\mathbf{X}_{t+1}(g) := \mathbf{Z}_{t+1}(g) - \mathbf{Z}_t(g)$ - rizikos faktorių pokyčiai. Pažymėkime $F_{L(g)}$, $g \in \mathcal{G}$ finansinių priemonių portfelio nuostolių $L(g)$ skirstinį. Sakykime pasikliovimo lygmuo $\alpha \in (0, 1)$. Portfelio agreguotų duomenų, vertės pokyčio rizika esant fiksuotam pasikliovimo lygmeniui $\alpha$, apibrėžiama kaip toks mažiausias skaičius $l$, kad tikimybė nuostoliui $L(g)$ viršyti tą skaičių yra ne didesnė, kaip $(1 - \alpha)$ per fiksuotą laikymo laikotarpį $\delta \geq 0$:

$$VaR_\alpha(g) = inf\{l \in \mathbb{R} : P(L(g) > l) \leq 1 - \alpha\} = inf\{l \in \mathbb{R} : F_{L(g)}(l) \geq \alpha\}. \tag{3}$$

Kaip matome pagal šį apibrėžimą vertės pokyčio rizikos modelis priklauso ne tik nuo pasikliovimo lygmens $\alpha$ ir finansinių priemonių laikymo laikotarpio $\delta$, bet ir nuo agregavimo taisyklės $g$ iš duotos agregavimo taisyklių klasės $\mathcal{G}$.

Norėdami pailiustruoti vertės pokyčio rizikos modelio įvertinio priklausomybę nuo agregavimo taisyklės, atlikome empirinį tyrimą aukšto dažnio duomenims. Analizei panaudoti užsienio valiutų kursų duomenys, t.y. su USD lyginamos valiutos EUR, GBP ir JPY. Šių šalių valiutos pasirinktos dėl duomenų apie jų kitimą gausos, be to, jos yra tarp valiutų, kuriomis pasaulyje dažniausiai prekiaujama. Buvo taikytos keturios agregavimo taisyklės:

- pataškio agregavimo

$$p_t^{DAILY}(s) = \{p_i | \tau_i = \max\{\tau_i \in (\tau_{t-1}^*, (1-s)\tau_{t-1}^* + s\tau_t^*]\}\}, \quad s \in [0, 1],$$

- didžiausios vertės agregavimo

$$p_t^{MAX}(s) = \max\{p_i | \tau_i \in (\tau_{t-1}^*, (1-s)\tau_{t-1}^* + s\tau_t^*]\}, \quad s \in [0,1],$$

- mažiausios vertės agregavimo

$$p_t^{MIN}(s) = \min\{p_i | \tau_i \in (\tau_{t-1}^*, (1-s)\tau_{t-1}^* + s\tau_t^*]\}, \quad s \in [0,1],$$

- vidutinės vertės agregavimo

$$p_t^{AVE}(s) = \frac{1}{m_t(s)} \sum_{\tau_i \in (\tau_{t-1}^*, (1-s)\tau_{t-1}^* + s\tau_t^*]} p_i, \quad s \in [0,1],$$

čia $m_t(s) = \#\{\tau_i \in (\tau_{t-1}^*, (1-s)\tau_{t-1}^* + s\tau_t^*]\}$.

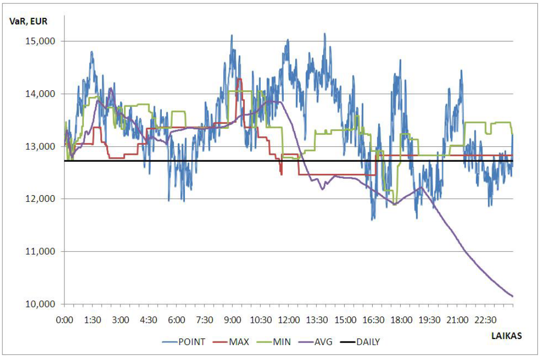
Agregavimo taisyklę čia atspindi skaičius $s$, o agregavimo taisyklių klasė $\mathcal{G}$ yra sutapatinama su intervalu $[0,1]$. Imdami, pavyzdžiui, maksimalias ar vidutines vertes kiekvienam laiko momentui $s \in [0,1]$, gauname atitinkamą agregavimo taisyklę.

Vertės pokyčio rizikos modelio metodikų spektras gana platus (žr., pavyzdžiui, [11]). Vieną populiariausių, praeities duomenimis pagrįstą vertės pokyčio rizikos modelį, galima tiesiogiai apibendrinti agreguotiems duomenims. Agreguotais praeities duomenimis pragrįstą vertės pokyčio rizikos modelį galime užrašyti taip:

$$VaR_\alpha(s) = q_\alpha(F_{L(s)}), \quad s \in [0,1],$$

čia $F_{L(s)}$ žymi empirinę finansinės priemonės nuostolių pasiskirstymo funkciją, o simbolis $q_\alpha$ - empirinio skirstinio $\alpha$ kvatilį.

Taikant vertės pokyčio rizikos modelį ir naudojant agreguotus aukšto dažnio valiutų kursų ir dienos valiutų kursų duomenis, buvo įvertinta kredito įstaigų patiriama rinkos rizika (didžiausias galimas vienos dienos nuostolis dėl valiutų kursų svyravimų). Tyrimo rezultatai rodo, kad kredito įstaigų nuostolio įvertinys ypač priklauso nuo pasirinktos duomenų agregavimo funkcijos ir pakinta per dieną. Įvertinys, kuriam skaičiuoti naudojami dienos valiutų kursų duomenys, neatskleidžia visos informacijos apie kredito įstaigų patiriamą rinkos riziką, o ji, kaip rodo nuostolio įvertinys, apskaičiuojamas naudojant aukšto dažnio duomenis, per dieną pakinta.




