VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS METODIKOS KATEDRA

Jurgita Trečiokienė

MATEMATINIAI ŽAIDIMAI

Magistro baigiamasis darbas

Vadovas
Lekt. dr. R. Kašuba

VILNIUS 2006

TURINYS

ĮVADAS

Vystantis gamtos mokslams, vystėsi ir žaidimai, taip pat ir matematiniai. Ne tik mokslas, bet ir dabartinio XXI amžiaus pramogos turi ryšį su matematika. Kažkada azartiniai lošimai davė galingą impulsą tikimybių teorijai atsirasti,o dabar žodis „lošimas“ tapo matematiniu žodžiu, plačiai vartojamu įvairiausiuose moksluose: ekonomikoje, biologijoje, karyboje... Tačiau populiariajai literatūrai „nelengva“ atspindėti šias permainas.

Žmogų gali nustebinti ryšis tarp pramogų ir rimto mokslo, nesistebėti abstrakčių sąvokų ir skaičiavimo technikos išradingu pritaikymu žaidimų bei lošimų ir galvosūkių analizei...

Pagal J. Danilovą
ir J. Smorodinskį

Mūsų tikslas būtų iliustruoti, kad žaidimai su logikos elementais padeda mokytis ir tobulėti.

Šiame darbe pateiksime keletą lošimų ir žaidimų pavyzdžių, mėginsime juos analizuoti, taip pat dar nurodysime konkrečių užduočių ir jų sprendimo būdų. Darbo rezultatai galėtų įtikinti, kad ne tik mokantis galima ko nors pasiekti, bet ir žaidžiant šio to išmokti. Kai kam taip gal būtų net įdomiau, ne taip įprasta. Tikiuosi kad, mano darbą įmanoma panaudoti jaunesniųjų klasių mokinių ugdymui, jų lavinimui bei supažindinti juos su teorijos elementais.

Darbo tikslas:

- Įrodyti, kad loginiai žaidimai skatina mąstymą;
- Pateikti žaidimų pavyzdžių;
- Surinkti ir pateikti su žaidimais susijusių uždavinių.

1. PAŽINTIS SU TIKIMYBIŲ TEORIJA

„Šansai“, „galimybės“, „tikimybės“ — tai žodžiai iš kasdieninio mūsų žodyno, kaip ir „moneta“, „futbolas“ ar „tortas“. Nors visi intuityviai jaučiame, ką reiškia kiekvienas iš keturių pacituotų teiginių, griežtai apibrėžti terminus „šansai“, „galimybės“ ir „tikimybės“ yra neįtikėtinai sunku.

Žodis „tikimybės“ vartojamas dvejopa prasme. Viena vertus, šis žodis reiškia *mokslą* — iš esmės matematikos šaką. Antra vertus, mes kalbame apie įvykių tikimybes, ir tada „tikimybė“ reiškia skaičių, kaip, pavyzdžiui, teiginyje „Tikimybė, kad tris kartus metant monetą, atvirs vien herbai, lygi[*] 12,5%“. Terminas „galimybės“ vartojamas tai pačiai tikimybės sąvokai išreikšti šiek tiek kitu pavidalu.

1.1. Kas yra tikimybių teorija?

Tikimybių teorija tiria tam tikras situacijas, kurias matematikai mėgsta vadinti **tikimybiniais bandymais**, arba tiesiog **bandymais**. Sakysime, kad bandymas yra tikimybinis, jei galimų jo baigčių (rezultatų) yra daugiau negu viena, ir negalima iš anksto tvirtai pasakyti, kuri iš galimų baigčių iš tikrųjų įvyks. Tipiški bandymų pavyzdžiai yra monetos mėtymas, lošimo kauliuko ridenimas, šaudymas į lėkštes, orų prognozės. Žodis „bandymas“ čia vartojamas labai laisvai, ir daugumai šių bandymų atlikti visai nereikia baltų chalatų ar gerai įrengtų laboratorijų.

Su tikimybiniais bandymais susiduriame kasdien. Kai kurie iš jų yra paprastesni (orai, Pasaulio taurės rezultatai ir t. t.), o kai kurie — sudėtingesni (mūsų mokamos draudimo įmokos, perkamų produktų patikimumas ir t. t.).

Tikimybių teorija nagrinėja sudėtingiausius reiškinius, o ne tik monetų mėtymą, lošimo kauliukų ridenimą ar šaudymą į lėkšteles.

1.2. Tikimybės

Sakykime, metame monetą. Kokia tikimybė, kad ji atvirs herbu? Tai nėra sunkus matematinis klausimas, ir beveik kiekvienas duos atsakymą: 50%, 1 iš 2, apie pusę ir t. t. paprašius pagrįsti šiuos atsakymus, argumentai paprastai suskyla į dvi kategorijas.

---

[*] Įprasta tikimybes reikšti dešimtainėmis ar paprastosiomis trupmenomis, o šansus — procentais.

Vienas argumentų tipas yra toks: kadangi moneta gali atvirsti dviem būdais, herbo tikimybė yra 1 iš 2. Šį argumentų tipą vadiname **objektyviuoju požiūriu** į tikimybę.

Kitas argumentų tipas yra maždaug toks: jei mes mėtysime monetą daug daug kartų, tai maždaug pusę kartų atvirs herbas ir maždaug pusę kartų atvirs skaičius, ir todėl herbo tikimybė yra maždaug apie pusę. Šį argumentų tipą vadiname **dažniniu**, arba **statistiniu** požiūriu į tikimybę.

Nors abu požiūriai yra logiškai pagrįsti (laikant, kad mėtoma moneta yra ideali), sunku apibendrinti bet kurį iš jų taip, kad būtų aprėptas ir kitas požiūris.

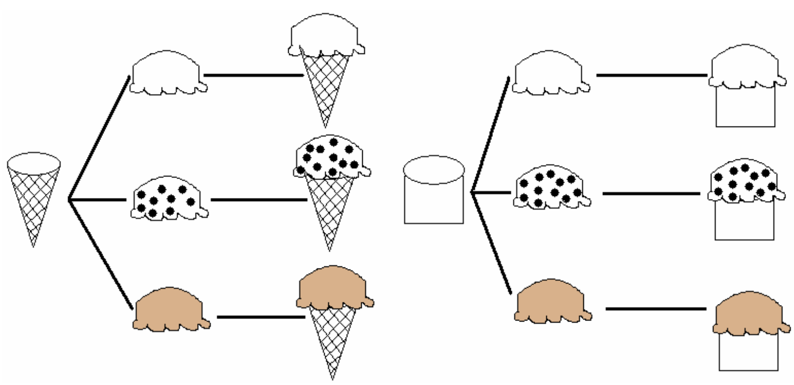
1.3. Daugybos taisyklė

Tikimybių daugybos taisyklė. Jei sudėtinį įvykį galima suskaidyti į paprastesnius nepriklausomus įvykius (t. y. tokius, kurių baigtis neturi įtakos kitų įvykių baigčiai), tai viso įvykio tikimybė lygi jo sudėtinių įvykių tikimybių sandaugai.

Daugybos taisyklė tvirtina, kad jei kas nors vyksta keliais etapais, tai, norint rasti bendrą skaičių iš būdų, kuriais tai gali įvykti, reikia nustatyti, keliais būdais tai gali įvykti kiekviename etape, ir gautus skaičius sudauginti.

Kodėl veikia daugybos taisyklė, galime paaiškinti paprastu pavyzdžiu.

Pavyzdys: Jūs norite suvalgyti porciją ledų. Galima pasirinkti iš dviejų rūšių vaflinių indelių (saldžių ir nesaldžių) ir vieną iš trijų rūšių ledų (vanilinių, šokoladinių ir vaisinių). 1 paveikslėlis rodo visas galimas pasirinkimo kombinacijas.



1. pav. Taip veikia daugybos taisyklė

1.4. Baigčių erdvės

Su kiekvienu bandymu susijusi visų galimų jo baigčių (rezultatų) aibė, vadinama **baigčių erdve**, arba **elementariųjų įvykių erdve**. Baigčių erdvė žymima raide *E,* o aibės baigčių erdvės elementų skaičius — raide *N*.

1.5. Įvykiai

Iki šiol mes kalbėjome apie atskirų baigčių tikimybes, kurias nurodo tikimybių priskirtis. Dauguma tikimybių uždavinių yra susiję su baigčių kombinacijomis, vadinamomis įvykiais. **Įvykiu** vadiname bet kokį baigčių erdvės poaibį.

Palankių įvykių baigčių skaičius gali kisti nuo 0 iki *N* (baigčių erdvės dydžio). Jei įvykio baigčių skaičius lygus 0, tai įvykis vadinamas **negalimuoju įvykiu**; jei baigčių įvykio skaičius yra *N*, tai įvykis vadinamas **būtinuoju įvykiu**.

Kiekviena baigčių erdvės tikimybių priskirtis kiekvienam elementariam įvykiui savaime priskiria tikimybę. Ji gaunama sudėjus tą įvykį sudarančių baigčių tikimybes. Kad ir kokia būtų tikimybių priskirtis, negalimojo įvykio tikimybė visada lygi 0 (P({Ø}) = 0), o būtinojo įvykio tikimybė visada lygi 1 (P(E) = 1).

1.6. Tikimybiniai modeliai

Tikimybinį modelį sudaro, pirma, baigčių erdvė, sudaryta iš visų galimų atsitiktinio bandymo baigčių ir, antra, tos baigčių erdvės tikimybių priskirtis. Pastaroji kiekvienai atskirai baigčiai priskiria skaičių tarp 0 ir 1 imtinai, vadinama tos baigties tikimybe. Matematiniu požiūriu nesvarbu, iš kur tos tikimybės imamos. Jos gali remtis stebėtojo subjektyvia nuomone, gali būti dažnių skaičiavimo ar kokios nors sudėtingos formulės taikymo rezultatas. Tereikalaujama, kad būtų laikomasi „žaidimo taisyklių“ — visos tikimybių reikšmės turi būti tarp 0 ir 1, o jų suma lygi 1. jei tikimybės jau priskirtos atskiroms baigtims, tai ir jų kombinacijos, vadinamoms įvykiais, yra priskirtos tikimybės. Bet kurio įvykio tikimybė gaunama sudedant įvykį sudarančių baigčių tikimybes. Skyrium imant, negalimojo įvykio {Ø} tikimybė lygi 0, o būtinojo įvykio *E* tikimybė lygi 1. Visus šiuos teiginius galima apibendrinti taip:

Tikimybinis modelis

- **Baigčių erdvė.** Visų galimų atsitiktinio bandymo baigčių erdvė $E = \{b_1, b_2, ... b_N\}$
- **Erdvės *E* tikimybių priskirtis.** Kiekvienai baigčiai b_i priskiriamas skaičius $P(b_i)$, laikantis taisyklių:
  1. $0 \leq P(b_i) \leq 1$ ir
  2. $P(b_1) + P(b_2) + . . . + P(b_N) = 1$.
- **Įvykiai.** Įvykis yra bet kuris *E* poaibis. Skyrium imant, {Ø} (negalimas įvykis) ir pati *E* (būtinas įvykis) yra įvykiai.
- **Įvykių tikimybės.** Kiekvieno įvykio tikimybė yra tą įvykį sudarančių baigčių tikimybių suma. Skyrium imant, P({Ø}) = 0 ir P(*E*) = 1.

Vienas iš seniausių ir paprasčiausių tikimybių teorijos taikymų susijęs su azartiniais lošimais. Mes nesame jų šalininkai, bet azartiniai lošimai yra gausus pavyzdžių šaltinis ir kelia daugybę įdomių matematinių uždavinių. Daugeliui lošimų reikia kokios nors priemonės ar prietaiso, kaip moneta ar monetos, lošimo kauliukas ar kauliukai, kortų kaladė, ruletė ir t. t. Tokiu atveju laikoma, kad lošimo įrankis yra idealus, t. y. moneta ar kauliukas yra simetriški, kortos gerai išmaišytos ir nėra žymėtos, o ruletės ratas — subalansuotas. Matematiškai tai reiškia, kad visų baigčių tikimybės vienodos. Kadangi tikimybių suma lygi 1, tai, pirma, kiekvienos baigties tikimybė turi būti 1/N (čia *N* — baigčių erdvės dydis), ir, antra, bet kurio įvykio tikimybė gaunama padalijus jį sudarančių baigčių skaičių iš *N*. Tad šį tikimybinį modelį galime surašyti taip:

Tikimybinis modelis, jei visos baigtys vienodai tikėtinos

- Baigčių erdvės dydis = *N*.
- P(bet kuri baigtis) = 1/*N*.
- Jei A yra įvykis, tai P(A) = įvykio A baigčių skaičius/*N*.

Pagal šį modelį tikimybės gali būti apskaičiuotos (neretai tenka taikyti daugybos principą).

1.7. Galimybės ir tikimybės

Matematikas, siekdamas aiškumo, reikalauja, kad tikimybės būtų skaičiai tarp 0 ir 1. kasdieninei vartosenai tai nėra taip svarbu — mes žinome, kad žmonės kalba apie *šansus* kaip tikimybes, išreikštas procentais, ir apie galimybes, kurios dažniausiai naudojamos išreikšti tikimybėms, susijusioms su lošimo situacijomis.

Jei *galimybės įvykio* A *naudai* yra *m* prieš *n*, tai P(A) = *m/m+n*

Bendra tikimybių vertimo galimybėmis taisyklė yra tokia:

Jie P(A) = *a/b*, tai *galimybės įvykio* A *naudai* yra *a* prieš *b* — *a*, o *galimybės įvykio* A *nenaudai* yra *b* — *a* prieš *a*.

1.8. Atsitiktiniai dydžiai

Kintamieji gali būti natūraliai susiję su tikimybiniu bandymu, nes, šiaip ar taip, bandymo baigtys yra kintamos. Jei *kiekybinio* dydžio skaitinė reikšmė priklauso nuo bandymo rezultato, tai kintamąjį vadiname **atsitiktiniu dydžiu**. Galima sakyti ir kiek kitaip — kadangi tyrinėjama populiacija yra baigčių erdvė, tai bet koks kiekybinis kintamasis, susijęs su ta populiacija, yra vadinamas atsitiktiniu dydžiu.

1.9. Teorijos išvados

Žmogui tikimybės, šansai ir galimybės yra miglotos sąvokos, vartojamos visų pirma lošiant loterijoje ar aptariant rytojaus orus. Tačiau matematikai ir statistikai žiūri į tikimybių teoriją kaip į tikslią schemą, kuri dažnai leidžia išsiaiškinti atsitiktinių įvykių dėsnius. Pagrindiniai šios schemos elementai yra *baigčių erdvė*, matematiškai tiksliai nusakanti visas galimas *atsitiktinio bandymo* baigtis (rezultatus), ir *tikimybių priskirtis*, suteikiančias kiekvienai baigčiai skaitinę reikšmę. Šios skaitinės reikšmės rodo atitinkamos baigties tikėtinumą. Jos gali turėti matematines ar nematematines ištakas, tačiau vos tik tikimybės priskirtos, žaidimo taisyklės tampa visiškai matematinės.

