VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS METODIKOS KATEDRA

Mindaugas Liogys

Lukaso skaičiai optimizavimo uždaviniuose

Magistro baigiamasis darbas

Vadovas
Doc. Antanas Apynis

VILNIUS 2006

Turinys

Įvadas

Šiame darbe nagrinėjamas vieno kintamojo unimodalinės funkcijos *f(x)* minimumo radimo intervale $[a;b]$ uždavinys

$$\min\{f(x): x \in [a;b]\}.$$

Nagrinėjamos tos funkcijos, kurios nėra diferencijuojamos arba neįmanoma rasti jų išvestinės nulio taškų. Šiame darbe išnagrinėti Fibonačio ir aukso pjūvio metodai, kuriais remiantis išsprendžiamas unimodalinių funkcijų minimizavimo uždavinys.

Pirmoje darbo dalyje pateikiami Fibonačio ir Lukaso skaičių sekų apibrėžimai ir sąryšiai tarp jų bei pateikiamos pagrindinės savybės.

Antroje darbo dalyje supažindinama su Fibonačio ir aukso pjūvio metodų ypatybėmis.

Šio darbo 2.3 skyriuje pateikiamas metodas, kurio pagrindą sudaro Lukaso skaičiai. Šis metodas pavadintas Lukaso metodu. Lukaso metodas sukonstruotas, siekiant išsiaiškinti kaip Lukaso skaičiai įtakoja unimodalinių funkcijų optimizavimą.

Išvadose pateikiami kiekvieno metodo pranašumai bei trūkumai, lyginant juos tarpusavyje. Pateikiami kiekvieno metodo algoritmai, pritaikyti taikomajai matematikos programai „Maple“ (septintai arba aukštesnei jos versijai).

1. Fibonačio ir Lukaso skaičiai

Prancūzų matematikos profesorius Eduardas Lukasas[1] tyrinėdamas tiesines rekursines sekas pastebėjo, kad skaičių sekos

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots\ldots, \qquad (1.1)$$

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, \ldots\ldots; \qquad (1.2)$$

pasižymi tomis pačiomis savybėmis.

Pirmoji (1.1) seka yra vadinama Fibonačio[2] skaičių seka, o (1.2) – Lukaso skaičių seka (pavadinimas duotas šios sekos tyrinėtojo garbei). Seka (1.2), buvo žinoma dar iki Lukaso, tačiau Lukasas yra žinomas, kaip pirmasis šių skaičių tyrinėtojas.

Suformuluokime šių sekų apibrėžimus.

1 apibrėžimas. Skaičių seka $\{F_n\}$ vadinama Fibonačio skaičių seka, jei

1) $F_1 = 1$,

2) $F_2 = 1$,

3) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 3$, čia F_n – n-tasis Fibonačio sekos skaičius.

2 apibrėžimas. Skaičių seka $\{L_n\}$ vadinama Lukaso skaičių seka, jei

1) $L_1 = 1$,

2) $L_2 = 3$,

3) $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $n \geq 3$, čia L_n – n-tasis Lukaso sekos skaičius.

Prancūzų matematikas Bine[3] Fibonačio skaičiams išvedė bendrąją formulę:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right). \qquad (1.3)$$

Panagrinėkime šios formulės išvedimą.

Bine šią formulę išvedė, remdamasis lygybe

$$\varphi^2 + \varphi = 1,$$

čia $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ vadinama aukso pjūviu.

Pertvarkome $\varphi^2 + \varphi = 1$,

[1] Francois Edouard Anatole Lucas (1842 – 1891)
[2] Leonardo of Pisa (Fibonacci) (1175-1252)
[3] Jacques Philippe Marie Binet (1773-1856)

$$\left(-1\right)\varphi^2+F_1\left(2\varphi+1\right)=1$$

ir padauginame iš $-\varphi^2$. Gauname

$$\left(-1\right)^2\varphi^4+F_2\left(2\varphi+1\right)\varphi^2=1.$$

Dauginame iš $-\varphi^2$, gauname

$$\left(-1\right)^3\varphi^6+F_3\left(2\varphi+1\right)\varphi^3=1.$$

Bendru atveju, gauname

$$\left(-1\right)^n\varphi^{2n}+F_n\left(2\varphi+1\right)\varphi^n=1.$$

Iš pastarosios lygybės išreiškiame F_n:

$$F_n\left(2\varphi+1\right)\varphi^n=1-\left(-1\right)^n\varphi^{2n},$$

$$F_n(2\varphi+1)=\varphi^{-n}-\left(-1\right)^n\varphi^n,$$

$$F_n=\frac{1}{2\varphi+1}\left(\varphi^{-n}-\left(-\varphi\right)^n\right).$$

Taigi gavome, kad $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Lukaso skaičių bendroji formulė išvedama, remiantis analogišku principu.

$$L_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \quad (1.4)$$

Šią formulę 1730 metais išvedė Moivre.

Fibonačio ar Lukaso n-tajį skaičių, galime apskaičiuoti iš pagal apytiksles formules:

$$F_n\approx\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad (1.5)$$

$$L_n\approx\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n. \quad (1.6)$$

Lukasas tyrinėdamas (1.1) ir (1.2) sekas pastebėjo, kad (1.1) sekos skaičiai yra išreiškiami (1.2) sekos skaičiais ir atvirkščiai:

$$F_n=\frac{1}{5}(L_{n-1}+L_{n+1}), \quad (1.7)$$

$$L_n=F_{n-1}+F_{n+1}. \quad (1.8)$$

$$L_n=\frac{F_{2n}}{F_n}. \quad (1.9)$$

Vėlesni tyrinėtojai, atrado daugiau sąryšių:

$$F_{2^n} = L_2 \cdot L_4 \cdot L_8 \cdots L_{2^{n-1}}, \quad (1.10)$$

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n, \quad (1.11)$$

$$F_{m+n} = \frac{1}{2}\left(F_m L_n + L_m F_n\right). \quad (1.12)$$

Pastebėta, kad Lukaso skaičių tapatybės panašios į Fibonačio skaičių tapatybes. Žvilgtelėkime į šias tapatybes.

Pagrindinės Fibonačio skaičių tapatybės:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad (1.13)$$

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_n F_{m+1}. \quad (1.14)$$

Analogiškos (1.13) ir (1.14) tapatybėms, Lukaso skaičių tapatybės:

$$L_n^2 - L_{n-1}L_{n+1} = 5(-1)^n, \quad (1.15)$$

$$L_{m+n} = \frac{1}{2}\left(5F_m F_n + L_m L_n\right). \quad (1.16)$$

Visus čia paminėtus sąryšius galima įrodyti, remiantis matematinės indukcijos principu.

Fibonačio skaičiai pasižymi tuo, kad gretimų sekos narių santykis, didėjant skaičių numeriams sekoje, artėja prie skaičiaus $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

1 savybė. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$ (1.17)

Analogiška savybė galioja ir Lukaso skaičiams.

2 savybė. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{L_n}{L_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$ (1.18)

Įrodymas.

Pasinaudoję (1.4) formule, gauname

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{L_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

2. Unimodalinių funkcijų optimizavimo metodai

Nagrinėkime vieno kintamojo funkcijos *f(x)* minimumo radimo atkarpoje $[a;b]\subset R$ uždavinį

$$\min\{f(x): x\in[a;b]\}, \qquad (2.1)$$

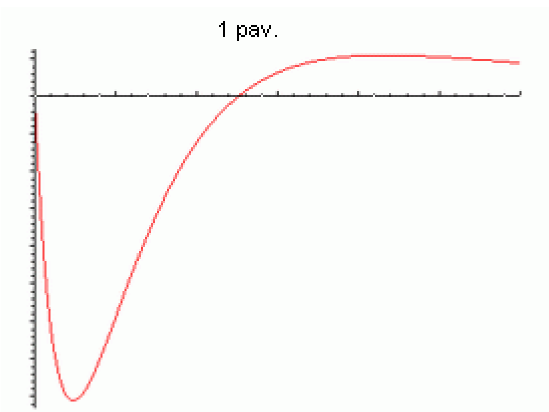
kai tikslo funkcija griežtai unimodalinė. Priminsime, kad funkcija *f(x)* vadinama griežtai unimodaline intervale $[a;b]$, jeigu ji turi vienintelį, šiame intervale, minimumo tašką $\bar{x}$ ir tenkina sąlygas:

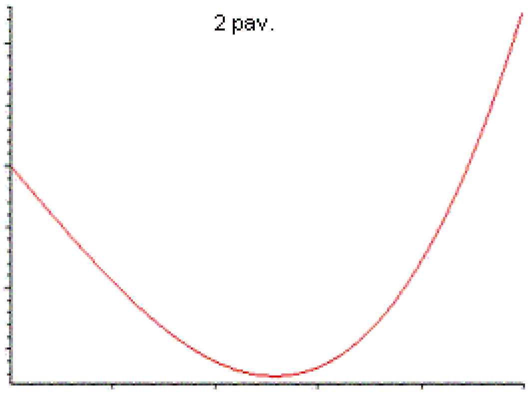
1) $f(x_1)>f(x_2)$, kai $x_1<x_2\le\bar{x}$;

2) $f(x_1)<f(x_2)$, kai $\bar{x}<x_1<x_2$;

čia x_1, x_2 intervalo $[a;b]$ taškai.