1 pav.: USD pozicijos agreguotų duomenų vertės pokyčio rizikos modelio įvertinio eurais kitimas dienos metu.

Pavyzdžiui, 1 paveikslėlyje pateikti EUR/USD valiutos pozicijos (1 mln. USD) vertės pokyčio rizikos modelio su 95 proc. pasikliovimo lygmeniu vienos dienos laikymo laikotarpio įverčiai, pasitelkiant pataškio (POINT), didžiausios vertės (MAX), mažiausios vertės (MIN) ir vidutinės vertės (AVE) agregavimo taisykles. Be to, horizontali linija paveikslėlyje žymi dienos vertės pokyčio rizikos modelio įvertį (DAILY) pagal Bloombergo sistemoje pateikiamus dienos valiutos kursų duomenis. Didžiausia vertės pokyčio rizikos modelio reikšmė 15,2 tūkst. EUR pasiekiama pataškio agregavimo atveju 13:56. Taikant pataškio agregavimo taisyklę tarp 9 val. ir 15 val. vertės pokyčio rizikos modelio įverčiai yra didžiausi, nes tuo metu vyksta aktyvi prekyba valiuta Europos rinkoje ir prasideda prekyba Amerikos žemyne. Dienos pabaigoje EUR/USD kursas keičiasi nežymiai, todėl ir vertės pokyčio rizikos modelio reikšmės yra sąlyginai mažos. Dienos valiutos kursas fiksuojamas dienos pabaigoje todėl ir standartinio dienos vertės pokyčio rizikos modelio reikšmė lygi 12,7 tūkst. EUR yra 16 proc. mažesnė nei maksimali vertės pokyčio rizikos modelio reikšmė, gauta pataškio agregavimo atveju. Net ir didžiausios bei mažiausios vertės agregavimo taisyklės beveik visos dienos metu duoda didesnius rizikos įverčius už standartinį dienos rizikos įvertį. Vidutinės vertės agregavimo taisyklė nėra tinkama tokiam ilgam agregavimo laikotarpiui kaip viena diena, nes ši agregavimo taisyklė duoda tolydesnes valiutų kainų funckijas daugėjant reikšmių ir dienos pabaigoje svyruoja nežymiai.

Kredito įstaigų priežiūros reikalavimai leidžia naudoti dienos duomenis (dienai priskiriamas vienas skaičius) rinkos rizikai ir kapitalo poreikiui vertinti. Tačiau tokie skaičiavimai pagrįsti nepakankama informacija, nes ji nefiksuoja visą per dieną įvykstančių rinkos įvykių.

Taigi kredito įstaigų patiriama rinkos rizika įvertinama nelabai tiksliai. Agreguotų duomenų naudojimas taikant vertės pokyčio rizikos modelį leistų atsižvelgti į visos dienos informaciją ir tiksliau įvertinti rinkos riziką.

## 2.2 Funkcinis $\rho - \mathrm{GARCH}(1,1)$ modelis

Antrame disertacijos skyriuje pristatytas funkcinis $\rho-\mathrm{GARCH}(1,1)$ modelis. Tegul $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ žymi visų atsitiktinių dydžių tikimybinę erdvę. Nagrinėkime funkcinę eilutę $(X_t, t \in \mathbb{Z})$, kur kiekvienam $t$, $X_t = (X_t(g), g \in \mathcal{G})$ reiškia atsitiktinę funkciją, apibrėžtą klasėje $\mathcal{G}$. Sakykime, visiems $t$, $X_t \in \mathbb{E} \subset \mathbb{R}^{\mathcal{G}}$, yra atsitiktinis elementas iš erdvės $\mathbb{E}$, kuri yra separabili topologinė vektorinė erdvė su Borelio $\sigma$-algebra. Tegul $\rho : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ - mati pusnormė.

**1 Apibrėžimas.** Procesas $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ yra funkcinis $\rho - \mathrm{GARCH}(1,1)$, jeigu visiems $g \in \mathcal{G}$ ir $t \in \mathbb{Z}$ tenkinama

$$X_t(g) = \sigma_t \varepsilon_t(g), \tag{4}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\rho^2(X_{t-1}) + \beta\sigma_{t-1}^2, \tag{5}$$

čia $(\varepsilon_t(g), g \in \mathcal{G}), t \in \mathbb{Z}$ yra nepriklausomos vienodai pasiskirsčiusios atsitiktinės funkcijos.

Remiantis [12], buvo įrodytas modelio (4), (5) griežtas ir antros eilės stacionarumas (2 ir 3 teoremos).