Vienas iš paprasčiausių tikimybių priskyrimo būdų yra vienodų tikimybių suteikimas visoms baigtims. Šiuo atveju tikimybės skaičiuojamos, atsakius į du pagrindinius (ne visada paprastus) klausimus: 1) koks yra nagrinėjamos baigčių erdvės dydis? 2) koks yra nagrinėjamą įvykį atitinkančio baigčių erdvės poaibio dydis?

Nors tikimybių teorija yra palyginti jauna matematikos šaka, pažintis su atsitiktinumo dėsniais yra svarbi visuotinės kultūros dalis ir labai praverčia kasdieniniame gyvenime. Minutėlę pamąsčius apie tai, kiek mūsų gyvenimas yra valdomas likimo ir kiek — atsitiktinumo, didelis tikimybių vaidmuo nebestebintų. Kaip kartą pasakė Julijus Cezaris, „atsitiktinumas yra didysis gyvenimo mokytojas“.

Pagrindinės sąvokos:	*galimybės*	*tikimybių priskirtis*
atsitiktinis dydis	*nepriklausomi įvykiai*	*negalimas įvykis*
baigčių erdvė	*tikimybių daugybos*	*šansai*
būtinas įvykis	*taisyklė*	*tikimybė*
daugybos taisyklė	*tikimybinis bandymas*	*tikimybinis modelis*
elementariųjų įvykių erdvė		

1.10. Žaidimai su tikimybėmis

1.

Du lygeverčiai žaidėjai žaidžia be lygiųjų (tai reiškia, kad kiekvieno žaidėjo laimėjimo tikimybė p yra $\frac{1}{2}$). Jie buvo sutarę žaisti :

a) 3 partijas,

b) 5 partijas,

c) 7 partijas.

Prizų fondas buvo 80 Lt. Žaidimas buvo nutrauktas po pirmos partijos, kurią laimėjo pirmasis žaidėjas. Kokiu būdu jie turėtų pasidalinti tuos 80 Lt?

Aišku, kad pirmajam žaidėjui turėtų priklausyti daugiau negu pusė tų pinigų, nes pergalę jis jau turi, kita vertus, visko atiduoti jam negalima, nes jeigu būtų žaista toliau, antrasis galėjo laimėti daugumą iš tų partijų.

a) Surašykime, kaip žaidimas galėjo rutuliotis toliau, jeigu būtų žaistos antroji ir trečioji partijos.

Pirmojo žaidėjo pergalę pažymėkime raide P, o antrojo – A.

2 partija	3 partija
P	P
P	A
A	P
A	A

Pirmasis žaidėjas jau turi vieną pergalę, tai jam tereikia laimėti bent vieną partiją, kad laimėtų visą žaidimą.

Tikimybė laimėti pirmajam žaidėjui yra $\frac{3}{4}$, o antrajam - $\frac{1}{4}$. Tai ir pinigus turėtų pasidalinti tokiu pat santykiu. Pirmajam žaidėjui atitektų $80 * \frac{3}{4} = 60\,\text{Lt}$, o antrajam $80 * \frac{1}{4} = 20\,\text{Lt}$.

b) Surašykime, kaip žaidimas galėjo rutuliotis toliau, jeigu būtų žaistos antroji, trečioji, ketvirtoji ir penktoji partijos. Visos galimos žaidimo baigtys sužaidus likusias partijas atrodytų taip:

2 partija	3 partija	4 partija	5 partija
P	P	P	P
P	A	P	P
A	P	P	P
A	A	P	P
P	P	A	P
P	A	A	P
A	P	A	P
A	A	A	P
P	P	P	A
P	A	P	A
A	P	P	A

A	A	P	A
P	P	A	A
P	A	A	A
A	P	A	A
A	A	A	A

Pirmajam žaidėjui reikia laimėti bent dvi partijas, kad taptų žaidimo nugalėtoju. Jam palankios - 11 baigčių, o antrajam – 5. Žaidėjai pinigus turėtų pasidalinti tokiu santykiu: pirmasis žaidėjas gauna $80*\frac{11}{16}=55$ Lt, o antrasis gauna $80*\frac{5}{16}=25$ Lt.

c) Surašykime, kaip žaidimas galėjo rutuliotis toliau, jeigu būtų žaistos antroji, trečioji, ketvirtoji, penktoji, šeštoji ir septintoji partijos. Visos galimos žaidimo baigtys, sužaidus likusias partijas, atrodytų taip:

2 partija	3 partija	4 partija	5 partija	6 partija	7 partija
P	P	P	P	P	P
P	A	P	P	P	P
A	P	P	P	P	P
A	A	P	P	P	P
P	P	A	P	P	P
P	A	A	P	P	P
A	P	A	P	P	P
A	A	A	P	P	P
P	P	P	A	P	P
P	A	P	A	P	P
A	P	P	A	P	P
A	A	P	A	P	P
P	P	A	A	P	P
P	A	A	A	P	P

A	P	A	A	P	P
A	A	A	A	P	P
P	P	P	P	A	P
P	A	P	P	A	P
A	P	P	P	A	P
A	A	P	P	A	P
P	P	A	P	A	P
P	A	A	P	A	P
A	P	A	P	A	P
A	A	A	P	A	P
P	P	P	A	A	P
P	A	P	A	A	P
A	P	P	A	A	P
A	A	P	A	A	P
P	P	A	A	A	P
P	A	A	A	A	P
A	P	A	A	A	P
A	A	A	A	A	P
P	P	P	P	P	A
P	A	P	P	P	A
A	P	P	P	P	A
A	A	P	P	P	A
P	P	A	P	P	A
P	A	A	P	P	A
A	P	A	P	P	A
A	A	A	P	P	A
P	P	P	A	P	A
P	A	P	A	P	A
A	P	P	A	P	A
A	A	P	A	P	A

P	P	A	A	P	A
P	A	A	A	P	A
A	P	A	A	P	A
A	A	A	A	P	A
P	P	P	P	A	A
P	A	P	P	A	A
A	P	P	P	A	A
A	A	P	P	A	A
P	P	A	P	A	A
P	A	A	P	A	A
A	P	A	P	A	A
A	A	A	P	A	A
P	P	P	A	A	A
P	A	P	A	A	A
A	P	P	A	A	A
A	A	P	A	A	A
P	P	A	A	A	A
P	A	A	A	A	A
A	P	A	A	A	A
A	A	A	A	A	A

Pirmajam žaidėjui reikia laimėti bent tris partijas, kad taptųnugalėtoju. Jam yra palankios 42 baigtys, o antrajam – 22 baigtys. Žaidėjai pinigus turėtų pasidalinti tokiu santykiu: pirmasis žaidėjas gauna $80 * \frac{42}{64} = 52.50$ Lt, o antrasis gauna $80 * \frac{22}{64} = 27.50$ Lt.

2.

Du visiškai svetimi žmonės sugalvoja po vieną natūralųjį skaičių. Jei jų sugalvotieji skaičiai sutampa, jie gauna prizą. Kokį skaičių sugalvotumėte jūs?

Paprastai niekas neima keliaženklių skaičių. Dažniausiai minimi skaičiai yra 1, 3 ir 7.

3.

Kaimynas Petras Pasakorius pasakojo, jog Matematikų Riešėje tuoj bus atidarytas hipodromas, kur pradžioje lenktyniaus tik 3 arkliai. Vienas arklys visai neblogas, vardu Trimitas, kiti du, Būgnas ir Skudutis yra ne tokie geri. Kadangi Trimitas yra pats greičiausias, tai už jį statymai priimami santykiu 1 : 1. Tai reiškia: jeigu jūs statėte 100 litų, kad jis bus pirmas, ir Trimitas atbėgs pirmas,tai jūs atgausite savo statytus 100 litų ir dar gausite antra tiek arba dar 100 litų.

Jeigu Trimitas nebus pirmas, jūsų pinigai liks organizatoriams.

Už Būgną priimami statymai santykiu 1 : 4, o už Skudutį – santykiu 1 : 5. Tai reiškia, jeigu, pavyzdžiui, Skudutis atbėgs pirmas, o jūs buvote už jį statęs 100 litų, tai jūs atgausite savo statytus 100 litų ir dar gausite 500 litų. Aišku, kad Skudutis yra laikomas silpniausiu arkliu. Jeigu jis nebus pirmas, jūs tų savo pinigų nebematysite.

Panagrinėkime padėtį. Gal čia įmanoma užsidirbti?

Sakykime, kad už pirmąjį arklį, vardu Trimitas, pastatėme A litų, už antrąjį arklį, vardu Būgnas, pastatėme B litų, galiausiai už trečiąjį arklį, vardu Skudutis, pastatėme C litų.

Aišku, jeigu pirmasis atbėgs Trimitas, mes turėsime 2A litų (pagal sąlygą atgauname pastatytus pinigus ir gauname dar kita tiek), jeigu pirmas atbėgs Būgnas, mes gausime 5B litų (atgausime įneštuosius ir dar gausime keturiskart tiek), galop, jei pirmasis bus Skudutis – kas mažiausiai tikėtina, sprendžiant iš to, kokiu santykiu organizatoriai priima už jį statymus, tai mes gausime 6C litų (atgausime įneštuosius ir dar gausime penkiskart tiek).

Iš viso mes pastatėme

$$A+B+C$$

litų ir, jeigu mes tikėsimės bet kuriuo atveju išlošti, tai kad ir koks arklys atbėgtų pirmas, mūsų gaunama suma turi būti didesnė už tą ką tik nurodytą sumą, arba turi būti

$$\begin{cases} 2A > A+B+C, \\ 5B > A+B+C, \\ 6C > A+B+C, \end{cases}$$

arba

$$\begin{cases} A > B + C, \\ 4B > A + C, \\ 5C > A + B. \end{cases}$$

O tokiai sistemai sprendinių parinkti ne taip sunku, tinka, pavyzdžiui, A = 10, B = C = 4, arba, apvalesniais skaičiais, 100, 40 ir 40.

Vadinasi, jeigu už Trimitą statysime 100 litų, o už Būgną ir Skudutį – po 40 litų, tai jei Trimitas atbėgs pirmas, tai mes, pastatę 180 litų, atsiimsime 200, jei Būgnas, tai irgi 200, na, o jeigu Skudutis, tai net 240 litų.

Kitaip tariant, jeigu tas hipodromas ir toliau taip elgtųsi, tai mes greitai galėtume ten neregėtai užsidirbti...

4.

Dvi draugės, Laima ir Nijolė, lošia hipodromo totalizatoriuje. Pirmajame jojime dalyvauja 5 žirgai – pavadinkime juos A, B, C, D ir E. Laima perka „bronzos“ bilietą (tai reiškia, kad jei jos pasirinktas žirgas užims pirmą , antrą arba trečią vietą, jai atiteks piniginis laimėjimas). Nijolė perka „dviejų prizininkų“ bilietą (tai reiškia, kad jei jos pasirinkti žirgai užims 1 ir 2 vietas jos nurodyta tvarka, jai atiteks piniginis laimėjimas).

a) išrašykite baigčių erdvę Laimai.

b) išrašykite baigčių erdvę Nijolei.

Atsakymai:

a) {A, B, C, D, E}.
b) {AB, AC, AD, AE, BA, BC, BD, BE, CA, CB, CD, CE, DA, DB, DC, DE, EA, EB, EC, ED}.

5.

Loterijos bilietuose surašyti skaičiai nuo 1 iki 50, kaip parodyta paveiksle.

Žaidėjai moka už bilietą 1 lt ir pažymi jame 6 iš 50 skaičių. Savaitės gale iš dėžės, kurioje sudėta 50 rutulių, sunumeruotų nuo 1 iki 50, atsitiktinai ištraukiami 6 rutuliai. Jei žaidėjo biliete buvo pažymėti tie patys 6 skaičiai, tai jis laimės milijoną litų. (priešingu atveju - nieko). Kokia tikimybė laimėti šioje loterijoje?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Ištraukti 6 kamuoliukus iš 50 yra tiek būdų:

$$C_{50}^{6} = \frac{50!}{6!*44!} = 50*49*47*46*3 = 15890700$$

Palankus įvykis yra tik vienas, tai tikimybė laimėti loterijoje yra

$$P(A) = \frac{1}{15890700} = 0.000000062.$$

6.

Du draugai žaidžia kortomis. Iš idealiosios kortų kaladės abu traukia po kortą. Kokia tikimybė, kad abu ištrauks tūzus?

Iš pradžių apskaičiuokime baigčių erdvės dydį. Laikydami, kad kortos traukiamos paeiliui (iš pradžių viena, po to - kita). Pirmoji korta gali būti ištraukta 52 būdais. Antroji korta gali būti ištraukta 51 būdu.

N – bendras skaičius būdų, kuriais gali būti ištrauktos dvi kortos, ir jis lygus 52*51

Dabar apskaičiuokime įvykio A = „ištraukti du tūzai“ dydį.

Pirmojo tūzo galimybių skaičius yra lygus 4.

Antrojo tūzo galimybių skaičius yra lygus 3.

Įvykio A dydis yra lygus 4*3.

Taigi, tikimybė ištraukti du tūzus yra $P(A) = \frac{4*3}{52*51} = \frac{1}{13*17} = \frac{1}{221} \approx 0.0045$

7.

Penki tenisininkai – Tomas, Marta, Andrius, Gabrielė ir Monika dalyvauja turnyre. Mus domina, kas laimės turnyrą. Baigčių erdvė yra E = { Tomas, Marta, Andrius, Gabrielė, Monika}.

Remiantis vienu treneriu, šios erdvės tikimybių priskirtis yra tokia: P(Tomas) = 0.25, P(Marta) = 0.22, P(Andrius) = 0.14, P(Gabrielė) = 0.18, P(Monika) = 0.21, visų tikimybių suma turi būti lygi 1.

Paverskime šias tikimybes galimybėmis.

P(Tomas) = $0.25 = \frac{1}{4}$, tai Tomo pergalės galimybės yra 1(skaitiklis) prieš 3(vardiklis minus skaitiklis). Tomo pralošimo galimybės yra 3 prieš 1.

Panašiai, P(Marta) = $0.22 = \frac{22}{100} = \frac{11}{50}$, tad jos pergalės galimybės yra 11 prieš 39.

P(Andrius) = $0.14 = \frac{14}{100} = \frac{7}{50}$. Jo pergalės galimybės yra 7 prieš 43.

P(Gabrielė) = $0.18 = \frac{18}{100} = \frac{9}{50}$. Jos pergalės galimybės yra 9 prieš 41.

P(Monika) = $0.21 = \frac{21}{100}$. Monikos pergalės galimybės yra 21 prieš 79.

8.