Unimodalinės funkcijos pavyzdžiai pateikti 1 ir 2 paveiksluose.





Tarkime, kad $\bar{x}\in[a;b]$ yra (2.1) uždavinio sprendinys. Sprendžiant (2.1) uždavinį, konstruojama įdėtųjų intervalų $[a_k;b_k]$ seka konverguojanti į $\bar{x}$, $\bar{x}\in[a_k;b_k]$. Intervalai $[a_k;b_k]$ konstruojami tol, kol pasiekiamas norimas tikslumas. Pavyzdžiui, norime rasti funkcijos minimumo tašką $\frac{\varepsilon}{2}$ $(\varepsilon>0)$ tikslumu. Tuomet intervalas $[a_k;b_k]$, $k=1,..,n$, turi tenkinti nelygybę $b_k-a_k\le\varepsilon$.

Kad būtų patogiau, pradinį intervalą $[a;b]$ pažymėkime $[a_0;b_0]$. Tarkime, kad c_{k-1} ir d_{k-1} intervalo $[a_{k-1};b_{k-1}]$ vidaus taškai, $f(c_{k-1})$ ir $f(d_{k-1})$ yra funkcijos $f(x)$ reikšmės juose.

Intervalas $[a_k;b_k]$ sudaromas remiantis palyginimo rezultatais:

- jei $f(c_{k-1})\le f(d_{k-1})$, tai $[a_k;b_k]=[a_{k-1};d_{k-1}]$; (2.2)
- jei $f(c_{k-1})>f(d_{k-1})$, tai $[a_k;b_k]=[c_{k-1};b_{k-1}]$. (2.3)

Taškai c_{k-1} ir d_{k-1} parenkami, taikant formules:

$$c_{k-1} = a_{k-1} + (1-\gamma_{k-1})(b_{k-1} - a_{k-1}); \qquad (2.4)$$

$$d_{k-1} = a_{k-1} + \gamma_{k-1}(b_{k-1} - a_{k-1}), \qquad (2.5)$$

čia γ_{k-1} parenkama taip, kad $c_{k-1} < d_{k-1}$, iš to gauname, kad $\frac{1}{2} < \gamma_{k-1} < 1$.

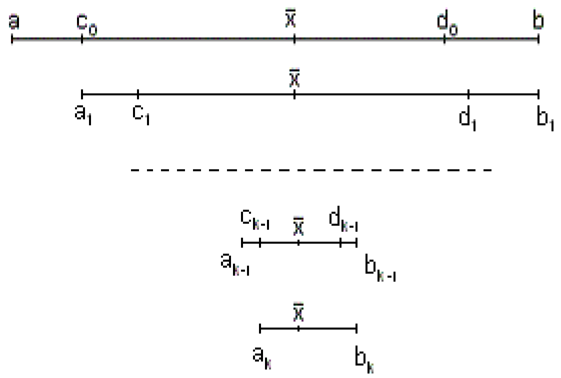
Siekiant, kad minimumo taškas $\bar{x}$ patektų į intervalus $[a_k; b_k]$, taškai c_{k-1}, d_{k-1} turi tenkinti lygybę

$$d_{k-1} - c_{k-1} = b_k - d_k. \qquad (2.6)$$

Panagrinėkime intervalų konstravimo mechanizmą.

Turime intervalą $[a; b]$, kuriame funkcija įgyja minimumą. Pasirenkame taškus c_{k-1} ir d_{k-1}, tuomet pagal funkcijos reikšmių palyginimo rezultatus, formuojame $[a_k; b_k]$ intervalus (3 pav.).

3 pav.



Kai $b_k - a_k \le \varepsilon$, tuomet (2.1) uždavinys išspręstas.

Šių metodų esmė yra ta, kad reikia taip pasirinkti γ_{k-1}, kad reiktų formuoti kuo mažiau intervalų.

Pabandykime apskaičiuoti γ_{k-1} reikšmes.

Intervalo $[a_k; b_k]$ ilgį išreikškime intervalo $[a_{k-1}; b_{k-1}]$ ilgiu. Tarkime, kad $f(c_{k-1}) \le f(d_{k-1})$, tuomet iš (2.2) išplaukia, kad.

$$b_k - a_k = d_{k-1} - a_{k-1} = \gamma_{k-1}(b_{k-1} - a_{k-1}).$$

Jei $f(c_{k-1}) > f(d_{k-1})$, tuomet iš (2.3) išplaukia analogiška lygybė, t.y.

$$b_k - a_k = b_{k-1} - c_{k-1} = b_{k-1} - a_{k-1} - (1-\gamma_{k-1})(b_{k-1} - a_{k-1}) = \gamma_{k-1}(b_{k-1} - a_{k-1}).$$

Taigi,

$$b_k - a_k = \gamma_{k-1}(b_{k-1} - a_{k-1}). \qquad (2.7)$$

Žinome, kad taškai c_{k-1}, d_{k-1}, b_k ir d_k turi tenkinti (2.6) lygybę. Apskaičiuokime kairiąją (2.6) lygybės pusę. Iš (2.4) ir (2.5) gauname, kad

$$d_{k-1} - c_{k-1} = a_{k-1} + \gamma_{k-1}(b_{k-1} - a_{k-1}) - a_{k-1} - (1-\gamma_{k-1})(b_{k-1} - a_{k-1}) =$$

$$= (2\gamma_{k-1} - 1)(b_{k-1} - a_{k-1}). \qquad (2.8)$$

Sutvarkykime dešiniąją (2.6) lygybės pusę. Tarkime, kad $f(c_{k-1}) \le f(d_{k-1})$; tuomet iš (2.2), (2.5) ir (2.7), išplaukia, kad

$$b_k - d_k = d_{k-1} - d_k = a_{k-1} + \gamma_{k-1}(b_{k-1} - a_{k-1}) - a_k - \gamma_k(b_k - a_k) = (1-\gamma_k)(b_k - a_k).$$

Taigi,

$$b_k - d_k = (1-\gamma_k)(b_k - a_k). \qquad (2.9)$$

Tarę, kad $f(c_{k-1}) > f(d_{k-1})$ iš (2.3), (2.4) ir (2.7) lygybių, gausime analogišką rezultatą, t.y. (2.9) lygybę.

Sulyginkime (2.8) ir (2.9) reiškinius:

$$(2\gamma_{k-1} - 1)(b_{k-1} - a_{k-1}) = (1-\gamma_k)(b_k - a_k).$$

Taikydami (2.7) formulę, γ_k išreikškime γ_{k-1}:

$(2\gamma_{k-1} - 1)(b_{k-1} - a_{k-1}) = (1-\gamma_k)\gamma_{k-1}(b_{k-1} - a_{k-1})$, abi puses padalinkime iš $(b_{k-1} - a_{k-1})$;

$$2\gamma_{k-1} - 1 = (1-\gamma_k)\gamma_{k-1};$$

$$\gamma_k = 1 - \frac{2\gamma_{k-1} - 1}{\gamma_{k-1}};$$

$$\gamma_k = \frac{1-\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1}}, \; k = 1,\dots,n. \qquad (2.10)$$

Taigi, gauname, kad $\gamma_k = \dfrac{1-\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1}}$.

Pasirinkime γ_k, $\frac{1}{2} < \gamma_k < 1, k = 1, 2,..,n$, tokias, kad intervalo $[a_n; b_n]$ ilgis būtų mažiausias. Iš (2.7) lygybės išplaukia, kad

$$b_n - a_n = \prod_{j=0}^{n-1} \gamma_j (b_0 - a_0). \qquad (2.11)$$

Iš (2.11) išplaukia, kad intervalo $[a_n; b_n]$ ilgis, bus mažiausias, tuomet, kai

$$\prod_{j=0}^{n-1} \gamma_j = \min_{\gamma_j} \prod_{j=0}^{n-1} \gamma_j. \qquad (2.12)$$

Tolimesnis tyrinėjimas yra skirtas susipažinti su γ_{k-1} reikšmių parinkimu, atitinkamam metodui bei pateikiama tų metodų schema.