**2 Teorema.** *Jeigu $(\varepsilon_t)$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai ir*

$$-\infty \le \gamma := E\log\{\alpha\rho^2(\varepsilon_0) + \beta\} < 0, \tag{6}$$

*tuomet eilutė*

$$h_t := \omega + \omega \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \left(\alpha\rho^2(\varepsilon_{t-j}) + \beta\right) \tag{7}$$

*konverguoja beveik tikrai ir procesas $(X_t)$,*

$$X_t(g) = h_t^{1/2}\varepsilon_t(g), \quad g \in \mathcal{G}, \tag{8}$$

*yra vienintelis stacionarus modelio $(4), (5)$ sprendinys.*

**3 Teorema.** *Tegul* $(\varepsilon_t(g), t \in \mathbb{Z})$ *yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę kvadratu integruojami atsitiktiniai dydžiai, t.y.* $E\varepsilon_t^2(g) < \infty$ *visiems* $g \in \mathcal{G}$. *Jei* $\alpha E\rho^2(\varepsilon_0) + \beta < 1$, *procesas* $(X_t(g), t \in \mathbb{Z})$, *apibrėžtas lygybe (8) yra vienintelis antros eilės stacionarus modelio (4), (5) sprendinys.*

Modelio parametrams vertinti buvo pasirinktas didžiausio tikėtinumo metodas. Tikėtinumo funkcija užrašoma taip:

$$\widehat{L}_n(\nu) = \widehat{L}_n(\nu; X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{t=1}^{n} \widehat{\ell}_t(\nu, X_t, X_{t-1}, \dots, X_1), \tag{9}$$

$$\widehat{\ell}_t(\nu, X_t, X_{t-1}, \dots, X_1) = \log[\tilde{\sigma}_t^{-1} p_\lambda(\rho(X_t)/\tilde{\sigma}_t)], \quad t = 1, ..., n, \tag{10}$$

čia $\nu = (\theta, \lambda)^T$, $\theta = (\omega, \alpha, \beta)^T$ žymi nežinomų parametrų vektorių, $p_\lambda$ - atsitiktinio dydžio $\rho(\varepsilon_0)$ tankio funkciją iš parametrinės Lebego tankių klasės $\{p_\lambda | \lambda \in M\}$, $M \subset \mathbb{R}^d$, o $\tilde{\sigma}_t^2 = \tilde{\sigma}_t^2(\theta)$, tenkina

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \omega + \alpha\rho^2(X_{t-1}) + \beta\tilde{\sigma}_{t-1}^2, \quad t = 1, \dots, n,$$

su pradinėmis sąlygomis $\tilde{\sigma}_0^2 = 0$ ir $X_0 = 0$.

Tikrųjų parametrų $\nu_0 = (\theta_0, \lambda_0)^T$, $\theta_0 = (\omega_0, \alpha_0, \beta_0)^T$, didžiausio tikėtinumo įvertinys randamas maksimizuojant tikėtinumo funkciją:

$$\widehat{\nu}_n = \underset{\nu \in K \times M}{\operatorname{argmax}} \widehat{L}_n(\nu), \tag{11}$$

čia $K \subset \mathbb{R}^3$ ir $M \subset \mathbb{R}^d$ yra kompaktinės aibės. Papildomai tarkime, kad tankio funkcijai $p_\lambda$ galioja tokios sąlygos:

M.1 $p_\lambda(x) > 0$ visiems $\lambda \in M$ ir $x \in \mathbb{R}$.

M.2 Atvaizdis $\mathbb{R} \times M \to (0, \infty) : (x, \lambda) \mapsto p_\lambda(x)$ yra tolydus.

M.3 Jei $p_\lambda = p_{\lambda'}$, tai $\lambda = \lambda'$.

Pažymėkime, $L_n(\nu) = \sum_{t=1}^{n} \ell_t(\nu)$, $\ell_t(\nu) = \log \frac{1}{(h_t(\theta))^{1/2}} p_\lambda\left(\frac{\rho(X_t)}{(h_t(\theta))^{1/2}}\right)$, $h_t(\theta) = \frac{\omega}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^{j-1} \rho^2(X_{t-j})$.

Didžiausio tikėtinumo įvertinio $\widehat{\nu}_n$ suderinamumo įrodymas remiasi 6.1.4. teorema iš [20].

**4 Teorema.** *Nagrinėkime modelį* (4), (5), *kuriame* (4) *pakeista lygtimi* $\rho(X_t) = \sigma_t \rho(\varepsilon_t)$ *ir sakykime, tenkinamos sąlygos:*

*(i)* $E\log\{\alpha\rho^2(\varepsilon_0)+\beta\}<0$ *ir* $E\rho^2(X_0)<\infty$.

*(ii)* $K\subset(0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,1)$ *ir* $M\subset\mathbb{R}^d$ *yra kompaktinės aibės, kurioms priklauso tikroji parametrų reikšmė* $\theta_0\in K$, $\lambda_0\in M$ *ir* $(\alpha_0,\beta_0)\neq 0$, $\omega_0\geq\omega_1>0$.

*(iii)* *Tankio funkcijų klasė* $\mathcal{D}=\{p_\lambda|\lambda\in M\}$ *tenkina M.1-M.3 sąlygas.*

*(iv)* $\int_0^\infty|\log p_{\lambda_0}(x)|p_{\lambda_0}(x)dx<\infty$.

*(v)* $\frac{1}{n}\sup_{\nu\in K\times M}|\widehat{L}_n(\nu)-L_n(\nu)|\xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.s.}}0$.