Vaikas sėkmingai žaidžia tenisą. Tėvas, norėdamas sūnų paskatinti, pažada nupirkti brangią dovaną, tik su viena sąlyga: sūnus turi sužaisti su tėvu ir klubo čempionu pagal pasirinktą vieną iš dviejų eiliškumų ir bent du kartus iš eilės laimėti. Eiliškumai yra tokie:

a) tėvas – čempionas – tėvas;

b)čempionas – tėvas – čempionas.

Čempionas žaidžia geriau už tėvą. Kurį gi variantą pasirinks sūnus?

Kaip žinome, čempionas žaidžia geriau už tėvą, tai sūnui būtų geriau su juo žaisti kuo mažiau partijų. Tačiau, antroji partija – lemiama. Sūnus negalės laimėti du kartus iš eilės, jei neišloš antros partijos.

Tegu Č – reiškia čempioną,

T – tėvą,

L – sūnaus laimėjimą,

P - sūnaus pralaimėjimą,

t – tikimybė, kad sūnus laimės žaisdamas su tėvu,

č – tikimybė, kad sūnus laimės žaisdamas su čempionu.

Sūnaus laimėjimus laikykime nepriklausomais. Visas galimybes ir tikimybes surašykime į lentelę.

T	Č	T	tikimybė
L	L	L	tčt
L	L	P	tč(1-t)
P	L	L	(1-t)čt

Č	T	Č	tikimybė
L	L	L	čtč
L	L	P	čt(1-č)
P	L	L	(1-č)tč

Bendra tikimybių suma bus tč(2-t) ir tč(2-č)

Kadangi tėvas žaidžia blogiau už čempioną, tai t > č ir 2-t < 2-č

Taigi, didesnė tikimybė laimėti du kartus iš eilės yra pasirinkus eiliškumą – čempionas – tėvas – čempionas.

9.

Metami du lošimo kauliukai. Lošėjas lažinasi, kad atsivertusių akučių suma bus lygi 2, 3, 4, 9, 10, 11 arba 12. Kokia tikimybė jam laimėti tokias lažybas?

Pirmasis kauliukas gali atvirsti 6 būdais, antrasis taip pat 6 būdais.

Tai visų galimų įvykių bus n = 6*6 = 36.

Apskaičiuokime kiek bus mums palankių įvykių.

Suma 2 gali būti tik vienu atveju: 1 + 1.

Sumai 3 gauti galimi 2 variantai: 2 +1, 1 + 2.

Sumai 4 gauti galimi 3variantai: 2 + 2, 3 + 1, 1 + 3.

Sumai 9 gauti galimi 4 variantai: 6 +3, 3 + 6, 4 + 5, 5 + 4.

Sumai 10 gauti galimi 3 variantai: 6 +4 , 5 + 5, 4 + 6.

Sumai 11 gauti galimi 2 variantai: 6 +5, 5 + 6.

Sumai 12 gauti galimas tik vienas variantas – 6 + 6.

Taigi, palankių įvykių turime m = 16.

Tikimybė laimėti šias lažybas būtų lygi $P(A) = \frac{16}{36} \approx 0.444...$

10.

Metamos dvi monetos.

a) Surašykite šio bandymo baigčių erdvę.

b) Koks baigčių erdvės dydis?

c) Surašykite baigtis, sudarančias įvykį, kai atvirsta lygiai du herbai.

d) Laikydami monetą idealia, raskite punkto c) įvykio tikimybę.

Pažymėkime H – įvykis, kad atvirto herbas,

S – įvykis, kad atvirto skaičius.

a) baigčių erdvę sudaro tokie įvykiai: E $=\{HH, HS, SH, SS\}$, pirmoji raidė reiškia pirmos monetos galimus atvirtimus, antroji – antros monetos atvirtimus.

b) baigčių erdvės dydis: N = 4.

c) A – įvykis, kad atvirs du herbai. Galima ši baigtis: A = {*HH}*.

d) c) atvejo tikimybę pažymėkime *P(A)* ir ją apskaičiuokime pagal tokią formulę: $P(A) = \frac{m}{n}$

čia *n* – visi galimi įvykiai, *m* – palankūs įvykiai. Tai $P(A) = \frac{1}{4}$.

11.

Metamos trys monetos.

a) Surašykite šio bandymo baigčių erdvę.

b) Koks baigčių erdvės dydis?

c) Surašykite baigtis, sudarančias įvykį, kai atvirsta lygiai du herbai.

d) Laikydami monetą idealia, raskite punkto c) įvykio tikimybę.

Pažymėkime H – įvykis, kad atvirto herbas,

S – įvykis, kad atvirto skaičius.

a) baigčių erdvę sudaro tokie įvykiai: E $=\{HHH, HHS, HSH, SHH, SSH, SHS, HSS, SSS\}$, pirmoji raidė reiškia pirmos monetos galimus atvirtimus, antroji – antros monetos atvirtimus, trečioji – trečios monetos atvirtimai.

b) baigčių erdvės dydis: N = 8.

c) A – įvykis, kad atvirs du herbai. Galimos šios baigtys: A = {*HHS, HSH, SHH}.*

d) c) atvejo tikimybę pažymėkime *P(A)* ir ją apskaičiuokime pagal tokią formulę: $P(A) = \frac{m}{n}$

čia *n* – visi galimi įvykiai, *m* – palankūs įvykiai. Tai $P(A) = \frac{3}{8}$.

12.

Metamos keturios monetos.

a) Surašykite šio bandymo baigčių erdvę.

b) Koks baigčių erdvės dydis?

c) Surašykite baigtis, sudarančias įvykį, kai atvirsta lygiai du herbai.

d) Laikydami monetą idealia, raskite punkto c) įvykio tikimybę.

Pažymėkime H – įvykis, kad atvirto herbas,

S – įvykis, kad atvirto skaičius.

a) baigčių erdvę sudaro tokie įvykiai: E

$$= \left\{ \begin{matrix} HHHH, HHHS, HHSH, HSHH, SHHH, HHSS, HSHS, HSSH, SSHH, \\ SHSH, SHHS, HSSS, SHSS, SSHS, SSSH, SSSS \end{matrix} \right\}$$

, pirmoji raidė reiškia pirmos monetos galimus atvirtimus, antroji – antros monetos atvirtimus, trečioji – trečios monetos atvirtimai, o ketvirtoji – ketvirtos monetos atvirtimai.

b) baigčių erdvės dydis: N = 16.

c) A – įvykis, kad atvirs du herbai. Galimos šios baigtys: A = {*HHSS, HSSH, SHHS, SHSH, HSHS, SSHH }.*

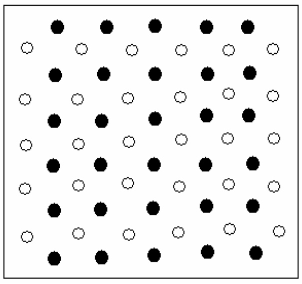
d) c) atvejo tikimybę pažymėkime *P(A)* ir ją apskaičiuokime pagal tokią formulę: $P(A) = \frac{m}{n}$ čia n – visi galimi įvykiai, m – palankūs įvykiai. Tai $P(A) = \frac{6}{16}$.

2.ŽAIDIMAI

Visas gyvenimas — matematika! Taip pat ir dauguma žaidimų ir lošimų mūsų gyvenime yra susiję su matematika. Šaškės, šachmatai, kortos, magija ir dauguma kitų — matematiški. Čia jums pateiksiu keletą žaidimo pavyzdžių ir jų sprendimo būdų.

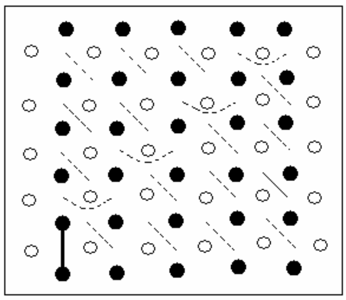
2.1. Bridž-it*

Ryškiausias yra topologinis lošimas bridž-it, kuris 1970 — 1980 metais buvo viena mėgstamiausių vaikų pramogų.



1 pav. Bridž-it lošimų lenta

1 paveiksle parodyta bridž-it žaidimų lenta. Kai lošimo laukas nupieštas popieriaus lape, dalyviai paeiliui brėžia vertikalias arba horizontalias atkarpas, jungiančias du gretimus vienodos spalvos taškus. Negalima taškų jungti įstrižai. Vienas žaidėjas juodu pieštuku sujungia juodus taškus, antras — kitos spalvos taškus tokios pačios spalvos pieštuku. Žaidėjų linijos niekur neturi susikirsti. Laimi tas, kuris pirmasis sudaro „savo“ spalvos laužtę, jungiančią du priešingus žaidimų lentos kraštus. Daugelį metų buvo žinoma, kad egzistuoja strategija, padedanti pasiekti pergalę lošėjui, darančiam pirmąjį ėjimą, bet ją rasti pavyko ne iš karto. Ją atrado O. Grosas. Martinas Gardneris parašė Grosui laišką, tikėdamasis gauti ilgą ir sudėtingą uždavinio analizę, tikriausiai nelabai aiškią eiliniui skaitytojui. M. Gardnerio nuostabai, visą aiškinimą sudarė brėžinys, kurį matote 2 paveiksle, ir dvi tokios frazės: „Jūs pradedate lošimą ir darote ėjimą, pažymėtą juoda linija kairiajame apatiniame brėžinio



2 pav. Strategija, padedanti pasiekti pergalę bridž-it lošime

---

* Bridž-it angliškai skamba kaip moters vardas Bridžita. Lošimo pavadinimą galima išversti „sujunk tai“.

kampe. Toliau reikia lošti taip: kiekvieną kartą, kai tiesė, kurią nubrėžė priešininkas, kerta kokios nors punktyru pažymėtos atkarpos galą, jūs brėžiate tiesę, kertančią tos tiesės antrąjį galą.“ Ši sąmoninga išlošimo strategija padeda nugalėti tam, kuris daro pirmąjį ėjimą, bet ėjimų skaičius nebus minimalus. Pats Grosas taip charakterizavo aprašytąją strategiją: ji yra „bukas ginklas prieš buką lošėją, gudrus — prieš gudrų, bet ir vienu, ir kitu atveju padeda laimėti“.

Grosas sugalvojo nemažai išlošimo strategijų, bet išsirinko tą, apie kurią ką tik pasakojau. Ji turi privalumą - lengvai apibendrinama bet kokių matmenų lošimo lauko atveju.

Atkreipkite dėmesį, kad 2 paveiksle iš anksto nenumatytos atkarpos, jungiančios žaidimų lentos kraštus. Bridž-it lošimo taisyklės nedraudžia tokių atkarpų, bet brėžti jų nėra prasmės, nes pergalei pasiekto jos neturi įtakos. Jeigu lošiate taip, kaip parodyta brėžinyje , o jūsų priešininkas staiga nubrėžia atkarpą išilgai lentos pakraščio, tai jūs darote atsakomąjį ėjimą, sujungdami du kraštinius arba, jeigu jums tai labiau patiks, bet kuriuos kitus du lentos taškus. Gali atsitikti, kad šį atsitiktinį ėjimą jums paskui padiktuos strategiją, tuomet, nubrėžkite kokią nors kitą atkarpą. Papildoma atkarpa lentoje netrukdo, o kažkuriais atvejais net teikia tam tikrų privalumų. Suprantama, dabar, kai žinoma optimali pirmojo lošėjo strategija, bridž-it netenka viso patrauklumo. Jį lošti gali tik tie, kurie dar negirdėjo aiškinimo kaip laimėti.

2.2. Chalma†

Praėjusio šimtmečio pabaigoje Anglijoje plačiai buvo žinomas chalmos lošimas, iš kurio atsirado visa šeima iki šiol dar matematikų neišnagrinėtų lošimų.

1898 metais Bernardas Šo rašė: „Anglijoje priimta, kad kiekvienos atskiros šeimos, gyvenančios atskirame name, nariai sėdėtų atskiruose kambariuose ir arba tylėdami skaitytų knygą ar laikraštį, arba loštų chalmą...“

Iš pradžių chalmą lošė ant 16×16 matmenų šachmatų lentos. Vėliau pradėtos naudoti įvairiausių matmenų ir formų lentos. Lošimas, dar žinomas kaip „kiniškos šaškės“, yra vienas iš daugelio vėlesnių chalmos variantų. Čia M. Gardneris papasakojo apie vieną suprastintą variantą, kuris lošiamas paprastoje 8×8 langelių šachmatų lentoje. Iš jo galima sudaryti vieną įdomų ir vis dar neišspręstą galvosūkį iš pasijansų dėliojimo srities.

† Lošimo pavadinimas kilęs iš graikiško žodžio, reiškiančio „šuolį“.

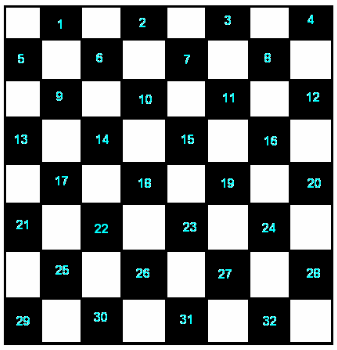
Pradedant lošimą, šaškės išdėstomos lentoje kaip įprasta. Ėjimai daromi beveik taip pat, tik su kai kuriais pakeitimais:

1) Draudžiama stumti šaškę, kuri ką tik peršoko per kitą;
2) Šokinėti galima ir per savo, ir per svetimos spalvos šaškes;
3) Galimi ėjimai atgal.

Vienu ėjimu galima nuosekliai peršokti per kelias bet kokios spalvos šaškes, stovinčias pagal langelio įstrižainę, bet derinti tokį ėjimą su paprastu ėjimu (be peršokimo) draudžiama. Kiekvienas lošėjas stengiasi užimti priešininko pradinę poziciją, ir laimi tas, kuriam pirmam pasiseka tai padaryti. Išlošti galima ir tada, kaip lentoje susidaro tokia situacija, kad priešininkas daugiau negali padaryti nei vieno ėjimo.

Analizuoti chalmos tipo lošimus yra sudėtinga. Štai jums dar vienas pavyzdys. Lyginiuose lentos pirmų trijų eilių kvadratuose įprastu būdu sustatykite dvylika šaškių, visus kitus langelius palikdami laisvus. Koks minimalus ėjimų skaičius reikalingas visoms šaškėms perkelti į priešingos lentos pusės tris eiles. Ėjimai daromi pagal chalmos taisykles: pirma, šaškę galima įstrižai perkelti ant gretimo juodo langelio pirmyn arba atgal ir, antra, leidžiama įstrižai peršokti per vieną arba kas antrą per kelias šaškes. Šokinėjant per šaškes, galima grįžti atgal, paskui vėl pirmyn; jeigu šaškės stovi kas langelis, tai visą sudėtingą šuolį galima atlikti vienu ėjimu. Taip pat, kaip ir chalmoje, nebūtina peršokti per visas galimas šaškes; nuoseklių šuolių seriją leidžiama nutraukti bet kurioje vietoje nepriklausomai nuo to, ar galima ją pratęsti.