2.1. Fibonačio metodas

Panagrinėkime šį metodą.

Esame apskaičiavę, kad

$$\gamma_k = \frac{1-\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1}},\ k = 1,...,n.$$

Apskaičiuokime ir išrašykime keletą γ_k išreikštų γ_0.

Taigi,

$$\gamma_1 = \frac{1-\gamma_0}{\gamma_0},$$

$$\gamma_2 = \frac{1-\gamma_1}{\gamma_1} = \frac{1-\frac{1-\gamma_0}{\gamma_0}}{\frac{1-\gamma_0}{\gamma_0}} = \frac{-1+2\gamma_0}{1-\gamma_0}.$$

Įrašę γ_2 išraišką į $\gamma_3 = \frac{1-\gamma_2}{\gamma_2}$ gauname

$$\gamma_3 = \frac{2-3\gamma_0}{-1+2\gamma_0}.$$

Analogiškai gauname:

$$\gamma_4 = \frac{-3+5\gamma_0}{2-3\gamma_0};$$

$$\gamma_5 = \frac{5-8\gamma_0}{-3+5\gamma_0}.$$

Pastebime, kad apskaičiuotose γ reikšmėse pasirodo Fibonačio sekos skaičiai. Iš indukcinės prielaidos išplaukia, kad

$$\gamma_k = \frac{F_k - F_{k+1}\gamma_0}{-F_{k-1} + F_k\gamma_0}, k = 2, 3, ..., n. \tag{2.13}$$

Turėdami γ_k išraišką (2.13), išspręskime (2.12) uždavinį:

$$\prod_{j=0}^{n-1}\gamma_j = \min_{\gamma_j}\prod_{j=0}^{n-1}\gamma_j.$$

Apskaičiuokime $\prod_{j=0}^{n-1}\gamma_j$.

$$\prod_{j=0}^{n-1}\gamma_j = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{n-1} = \gamma_0\cdot\frac{1-\gamma_0}{\gamma_0}\cdot\frac{-1+2\gamma_0}{1-\gamma_0}\cdot\frac{2-3\gamma_0}{-1+2\gamma_0}\cdots$$

$$\cdots\frac{F_{n-2}-F_{n-1}\gamma_0}{-F_{n-3}+F_{n-2}\gamma_0}\cdot\frac{F_{n-1}-F_n\gamma_0}{-F_{n-2}+F_{n-1}\gamma_0} = (-1)^{n-1}(F_{n-1}-F_n\gamma_0).$$

Taigi,

$$\prod_{j=0}^{n-1}\gamma_j = \begin{cases} -F_{n-1}+F_n\gamma_0, \text{ kai } n \text{ lyginis;} \\ F_{n-1}-F_n\gamma_0, \text{ kai } n \text{ nelyginis.} \end{cases}$$

Pagal indukcinę prielaidą ir (2.13) formulę, gauname, kad

$$\frac{F_{k-1}}{F_k} \le \gamma_{n-k} \le \frac{F_k}{F_{k+1}}, \text{ kai } k \text{ nelyginis.}$$

$$\frac{F_k}{F_{k+1}} \le \gamma_{n-k} \le \frac{F_{k-1}}{F_k}, \text{ kai } k \text{ lyginis.}$$

Kai n – nelyginis ($n \ge 3$), tai

$$\min_{\gamma_0}(F_{n-1}-F_n\gamma_0) \Rightarrow \frac{F_{n-1}}{F_n} \le \gamma_0 \le \frac{F_n}{F_{n+1}} \Rightarrow \begin{cases} F_{n-1}-F_{n-1}, \text{ kai } \gamma_0 = \dfrac{F_{n-1}}{F_n}; \\ \dfrac{F_{n-1}\cdot F_{n+1}-F_n^2}{F_{n+1}}, \text{ kai } \gamma_0 = \dfrac{F_n}{F_{n+1}}. \end{cases}$$

Priminsime, kad $F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2 = (-1)^n$. Remiantis šia lygybe gauname, kad

$$\gamma_0 = \frac{F_n}{F_{n+1}}.$$

Analogiškai apskaičiuojama, kai n – lyginis ($n \ge 2$),

$$\min_{\gamma_0}(-F_{n-1}+F_n\gamma_0) \Rightarrow \frac{F_n}{F_{n+1}} \le \gamma_0 \le \frac{F_{n-1}}{F_n} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-F_{n-1}\cdot F_{n+1}+F_n^2}{F_{n+1}}, \text{ kai } \gamma_0 = \dfrac{F_n}{F_{n+1}}; \\ -F_{n-1}+F_{n-1}, \text{ kai } \gamma_0 = \dfrac{F_{n-1}}{F_n}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-1}{F_{n+1}}, \text{ kai } \gamma_0 = \dfrac{F_n}{F_{n+1}}; \\ 0, \text{ kai } \gamma_0 = \dfrac{F_{n-1}}{F_n}. \end{cases} \Rightarrow \gamma_0 = \frac{F_n}{F_{n+1}}.$$

Taigi, apskaičiavome, kad $\gamma_0 = \dfrac{F_n}{F_{n+1}}$, iš indukcinės prielaidos išplaukia

$$\gamma_{k-1} = \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}}, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.14}$$

Atkreipkime dėmesį, kad γ_{k-1} turi tenkinti $\frac{1}{2} < \gamma_{k-1} < 1$ sąlygą, todėl paskutinė γ reikšmė, kuri šią sąlygą tenkina, yra $\gamma_{n-3} = \frac{F_3}{F_4} = \frac{2}{3}$, $k = n-2$, nes $\gamma_{n-2} = \frac{F_2}{F_3} = \frac{1}{2}$ nepatenka į $\left(\frac{1}{2};1\right)$ intervalą.

Taigi,

$$\gamma_{k-1} = \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}}, k = 1, 2, ..., n-2 \ .$$

Taikant Fibonačio metodą reikės sukonstruoti $n-2$ įdėtųjų intervalų $[a_{n-2}; b_{n-2}]$. Ir paskutiniojo intervalo ilgis apskaičiuojamas remiantis šia formule:

$$b_{n-2} - a_{n-2} = \prod_{j=0}^{n-3} \gamma_j (b_0 - a_0), \qquad (2.15)$$

čia $\prod_{j=0}^{n-3} \gamma_j = \frac{F_n}{F_{n+1}} \cdot \frac{F_{n-1}}{F_n} \cdot \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} \cdots \frac{F_4}{F_5} \cdot \frac{F_3}{F_4} = \frac{F_3}{F_{n+1}} = \frac{2}{F_{n+1}}$.

Taigi, gauname

$$b_{n-2} - a_{n-2} = \frac{2}{F_{n+1}} (b_0 - a_0).$$

Apskaičiavome, kad ieškant (1.1) uždavinio sprendinio ε tikslumu, pradinio intervalo ilgis sumažės $\frac{F_{n+1}}{2}$ kartų.

Dabar, kai jau žinome γ_{k-1}, panagrinėkime taškus c_{k-1} ir d_{k-1}:

$$c_{k-1} = a_{k-1} + \left(1 - \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}}\right)(b_{k-1} - a_{k-1}),$$

$$d_{k-1} = a_{k-1} + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}} (b_{k-1} - a_{k-1}).$$

Remdamiesi Fibonačio skaičių sekos apibrėžimu c_{k-1} ir d_{k-1} galime perrašyti taip:

$$c_{k-1} = a_{k-1} + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+2}} (b_{k-1} - a_{k-1}),$$

$$d_{k-1} = a_{k-1} + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}} (b_{k-1} - a_{k-1}).$$

Jei $f(c_{k-1}) \le f(d_{k-1})$, tai pagal (2.2), $[a_k; b_k] = [a_{k-1}; d_{k-1}]$ ir $d_k = c_{k-1}$.

Jei $f(c_{k-1}) > f(d_{k-1})$, tai pagal (2.3) $[a_k; b_k] = [c_{k-1}; b_{k-1}]$ ir $c_k = d_{k-1}$.