*Tuomet didžiausio tikėtinumo įvertinys* $\hat{\nu}_n$ *yra stipriai suderintas:*

$$(\widehat{\theta},\widehat{\lambda})\xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.s.}}(\theta_0,\lambda_0).$$

Skyriaus pabaigoje pateikti modelio (4), (5) pavyzdžiai, kai atsitiktinių dydžių $\rho(\varepsilon_t)$ tankis žinomas. Buvo patikrintos 4 teoremos sąlygos, taigi parodyta, kad didžiausio tikėtinumo parametrų įvertiniai yra suderinti.

**1 Pavyzdys.** Sakykime, kad $\mathcal{G}=[0,1]$, t.y. kiekvienas taškas $s\in[0,1]$ atitinka tam tikrą agregavimo taisyklę. Nagrinėkime erdvės $C[0,1]$ elementų $(X_t,t\in\mathbb{Z})$, gautų pritaikius tam tikrą agregavimo taisyklę, laiko eilutę:

$$X_t(s)=\sigma_t\varepsilon_t(s),\quad s\in[0,1],$$
$$\sigma_t^2=\omega+\alpha\Big(\max_{s\in[0,1]}X_{t-1}(s)\Big)^2+\beta\sigma_{t-1}^2,$$

čia $(\varepsilon_t(s),s\in[0,1]),t\in\mathbb{Z}$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę Vynerio procesai.

Šis pavyzdys atitinka modelį (4), (5) erdvėje $\mathbb{E}=C[0,1]$ su pusnorme $\rho(f)=\max_{0\leq s\leq 1}f(s)$. Kadangi dydžių $\rho(\varepsilon_t)=\max_{s\in[0,1]}\varepsilon_t(s)$ tankio funkcija yra žinoma, galime rasti didžiausio tikėtinumo funkciją. Patikrinę 4 teoremos sąlygas parodėme, kad šio modelio didžiausio tikėtinumo įvertiniai yra suderinti.

**2 Pavyzdys.** Nagrinėkime erdvės $C[0,1]$ elementų $(X_t,t\in\mathbb{Z})$ laiko eilutę:

$$X_t(s)=\sigma_t\varepsilon_t(s),\quad s\in[0,1],$$
$$\sigma_t^2=\omega+\alpha\min_{s\in[0,1]}X_{t-1}^2(s)+\beta\sigma_{t-1}^2,$$

čia $(\varepsilon_t(s),s\in[0,1]),t\in\mathbb{Z}$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę Vynerio procesai.

Šis pavyzdys atitinka modelį (4), (5), kuriame $\mathbb{E} = C[0,1]$ ir pusnormė $\rho(f) = \min_{0\le s\le 1} f(s)$. Panašiai kaip ir pirmajame pavyzdyje, galime išreikšti tikėtinumo funkciją ir parodyti, kad šio modelio didžiausio tikėtinumo įvertiniai yra suderinti.

**3 Pavyzdys.** Sakykime, klasę $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_d\}$ sudaro $d$ agregavimo taisyklių ir nagrinėkime erdvės $R^d$ laiko eilutę $(X_t, t \in \mathbb{Z})$, kurios elementai gauti pritaikius tam tikrą agregavimo taisyklę iš klasės $\mathcal{G}$ ir kuri tenkina:

$$X_{jt} = \sigma_t \varepsilon_{jt}, \quad j = 1, \dots, d,$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \rho^2(X_{t-1}) + \beta \sigma_{t-1}^2,$$

čia $(\varepsilon_{jt}, j = 1, \dots . d), t \in \mathbb{Z}$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę Gauso atsitiktiniai vektoriai su nuliniu vidurkiu ir kovariacijų matrica $\Lambda = (\lambda_{ij}, i, j = 1, \dots, d)$. Tegu $\rho(x) = \left(\sum_{i=1}^d x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Tarkime, kad $\lambda_{ii} = 1, i = 1, \dots d$, tuomet $\rho^2(\varepsilon_{jt}) = \sum_{i=1}^d \varepsilon_{jt}^2$, $t \in \mathbb{Z}$ ir jo skirstinys yra $\chi^2$. Pasitelkę $\chi^2$ skirstinio tankio funkciją, radome didžiausio tikėtinumo funkciją parametrams vertinti ir parodėme, kad tenkinamos 4 teoremos sąlygos.

**4 Pavyzdys.** Šiame pavyzdyje nagrinėkime pataškį agregavimą. Sakykime erdvės $C[0,1]$ laiko eilutė $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ užrašoma:

$$X_t(s) = \sigma_t \varepsilon_t(s), \quad s \in [0,1], \tag{12}$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha (X_{t-1}(1) - X_{t-1}(0))^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \tag{13}$$

čia $(\varepsilon_t(s), s \in [0,1]), t \in \mathbb{Z}$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai Gauso procesai.

Šis pavyzdys atitinka modelį (4), (5) erdvėje $\mathbb{E} = C[0,1]$ su pusnorme $\rho(f) = |f(1) - f(0)|$. Toks modelis turi ir praktinį paaiškinimą, kai nagrinėjamos finansinių priemonių kainos, pavyzdžiui, akcijos. Tuomet modelio (12), (13) kintamumas priklauso nuo atidarymo ir uždarymo kainų skirtumo absoliučios reikšmės.

Dydžio $[\varepsilon_t(1) - \varepsilon_t(0)]$ tankio funkcija yra žinoma, taigi sudarę didžiausio tikėtinumo funkciją modelio parametrams vertinti, parodėme, kad galioja 4 teoremos sąlygos ir parametrų įvertiniai yra suderinti.