Sprendžiant uždavinį, juodus langelius patogu numeruoti iš kairės į dešinę ir iš viršaus į apačią skaičiais nuo 1 iki 32 (3 pav.).



3 pav. Lentos numeracija

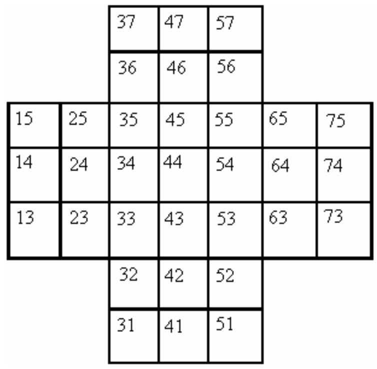
2.3. Soliteris

„Man didžiulį malonumą teikia žaidimas, vadinamas soliteriu, — 1716 metais rašė vokiečių matematikas Gotfridas Leibnicas viename iš laiškų. — Tik aš jį žaidžiu ne taip, kaip visi: pagal žaidimo taisykles, peršokus per langelį, reikia nuimti jame stovintį kauliuką, o aš labiau mėgstu atstatinėti tai, kas sugriauta, — užpildyti kauliukais visus tuščius langelius, kuriuos peršoka mano kauliukas. Be to, kyla naujas uždavinys: kaip iš kauliukų sukurti užsibrėžtą figūrą, jeigu žinoma, kad, laikantis įprastų taisyklių, ją galima sugriauti. „Bet kam visa tai?“. Atsakysiu: „Tam, kad tobulintume sugebėjimus išrasti nauja, nes mums būtina mokėti kurti visa, ką tik galima sugalvoti, vadovaujantis sveika nuovoka“.

Dvi paskutiniosios laiško frazės turi šiek tiek miglotą prasmę. Galbūt jos reiškia, kad bet kokią loginę ar matematinę struktūrą verta nagrinėti atidžiau.

Joks kitas žaidimas su kauliukais ant specialios lentos ilgai nebuvo taip plačiai žinomas, kaip soliteris. Šio žaidimo kilmė nežinoma. Jo išradimas kartais priskiriamas kažkokiam kaliniui, kalėjusiam Bastilijoje. Šis žaidimas buvo plačiai paplitęs Prancūzijoje praėjusio amžiaus pabaigoje.

Soliteriui žaisti reikia lentos su duobutėmis, į kurias dedami rutuliukai, arba su kiaurymėmis, į kurias smeigiami paprasti kaišteliai. Soliterį sėkmingai galima žaisti ir su kauliukai ar monetomis, nusibraižius lentą popieriaus lape (4 pav.). Kaip tik ant tokios lentos su trisdešimt trimis langeliais dažniausiai žaidžiamas soliteris Anglijoje, JAV. Prancūzai šią lentą papildo dar keturiais langeliai. Vakarų Europos šalyse galima aptikti abi lentų rūšis, tačiau prancūzų variantas žymiai mažiau paplitęs. Tai paaiškinama, matyt, tuo, kad prancūzų lentoje neįmanoma žaidimo pabaigoje palikti vieną kauliuką, jeigu partijos pradžioje buvo užimti visi, išskyrus centrinį, langeliai.



4 pav. Lenta soliteriui žaisti

Langelius įprasta numeruoti dviženkliais skaičiais: pirmasis skaitmuo reiškia stulpelio numerį, skaičiuojant paeiliui iš kairės į dešinę, antrasis — eilutės numerį, skaičiuojamą iš apačios į viršų.

Svarbus ir paprastai vienintelis skirtumas yra tas, kad visuose lentos langeliuose, išskyrus centrinį, sustatomi kauliukai. Žaidimo tikslas pasiekti, kad po daugelio „šuolių“ lentoje liktų tik vienas kauliukas. Baigtis atrodo ypač puiki, jeigu paskutinysis kauliukas lieka centriniame langelyje. „Šuolis“ reiškia štai ką: kauliukas perkeliamas į laisvą langelį per bet kurį gretimą kauliuką, tuo metu nuimamą nuo lentos. Šie šuoliai labai primena šaškių šuolius. Vienintelis skirtumas tas, kad, žaidžiant soliterį, kauliukus galima perstatinėti kairėn, dešinėn, viršun ir žemyn, bet draudžiama eiti įstrižai.

Kiekvienas ėjimas būtinai turi būti šuolis per kauliuką. Jeigu eilinis šuolis negalimas, žaidimas baigiamas, anot šachmatininkų, matu. Kiekvienas kauliukas vienu ėjimu gali paeiliui atlikti tiek šuolių, kiek leidžia susidariusi ant lentos pozicija, bet padaryti visus šuolius nebūtina. Bet kuri vienas paskui kitą einančių šuolių virtinė laikoma vienu ėjimu. Aišku, kad galvosūkiui išspręsti reikia trisdešimt vieno šuolio, bet ėjimų gali būti ir mažiau, nes keletas šuolių gali sudaryti vieną virtinę — vieną ėjimą.

Niekas nežino, kiek yra skirtingų būdų, kuriuos taikant, galima pereiti nuo pradinės pozicijos prie vienintelio kauliuko, likusio centriniame langelyje. išspausdinta daugybė sprendimų, bet jų sąrašas toli gražu nepilnas.

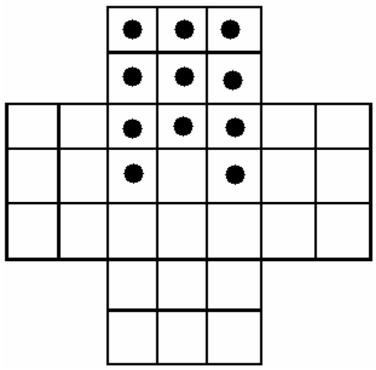
Kiek mažiausiai ėjimų reikia atlikti, kad iš trisdešimt dviejų kauliukų, sustatytų ant lentos žaidimo pradžioje, liktų tik vienas? Gana ilgai buvo manoma, kad tam reikia bent šešiolikos ėjimų, bet 1963 metais Haris O. Devis išnagrinėjo atvejį, kai pradinėje pozicijoje paliekamas tuščias 55-asis arba 52-asis langelis, arba vienas langelių, į kuriuos jie pereina, pasukant lentą ir atspindint ją veidrodyje. Pasirodė, kad, taip pradedant, pakanka penkiolikos ėjimų. Sakykim, žaidimo pradžioje tuščias 55 langelis, o pabaigoje kaip tik jame lieka paskutinis kauliukas. Tuomet Devio sprendimas yra toks: 57—55, 54—56, 52—54, 73—53, 43—63, 37—57—55—53, 35—55, 15—35, 23—43—45—25, 13—15—35, 31—33, 36—56—54—52—32, 75—73—53, 65—63—43—23—25—45, 51—31—33—35—55. Kai pradinėje pozicijoje tuščias 52 langelis, uždaviniui išspręsti reikia penkiolikos ėjimų, be to, paskutinysis kauliukas lieka 55 langelyje.

Drauge su Deviu dirbęs Veidas E. Filpotas, gavęs daug svarbių rezultatų soliterio žaidimo teorijoje, žaidžiant ne tik ant tradicinių, bet ir ant izomerinių (trikampių) lentų.

Uždavinys, kuriame ir pradinis, ir galinis yra centrinis langelis, laikomas klasikiniu. Žinoma daugybė jo sprendimų, kurių ėjimų skaičius nebūtinai minimalus. Neretai tie sprendimai nuostabiai simetriški. Išnagrinėsime vieną pavyzdį.

„Židinys“: 42—44, 23—43, 35—33, 43—23, 63—43, 55—53, 43—63, 51—53, 14—34—54—52, 31—51—53, 74—54—52, 13—33, 73—53, 32—34, 52—54, 15—35, 75—55. Padarę visus išvardytus ėjimus, pamatysite, kad uždavinys atitinka poziciją „Židinys“, pavaizduotą 5 paveiksle.

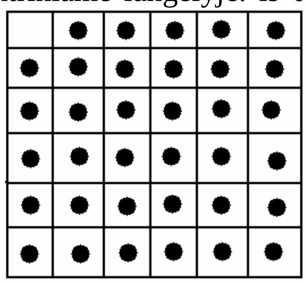
Soliterio žaidimo matematinė teorija išnagrinėta dar labai silpnai. Atskirai imant, iki šiol lieka neišspręstas vienas pagrindinių įdomiosios matematikos uždavinių: išmokti nustatyti, ar galima kokią nors poziciją, susidariusią žaidžiant, laikyti iš anksto užsibrėžtu paprastesniu figūrų išdėstymu. Matematikos dėstytojui M. Čerošui pavyko įrodyti daug teoremų, kuriomis remiantis, galima iš karto teigti, kad kai kurie uždaviniai, kilę, žaidžiant soliterį, apskritai neturi sprendinio.



5 pav. „Židinys“

Čerošo metodą pritaikysime klasikiniam uždaviniui, kai žaidimo pabaigoje yra laisvas tik vienas centrinis langelis. Iš karto matyti, kad iš kiekvienos lentos eilės galima nuiminėti po tris kauliukus tol, kol liks tušti tik kurie nors tušti langeliai, pavyzdžiui, 45 ir 43. kadangi jie kartu su centriniu langeliu sudaro galimą langelių trejetą (trys gretimi langeliai vertikaliai), galime nuimti stovinčius juose kauliukus, o vieną kauliuką pastatyti centre. Taigi parodėme, kad pradinė pozicija, turinti pilną kauliukų rinkinį ir tuščią langelį lentos centre, yra ekvivalenti pozicija su vieninteliu kauliuku, stovinčiu centriniame langelyje. iš čia išplaukia, kad uždavinys, kuriame susidaro tokia pradinė pozicija, išsprendžiamas.

1960 metais inžinierius Noblas D. Karlsonas iškėlė įdomų klausimą: kokie mažiausi matmenys kvadratinės lentos, nuo kurios galima, laikantis soliterio žaidimo taisyklių, nuimti visus kauliukus, išskyrus vieną, kai pradinėje pozicijoje tuščias langelis buvo kvadrato kampe? Remiantis Čerošo metodu, nesunku parodyti, kad iškeltos sąlygos nepatenkina kvadratai, kuriuose išilgai kraštinės yra nedalus iš trijų langelių skaičius.



6 pav. Karlsono uždavinys lentai 6x6

Tačiau galima įrodyti, kad ant kvadratinės lentos 3×3 uždavinys neišsprendžiamas. Todėl Karlsono uždaviniui išspręsti labiausiai tiks kvadratas 6×6 (6 pav.). Jeigu sprendimas egzistuoja, paskutinysis kauliukas turi likti arba kairiajame viršutiniame langelyje, kuris žaidimo pradžioje buvo tuščias, arba viename iš trijų jam ekvivalenčių langelių (kairįjį viršutinį langelį pažymėjus 1 ir tęsiant numeraciją iš kairės į dešinę, pirmajam bus ekvivalentūs 4, 19 ir 22 langeliai). Ar turi Karlsono uždavinys sprendinį? Taip, turi. Pats Karlsonas sugalvojo dvidešimt devynių ėjimų sprendimą, be to, paskutinysis kauliukas lieka 22 langelyje.

Standartinę soliterio žaidimo pradinę poziciją (tuščias langelis lentos centre) galima pertvarkyti į neišsprendžiamą poziciją, padarius iš viso tik keturis ėjimus: šuolį į centrą, šuolį per centrą, vėl šuolį į centrą ir dar kartą šuolį per centrą. Pirmąjį ir paskutinįjį ėjimą reikia daryti viena kryptimi. Keturiais ėjimais galima sudaryti tik vieną neišsprendžiamą poziciją (mažesniu ėjimų skaičiumi sudaryti neišsprendžiamą poziciją iš viso negalima). Penkiais ėjimais galima sudaryti dvi neišsprendžiamas pozicijas.

2.4. Žaidimas virvute

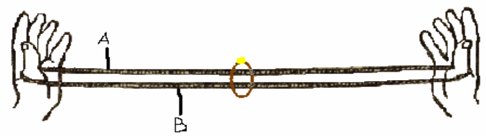
Panašiai kaip japonų popieriaus lankstymo senovės menas — origami — žavus figūrų, kurias galima išlankstyti iš paprasto švaraus popieriaus lapo, įvairove, žaidimai virvute, arba kaip juos vadina Anglijoje ir JAV, „kačių lopšeliai“, žavūs žaismingų ir nepaprastai gražių raštų, kuriuos galima išpinti įprasta virvės kilpa, įvairove. Žaidimui reikia labai paprasto inventoriaus: paimti maždaug pusantro metro ilgio virvutę ir surišti jos galus. Gautąją kilpą galimą laikyti paprastos uždaros kreivės modeliu. Atliekant visokias manipuliacijas virvute, nesikeičia tik virvutės ilgis ir jos topologinės savybės, todėl žaidimą virvute galima laikyti topologiniu žaidimu plačiąja prasme.

Žaidimai virvute skirstomi į du pagrindinius tipus: pirmajam priklauso visokie „išnarpliojimai“ ir „suraišiojimai“, antrajam — virviniai raštai. Pirmojo tipo žaidimuose atrodo, jog virvutė tarytum apraizgyta apie kažkokį daiktą ir net perpinta su juo, tačiau, patraukus virvutę už galo, ji, jūsų nuostabai, stebuklingai išsinarplioja. Kitame to paties tipo žaidimo variante virvutė nesuprantamu būdu suveržia kokį nors daiktą. Šių žaidimų yra labai įvairių: virvutė perkišama per švarko kilpą ir surišama mazgu, paskui, vos tik truktelėta už galo, ji keistu būdu atsiriša, kilpos, užmestos ant kaklo, rankos, kojos (ir net ant nosies), nesuprantama kaip išsileidžia ir t. t. Kartai virvutė užmezgama ant kieno nors smiliaus. Po kelių žaismingų triukų belaisvis išlaisvinamas. Yra daugybė apgavikiškų fokusų, kuriuos seniau demonstruodavo mugėse, variantų.

<u>2.4.1. Pirmojo tipo žaidimai</u>

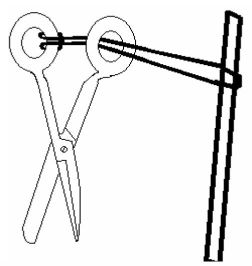
Visai kitas fokuso tipas yra žiedo nuėmimas nuo per jį perkištos virvelės kilpos. Virvelės kilpą, prakištą pro žiedą, užmaukite ant abiejų žiūrovo rankų nykščių (7 pav.). Paprasčiausia žiedą nuimti taip. Ištiestą kairės rankos pirštą uždėkite ant abiejų virvelių taške A. Dešine ranka paimkite virvelę, kuri arčiau jūsų, taške B ir, pakėlę ją, užnerkite ant žiūrovo dešinės rankos nykščio (jums iš kairės) rato judesiu (iš pradžių į save, paskui nuo savęs). Pamažu lenkite kairės rankos smilių, kad abi kilpos atšakos įsitemptų. Patraukite žiedą kuo daugiau į kairę. Dešine ranka paimkite viršutinę virvutę žiedo dešinėje ir kilstelėję užnerkite ją ant žiūrovo dešinės rankos nykščio (šį kartą rato judesys turi būti atvirkščias pirmajam: iš pradžių nuo savęs, paskui į save).