Sukonstruokime Fibonačio metodo schemą:

1. Apskaičiuokime, kiek reikės atlikti iteracijos žingsnių, norint išspręsti (1.1) uždavinį ε tikslumu. Išsprendžiame nelygybę n atžvilgiu:

$$F_n < \frac{2(b_0 - a_0)}{\varepsilon} \le F_{n+1}.$$

2. Apskaičiuokime taškus c_{k-1} ir d_{k-1} $(1 \le k \le n-2)$:

$$c_{k-1} = a_{k-1} + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+2}}(b_{k-1} - a_{k-1}),$$

$$d_{k-1} = a_{k-1} + \frac{F_{n-k+1}}{F_{n-k+2}}(b_{k-1} - a_{k-1}).$$

3. Apskaičiuokime funkcijos reikšmes taškuose c_{k-1} ir d_{k-1}.

Jei $f(c_{k-1}) \le f(d_{k-1})$, tai $[a_k; b_k] = [a_{k-1}; d_{k-1}]$,

$$c_k = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k);$$

$$d_k = c_{k-1}.$$

Jei $f(c_{k-1}) > f(d_{k-1})$, tai $[a_k; b_k] = [c_{k-1}; b_{k-1}]$,

$$c_k = d_{k-1};$$

$$d_k = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k).$$

Sprendimas baigiamas, kai $k > n-2$.

Panagrinėkime pavyzdį.

1.1 pavyzdys. Taikydami Fibonačio metodą, raskime funkcijos $f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{(1+x)^2}$ minimumo tašką intervale $[0;1]$, tikslumu $\varepsilon = 0{,}1$.

Sprendimas. Išsprendžiame nelygybę $F_n < \frac{2}{0{,}1} \le F_{n+1}$.

$F_n < 20 \le F_{n+1} \Rightarrow n = 7,$ nes $F_7 = 13, F_8 = 21$.

Apskaičiuojame taškus c_{k-1}, d_{k-1} $(k = 1, 2, ..., 5)$ ir funkcijos reikšmes juose:

$$c_0 = a_0 + \frac{F_6}{F_8}(b_0 - a_0) = \frac{8}{21},$$

$$d_0 = a_0 + \frac{F_7}{F_8}(b_0 - a_0) = \frac{13}{21},$$

$f(c_0) \approx$ -0,158834, $f(d_0) \approx$ -0,156969.

Kadangi $f(c_0) < f(d_0)$, tai $[a_1; b_1] = [a_0; d_0] = \left[0; \frac{13}{21}\right]$,

$$c_1 = a_1 + \frac{F_5}{F_7}(b_1 - a_1) = \frac{5}{13} \cdot \frac{13}{21} = \frac{5}{21},$$

$$d_1 = c_0 = \frac{8}{21}.$$

Palyginame funkcijos reikšmes c_1 ir d_1:

$f(c_1) \approx$ -0,135760, $f(d_1) \approx$ -0,158834.

Kadangi $f(c_1) > f(d_1)$, tai $[a_2; b_2] = [c_1; b_1] = \left[\frac{5}{21}; \frac{13}{21}\right]$,

$$c_2 = d_1 = \frac{8}{21},$$

$$d_2 = a_2 + \frac{F_5}{F_6}(b_2 - a_2) = \frac{5}{21} + \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{21} = \frac{10}{21}.$$

Palyginame funkcijos reikšmes c_2 ir d_2:

$f(c_2) \approx$ -0,158834, $f(d_2) \approx$ -0,162248.

Kadangi $f(c_2) > f(d_2)$, tai $[a_3; b_3] = [c_2; b_2] = \left[\frac{8}{21}; \frac{13}{21}\right]$,

$$c_3 = d_2 = \frac{10}{21},$$

$$d_3 = a_3 + \frac{F_4}{F_5}(b_3 - a_3) = \frac{8}{21} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{21} = \frac{11}{21}.$$

Palyginame funkcijos reikšmes c_3 ir d_3:

$f(c_3) \approx$ -0,162248, $f(d_3) \approx$ -0,161595.

Kadangi $f(c_3) < f(d_3)$, tai $[a_4; b_4] = [a_3; d_3] = \left[\frac{8}{21}; \frac{11}{21}\right]$,

$$c_4 = a_4 + \frac{F_2}{F_4}(b_4 - a_4) = \frac{8}{21} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{21} = \frac{9}{21},$$

$$d_4 = c_3 = \frac{10}{21}.$$

Palyginame funkcijos reikšmes c_4 ir d_4:

$f(c_4) = -0{,}161439$, $f(d_4) = -0{,}162248$.

Kadangi $f(c_4) > f(d_4)$, tai $[a_5; b_5] = [c_4; b_4] = \left[\frac{9}{21}; \frac{11}{21}\right]$.

Taigi funkcijos $f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{(1+x)^2}$ minimumo taškas $\bar{x} \in \left[\frac{9}{21}; \frac{11}{21}\right]$.

Pažvelkime į rezultatus, gautus skaičiuojant, kompiuterine programa „Maple” (1 priedas, Fibonačio metodo programa), padidinus tikslumą iki $\varepsilon = 0{,}0001$.

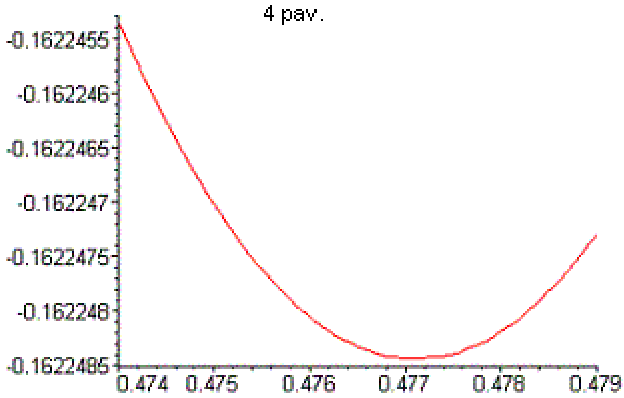
```
Funkcijos minimumo ieškoma intervale [0.00, 1.00], pasirinktas tikslumas yra
.0001000000.
```

k	c	d	f(c)	f(d)	Intervalas
1	.38196601	.61803399	-.15891145	-.15703707	[0.00000000, .61803399]
2	.23606798	.38196601	-.13521849	-.15891145	[.23606798, .61803399]
3	.38196601	.47213595	-.15891145	-.16224049	[.38196601, .61803399]
4	.47213595	.52786405	-.16224049	-.16148217	[.38196601, .52786405]
5	.43769411	.47213595	-.16172193	-.16224049	[.43769411, .52786405]
6	.47213595	.49342220	-.16224049	-.16216526	[.43769411, .49342220]
7	.45898035	.47213595	-.16214053	-.16224049	[.45898035, .49342220]
8	.47213595	.48026660	-.16224049	-.16224526	[.47213595, .49342220]
9	.48026660	.48529155	-.16224526	-.16222726	[.47213595, .48529155]
10	.47716090	.48026660	-.16224844	-.16224526	[.47213595, .48026660]
11	.47524165	.47716090	-.16224733	-.16224844	[.47524165, .48026660]
12	.47716090	.47834735	-.16224844	-.16224795	[.47524165, .47834735]
13	.47642810	.47716090	-.16224830	-.16224844	[.47642810, .47834735]
14	.47716090	.47761454	-.16224844	-.16224836	[.47642810, .47761454]
15	.47688174	.47716090	-.16224843	-.16224844	[.47688174, .47761454]
16	.47716090	.47733538	-.16224844	-.16224843	[.47688174, .47733538]
17	.47705622	.47716090	-.16224844	-.16224844	[.47688174, .47716090]
18	.47698643	.47705622	-.16224844	-.16224844	[.47698643, .47716090]
19	.47705622	.47709111	-.16224844	-.16224844	[.47705622, .47716090]
20	.47709111	.47712601	-.16224844	-.16224844	[.47705622, .47712601]

```
Paskutiniojo intervalo ilgis yra = .0000697910
```

Iš šios funkcijos grafiko intervale $[0{,}474; 0{,}479]$, pastebime, kad funkcijos minimumas yra skaičiaus 0,477 aplinkoje.

4 pav.



2.2. Aukso pjūvio metodas

Šis metodas ypatingas tuo, kad γ_{k-1} yra pastovus dydis ir iš anksto nebūtina žinoti atliekamų iteracinių skaičiavimų skaičiaus. Skaičiuojama tol kol pasiekiamas norimas tikslumas ε $(\varepsilon > 0)$.