## 2.3 GARCH$(1,1)$ modelis Hilberto erdvėje

Sakykime, $\mathbb{H}$ yra separabili baigtinės ar begalinės dimensijos Hilberto erdvė su skaliarine sandauga $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ir norma $|| \cdot ||$, $||x||^2 = \langle x, x \rangle$, $x \in \mathbb{H}$. Tegul $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ yra atsitiktinis procesas erdvėje $\mathbb{H}$, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

**5 Apibrėžimas.** Sakysime, kad $(X_t)$ yra GARCH$(1,1)$ su vienmačiu kintamumu, jei

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad (\varepsilon_t) \sim \text{iid } (0, Q_\varepsilon), \tag{14}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \langle X_{t-1}, z \rangle^2, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{15}$$

čia $\omega > 0, \beta \geq 0$ ir $z \in \mathbb{H}$ yra modelio parametrai.

Laikysime, kad $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę erdvės $\mathbb{H}$ atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu ir kovariacija $Q_\varepsilon$. Kai $(X_t)$ projektuojamas kryptimi $z$, laiko eilutė $(\langle X_t, z \rangle, t \in \mathbb{Z})$ yra klasikinis GARCH$(1,1)$ modelis. Reikia pastebėti, kad kryptis $z$ nežinoma.

Hilberto erdvės GARCH$(1,1)$ sprendinio griežtas ir 2-os eilės stacionarumas (6 ir 7 teoremos) įrodyti remiantis [12] ir [20].

**6 Teorema.** *Jeigu* $(\varepsilon_t)$ *yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai ir*

$$-\infty \leq \gamma := E \log\{\langle \varepsilon_0, z \rangle^2 + \beta\} < 0, \tag{16}$$

*tuomet eilutė*

$$h_t := \omega + \omega \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \big( \langle \varepsilon_{t-j}, z \rangle^2 + \beta \big) \tag{17}$$

*konverguoja beveik tikrai ir procesas* $(X_t, t \in \mathbb{Z})$*, apibrėžiamas*

$$X_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{18}$$

*yra vienintelis griežtai stacionarus modelio* $(14), (15)$ *sprendinys.*

**7 Teorema.** $(\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ *yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę kvadratu integruojami atsitiktiniai dydžiai, t.y.* $E||\varepsilon_0||^2 < \infty$. *Jei* $E\langle \varepsilon_0, z \rangle^2 + \beta < 1$, *procesas* $(X_t, t \in \mathbb{Z})$, *apibrėžtas lygybe (18), yra vienintelis modelio* $(14), (15)$ *antros eilės stacionarus sprendinys. Be to,* *jeigu* $E||\varepsilon_0||^p < \infty$ *ir* $E(\langle \varepsilon_0, z\rangle^2 + \beta)^{p/2} < 1$*, kai* $p \geq 2$*, sprendinys (18) turi baigtinį p-osios eilės momentą.*

Modelio parametrams vertinti pasirinktas taip vadinamas kvazi-didžiausio tikėtinumo metodas. Darydami prielaidą, kad dydžiai $(\varepsilon_t)$ yra pasiskirstę pagal Gauso skirstinį, kvazi-didžiausio tikėtinumo funkciją užrašome taip:

$$\widehat{L}_n(\theta) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\sum_{i=1}^{d}\Big(\frac{\langle X_t, \phi_i\rangle^2}{\mu_i^2 \widehat{h}_t(\theta)} + \log(\widehat{h}_t(\theta))\Big),$$

čia $(\mu_j^2), j = 1, \ldots, d$ yra operatoriaus $Q_\varepsilon$ tikrines funkcijas $(\phi_j)$ atitinkančios tikrinės reikšmės, kurios yra žinomos, o $\widehat{h}_t(\theta)$ užrašoma

$$\widehat{h}_t(\theta) = \frac{\omega}{1-\beta} + \sum_{j=1}^{t}\beta^{j-1}\langle X_{t-j}, z\rangle^2, \quad \theta = (\omega, \beta, \lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in K.$$

Didžiausio tikėtinumo įvertinys $\widehat{\theta}_n$ randamas maksimizuojant tikėtinumo funkciją:

$$\widehat{\theta}_n = \text{argmax}_{\theta \in K}\widehat{L}_n(\theta).$$

Didžiausio tikėtinumo įvertinio $\widehat{\theta}_n$ suderinamumas įrodytas pagal 5.1.7 teoremą iš [20].

**8 Teorema.** $E\langle \varepsilon_0, z\rangle^2 + \beta < 1$*, visiems* $\theta = (\omega, \beta, \lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in K$*, kur* $z = \lambda_1\phi_1 + \cdots + \lambda_d\phi_d \in H$ *ir* $K$ *yra kompaktinė aibė. Tuomet*

$$\widehat{\theta}_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.s.}} \quad \theta_0.$$

Didžiausio tikėtinumo įvertinio $\widehat{\theta}_n$ asimptotinis normalumas įrodytas remiantis 7.2 teorema iš [12] ir 5.6.1 teorema iš [20]. Pažymėkime, $h_t(\theta) = \frac{\omega}{1-\beta} + \sum_{j=1}^{\infty}\beta^{j-1}\langle X_{t-j}, z\rangle^2$.