7 pav. Fokusas su žiedeliu



Sustokite ir paprašykite žiūrovą stipriai suspausti abiejų rankų nykščių ir smilių galus, „kad kilpa negalėtų nusmukti“. Paimkite žiedą dešine ranka ir paprašykite žiūrovą, jums suskaičiavus iki „trijų“, išskėsti rankas. Sukomandavę „trys“, ištraukite kairės rankos smilių iš kilpos. Žiedas liks jūsų dešinėje rankoje, o virvinė kilpa — ant žiūrovo pirštų. Šis fokusas ypač patinka vaikams, nes jis labai parastas, ir jie gali be vargo demonstruoti jį savo draugams.

8 paveiksle fokusas apie daikto „išlaisvinimą“. Pririškite žirkles prie vieno virvutės galo taip, kaip parodyta paveiksle, o kitą virvutės galą pririškite prie kokio nors pagaliuko. Reikia „išlaisvinti“ žirkles, neperkirpus virvutės ir neatrišus jos nuo pagaliuko.



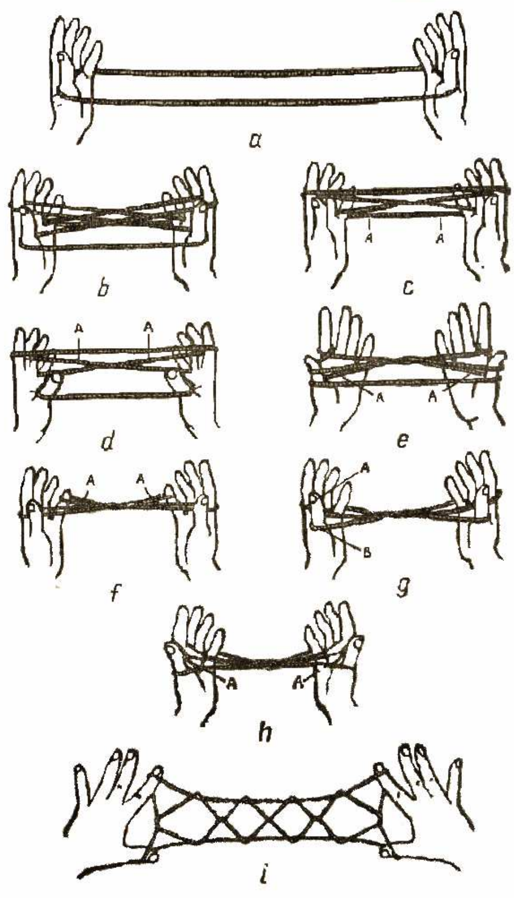
8 pav. Kaip, neperpjovus virvutės išlaisvinti žirkles

<u>2.4.2. Antrojo tipo žaidimai</u>

Šiam tipui priklauso įvairūs raštai ir figūros, kurias galima išpinti iš virvutės kilpos, užnertos ant abiejų rankų. Virvelinių raštų pynimo menas buvo labai paplitęs daugelio civilizacijų vystimosi pagrindiniame etape. Virveliniai raštai buvo viena pagrindinių pramogų daugelyje eskimų kartų. Gana išvystytas virvelinių raštų menas tarp Šiaurės Amerikos indėnų ir Australijos aborigenų, Naujosios Zelandijos, Karolinų, Havajų ir Maršalų salų, Filipinų, Naujosios Gvinėjos čiabuvių. Per daugelį šimtmečių virvelinių raštų pynimo menas šiose tautose (ypač eskimų) taip ištobulėjo, kad galėtų sėkmingai varžytis su figūrų išlankstimo iš popieriaus menu, paplitusiu Rytų šalyse ir Ispanijoje. Buvo sugalvota tūkstančiai raštų. Kai kurie jų buvo tokie sudėtingi, jog iki šiol dar neišaiškinta, pagal kokią operacijų seką būtų galima „ant pirštų" gauti tuos raštus. Pirmykščių genčių meistrai pynė savo raštus nepaprastai greitai, dažniausiai tik rankų pirštais (nors kartais prireikdavo dantų ir kojų pirštų). Be to, neretai demonstravimą papildydavo kokia nors daina ar įdomios istorijos pasakojimas.

Virveliniai raštai paprastai buvo vadinami pagal tuos daiktus, kuriuos jie primindavo. Dauguma tų „realistinių" figūrų pasirodo pinant: tarp abiejų rankų delnų netikėtai blyksteli žaibo zigzagas, lėtai leidžiasi saulė, šuoliuoja žirgas, raitosi gyvatė ir t. t.

Papasakosiu jums kaip reikia supinti „Jokūbo kopėčias". Reikia paimti pusantro metro minkštą virvę, surišti jos galus ir „parodyti, ką gali". Truputį pasipraktikavus, „Jokūbo kopėčias" galima supinti greičiau kaip per 10 sekundžių.Pradinė padėtis tokia pati, kaip daugelio virvelinių raštų: kilpa uždėta ant abiejų rankų nykščių ir mažylių pirštų (9 pav., ***a***). Dešinės rankos smiliumi užkabinkite virvę tarp kairės rankos mažylio piršto ir nykščio ir, nenuleisdami virvės nuo smiliaus, gražinkite dešine ranka į pradinę padėtį. Kairės rankos smiliumi užkabinkite virvę tarp dešinės mažylio ir nykščio (kairės rankos smilius šiuo atveju turi pralįsti pro virvę, užkabintą ant dešinės rankos smiliaus) ir patraukite kairę ranką į kairę. Gausite figūrą, kuri parodyta 9 paveiksle, ***b***. Išlaisvinę abiejų rankų nykščius ir įtempę virvę, gausite figūrą, pavaizduotą 9 paveiksle, ***c***. Pasukite rankas delnais nuo savęs, kad būtų patogiau nykščių galais užkabinti tolimiausią virvės dalį taškuose, 9 paveiksle, ***c***, pažymėtas raidėmis A. Užkabinę atsukite rankas atgal į pradinę padėtį. Dalis, buvusi toliausiai nuo jūsų, pralįs po visomis kitomis virvės dalimis ir bus arčiausiai jūsų (9 pav. ***d***). sulenkite nykščius virš artimiausių virvės dalių ir užkabinkite jais kitas dalis taškuose, 9



9 pav. Kaip supinti Jokūbo kopėčias

paveiksle, ***d***, pažymėtus raidėmis A. Numeskite kilpas nuo mažylių pirštų. Gausite 9 paveiksle, ***c***, pavaizduotą virvelinę figūrą. Dabar mažuosius pirštus sulenkite virš artimiausių jiems virvės dalių ir vidine mažųjų pirštų puse užkabinkite virvę taškuose, 9 paveiksle, ***e***, pažymėtais raidėmis A. Išlaisvinę nykščius, gausite figūrą, pavaizduotą 9 paveiksle, ***f***. Sulenkite nykščius virš dviejų artimiausių jiems virvės dalių ir vidine jų puse užkabinkite kitas (trečias nuo jūsų) virvės dalis taškuose, 9 paveiksle, ***f***, pažymėtus raidėmis A. Grąžinkite nykščius į pradinę padėtį. Gausite 9 paveiksle, ***g***, pavaizduotą figūrą.

Dešinės rankos nykščiu ir smiliumi suimkite virvę taške A (9 pav., ***g***), patraukite į save ir užmeskite kilpą ant kairės rankos nykščio. Tuomet paimkite kilpą, kuri jau buvo uždėta ant kairės rankos nykščio, taške B (9 pav., ***g***) ir pakelkite tą kilpą, drauge nuleisdami ją nuo nykščio. Šitoks kilpų pasikeitimas dažnai pasitaiko virveliniuose raštuose. Kaire ranka atitinkamai sukeiskite kilpas ant dešinės rankos nykščio. Po visų operacijų turi išeiti 9 paveiksle, ***h***, pavaizduota figūra.

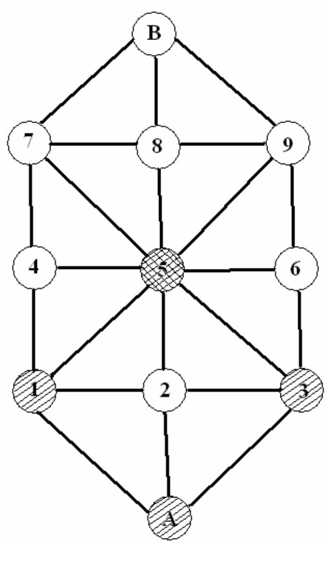
Dabar jau viskas paruošta paskutiniam judesiui. Sulenkę smilius, iškiškite jų galus į mažus trikampius, 9 paveiksle, ***h***, pažymėtus raidėmis A. Išvaduokite iš kilpų mažylius pirštus ir kartu pasukite abi rankas delnais nuo savęs, kuo stipriau išskėtę nykščius ir smilius. Ištempkite virvę. Jeigu viską atlikote teisingai, pamatysite kilimėlį iš rombų, kuris pavaizduotas 9 paveiksle, ***i***. Netikėtas gražių raštų susidarymas iš virvelinių pynių chaoso yra viena iš maloniausių daugelio manipuliacijų virvute savybių.

2.5. Matematiniai žaidimai specialiose lentose

<u>2.5.1 Prancūzų karinis žaidimas</u>

Šių žaidimų taisyklės labai paprastos, lentas jiems nesudėtinga nupiešti ant popieriaus arba kartono. Žaidimai tikrai patiks visiems nuo mažo iki didelio.

Prancūzų karinis žaidimas yra puikus žaidimo vienas prieš vieną pavyzdys. Jame labai paprastos taisyklės derinamos su labai įmantria strategija. Šis žaidimas buvo populiarus prancūzų kariniuose sluoksniuose per visą 1870 —1871 metų prancūzų-prūsų karą ir po jo. Deja, nuo to laiko šis žaidimas visai pamirštas.



10 pav. Prancūzų karinis žaidimas

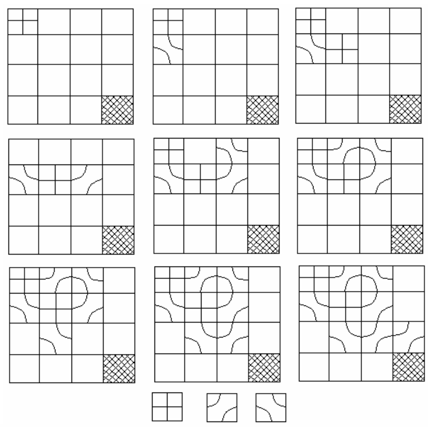
Šio žaidimo laukas pavaizduotas 10 paveiksle. Siekiant suprastinti taisyklių aiškinimą, skrituliukai sunumeruoti. Vienas žaidėjas („baltieji“) turi tris kauliukus, kuriuos jis žaidimo pradžioje stato ant trijų šviesių skrituliukų: A, 1 ir 3. Antrasis žaidėjas („juodieji“) turi iš viso vieną kauliuką, kuris prieš žaidimo pradžią užima 5 skrituliuką. Žaidėjai daro ėjimus iš eilės; pradeda baltieji. Juodasis kauliukas gali pereiti ant bet kurio gretimo lizdelio. Baltasis kauliukas eina taip pat, bet jam draudžiama judėti atgal, t. y. jis gali pereiti ant bet kurio gretimo lizdelio, esančio kairėje, dešinėje arba priekyje nuo to skrituliuko, ant kurio jis yra. Kauliukai vienas kito „nenumuša“. Baltieji laimi tuo atveju, jeigu jiems pavyksta uždaryti juodąjį kauliuką, t. y. įvaryti jį į skrituliuką, iš kurio šis negalės padaryti nė vieno ėjimo. Paprastai juodasis kauliukas tuo atveju papuola į skrituliuką B, bet kartais tokia pati situacija susidaro, juodiesiems užėmus 4 arba 6 skrituliuką. Visais kitais atvejais laimi juodieji. Juodieji, siekdami pergalės, turi visą laiką savo vienintelį kauliuką laikyti už varžovo kauliukų, neduodami progos varžovui užeiti iš užnugario. Juodieji laimi ir tuo atveju, kai tie patys ėjimai pradeda kartotis be galo daug kartų.

Išmokti žaisti šį žaidimą ne sudėtingiau, negu žaisti kryžiukais ir nuliukais, bet jis žymiai azartiškesnis, ir jo analizė sudėtingesnė. Eduardas Liuka sugebėjo parodyti, kad baltieji, racionaliai žaisdami, gali kiekvieną partiją laimėti, tačiau paprastos laimėjimo strategijos nėra ir žaidime visada gausu žabangų ir staigmenų. Geriausias iš pirmo žvilgsnio ėjimas pasirodo esąs blogiausias. Jeigu juodieji pakankamai patyrę, jie lengvai laimi prieš mažai įgudusį varžovą.

2.5.2. Topologinis* žaidimas - blekas

Topologiniai žaidimai — tai žaidimai, kuriuos žaisdami žaidėjai piešia kreives, vingiuojančias per visą lentą. 1960 metais Viljamas L. Blekas, dar būdamas studentu, ėmėsi tyrinėti heksą ir bridž-itą, dėl to atsirado naujas topologinis žaidimas, kurį išradėjo garbei draugai pavadino „bleku“.

Šiam žaidimui galima paruošti nupieštų kvadratėlių rinkinį, tačiau jam gali praversti ir languotas popierius.



11pav. Topologinis žaidimas blekas

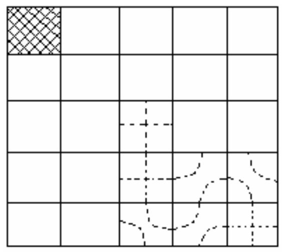
* Topologija — matematikos šaka, tirianti bendriausias erdvių ir geometrinių figūrų savybes, kurių nepakeičia tolydžiosios transformacijos.

Lentos matmenys bet kokie; geriausia turbūt standartinė lenta 8×8, bet, aiškinant taisykles, patogiau imti 4×4 dydžio žaidimo lauką. Kai laukas bus paruoštas, vienas varžovas pradeda žaidimą: langelyje, esančiame kairiajame viršutiniame kampe (11 pav.), pastato kryžių. Antras žaidėjas turi pritaikyti šiam kryžiui tęsinį, nupiešęs bet kuriame gretimame langelyje vieną iš trijų figūrų, parodytų apatinėje 11 paveikslo dalyje. Kiekvieną jų sudaro dvi linijos. Viena linija jau ant lentos nupieštos figūros tęsinys, antroji sujungia tas kvadratėlio kraštines, kurios nesusikerta su pirmąja linija.