Esame apskaičiavę, kad

$$\gamma_k = \frac{1-\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1}}. \tag{2.10}$$

Pažymėkime, $\gamma_{k-1} = \gamma_k = \gamma$ ir įstatykime į (2.10) lygybę

$$\gamma = \frac{1-\gamma}{\gamma}.$$

Šios lygties sprendiniai yra

$$\gamma_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2},$$

$$\gamma_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Kadangi pirmasis (γ_1) sprendinys netenkina $\frac{1}{2} < \gamma_{k-1} < 1$ sąlygos, o γ_2 – tenkina, todėl šiame metode, taikoma γ_2 reikšmė.

Taigi $\gamma = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Sukonstruokime aukso pjūvio metodo schemą, kai iš anksto nėra žinomas iteracinių skaičiavimų skaičius (1 schema):

1. Apskaičiuokime taškus c_{k-1} ir d_{k-1}:

   $$c_{k-1} = a_{k-1} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)(b_{k-1} - a_{k-1});$$

   $$d_{k-1} = a_{k-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}),\ k \in N.$$

2. Apskaičiuojame funkcijos reikšmes taškuose c_{k-1} ir d_{k-1}:

   Jei $f(c_{k-1}) \le f(d_{k-1})$, tai $[a_k; b_k] = [a_{k-1}; d_{k-1}]$.

   Jei $f(c_{k-1}) > f(d_{k-1})$, tai $[a_k; b_k] = [c_{k-1}; b_{k-1}]$.

3. Patikriname ar intervalo $[a_k; b_k]$ ilgis nemažesnis už pasirinktą tikslumą ε. Jei mažesnis sprendimą baigiame.

Išsiaiškinkime kiek kartų sumažėja pradinio intervalo $[a_0; b_0]$ ilgis, kai pasiekiamas tikslumas ε. Kadangi γ yra pastovi, tai taikydami šį metodą turėsime sukonstruoti n įdėtųjų intervalų. Taigi,

$$b_n - a_n = \prod_{j=0}^{n-1} \gamma_j (b_0 - a_0). \tag{2.11}$$

Apskaičiuokime sandaugą

$$\prod_{j=0}^{n-1} \gamma_j = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n .$$

Taigi,

$$b_n - a_n = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n (b_0 - a_0).$$

Apskaičiavome, kad ieškant (1.1) uždavinio sprendinio ε tikslumu, pradinio intervalo ilgis sumažės $\left(\frac{2}{\sqrt{5} - 1} \right)^n$ kartų. Norint sužinoti iteracijų skaičių, reikia išspręsti nelygybę n atžvilgiu:

$$\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^{n-1} < \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \le \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n .$$

Šios nelygybės sprendinys yra

$$n = \left[\frac{\ln \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}}{\ln \frac{2}{\sqrt{5} - 1}} \right] + 1, \tag{2.16}$$

čia $[x]$ yra skaičiaus x sveikoji dalis.

Sukonstruokime aukso pjūvio metodo schemą, kai žinomas iteracinių skaičiavimų skaičius (2 schema):

1. Apskaičiuokime, pagal formulę:

   $$n = \left[\frac{\ln \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}}{\ln \frac{2}{\sqrt{5} - 1}} \right] + 1,$$

   kiek reikės atlikti iteracijos žingsnių, norint išspręsti (1.1) uždavinį ε tikslumu.

2. Apskaičiuokime taškus c_{k-1} ir d_{k-1} $(1 \le k \le n)$:

$$c_{k-1} = a_{k-1} + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)(b_{k-1} - a_{k-1}),$$

$$d_{k-1} = a_{k-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}).$$

3. Apskaičiuojame funkcijos reikšmes taškuose c_{k-1} ir d_{k-1}.

   Jei $f(c_{k-1}) \le f(d_{k-1})$, tai $[a_k; b_k] = [a_{k-1}; d_{k-1}]$.

   Jei $f(c_{k-1}) > f(d_{k-1})$, tai $[a_k; b_k] = [c_{k-1}; b_{k-1}]$.

Sprendimas baigiamas, kai $k > n$.

Panagrinėkime pavyzdį.

2.1 pavyzdys. Taikydami aukso pjūvio metodą**,** raskime funkcijos $f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{(1+x)^2}$ minimumo tašką intervale $[0;1]$, tikslumu $\varepsilon = 0{,}1$.

Sprendimas. Taikykime 1 schemą. Apskaičiuokime taškus c_0, d_0 ir funkcijos reikšmes juose:

$$c_0 = a_0 + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)(b_0 - a_0) \approx 0{,}382;$$

$$d_0 = a_0 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_0 - a_0) \approx 0{,}618;$$

$$f(c_0) \approx \text{-}0{,}1589, \quad f(d_0) \approx \text{-}0{,}1570.$$

Kadangi $f(c_0) < f(d_0)$, tai $[a_1; b_1] = [a_0; d_0] = [0; 0{,}618]$. Pastebime, kad intervalo ilgis yra didesnis už $\varepsilon = 0{,}1$, dėl to sprendimą tęskime toliau.

Apskaičiuokime taškus c_1, d_1 ir funkcijos reikšmes juose:

$$c_1 = a_1 + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)(b_1 - a_1) \approx 0{,}236;$$

$$d_1 = a_1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_1 - a_1) \approx 0{,}382;$$

$$f(c_1) \approx \text{-}0{,}1352, \quad f(d_1) \approx \text{-}0{,}1589.$$

Kadangi $f(c_1) > f(d_1)$, tai $[a_2; b_2] = [c_1; b_1] = [0{,}236; 0{,}618]$. Gautojo intervalo ilgis yra didesnis už $\varepsilon = 0{,}1$, sprendimą tęskime toliau.

Apskaičiuokime taškus c_2, d_2 ir funkcijos reikšmes juose:

$$c_2 = a_2 + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)(b_2 - a_2) \approx 0{,}382\,;$$

$$d_2 = a_2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_2 - a_2) \approx 0{,}472\,;$$

$f(c_2) \approx$ -0,1589 , $f(d_2) \approx$ -0,1622 .

Kadangi $f(c_2) > f(d_2)$, tai $[a_3; b_3] = [c_2; b_2] = [0{,}382; 0{,}618]$. Gautojo intervalo ilgis yra didesnis už $\varepsilon = 0{,}1$, sprendimą tęskime toliau.

Apskaičiuokime taškus c_3, d_3 ir funkcijos reikšmes juose:

$$c_3 = a_3 + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)(b_3 - a_3) \approx 0{,}472\,;$$

$$d_3 = a_3 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_3 - a_3) \approx 0{,}528\,;$$

$f(c_3) \approx$ -0,1622 , $f(d_3) \approx$ -0,1615 .

Kadangi $f(c_3) < f(d_3)$, tai $[a_4; b_4] = [a_3; d_3] = [0{,}382; 0{,}528]$. Gautojo intervalo ilgis yra didesnis už $\varepsilon = 0{,}1$ – sprendimą tęskime toliau.

Apskaičiuokime taškus c_4, d_4 ir funkcijos reikšmes juose:

$$c_4 = a_4 + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)(b_4 - a_4) \approx 0{,}438\,;$$

$$d_4 = a_4 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_4 - a_4) \approx 0{,}472\,.$$

$f(c_4) \approx$ -0,1617 , $f(d_4) \approx$ -0,1622

Kadangi $f(c_4) > f(d_4)$, tai $[a_5; b_5] = [c_4; b_4] = [0{,}438; 0{,}528]$. Apskaičiuotojo intervalo ilgis yra mažesnis už $\varepsilon = 0{,}1$. Sprendimas baigiamas.

Taigi funkcijos $f(x) = -e^{-x} + \dfrac{1}{(1+x)^2}$ minimumo taškas $\bar{x} \in [0{,}438; 0{,}528]$.

Pažvelkime į rezultatus, gautus skaičiuojant, kompiuterine programa „Maple” (2 priedas, Aukso pjūvio metodo programa), padidinus tikslumą iki $\varepsilon = 0{,}0001$.