**9 Teorema.** *Sakykime, tenkinamos tokios sąlygos:*

(i) $\theta_0 \in K^0$, $K^0$ *yra kompaktinės aibės* $K$ *vidus;*

(ii) *Kai* $0 < \delta < 1$, $E||\varepsilon_0||^{4+\delta} < \infty$ *ir* $E(\langle \varepsilon_0, z\rangle^2 + \beta)^2 < 1$ *visiems* $\theta = (\omega, \beta, \lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in K$*, kur* $z = \lambda_1\phi_1 + \cdots + \lambda_d\phi_d$*;*

(iii) *Matrica* $J = E\sigma_1^{-4}h_1'(\theta_0)[h_1'(\theta_0)]^T$ *yra apverčiama.*

*Tuomet*

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \frac{A_\varepsilon}{d^2} J^{-1}),$$

*čia*

$$A_\varepsilon = \sum_{i,j=1}^{d} \Big( \frac{E\langle \varepsilon_0, \phi_i \rangle^2 \langle \varepsilon_0, \phi_j \rangle^2}{\mu_i^2 \mu_j^2} - 1 \Big).$$

Skyriaus pabaigoje buvo ištirtos liekanoms $\widehat{\varepsilon}_t = \widehat{\sigma}_t^{-1} X_t, \quad t = 1, \dots, n,\ \widehat{\sigma}_t^2 = \frac{\widehat{\omega}}{1-\widehat{\beta}} + \sum_{j=1}^{m} \widehat{\beta}^{j-1} \langle X_{t-j}, \widehat{z} \rangle^2, \quad 1 < m < n$, asimptotinės savybės.

**10 Teorema.** *Sakykime $E\langle \varepsilon_0, z \rangle^2 + \beta < 1$, visiems $\theta = (\omega, \beta, \lambda_1, \dots, \lambda_d) \in K$, čia $z = \lambda_1 \phi_1 + \dots + \lambda_d \phi_d \in \mathbb{H}$ ir $K$ yra kompaktinė aibė. Tuomet visiems $x, y \in \mathbb{H}$,*

$$n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \langle \widehat{\varepsilon}_k, x \rangle \langle \widehat{\varepsilon}_k, y \rangle \xrightarrow[n \to \infty]{\mathrm{P}} \langle Q_\varepsilon x, y \rangle.$$

## 2.4 Stilizuoti faktai ir agregavimas

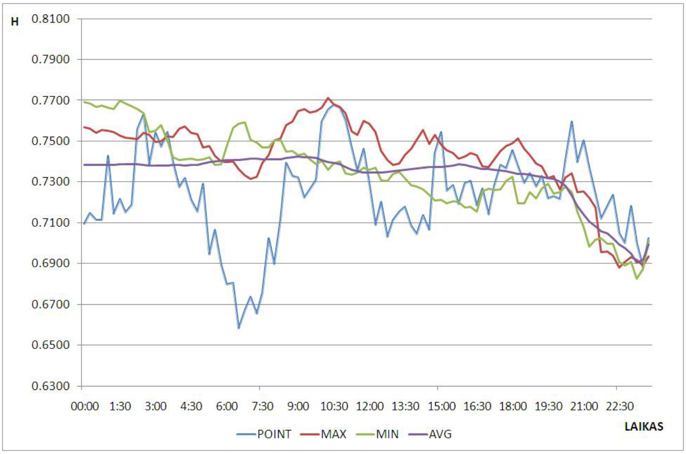
Ketvirtame disertacijos skyriuje pristatytas aukšto dažnio duomenų agregavimo uždavinys, kai nagrinėjami stilizuoti faktai, apžvelgti pagal [6], [7] ir [12]. Bendros finansinių priemonių kainų ir jų grąžų statistinės savybės analizuojamos jau ilgą laiką ir tokie stilizuoti faktai, kaip *grąžų autokoreliacijos nebuvimas*, *nestacionarios kainų eilutės* bei *ilga atmintis* yra puikiai žinomi. Nagrinėjant grąžų kintamumą, pastebėti *kintamumo klasterizacijos*, *sezoniškumo* bei *sverto efekto* ypatumai. Taip pat didelio dėmesio susilaukė naujienų bei kitų išorės intervencijų poveikio finansinių priemonių kainų eilutės elgesiui analizė. Vėliau apibendrintos tokios aukšto dažnio duomenų savybės, kaip *spredo tarp pirkimo ir pardavimo kainos diskretumas*, *trumpo laikotarpio trikampis arbitražas*, o *skalės dėsniai* nagrinėjami ir iki šiol randami nauji. Tačiau analizuojant agreguotus aukšto dažnio duomenis svarbu žinoti, ar agregavimo funkcija turi įtakos stilizuotiems faktas. Mūsų žiniomis šiuo klausimu analizė iki šiol nebuvo atliekama.