Žaidėjai ėjimus daro peiliui. Kiekvienu ėjimu reikia pratęsti kreivę į vieną gretimų langelių, stengiantis, kad kreivė nesusikirstų su žaidimo lauko riba. Tas, kuris perkirs ribą, patirs pralaimėjimą. Žaidėjas laimės tuo atveju, jeigu jam pavyks nubrėžti kreivę iki subrūkšniuoto langelio dešiniajame apatiniame kampe. 11 paveiksle parodyta tipinė žaidimo ant sumažintos lentos schema. Įvaręs varžovą į dešinįjį viršutinį kampą, pirmasis žaidėjas laimi, nes nepriklausomai nuo pasirinkto tęsinio kreivė turi susikirsti su lentos riba.

Bleko žaidimas itin įdomus dėl to, kad netrukus po jo pasirodymo Bleko bičiulis ir mokslo draugas Elvinas R. Berlkempas surado strategiją, garantuojančią pergalę vienam žaidėjų. Ši strategija taikoma bet kokių matmenų su bet kokiu kraštinių santykiu stačiakampiams laukams. Sužinoję teisingą strategiją, jūs tuoj pat nustosite domėtis žaidimu, bet aš jums ją papasakosiu.

Iš pradžių išnagrinėsime, kaip žaidžiama lentoje su nelyginiu langelių skaičiumi, pavyzdžiui, lentoje 5×5. tuomet pirmojo žaidėjo strategijos esmė yra įsivaizduoti, kad visa lenta, išskyrus vieną langelį dešiniajame apatiniame kampe, padengtą domino kauliukais (12 pav.). Iš tikrųjų jokių domino, aišku, nėra. Antrasis žaidėjas kiekvienu ėjimu pratęsia kelią nauju domino kauliuku, o pirmasis žaidėjas turi veikti taip, kad kelias liktų ant to paties kauliuko, ant kurio jis baigėsi prieš tai buvusiu kauliuku. Aišku, kad galų gale jis arba bus priverstas perkirsti ribą, arba atsidurs ant ribos langelio, esančio dešiniajame apatiniame kampe.

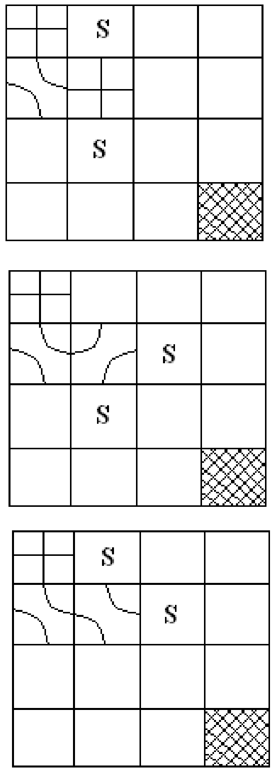


12 pav. Optimali strategija, žaidžiant bleko žaidimą 5x5 dydžio lentoje

Pereisime prie lentų, turinčių lyginį langelių skaičių. Šiuo atveju antrojo žaidėjo laimėjimo strategija šiek tiek sudėtingesnė. Jis turi įsivaizduoti, kad domino kauliukais padengta visa lenta, išskyrus viršutinį kairįjį ir apatinį dešinįjį kampinį langelį.

Kadangi šie du langeliai yra vienos spalvos (tarkime, kad lenta nuspalvinta taip pat, kaip šachmatų), visų kitų langelių, aišku, negalima ištisai padengti domino kauliukais, nes du vienos spalvos langeliai visuomet liks atidengti. Elvinas R. Berlkempas, nuodugniai ištyręs bleko žaidimą, šiuos du langelius vadina „parskeltu domino“ ir, atsižvelgdamas į tai, siūlo tokį sąmoningą manevrą.

Pirmasis antrojo žaidėjo ėjimas pavaizduotas 13 paveikslo viršuje. Tuomet pirmasis žaidėjas priverstas eiti į antrą pagrindinės įstrižainės langelį. Tuomet trys atsirandančios galimybės parodytos 13 paveiksle. Visais trimis atvejai linija, nepriklausanti tolydžiai kreivei, jungia du vienos spalvos langelius. Tie du langeliai, 13 paveiksle pažymėti raidėmis S, laikomi „perskeltu domino“, o visus kitus langelius (išskyrus vieną kvadratėlį dešiniajame apatiniame kampe) dabar galima padengti paprastais domino kailiukais. Padengimo būdas, kaip ir anksčiau, gali būti bet koks. Lentoje su nelyginiu langelių skaičiumi taikydamas domino metodą, antrasis žaidėjas laimi.



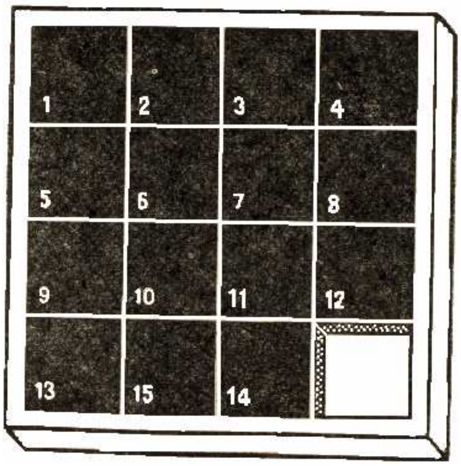
13 pav. Optimali strategija, žaidžiant bleko žaidimą lentoje su lyginiu langelių skaičiumi

2.6. Žaidimas 15 ir kiti galvosūkiai

„Seni galvosūkių šalies gyventojai tikriausiai prisimena, — rašė Semas Loidas savo knygoje, — kaip septintojo dešimtmečio pradžioje aš išjudinau visą pasaulį maža nedidelių kubelių prikrauta dėžute, kurią pavadinau žaidimu 15.“

Žaidimas 15 — yra penkiolika sunumeruotų kubelių kvadratinėje dėžutėje taip, kaip vaizduojama 14 paveiksle. Perkeliant iš eilės po vieną kubelį, reikėdavo pasiekti, kad 14 ir 15 numeriai pasikeistų vietomis ir kad visi kubeliai gulėtų iš eilės, be to, viską perstačius, apatinis dešinysis kampas turi būti laisvas, kaip ir žaidimo pradžioje.

Visuotinis susidomėjimas šiuo žaidimu greit

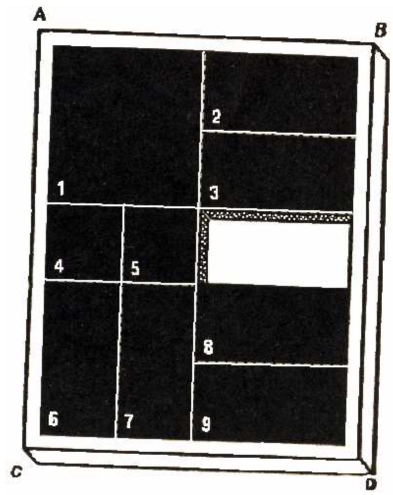


14 pav. Žaidimas 15

apėmė ir Angliją, ir Europą. „Žmonės tiesiog paišo per tą galvosūkį. — tęsė Loidas. — iš lūpų į lūpas keliavo pasakojimai apie krautuvininką, pamiršusį atidaryti savo parduotuvę, apie šventiką, kuris po gatvės žibintu prastovėjo ilgą žiemos naktį, vildamasis prisiminti, kaip jam pavyko išspręsti uždavinį...

Keletui matematikų paskelbus, kad šio galvosūkio išspręsti negalima, juo pradėta mažiau domėtis. Bet tai buvo netiesa.

Jeigu didįjį stačiakampį sudaro ne kvadratukai, o įvairios geometrinės figūros, žaidimo 15 teorijos, pasirodo, pritaikyti negalima. Loido galvosūkio pasisekimas padėjo atsirasti daugybei analogiškų galvosūkių, kuriuose naudojamos įvairiausių formų geometrinės figūros.



15 pav. „Tėvuko galvosūkis“

Šiuos galvosūkius galima spręsti vienam, be partnerio. Specialiai tam pasiruošti nereikia: turint žirkles ir gabalą kartono, visa, ko reikia, galima paruošti tiesiog per keletą minučių.

Vienas tų galvosūkių vaizduojamas 15 paveiksle, tai „Tėvuko galvosūkis“. Užduotis tokia: reikia, perstumiant po vieną figūrą, neperkeliant vienos per kitą ir neišeinant iš didžiojo stačiakampio ribų, perstumti kvadratą 1 iš kampo A į kampą B.

Perstumti kvadratą į kampą B nesudėtinga. Tam tikslui figūros pastumiamos tokia tvarka: 5, 4, 1, 2, 3, 4 (aukštyn ir dešinėn), 1, 6, 7, 8, 9, 5, 4, 1, 6, 7, 8, 9, 4 (kairėn ir žemyn), 8, 7, 6, 2, 3, 1. pateiktasis sprendinys sudarytas iš minimalaus skaičiaus, lygaus 25, ėjimų. Dideliam kvadratui iš kampo A į kampą C perstumti reikės ne mažiau kaip 59 ėjimų.

Niekas nežino, kaip atsirado šis nuostabus galvosūkis. 1926 metais Amerikoje jis buvo pardavinėjamas kaip „Tėvuko galvosūkis“.

Taip pat yra ir daugiau įvairiausių tokio tipo galvosūkių. Tai „Rudas asilas“, „Penketukas vienoje eilėje“, „Močiutės galvosūkis“ „Tigras“ ir kiti.

3. UŽDAVINIAI

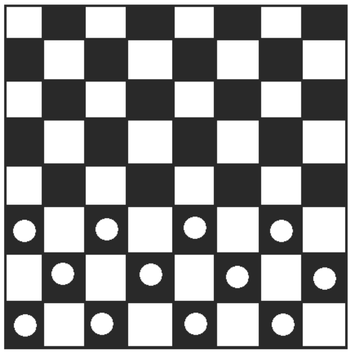
Siūlomų žaidimų uždaviniai yra gana įdomūs, pritraukiantys, verčiantys pagalvoti, reikalaujantys loginio mąstymo.

Dabar pateiksiu keletą uždavinių, o kitame skyrelyje ir jų sprendimų atsakymus.

1.

Chalma

Kaip ėjimais, kuriuos leidžia chalmos taisyklės, perkelti dvylika šaškių iš vieno lentos krašto į priešingą?



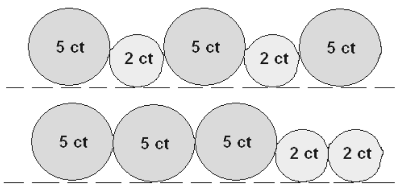
1 pav. Chalmos uždavinys

2.

Monetų rūšiavimas

Monetų rūšiavimas. Išdėstykite gretoje dvi 2 ct ir tris 5 ct monetas, kaip parodyta 2 paveikslo viršuje. Minimaliu ėjimų skaičiumi reikia sudaryti gretą, pavaizduotą paveikslo apačioje. Daroma taip. Dviem pirštais, pavyzdžiui, didžiuoju ir smiliumi, prispauskite dvi gretimas monetas, išstumkite jas aukštyn iš gretos ir perstatykite į bet kurią įsivaizduojamos tiesės, pažymėtos punktyru, vietą. Paimtos monetos turi visą laiką liestis, ir jų negalima sukeisti vietomis: kairioji poros moneta visą laiką bus kairėje, dešinioji — dešinėje. Perstatinėjant monetas, jas galima įspraudinėti bet kurioje vietoje, tarp atskirų porų galima palikti bet kokius tarpus, tačiau pabaigoje visi tarpai turi būti užpildyti. Visa grandinėlė nebūtinai turi būti ištisai pradinėje vietoje, bet gali pasislinkti ir punktyrinė tiese.

Jeigu būtų galima perstatyti dvi vienodas monetas, galvosūkį būtų galima išspręsti trimis būdais, bet uždaviniui reikia keturių ėjimų. Taigi kokie jie?

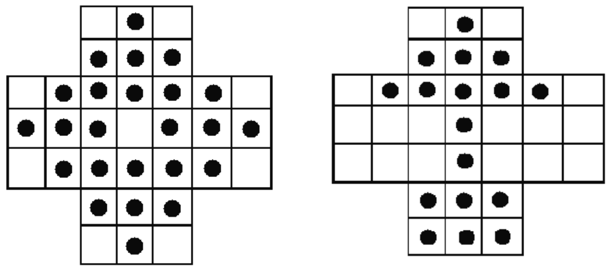


2 pav. Galvosūkis su 2 ct ir 5 ct monetomis

3.

Soliteris

Išspręskite šiuos soliterio uždavinius.

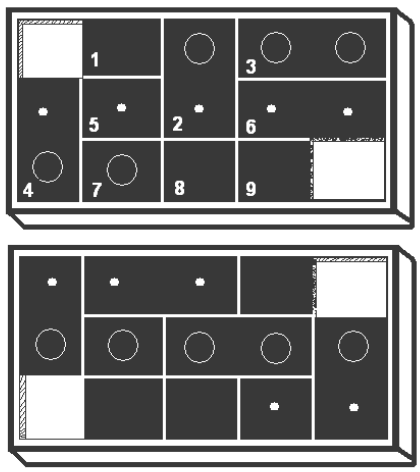


3 3 pav. „Pasuktas kvadratas“ „Lempa“

4.

Penketukas

1934 metais Londone gimė penketukas. Tam įvykiui pažymėti buvo išleistas galvosūkis „Penketukas vienoje eilėje“. Penki rutuliukai vaizduoja penkių vaikų galvutes. Užduotis tokia: 4 paveikslo viršutiniame kadre vaizduojamą poziciją reikia pertvarkyti į kitą poziciją, vaizduojamą to paties paveikslo apatiniame kadre.



4 pav. „Penketukas vienoje eilėje“

5.

Logika

Loginio pobūdžio uždavinys.

Žaisdami mokiniai susiskirstė į dvi grupes: į „rimtuosius“, kurie teisingai atsako į bet kurį klausimą, ir į „pokštininkus“, kurie į bet kuriuos klausimus atsako neteisingai.

Tai sužinojęs mokytojas paklausė Mindaugo, ar jis rimtas mokinys, ar pokštininkas. Neišgirdęs Mindaugo atsakymo, jis paklausė Dariaus ir Kęstučio, sėdėjusių greta su Mindaugu: „Ką sakė man Mindaugas?“, Darius atsakė: „Mindaugas rimtas“, o Kęstutis: „Mindaugas pokštininkas. Kuo buvo Darius ir Kęstutis?

6.

Liūtai ir tigrai

Liūtai ir tigrai.