Funkcijos minimumo ieškoma intervale [0.00, 1.00], pasirinktas tikslumas yra .0001000000.

k	c	d	f(c)	f(d)	Intervalas
1	.38196601	.61803399	-.15891145	-.15703707	[0.0000000, .61803399]
2	.23606798	.38196601	-.13521849	-.15891145	[.23606798, .61803399]
3	.38200000	.47210503	-.13522065	-.15891401	[.23607600, .61800000]
4	.47210503	.52784800	-.15891401	-.16224039	[.38200000, .61800000]
5	.43771394	.47210503	-.16224039	-.16148264	[.38200000, .52784800]
6	.47210503	.49341679	-.16172248	-.16224039	[.43771394, .52784800]
7	.45899243	.47210503	-.16224039	-.16216531	[.43771394, .49341679]
8	.47210503	.48026668	-.16214068	-.16224039	[.45899243, .49341679]
9	.48026668	.48527570	-.16224039	-.16224526	[.47210503, .49341679]
10	.47713623	.48026668	-.16224526	-.16222734	[.47210503, .48527570]
11	.47522278	.47713623	-.16224844	-.16224526	[.47210503, .48026668]
12	.47713623	.47833991	-.16224731	-.16224844	[.47522278, .48026668]
13	.47641353	.47713623	-.16224844	-.16224796	[.47522278, .47833991]
14	.47713623	.47760403	-.16224829	-.16224844	[.47641353, .47833991]
15	.47686830	.47713623	-.16224844	-.16224836	[.47641353, .47760403]
16	.47713623	.47732298	-.16224843	-.16224844	[.47686830, .47760403]
17	.47704199	.47713623	-.16224844	-.16224843	[.47686830, .47732298]
18	.47713623	.47721564	-.16224844	-.16224844	[.47704199, .47732298]
19	.47710832	.47713623	-.16224844	-.16224844	[.47704199, .47721564]
20	.47707799	.47710832	-.16224844	-.16224844	[.47704199, .47713623]

Paskutiniojo intervalo ilgis yra .00009424.

Kaip matome, gauti rezultatai skiriasi nežymiai nuo rezultatų gautų, sprendžiant Fibonačio metodu.

2.3. Lukaso metodas

Lukaso metodas yra sukonstruotas Fibonačio metodo pagrindu, atsižvelgiant į Fibonačio skaičių santykio ir Lukaso skaičių santykio savybių panašumą.

Darbo pradžioje įsitikinome, kad Fibonačio ir Lukaso gretimų skaičių santykis lygsta skaičiui $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, t.y.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \tag{1.13}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{L_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \tag{1.14}$$

Nagrinėdami Fibonačio metodą, apskaičiavome, kad

$$\gamma_0=\frac{F_n}{F_{n+1}}.$$

Pastebėkime, kad γ_0 yra dviejų gretimų Fibonačio skaičių santykis. Atsižvelgdami į šią lygybę, γ_0 apibrėžkime kaip dviejų gretimų Lukaso skaičių santykį:

$$\gamma_0=\frac{L_n}{L_{n+1}}.$$

Iš indukcinės prielaidos ir (2.10) formulės, gauname

$$\gamma_{k-1}=\frac{L_{n-k+1}}{L_{n-k+2}},\ k=1,2,3,...,n.$$

Patikriname ar su visomis $k=1,...,n$ reikšmėmis $\gamma_{k-1}\in\left(\frac{1}{2};1\right)$. Pastebime, kad, kai $k=n$, $\gamma_{k-1}\notin\left(\frac{1}{2};1\right)$, nes $\gamma_{n-1}=\frac{L_1}{L_2}=\frac{1}{3}$. Taigi,

$$\gamma_{k-1}=\frac{L_{n-k+1}}{L_{n-k+2}},\ k=1,2,3,...,n-1.$$

Taikant Lukaso metodą reikės sukonstruoti n-1 įdėtąjį intervalą. Intervalo $[a_{n-1};b_{n-1}]$ ilgį išreikškime intervalo $[a_0;b_0]$ ilgiu:

$$b_{n-1}-a_{n-1}=\prod_{j=0}^{n-2}\gamma_j\cdot(b_0-a_0)=\gamma_0\gamma_1\cdots\gamma_{n-3}\gamma_{n-2}\cdot(b_0-a_0)=$$

$$=\frac{L_n}{L_{n+1}}\cdot\frac{L_{n-1}}{L_n}\cdot\frac{L_{n-2}}{L_{n-1}}\cdots\frac{L_4}{L_5}\cdot\frac{L_3}{L_4}\cdot\frac{L_2}{L_3}\cdot(b_0-a_0)=\frac{L_2}{L_{n+1}}\cdot(b_0-a_0)=\frac{3}{L_{n+1}}(b_0-a_0).$$

Taigi, apskaičiavome, kad

$$b_{n-1} - a_{n-1} = \frac{3 \cdot (b_0 - a_0)}{L_{n+1}}.$$

Taikant Lukaso metodą pradinis intervalas sumažėja $\frac{L_{n+1}}{3}$ kartų.

Sudarykime Lukaso metodo schemą.

1. Apskaičiuokime, kiek reikės atlikti iteracijos žingsnių, norint išspręsti (1.1) uždavinį ε tikslumu. Išsprendžiame nelygybę n atžvilgiu:
$$L_n < \frac{3 \cdot (b_0 - a_0)}{\varepsilon} \le L_{n+1}.$$
2. Apskaičiuojame taškus c_{k-1} ir d_{k-1}, $(1 \le k \le n-1)$:
$$c_{k-1} = a_{k-1} + \left(1 - \frac{L_{n-k+1}}{L_{n-k+2}}\right)(b_{k-1} - a_{k-1}),$$
$$d_{k-1} = a_{k-1} + \frac{L_{n-k+1}}{L_{n-k+2}}(b_{k-1} - a_{k-1}).$$
3. Apskaičiuojame funkcijos reikšmes taškuose c_{k-1} ir d_{k-1}:

   Jei $f(c_{k-1}) \le f(d_{k-1})$, tai $[a_k; b_k] = [a_{k-1}; d_{k-1}]$.

   Jei $f(c_{k-1}) > f(d_{k-1})$, tai $[a_k; b_k] = [c_{k-1}; b_{k-1}]$.

Sprendimas baigiamas, kai $k > n-1$.

Panagrinėkime pavyzdį.

3.1 pavyzdys. Taikydami Lukaso metodą, **r**askime funkcijos $f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{(1+x)^2}$ minimumo tašką intervale $[0;1]$, tikslumu $\varepsilon = 0{,}1$.

Sprendimas. Išsprendžiame nelygybę $L_n < \frac{3}{0{,}1} \le L_{n+1}$.

$L_n < 30 \le L_{n+1} \Rightarrow n = 7$, nes $L_7 = 29, L_8 = 47$.

Apskaičiuokime taškus c_0, d_0 ir funkcijos reikšmes juose:

$$c_0 = a_0 + \left(1 - \frac{L_7}{L_8}\right)(b_0 - a_0) = 1 - \frac{29}{47} = \frac{18}{47};$$

$$d_0 = a_0 + \frac{L_7}{L_8}(b_0 - a_0) = \frac{29}{47};$$

$f(c_0) \approx$ -0,1589, $f(d_0) \approx$ -0,1571.

Kadangi $f(c_0) < f(d_0)$, tai $[a_1; b_1] = [a_0; d_0] = \left[0; \frac{29}{47}\right]$.

Apskaičiuokime taškus c_1, d_1 ir funkcijos reikšmes juose:

$$c_1 = a_1 + \left(1 - \frac{L_6}{L_7}\right)(b_1 - a_1) = \frac{11}{29} \cdot \frac{29}{47} = \frac{11}{47};$$

$$d_1 = a_1 + \frac{L_6}{L_7}(b_1 - a_1) = \frac{18}{29} \cdot \frac{29}{47} = \frac{18}{47};$$

$f(c_1) \approx$ -0,1346, $f(d_1) \approx$ -0,1589.

Kadangi $f(c_1) > f(d_1)$, tai $[a_2; b_2] = [c_1; b_1] = \left[\frac{11}{47}; \frac{29}{47}\right]$.

Apskaičiuokime taškus c_2, d_2 ir funkcijos reikšmes juose:

$$c_2 = a_2 + \left(1 - \frac{L_5}{L_6}\right)(b_2 - a_2) = \frac{11}{47} + \left(1 - \frac{11}{18}\right) \cdot \frac{18}{47} = \frac{18}{47};$$

$$d_2 = a_2 + \frac{L_5}{L_6}(b_2 - a_2) = \frac{11}{47} + \frac{11}{18} \cdot \frac{18}{47} = \frac{22}{47};$$

$f(c_2) \approx$ -0,1589, $f(d_2) \approx$ -0,1622.

Kadangi $f(c_2) > f(d_2)$, tai $[a_3; b_3] = [c_2; b_2] = \left[\frac{18}{47}; \frac{29}{47}\right]$.