Empiriniam tyrimui buvo pasirinkta ilga atmintis, kaip vienas svarbiausių stilizuotų faktų. Pagal [17] laikoma, kad procesas $y_t$ turi ilgą atmintį, jei

$$\sum_{k=n}^{-n} |\rho_k| \to \infty,\ n \to \infty,$$

čia $\rho_k$ - autokoreliacinė funkcija. Pasitelkiant klasikinę R/S statistiką [15], buvo apskaičiuota

Hursto eksponetė, kurios reikšmėms patenkant į intervalą $0,5 < H < 1$ yra laikoma, kad procesas turi ilgą atmintį. Pritaikius keturias 1 skyriuje nagrinėtas agregavimo taisykles - pataškio, didžiausios vertės, mažiausios vertės ir vidutinės vertės, atlikta analizė užsienio valiutų (USD, EUR, GBP, JPY) aukšto dažnio duomenims patvirtino žinomą faktą apie tai, kad absoliučios grąžos turi ilgą atmintį, tačiau kartu parodė, kad Hursto indeksas kinta intervale nuo 0,63 iki 0,81 priklausomai nuo agregavimo taisyklės ir dienos momento, kuriame jis buvo apskaičiuotas. Paveikslėlyje 2 pavaizduota EUR/USD valiutos kurso




2 pav.: EUR/USD Hursto eksponentės priklausomybė nuo agregavimo

Hursto indekso priklausomybė nuo duomenų agregavimo taisyklės. Nagrinėjamu atveju didžiausi skirtumai tarp Hursto eksponentės reikšmių, apskaičiuotų taikant skirtingas agregavimo taisykles, pasirodo pirmoje dienos pusėje. Didžiausia Hursto indekso reikšmė lygi 0,771 pasiekiama 10:15 pritaikius didžiausios vertės agregavimą, o mažiausia reikšmė lygi 0,658 buvo užfiksuota 06:30 pataškio agregavimo atveju. Apskritai Hursto indekso reikšmės labiausiai kinta taikant pataškį agregavimą, nes kitos agregavimo taisyklės duoda tolydesnes kainų funkcijas. Galime pastebėti, kad Hursto eksponentės, apskaičiuotos pagal skirtingas agregavimo taisykles, dienos pabaigoje konverguoja į bendrą reikšmę. Taigi taikant ilgos atminties modelius funkcinėms grąžoms modeliuoti, reikėtų atsižvelgti į tai, kad ilgos atminties parametro reikšmė priklauso nuo agregavimo taisyklės.

# 3 Apibendrinimas

## 3.1 Ginamos išvados

- Apibrėžtas agreguotų aukšto dažnio duomenų vertės pokyčio rizikos modelis ir išnagrinėta šio modelio įvertinių priklausomybė nuo taikomos agregavimo taisyklės, pasitelkiant valiutų kursų grąžas.
- Sudarytas funkcinis $\rho - \mathrm{GARCH}(1,1)$ modelis, priklausantis nuo tam tikrų funkcinių duomenų savybių. Įrodytos stacionaraus sprendinio egzistavimo ir modelio parametrų didžiausio tikėtinumo įvertinių suderinamumo teoremos. Pateikta keletas modelio praktinių pavyzdžių, kai žinoma agreguotų grąžų tankio funkcija.
- Apibrėžtas Hilberto erdvės $\mathrm{GARCH}(1,1)$ modelis su vienmačiu agreguotų grąžų kintamumu. Įrodytos stacionaraus sprendinio egzistavimo, modelio parametrų kvazididžiausio tikėtinumo įvertinių suderinamumo ir asimptotinio normalumo teoremos bei ištirtos modelio liekanų asismptotinės savybės.
- Išanalizuota Hursto eksponentės, kaip ilgos atminties parametro, priklausomybė nuo pasirinktos agregavimo taisyklės, pasitelkiant absoliučias valiutų kursų grąžas.

## 3.2 Rezultatų pristatymas

Disertacijos rezultatai buvo pristatyti šiose konferencijose:

1. Tarptautinėje konferencijoje, surengtoje Vilniuje pavadinimu "10th International Vilnius Conference on Probability and Mathematical Statistics", 2010 m. birželio 28 - liepos 2 dienomis. Pranešimo tema: High Frequency Data Aggregation in Value-at-Risk Models.
2. LI Lietuvos matematikų draugijos konferencijoje, surengtoje Šiauliuose 2010 m. birželio 17-18 dienomis. Pranešimo tema: Long Memory in High Frequency FX Rates: Hurst Exponents Dependence on Data Aggregation.
3. Tarptautinėje konferencijoje, surengtoje Lodzėje, Lenkijoje pavadinimu "9th Annual Conference, Forecasting Financial Markets and Economic Decision-Making (FindEcon)", 2010 m. gegužės 13–15 dienomis. Pranešimo tema: Ultra High Frequency Data Aggregation in Value-at-Risk Models.

4. L Lietuvos matematikų draugijos konferencijoje, surengtoje Vilniuje 2009 m. birželio 18-19 dienomis. Pranešimo tema: Functional Data Analysis of Foreign Exchange Rates.

## 3.3 Publikacijų sąrašas

Disertacijos rezultatai yra publikuoti šiuose leidiniuose:


1. Pranckevičiūtė M. and Račkauskas A. Hilbert space valued GARCH with univariate volatility. *Vilnius University Faculty of Mathematics and Informatics Preprint 2011-06*, (2011).

2. Pranckevičiūtė M. and Račkauskas A. GARCH models depending on data aggregation. *Vilnius University Faculty of Mathematics and Informatics Preprint 2011-05*, (2011).

3. Pranckevičiūtė M. High Frequency Data Aggregation in Value-at-Risk Models: is Daily Data Enough? *FindEcon Monograph Series: Advances in Financial Market Analysis Number 10*, (priimtas publikavimui).

4. Pranckevičiūtė M. High Frequency Data Aggregation in Historical Value-at-Risk Models. *Pinigų studijos*, 2 (2010) 42–52.