Tramdytojui reikia išvesti 5 liūtus ir 4 tigrus į cirko areną. Keliais būdais galima sustatyti tuos žvėris į eilę, jei du tigrai negali eiti vienas paskui kitą?

7.

Perstatymas

1) Kiek yra būdų iš žodžių – NAMAS, ANANASAS sudaryti skirtingus junginius?

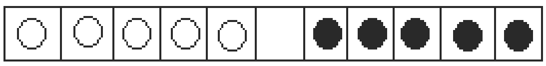
2)Kiek yra būdų perstatyti žodžių - ONA, ŪMĖDĖ, ANONIMAS raides taip, kad dvi balsės nestovėtų greta?

8.

Liuko uždavinys

Liuko uždavinys.

Šaškės išdėstomos 5 paveiksle nurodyta tvarka. Reikia baltąsias šaškes sukeisti vietomis su juodosiomis, keliant baltąsias tik į dešinę, o juodąsias tik į kairę, kad bet kuri šaškė būtų perkeliama arba į kaimyninį tuščią langelį, arba į tuščią langelį, esantį tuoj po artimiausios kitos spalvos šaškės.



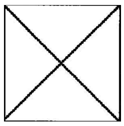
5 pav.

9.

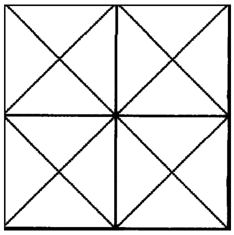
Pastabumas

Uždavinys „geometriniam pastabumui“ ugdyti.

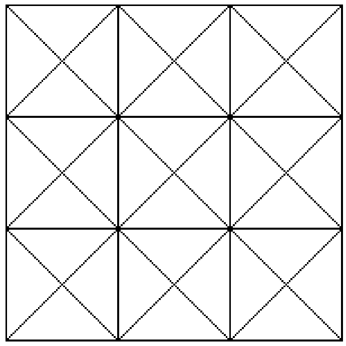
Kiek trikampių, kvadratų ir stačiakampių yra 6 paveiksle**?**



6.1 pav.



6.2 pav.



6.3 pav.

10.

Du mokiniai žaidžia tokį žaidimą. Prieš juos padėtos dvi krūvelės degtukų. Vienas mokinys sudeda į dėžutę kurią nors krūvelę, o likusią perskiria į dvi dalis taip, kaip jam patinka. Antrasis taip pat sudeda į dėžutę vieną iš naujų krūvelių, o kitą dalija į dvi dalis ir t.t. Pralaimi tas, kuris nebegali padalyti krūvelių todėl, kad kiekvienoje liko po vieną degtuką. Kas laimės (pradedantysis ar jo partneris), žaidžiant teisingai, jei iš pradžių vienoje krūvelėje buvo 20 degtukų, o kitoje – 25?

11.

Kortelės

Ant stalo guli 100 kortelių. Kortelėse po vieną surašyti visi skaičiai nuo 1 iki 100. Du žaidėjai pakaitomis(tą, kuris pradeda, pavadinkime pirmuoju) nuiminėja nuo stalo po vieną kortelę tol, kol ant stalo lieka 2 kortelės. Kai ant stalo telieka 2 kortelės, yra suskaičiuojama jose parašytų skaičių suma. Jeigu ta suma dalijasi iš 3, tai laimi pirmasis žaidėjas, o jeigu nesidalija, tai laimi antrasis.

Ar kuris nors iš žaidėjų turi laiminčiąją strategiją, t.y. ar gali jis taip žaisti, kad visada laimėtų, nepaisant to, ką kitas bedarytų?

12.

1001

Du lošėjai pakaitomis į 12 langelių eilutę įrašo po skaitmenį, kol užpildo visus 12 langelių.(leidžiama įrašyti į bet kurį langelį bet kurį iš skaitmenų.) Ar gali antras lošėjas pasiekti, kad gautasis skaičius dalytųsi iš 1001?

13.

Saldainių dalybos

Į n dėžučių sudėta 2n saldainių. Mergaitė ir berniukas pakaitomis ima po saldainį. Pirmoji saldainį ima mergaitė. Įrodykite, kad berniukas gali imti saldainius taip, kad du paskutiniai saldainiai būtų vienoje dėžutėje.

14.

Akmenukai

Ant stalo guli trys krūvelės akmenukų. Vienoje krūvelėje yra vienas, kitoje – du, trečioje – trys. Du žaidėjai paeiliui ima akmenėlius. Vienu kartu galima paimti kiek norima akmenėlių iš vienos krūvelės. Laimi tas, kas paima paskutinį akmenėlį. Įrodykite, kas pradedantysis žaidimą tikriausiai pralaimės.

15.

Monetos ant stalo

Turime stačiakampį stalą 1m × 2m ir maišą 1ct. monetų. Du žaidėjai pakaitomis deda tas monetas ant stalo. Monetos negali išsikišti už krašto ir persidengti. Ar turi kuris nors išlošimo strategiją?

16.

Šachmatų žirgas

5 × 5 matmenų lentoje pirmasis žaidėjas stato šachmatų žirgą į lentos centrą. Po to antrasis iš to centrinio langelio daro ėjimą žirgu. Po to ėjimą žirgu daro pirmasis žaidėjas ir taip pakaitomis. Žaidėjas, negalintis padaryti ėjimo pralaimi. Ar kuris nors iš žaidėjų turi išlošimo strategiją?

7	10	15	20	5
16	25	6	9	14
11	8	21	4	19
24	17	2	13	22
1	12	23	18	3

Matome žirgo maršrutą šachmatų lentoje

17.

„Kryžiukai – nuliukai“

Dviese žaidžia „kryžiukais-nuliukais“ lentoje 3 x 3, kiek pakeitę įprastas taisykles: kiekvienas
žaidėjas savo ėjimu gali pažymėti tiek „kryžiuką“, tiek „nuliuką“ (aišku, vieną iš jų kiekvieną kartą). Laimi tas, po kurio ėjimo susidaro trys iš eilės einantys vienodi ženkliukai (vertikaliai, horizontaliai arba įstrižai – kaip ir įprastame žaidime). Kas laimės šiame žaidime, jei žais „protingai“?

18.

Du žaidėjai paeiliui ant lentos rašo natūraliuosius skaičius, neviršijančius 10. Pagal žaidimo taisykles negalima rašyti skaičių, kurie yra dalikliai jau parašytų skaičių. Pralaimi žaidėjas, kuris nebegali atlikti eilinio ėjimo. Pasakykite, kuris iš žaidėjų turi pergalingą strategiją, nurodykite ją.

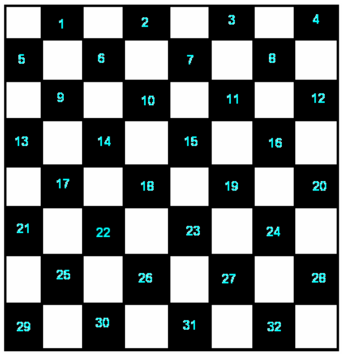
<u>4. UŽDAVINIŲ ATSAKYMAI</u>

Praeitame skyrelyje jums pateikėme keletą uždavinių ir jūs galėjote pabandyti patys juos išsispręsti. Dabar galite pasitikrinti ar gerai išsprendėte.

1.

Sunku įsivaizduoti, kaip galima šaškes perkilnoti mažiau kaip 20 ėjimų. Sunumeravus lentos juodus langelius galime parodyti kaip reikia išspręsti šį uždavinį mažiausiu ėjimų skaičiumi.

1. 21 – 17
2. 30 – 14
3. 25 – 9
4. 29 – 25
5. 25 – 18
6. 22 – 6
7. 17 – 1
8. 31 – 15
9. 26 – 10
10. 28 – 19
11. 14 – 5
12. 23 – 7
13. 18 – 2
14. 32 – 16
15. 27 – 11
16. 15 – 8
17. 8 – 4
18. 24 – 8
19. 19 – 3
20. 16 – 12



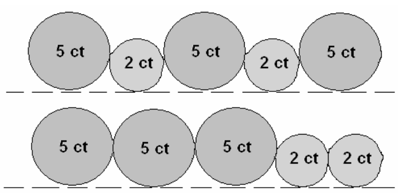
1 pav.

Pateiktas sprendimas yra simetriškas. Šiaip tai nėra vienintelis 20–ies ėjimų sprendimas.

2.

Monetos viršutiniame paveiksle laikomos sunumeruotos iš kairės į dešinę. Šis uždavinio sprendimas turi keturis ėjimus:

1) 3 ir 4 monetas perkelti į dešinę nuo 5 monetos, paliekant tarp 3 ir 4 dviejų monetų pločio tarpą;
2) 1 ir 2 monetas perkelti į dešinę nuo 3 ir 4 taip, kad 1 ir 4 monetos liestųsi;
3) 4 ir 1 monetas įstumti į tarpą tarp 5 ir 3 monetos;
4) 5 ir4 monetas įstumti į tarpą tarp 3 ir 2 monetų.



2 pav.

3.

Tai sprendimai, minimaliu ėjimų skaičiumi:

„Pasuktas kvadratas“ — aštuoniais ėjimais: 55 — 75, 35 — 55, 42 — 44, 63 — 43 — 45 — 65, 33 — 35 — 37 — 47 — 55 — 53 — 51 — 31 — 13 — 15 — 35, 75 — 55, 74 — 54 — 56 — 36 — 34, 24 — 44.

„Lempa“ — dešimt ėjimų: 36 — 34, 56 — 54, 51 — 53 — 33 — 35 — 55, 65 — 45, 41 — 43, 31 — 33 — 53 — 55 — 35, 47 — 45, 44 — 46, 25 — 45, 46 — 44.

4.

Penketuką galima išrikiuoti į vieną eilę 30 ėjimų: 9, 8, 1, 2, 3, 6, 8 (aukštyn ir kairėn), 2, 5 (dešinėn ir žemyn), 3, 6, 8 (aukštyn ir kairėn), 9, 2, 8, 6, 3, 1 (dešinėn ir žemyn), 6, 3, 5 (aukštyn ir dešinėn), 1 (dešinėn ir žemyn), 7, 1 (kairėn), 8, 5 (žemyn), 3, 6 (iki vidurio), 4, 9.

5.

Reikia suvokti, kad kuo bebūtų Mindaugas, į dėstytojo klausymą — ar jis rimtas mokinys, ar pokštininkas — galėtų atsakyti tiktai taip: „aš rimtas“. Tačiau tuomet aišku, kad Darius — rimtas žmogus, o Kęstutis — pokštininkas.

6.

Iš pradžių sustatykime visus liūtus, tarp jų palikdami tarpus. Tai padaryti yra 5! = 120 būdų. Tarpų skaičius lygus 4. jei prie jų prijungsime dar dvi vietas — eilės priekyje ir užpakalyje, tai turėsime 6 vietas, į kurias galima pastatyti po vieną tigrą. Tokiu atveju visi tigrai bus atskirti vienas nuo kito. Kadangi į tų tigrų eilę irgi reikia atsižvelgti, tai jų paskirstymo būdų skaičius lygus gretinių iš 6 po 4 skaičiui, t. y. $A^4_6 = 360$. Kombinuodami kiekvieną liūtų sustatymo būdą su kiekvienu tigro sustatymo būdu, gauname 120 · 360 = 43 200 būdų plėšrūnams išvesti į areną.

7.

1) Žodį NAMAS sudaro 5 raidės, tai n = 5, raidė A kartojasi 2 kartus. $P_5(2;1;1;1) = \frac{5!}{2!1!1!1!} = 60$.
Žodį ANANASAS sudaro 8 raidės, tai n=8, raidė A kartojasi 4 kartus, N-2, S-2.
$P_8(4;2;2) = \frac{8!}{4!2!2!} = 420$

2) žodis – ONA. Balses kaitalioti vietomis yra P(2) = 2 būdai, priebalses- 1. Iš viso turime 1*2 = 2 variantai.

Žodis – ŪMĖDĖ. Balses kaitalioti vietomis yra P(2,1) = 3 būdai, priebalses – P(2) = 2 būdai. Jei priebalsės jau išdėstytos, tai balsėms lieka 3 vietos. Todėl pasirinkti balsių vietas galima 3 būdais. Iš viso turime 3 * 3*2 = 18 variantų.

Žodis – ANONIMAS. Ir balses, ir priebalses kaitalioti vietomis yra P(2, 1, 1) = 12 būdų. Jei priebalsės jau išdėstytos, tai balsėms lieka 5 vietos. Todėl pasirinkti balsių vietas galima C^4_5 = 5 būdais. Iš viso turime $5 \cdot 12^2 = 720$ variantų.

8.

Atmetus ėjimus, kuriais sudaromos neišsprendžiamos padėtys, galime surasti tokį sprendinį: bjjbbjjjjbbbbbjjjjjbbbbbjjjjbbbjjb; čia raidėmis b ir j nurodyta iš eilės perkeliamų šaškių spalva, b – balta, j - juoda.

9.

6.1) Kvadratų —1, trikampių —8, stačiakampių (skaičiuojant ir kvadratus) —1.

6.2) Kvadratų —10, trikampių —44, stačiakampių (skaičiuojant ir kvadratus) — 18.

6.3) Kvadratų — 31, trikampių —124, stačiakampių (skaičiuojant ir kvadratus) — 87.

10.

Išnagrinėkime tokias pradines padėtis, kai krūvelėse yra tik keli degtukai. Aišku, kad 1 žaidėjas laimi, jei vienoje krūvelėje yra 1 degtukas, o kitoje 2. Jis palieka krūvelę su 2 degtukais ir perskiria ją į dvi dalis po 1 degtuką. Analogiškai 1 žaidėjas laimi, kai vienoje krūvelėje yra 2 degtukai, o kitoje – bet kuris skaičius n degtukų. Trumpai padėtis ir 1 žaidėjo ėjimą galima užrašyti taip: $(2;n) \xrightarrow{1} (1;1)$. Kai yra padėtis (1;3), tai 1 žaidėjas pralaimi, nes turi vienintelį ėjimą $(1;3) \xrightarrow{1} (1;2)$, o tada 2 žaidėjas laimi; $(1;2) \xrightarrow{2} (1;1)$. Kai pradinė padėtis (1;4) arba (4;n), tai 1 žaidėjas laimi; $(4;n) \xrightarrow{1} (1;3)$. Pastebime taisyklę: 1 žaidėjas laimi, kai pradinėje padėtyje vienoje iš krūvelių yra lyginis degtukų skaičius. 1 žaidėjas turi palikti tą krūvelę ir perskirti ją į dvi dalis taip, kad vienoje būtų vienas degtukas, o kitoje likusieji, arba kad abiejose krūvelėse būtų nelyginis degtukų skaičius. Bet kurią iš krūvelių 2 žaidėjui padalijus į dvi dalis, vienoje iš jų bus lyginis degtukų skaičius. Tada 1 žaidėjas vėl palieka lyginę krūvelę ir dalija ją į 2 nelygines ir t.t. Vadinasi, kai iš pradžių vienoje krūvelėje yra 20, o kitoje – 25 degtukai, tai pradedantysis laimi. Taigi, teisingai žaisdamas, laimi pradedantysis.