Apskaičiuokime taškus c_3, d_3 ir funkcijos reikšmes juose:

$$c_3 = a_3 + \left(1 - \frac{L_4}{L_5}\right)(b_3 - a_3) = \frac{18}{47} + \left(1 - \frac{7}{11}\right) \cdot \frac{11}{47} = \frac{22}{47};$$

$$d_3 = a_3 + \frac{L_4}{L_5}(b_3 - a_3) = \frac{18}{47} + \frac{7}{11} \cdot \frac{11}{47} = \frac{25}{47};$$

$f(c_3) \approx$ -0,1622, $f(d_3) \approx$ -0,1613.

Kadangi $f(c_3) < f(d_3)$, tai $[a_4; b_4] = [a_3; d_3] = \left[\frac{18}{47}; \frac{25}{47}\right]$.

Apskaičiuokime taškus c_4, d_4 ir funkcijos reikšmes juose:

$$c_4 = a_4 + \left(1 - \frac{L_3}{L_4}\right)(b_4 - a_4) = \frac{18}{47} + \left(1 - \frac{4}{7}\right) \cdot \frac{7}{47} = \frac{21}{47};$$

$$d_4 = a_4 + \frac{L_3}{L_4}(b_4 - a_4) = \frac{18}{47} + \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{47} = \frac{22}{47};$$

$f(c_4) \approx$ -0,1619, $f(d_4) \approx$ -0,1622.

Kadangi $f(c_4) > f(d_4)$, tai $[a_5; b_5] = [c_4; b_4] = \left[\frac{21}{47}; \frac{25}{47}\right]$.

Apskaičiuokime taškus c_5, d_5 ir funkcijos reikšmes juose:

$$c_5 = a_5 + \left(1 - \frac{L_2}{L_3}\right)(b_5 - a_5) = \frac{21}{47} + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{4}{47} = \frac{22}{47};$$

$$d_5 = a_5 + \frac{L_2}{L_3}(b_5 - a_5) = \frac{21}{47} + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{47} = \frac{24}{47};$$

$f(c_5) \approx$ -0,1622, $f(d_5) \approx$ -0,1619.

Kadangi $f(c_5) < f(d_5)$, tai $[a_6; b_6] = [a_5; d_5] = \left[\frac{21}{47}; \frac{24}{47}\right]$.

Taigi funkcijos $f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{(1+x)^2}$ minimumo taškas $\bar{x} \in \left[\frac{21}{47}; \frac{24}{47}\right]$..

Pažvelkime į rezultatus, gautus skaičiuojant, kompiuterine programa „Maple” (3 priedas, Lukaso metodo programa), padidinus tikslumą iki $\varepsilon = 0{,}0001$.

```
Funkcijos minimumo ieškoma intervale [0.00, 1.00], pasirinktas tikslumas yra
.0001000000.
```

k	c	d	f(c)	f(d)	Intervalas
1	.38196601	.61803398	-.15891145	-.15703707	[0.0000000, .61803398]
2	.23606797	.38196601	-.13521849	-.15891145	[.23606797, .61803398]
3	.38196601	.47213594	-.15891145	-.16224048	[.38196601, .61803398]
4	.47213594	.52786405	-.16224048	-.16148217	[.38196601, .52786405]
5	.43769411	.47213594	-.16172193	-.16224048	[.43769411, .52786405]
6	.47213594	.49342221	-.16224048	-.16216525	[.43769411, .49342221]
7	.45898038	.47213594	-.16214053	-.16224048	[.45898038, .49342221]
8	.47213594	.48026664	-.16224048	-.16224525	[.47213594, .49342221]
9	.48026664	.48529151	-.16224525	-.16222725	[.47213594, .48529151]
10	.47716082	.48026664	-.16224844	-.16224525	[.47213594, .48026664]
11	.47524177	.47716082	-.16224732	-.16224844	[.47524177, .48026664]
12	.47716082	.47834759	-.16224844	-.16224795	[.47524177, .47834759]
13	.47642855	.47716082	-.16224829	-.16224844	[.47642855, .47834759]
14	.47716082	.47761533	-.16224844	-.16224835	[.47642855, .47761533]
15	.47688306	.47716082	-.16224842	-.16224844	[.47688306, .47761533]
16	.47716082	.47733757	-.16224844	-.16224842	[.47688306, .47733757]
17	.47705981	.47716082	-.16224844	-.16224844	[.47688306, .47716082]
18	.47698406	.47705981	-.16224843	-.16224844	[.47698406, .47716082]
19	.47705981	.47708506	-.16224844	-.16224844	[.47705981, .47716082]
20	.47708506	.47713557	-.16224844	-.16224844	[.47705981, .47713557]

```
Paskutiniojo intervalo ilgis yra = .00007575
```

Kadangi 1.1, 2.1 ir 3.1 pavyzdžiuose sprendėme tą patį uždavinį skirtingais metodais, tai palyginkime gautus rezultatus.

Fibonačio:

Sukonstruota 20 įdėtųjų intervalų. Paskutinis intervalas – [.47705622, .47712601].

Paskutiniojo intervalo ilgis yra = .0000697910.

Aukso pjūvio:

Sukonstruota 20 įdėtųjų intervalų. Paskutinis intervalas – [.47704199, .47713623]

Paskutiniojo intervalo ilgis yra = .00009424.

Lukaso:

Sukonstruota 20 įdėtųjų intervalų. Paskutinis intervalas – [.47705981, .47713557]

Paskutiniojo intervalo ilgis yra = .00007575.

Pastebime, kad gautieji intervalai skiriasi nežymiai.

Palyginkime šiais metodais gaunamų intervalų ilgius. Esame apskaičiavę, kad

$b_{n-2} - a_{n-2} = \frac{2}{F_{n+1}}(b_0 - a_0)$ – taikant Fibonačio metodą,

$b_n - a_n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n (b_0 - a_0)$ – taikant aukso pjūvio metodą,

$b_{n-1} - a_{n-1} = \frac{3\cdot(b_0 - a_0)}{L_{n+1}}$ – taikant Lukaso metodą.

Palyginkime aukso pjūvio ir Fibonačio metodus:

$$\frac{|b_{n-2} - a_{n-2}|_{a.p}}{|b_{n-2} - a_{n-2}|_F} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n-2}(b_0 - a_0)}{\frac{2}{F_{n+1}}(b_0 - a_0)} = \frac{F_{n+1}}{2\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}} \approx \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{2\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 \approx$$

$\approx 0{,}9472.$

Apskaičiavome, kad taikydami aukso pjūvio metodą, intervalo ilgį sumažinsime apie 5%, lyginant su Fibonačio metodu.

Palyginkime aukso pjūvio ir Lukaso metodus:

$$\frac{|b_{n-1} - a_{n-1}|_{a.p}}{|b_{n-1} - a_{n-1}|_L} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n-1}(b_0 - a_0)}{\frac{3}{L_{n+1}}(b_0 - a_0)} = \frac{L_{n+1}}{3\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}} \approx \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{3\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \approx$$

$\approx 0{,}8726.$

Atlikę analizę pastebime, kad aukso pjūvio metodo konstruojamų intervalų ilgis mažiausias. Tačiau, kaip matome iš pavyzdžio, taip būna ne visada. Intervalų $\left[a_k ; b_k\right]$ ilgiai priklauso nuo to ar skaičiai

$\frac{F_{n+1}}{2}$, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$, $\frac{L_{n+1}}{3}$ yra arti skaičiaus $\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}$. Kuo arčiau jie to skaičiaus, tuo ilgesni intervalai. Taigi vienareikšmiškai pasakyti, kuris metodas pasižymi didesniu intervalo ilgio mažinimu, negalima.

Išvados

Vienareikšmiškai pasakyti, kuris metodas turi daugiau privalumų, o kuris – mažiau, negalima.

Lukaso skaičiai optimizavimo uždaviniuose didelio pranašumo neturi. Jų pranašumas yra tik tas, kad skaičiuojant mažais tikslumais ($\varepsilon < 10^{-15}$), atliekama mažiau iteracinių žingsnių.

Tarp skaičiavimų greičio, naudojantis kompiuteriu, tarp Lukaso ir Fibonačio metodų didelio skirtumo nėra. Aukso pjūvio metodas dideliems skaičiavimų tikslumams (taikant nesuapvalintąją aukso pjūvio reikšmę) netinkamas, nes pvz., ieškant funkcijos $f(x) = x^2 - 2x + 1$ minimumo intervale $[0; 3]$, tikslumu 0,000001, taikant Fibonačio ir Lukaso metodus kompiuteris užtruko mažiau negu 0,1s. Taikant aukso pjūvio metodą – 2h 28 min. 53 s.

Summary

Lucas Numbers in Optimization Problems

The main objective of this work is to find out how Lucas numbers influence unimodal function optimization.