5. Pranckevičiūtė M. Long Memory in High Frequency FX Rates: Hurst Exponents Dependence on Data Aggregation. *Liet. Mat. Rink. 51*, (spec. nr.) (2010), 357–361.


## 3.4 Summary


A Value-at-risk (VaR) model, as a tool to estimate the market risk, is considered in the thesis. VaR is a statistical model defined as the maximum future loss due to likely changes in the value of financial asset portfolio during a certain period with a certain probability. A new definition of an aggregated VaR is given and the empirical study about VaR estimates of different currencies position dependence on the data aggregation rule (pointwise, maximum value, minimum value and average value) is provided. In the second chapter of the thesis, a functional $\rho-\mathrm{GARCH}(1,1)$ model is defined and the theorems of the stationary solution existence and the maximum likelihood estimators of model parameters consistency are proved. Additionally, some examples of $\rho-\mathrm{GARCH}(1,1)$ model taking a known density function of aggregated observations are given. Next, a general Hilbert space-valued time

series are considered and a GARCH$(1,1)$ model with univariate volatility is investigated. The theorems of the stationary solution existence, quasi-maximum likelihood estimators of model parameters consistency and asymptotic normality are proved, the analysis of residuals is provided. In the fourth chapter of the thesis, the empirical study about the Hurst index value of absolute returns for different foreign currencies dependence on the data aggregation rule is provided.

## 3.5 Trumpos žinios apie autorę

**Gimimo data ir vieta**

1982 m. kovo 11 d., Vilnius.

**Išsilavinimas**

2000-2010 Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas:

- 2006-2010 Doktorantūros studijos,
- 2006 Magistro diplomas (studijų specializacija - finansų ir draudimo matematika),
- 2004 Bakalauro diplomas (studijų specializacija - finansų ir draudimo matematika).

**Darbo patirtis**

- 2008-09-01 - iki dabar, Finansinės rizikos departamento direktoriaus pavaduotoja, AB bankas Snoras.
- 2006-10-18 - 2008-08-31 Rizikų valdymo departamento analitikė, AB bankas Snoras.
- 2003-06-16 - 2006-10-17 Aktuarijus (nuo 2004-07-01 - vyriausiasis aktuarijus), Coface Austria Kreditversicherung AG Lietuvos filialas (buvusi UAB DĮ Lietuvos eksporto ir importo draudimas).

# Literatūra


[1] Basel Committee of Banking Supervision (2006) International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards. *Available from www.bis.org.*

[2] Beltratti A., Morana C. (1999) Computing value at risk with high frequency data. *Journal of Empirical Finance* **6**, 431–455.

[3] Bollerslev T. (1986) Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity, *Journal of Econometrics* **31**, 307–327.

[4] Brownless C., Gallo G. (2006) Financial econometric analysis at ultra-high frequency: data handling concerns. *Computational Statistics & Data Analysis* **51**, 2232–2245.

[5] Colletaz G., Hurlin C., Topkavi S. (2007) *Irregularly Spaced Intraday Value at Risk Models (ISIVaR) Forecasting and Predictive Abilities*, Working paper, Univercity of Orléans.

[6] Cont. R (2001) Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative finance* **1**, 223–236.

[7] Dacorogna M.M., Gençay R., Müller U.A., Olsen R.B., Pictet O.V. (2001) *An introduction to high frequency finance*, London: Academic Press.

[8] Dione G., Duchesne P., Pacurar M. (2006) *Intraday Value at Risk (IVaR) Using Tick-by-Tick Data with Application to the Toronto Stock Exchange*, Working paper, HEC Montreal.

[9] Engle R.F. (1982) Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation. *Econometrica* **50**, 987–1008.

[10] Engle R.F. (2000) The Econometrics of Utra-High Frequency Data. *Econometrica* **68**, 1–22.

[11] Engle R.F., Manganelli S. (2001) *Value at Risk Models in Finance*, European Central Bank Working Paper No.**75**.

[12] Francq Ch., Zakoian J.M. (2009) *Modéles GARCH: Structure, inférence statistique et applications financiéres*, Collection "Économie et statistiques avancées", Economica.

[13] Giot P. (2005) Market risk models for intraday data. *The European Journal of Finance* **11**, 309–324.

[14] Goodhart C.A.E., Figliuoli L. (1991) Every minute counts in financial markets. *Journal of International Money and Finance* **10**, 23–52.

[15] Hurst H.E (1951) Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers* **116**, 770–799.

[16] Kvedaras V., Račkauskas A. (2010) Regression Models with Variables of Different Frequencies: The Case of a Fixed Frequency Ratio. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* **72**, 600–620 .

[17] McLeod A.I., Hipel K.W. (1978) Preservation of the Rescaled Adjusted Range 1: A Reassessment of the Hurst Phenomenon. *Water Resources Research* **14**, 491–508.

[18] McNeil A.J., Frey R., Embrechts P. (2005) *Basic Concepts in Risk Management* In: P.Embrechts, R. Frey and A.J. McNeil (eds.) "Quantitative Risk Management", Princeton, NJ: Princeton University Press.

[19] Ramsay J.O., Silverman B.W. (1997) *Functional Data Analysis*, New York: Springer.

[20] Straumann D. (2005) *Estimation of Conditionally Heteroscedastic Time Series Models*, Lecture Notes in Statistics, Springer.

[21] Zhou B. (1993) High frequency data and volatility in foreign exchange rates. *Journal of International Money and Finance* **10**, 23–52.