First chapter of this master thesis is introduction to Fibonacci and Lucas numbers.

In the second chapter is analyzed unimodal function problem. Here are analyzed Fibonacci, golden section and Lucas methods, in this master thesis.

Here are introduced with each method advantages and disadvantages, in this thesis.

LITERATŪRA

1. A. Apynis. *Optimizavimo metodai*, Vilnius: Vilniaus universitetas, 1988, p. 74–77.
2. В.Г. Карманов. *Математическое программирование,* p. 145–155.
3. Arthur T. Benjamin, Jennifer J. Quinn. „Recounting Fibonacci and Lucas identities“, *The College Mathematics Journal*, Vašingtonas, 1999 lapkritis.
4. Dan Kalman, Robert Mena. „The Fibonacci numbers – exposed“, *Mathematics Magazine*, Vašingtonas, 2003 liepa.
5. http://mathworld.wolfram.com/LucasNumber.html 2006-05-18
6. http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html 2006-05-18

1 priedas (Fibonačio metodo programa)

```
> Fibonacci_method:=proc(f::procedure,a::numeric,b::numeric,
  epsilon::numeric)
> local F, k, Fn, c, d, n;
> F:=2*(b-a)/epsilon;
> k:=1;
> pradzia;
> Fn:=fib(k+1);
> if Fn<F then
> k:=k+1;
> goto(pradzia);
> else
> n:=k;
> end if;
> printf("Funkcijos minimumo ieškoma intervale [%4.2f,% 4.2f],
  pasirinktas tikslumas yra %2.10f.\n",a,b,epsilon);
> printf(" \n");
> printf("  k    c     d      f(c)      f(d)     Intervalas \n");
> iterate(f,a,b,n);
> printf(" \n");
> printf("Paskutiniojo intervalo ilgis yra = %2.10f \n",ilgis);
> end:
> iterate:=proc(f::procedure,a::numeric,b::numeric, n::posint)
> local cn,dn,an,bn,i,fc,fd,j;
> global ilgis,fib;
> i:=0;
> an(0):=a;
> bn(0):=b;
> for j from 1 to n do
> cn(i+1):=an(i)+(1-fib(n-i)/fib(n-i+1))*(bn(i)-an(i));
> dn(i+1):=an(i)+(fib(n-i)/fib(n-i+1))*(bn(i)-an(i));
> fc(i+1):=evalf(f(cn(i+1)));
> fd(i+1):=evalf(f(dn(i+1)));
> if fc(i+1)<=fd(i+1) then
> an(i+1):=an(i);
> bn(i+1):=dn(i+1);
> else
> an(i+1):=cn(i+1);
> bn(i+1):=bn(i);
> fi;
> i:=i+1;
> printf(" %2.0f  % 2.8f  % 2.8f  % 2.8f  %2.8f  [%2.8f, %
  2.8f]\n",i,cn(i),dn(i),fc(i),fd(i),an(i),bn(i));
> if(n-i-2)<1 then
> goto(pabaiga);
> end if;
> ilgis:=bn(i+1)-an(i+1);
> end do;
```

```
> pabaiga;
> end:
> fib:=proc(n::numeric)
> option remember;
> fib(1):=1:
> fib(2):=1;
> if n<2 then
> n;
> else
> fib(n-1)+fib(n-2);
> end if;
> end:
> f:= x->x^2-2*x+1; – įvedama funkcija
> plot(f,a..b);
> Fibonacci_method(f,a,b,epsilon);
```

Paskutinėse dviejose eilutėse, įvedamos konkrečios, parametrų *a*, *b* ir *epsilon*, reikšmės.

2 priedas (Aukso pjūvio metodo programa)

```
> Golden_section:=proc(f::procedure,a::numeric,b::numeric,
  epsilon::numeric)
> local N;
> global pfi;
> N := 0;
> pfi:=(sqrt(5)-1)/2;
> printf("Funkcijos minimumo ieškoma intervale [% 4.2f,% 4.2f],
  pasirinktas tikslumas yra % 6.10f.\n",a,b,epsilon);
> printf(" \n");
> N:=ceil((ln(epsilon/(b-a))/ln(pfi)));
> printf("  k    c    d    f(c)    f(d)   Intervalas \n");
> iterate(f,a,b,N);
> printf(" \n");
> printf("Paskutiniojo intervalo ilgis yra % 3.10f.\n",ilgis);
> printf(" \n");
> printf("Funkcijos minimumas, intervale [%4.2f,% 4.2f], yra
  %2.10f.\n",a,b,minimumas);
> end:
> iterate:=proc(f::procedure,a::numeric,b::numeric,N::posint)
> local cn,dn,an,bn,fc,fd,j;
> global ilgis, minimumas;
> an(0):=a;
> bn(0):=b;
> for j from 1 to N do
> cn(j-1):=an(j-1)+(1-pfi)*(bn(j-1)-an(j-1));
> dn(j-1):=an(j-1)+pfi*(bn(j-1)-an(j-1));
> fc(j-1):=evalf(f(cn(j-1)));
> fd(j-1):=evalf(f(dn(j-1)));
> if fc(j-1)<=fd(j-1) then
> an(j):=an(j-1);
> bn(j):=dn(j-1);
> else
> an(j):=cn(j-1);
> bn(j):=bn(j-1);
> fi;
> printf("%3.0f  % 2.10f  % 2.10f  % 2.10f  %2.10f  [%2.10f, %
  2.10f]\n",j,cn(j-1),dn(j-1),fc(j-1),fd(j-1),an(j),bn(j));
> ilgis:=bn(j)-an(j);
> od;
> end proc:
> f:= x->x^2-2*x+1; – įvedama funkcija
> plot(f,a..b);
> Golden_section(f,a,b,epsilon);
```

Paskutinėse dviejose eilutėse, įvedamos konkrečios, parametrų *a*, *b* ir *epsilon*, reikšmės.

3 priedas (Lukaso metodo programa)

```
> Lucas_method:=proc(f::procedure,a::numeric,b::numeric,
  epsilon::numeric)
> local L, k, Ln, c, d, n;
> L:=3*(b-a)/epsilon;
> k:=1;
> pradzia;
> Ln:=luc(k+1);
> if Ln<L then
> k:=k+1;
> goto(pradzia);
> else
> n:=k;
> end if;
> printf("Funkcijos minimumo ieškoma intervale [%4.2f,% 4.2f],
  pasirinktas tikslumas yra %2.10f.\n",a,b,epsilon);
> printf(" \n");
> printf("  k    c     d     f(c)     f(d)      Intervalas \n");
> iterate(f,a,b,n);
> printf(" \n");
> printf("Paskutiniojo intervalo ilgis yra = %2.10f \n",ilgis);
> end:
> iterate:=proc(f::procedure,a::numeric,b::numeric, n::posint)
> local cn,dn,an,bn,i,fc,fd,j;
> global ilgis,luc;
> i:=0;
> an(0):=a;
> bn(0):=b;
> for j from 1 to n do
> cn(i+1):=an(i)+(1-luc(n-i)/luc(n-i+1))*(bn(i)-an(i));
> dn(i+1):=an(i)+(luc(n-i)/luc(n-i+1))*(bn(i)-an(i));
> fc(i+1):=evalf(f(cn(i+1)));
> fd(i+1):=evalf(f(dn(i+1)));
> if fc(i+1)<=fd(i+1) then
> an(i+1):=an(i);
> bn(i+1):=dn(i+1);
> else
> an(i+1):=cn(i+1);
> bn(i+1):=bn(i);
> fi;
> i:=i+1;
> printf(" %2.0f  % 2.10f  % 2.10f  % 2.10f  %2.10f   [%2.10f, %
  2.10f]\n",i,cn(i),dn(i),fc(i),fd(i),an(i),bn(i));
> if(n-i-1)<1 then
> goto(pabaiga);
> end if;
> ilgis:=bn(i+1)-an(i+1);
> end do;
```

```
> pabaiga;
> end:
> luc:=proc(n::numeric)
> option remember;
> luc(1):=1:luc(2):=3;
> if n>2 then
> luc(n-1)+luc(n-2);
> else if n=2 then luc(2);
> else luc(1);
> end if;
> end if;
> end:
> f:= x->x^2-2*x+1; – įvedama funkcija
> plot(f,a..b);
> Lucas_method(f,a,b,epsilon);
```

Paskutinėse dviejose eilutėse, įvedamos konkrečios, parametrų *a*, *b* ir *epsilon*, reikšmės.