11.

Kad būtų aiškiau, sumažinkime kortelių skaičių nuo 100 iki 10.

Vadinasi, turime jau daug paprastesnę situaciją: ant stalo guli 10 kortelių: trijose parašyta po 0, keturiose kortelėse – po 1 ir dar trijose kortelėse yra parašytas skaičius 2. Šie naujieji skaičiai rodo liekaną, gautą senąjį skaičių padalijus iš trijų.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	- kortelės
1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	- liekana, gauta skaičių padalijus iš trijų.

Du žaidėjai, pradeda pirmasis, pakaitomis paima po 4 korteles. Tada ant stalo lieka 2 kortelės ir yra sudedami jose parašyti skaičiai. Jeigu ta suma yra 0 arba 3 (dalijasi iš trijų), tai laimi pirmasis, o jeigu ne – tai antrasis. Ar gali kuris nors garantuotai laimėti?

Antrojo žaidėjo perspektyvos gerokai šviesesnės, nes jam reikia to, kas nutinka dažniau.

Sugrįžkime žingsnelį atgal, kai abu žaidėjai dar po kartą gali imti.

Abu žaidėjai jau paėmė po tris kartus ir antrasis žaidėjas vien savo jėgomis galėjo pašalinti nuo stalo visas 3 jam nenaudingas korteles, kuriose parašytas 0 – tai „ankstesnės“ kortelės, kuriose parašyti skaičiai dalijosi iš 3, arba tai 3, 6 ir 9.

Taigi antrasis gali užtikrinti, kad prieš paskutinį jų ėjimą ant stalo kortelių su 0 nebėra, yra tik keturios kortelės su 1 arba su 2.

Tada galimi tokie atvejai: ant stalo liko 4 vienetai, 3 vienetai ir 1 dvejetas, 2 dvejetai ir 2 vienetai, 1 vienetas ir 3 dvejetai, arba galiausiai 4 dvejetai.

1	1	1	1
1	1	1	2
1	1	2	2
1	2	2	2
2	2	2	2

1) jeigu ant stalo yra likę vieni vienetai, arba vieni dvejetai,

tai dar po kartą jiems imant jau visai nesvarbu, kaip kas ims, vis tiek po to liks 2 vienodos kortelės – arba su vienetais, arba su dvejetais ir jose parašytų dviejų skaičių suma iš 3 nesidalys.

2) jeigu ant stalo yra 3 vienetai ir 1 dvejetas, arba, simetriškai, 3 dvejetai ir 1 vienetas, tai pirmajam imant bet ką, antrajam pakanka imti ne tokį skaitmenį, kaip kad ėmė pirmasis, ir tada ant stalo visada lieka du vienodi skaitmenys – arba 2 vienetai, arba 2 dvejetai, ir jų suma tikrai nesidalija iš trijų.

3) jeigu ant stalo yra 2 vienetai ir 2 dvejetai, tai tada, ką bepaimtų pirmasis,lai tą patį ima ir antrasis ir vėl ant stalo liks du vienodi skaitmenys, o tai pirmojo žaidėjo pralaimėjimas.

Grįžkime prie nesupaprastintos sąlygos. Bendru atveju sprendimas yra visiškai toks pat. Antrasis imantysis savo ėjimais naikina iš 3 besidalijančius skaičius, kol jų nelieka. Po to jis iki paskutinio ėjimo „kaip pakliuvo“. Per paskutinį ėmimą jis elgiasi taip, kaip ir 10 kortelių atveju, ir garantuotai laimi.

12.

Suskirstykime visus 12 langelių poromis tokiu būdu: (1,4), (2,5), (3,6), (7,10), (8,11), (9,12). Antrasis lošėjas, siekdamas, kad gautasis 12 ženklų skaičius dalytųsi iš 1001, turi elgtis taip: kai pirmasis lošėjas įrašo kurį nors skaitmenį , tai antrasis lošėjas tuojau pat į tos pačios poros kitą langelį įrašo tą patį skaitmenį. Užpildę visus langelius, jie gaus skaičių $\overline{abcabcdefdef}$. Šis skaičius dalijasi iš 1001. Tai galima patikrinti, pavyzdžiui, taip:

$$\overline{abcabcdefdef} =$$

$$10^{11}a+10^{10}b+10^{9}c+10^{8}a+10^{7}b+10^{6}c+10^{5}d+10^{4}e+10^{3}f+10^{2}d+10e+f=$$
$$10^{8}a(10^{3}+1)+10^{7}b(10^{3}+1)+10^{6}c(10^{3}+1)+10^{2}d(10^{3}+1)+10e(10^{3}+1)+f(10^{3}+1)=$$
$$1001(10^{8}a+10^{7}b+10^{6}c+10^{2}d+10e+f)$$

Tą patį galima užrašyti šiek tiek trumpiau:

$$\overline{abcabcdefdef}=10^{9}\overline{abc}+10^{6}\overline{abc}+10^{3}\overline{def}+\overline{def}=10^{6}\overline{abc}(10^{3}+1)+\overline{def}*(10^{3}+1)=$$
$$(10^{6}\overline{abc}+\overline{def})1001=\overline{abc000def}*1001.$$

13.

Kai n = 1, tai yra viena dėžutė, o joje 2 saldainiai. Laikome, kad tikslas pasiektas. Kai n = 2, yra 2 dėžutės, o jose 4 saldainiai. Jei abiejose dėžutėse yra po 2 saldainius, tai berniukas turi imti iš tos pačios dėžutės, kaip ir mergaitė. Jeigu kurioje nors dėžutėje mažiau negu 2 saldainiai, berniukas savo ėjimu tikrai gali ištuštinti vieną dėžutę.

Tarkime, kad išlošime, kai n = k (kai yra k dėžučių, 2k saldainių). Įrodysime, kad tada galima išlošti, kai n = k + 1, t.y.kai yra k + 1 dėžutė, 2k + 2 saldainiai. Jeigu visose dėžutėse yra po 2 saldainius, tai berniukas ima saldainį iš tos pačios dėžutės kaip ir mergaitė, o viena dėžutė lieka tuščia ir į ją nebekreipiame dėmesio. Tada lieka k dėžučių, 2k saldainių ir pagal prielaidą išlošti mokame. Jeigu ne visose dėžutėse yra po 2 saldainius, tai atsiras dėžutė, kurioje yra ne daugiau kaip 1 saldainis(priešingu atveju būtų daugiau kaip (k+1)*2 =2k + 2 saldainių). Todėl berniukas savo ėjimu tikrai galės ištuštinti vieną dėžutę. Liks k dėžučių, 2k saldainių ir pagal prielaidą išlošti mokame. Remiantis matematinės indukcijos principu, teiginys įrodytas.

Tą patį įrodymą galima išdėstyti kiek kitaip. Yra n dėžučių, 2n saldainių. Po mergaitės ėjimo liks 2n -1 saldainis(priešingu atveju dėžutėse turėtų likti ne mažiau kaip 2n saldainių). Vadinasi, savo ėjimu berniukas visada gali pasiekti, kad viena dėžutė ištuštėtų. Nekreipiant dėmesio į tuščią dėžutę, galima sakyti, kad po mergaitės ir berniuko ėjimo liks n – 1 dėžutė ir 2n – 2 saldainiai. Taip tęsdami, gausime 2 dėžutes ir 4 saldainius, ir pagaliau vieną dėžutę su 2 saldainiais.

14.

●	●●	●●●
1 krūvelė	2 krūvelė	3 krūvelė

Kokią išlošimo strategiją gali turėti antrasis žaidėjas? Išnagrinėkime visus galimus variantus.

1) sakykime, pirmasis žaidėjas ima akmenuką iš 1 krūvelės. Tuomet antrasis žaidėjas turėtų paimti vieną akmenuką iš 3 krūvelės. Lieka 2 ir 3 krūvelėse po du akmenukus.

a) Jeigu pirmasis žaidėjas paims, nesvarbu iš kurios krūvelės, vieną akmenuką, tai ir antrasis turėtų imti vieną akmenuką, tik iš priešingos krūvelės. Lieka du akmenukai skirtingose krūvelėse ir tai garantuoja antrajam žaidėjui pergalę.

b) Jeigu pirmasis žaidėjas paims abu kurios nors krūvelės akmenukus, tai ir antrasis turėtų paimti abu kitos krūvelės akmenukus ir laimėti.

2) a) Sakykime, pirmasis žaidėjas ima vieną akmenuką iš 2 krūvelės. Tuomet antrasis žaidėjas turėtų paimti visus akmenukus iš 3 krūvelės. Lieka po vieną akmenuką 1 ir 2 krūvelėse, o tai garantuoja antrajam žaidėjui pergalę.

b) Sakykime, pirmasis žaidėjas paims abu akmenukus iš 2 krūvos. Tuomet antrasis žaidėjas turėtų paimti du akmenukus iš 3 krūvelės. Lieka po vieną akmenuką 1 ir 3 krūvelėse, o tai garantuota pergalė antrajam žaidėjui.

3) a) Sakykime pirmasis žaidėjas paims vieną akmenuką iš 3 krūvelės. Tuomet antrasis žaidėjas turėtų paimti akmenuką iš 1 krūvelės. Lieka po 2 akmenukus 2 ir 3 krūvelėse. Tai jei pirmasis žaidėjas paims, nesvarbu iš kurios krūvelės, vieną akmenuką, tai ir antrasis turėtų imti vieną akmenuką, tik iš priešingos krūvelės. Lieka du akmenukai skirtingose krūvelėse ir tai garantuoja antrajam žaidėjui pergalę. Jeigu pirmasis žaidėjas paims abu kurios nors krūvelės akmenukus, tai ir antrasis turėtų paimti abu kitos krūvelės akmenukus ir laimėti.

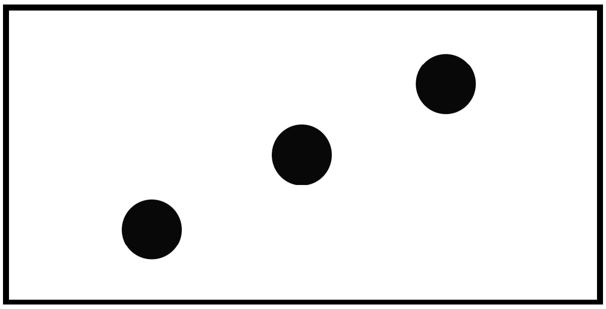
b) Sakykime pirmasis žaidėjas paims du akmenukus iš 3 krūvelės. Tuomet antrasis žaidėjas turėtų paimti abu akmenukus iš 2 krūvelės. Lieka po 1 akmenuką 1 ir 3 krūvelėse, ir antrasis žaidėjas laimi.

c) Sakykime pirmasis žaidėjas paims visus akmenukus iš 3 krūvelės. Tuomet antrasis žaidėjas turėtų paimti vieną akmenuką iš 2 krūvelės. Lieka po vieną akmenuką 1 ir 2 krūvelėse, ir antrojo žaidėjo pergalė garantuota.

Taigi, kad ir kaip sužaistų pirmasis žaidėjas antrasis žaidėjas visada gali laimėti.

15.

Išlošimo strategiją gali turėti pirmasis žaidėjas. Pirmasis žaidėjas pirmąją monetą deda stalo centre. Tuomet kur bepadėtų monetą antrasis žaidėjas, pirmasis deda monetą ant stalo simetriškai centrinės monetos atžvilgiu. Tokia strategija visada garantuoja pirmajam žaidėjui pergalę.



16.

Lošimų lentos langelius suskirstykime poromis tokiu būdu:

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
22	23
24	25

21 langelis – centrinis. Taigi, pirmasis žaidėjas stato žirgą į centrinį langelį. Antrasis daro ėjimą žirgu. Nesvarbu į kurį langelį pastatytų žirgą antrasis žaidėjas, pirmasis stato žirgą į tos pačios poros kitą langelį. Ši strategija visada garantuoja pirmajam žaidėjui pergalę.

17.

Laimės pirmasis žaidėjas. Jis turi centre pažymėti, tarkime, „kryžiuką“. Tada priešininkas bus priverstas pažymėti „nuliuką“, nes kitaip jis pralaimės jau po kito ėjimo. Po to pirmasis žaidėjas laimi pažymėdamas simetrišką centro atžvilgiu „nuliuką“.

○		
	×	
		○

18.

Išlošimo strategiją turi pirmasis žaidėjas. Jam reikia pirmu ėjimu parašyti skaičių 6. Po to galima bus rašyti tik skaičius 4, 5, 7, 8, 9, 10. Padalinkime juos į poras (4; 5), (7; 9), (8; 10). Tada, atsakydamas į bet kurį antrojo žaidėjo ėjimą, pirmasis visada galės parašyti jo pasirinkto skaičiaus „porininką“.

Išvados

Aiškus galvojimas, kuris neginčyjamai yra didžiulė vertybė nuo amžių labiausiai siejamas su matemetika, ne visiems vienodai gerai sekasi ir todėl ne visi jį mėgsta.

Ar galima mėgti ir norėti suprasti tai, kas iš karto nelabai sekasi ar truputį baugina? O čia dar tos iš visų pusių sklindančios kalbos, kad matematika tokia vertinga, ypatinga ir kone stebuklinga. Kas gi jau ten tokio ryškiai vertingo glūdi tose vienų skaičių ir raidžių pilnose formulėse, sudėtinguose brėžiniuose, kokiuose nors žaidimuose ar išvedžiojimuose?

Bet su viskuo galima susipažinti irk o nors išmokti.

Galima būtų įsivaizduoti, jog kiekvienas gražesnis uždavinys ar žaidimas kviečia mus išmėginti savo proto aštrumą ir užsispyrimą. Čia nereikia didelio inventoriaus, kažin kokių ypatingų aplinkybių – užtenka popieriaus lapo, pieštuko ir blaivios galvos, trupučio užsispyrimo bei kantrybės, na, gal dar trupučio laimės ir sėkmės.

Šiame darbe pateikėme keletą lošimų ir žaidimų pavyzdžių, pamėginome juos analizuoti, nurodėme konkrečių užduočių ir jų sprendimo būdų. Darbo rezultatai galėtų įtikinti, kad ne tik mokantis galima ko nors pasiekti, bet ir žaidžiant - mokytis. Kai kam tai gal pasirodytų įdomiau, ne taip įprasta. Tikiuosi kad, kai ką iš mano darbo būtų galima panaudoti mokinių ugdymui,mąstymo vystymui.

Reziumė

Mathematical games

Jurgita Trečiokienė

By the developement of exact sciences the mathematical games and plays changed too. Also in the XXI century the entertainments are connected with the elements of mathematics as well.

The main aim of the presented paper is to try to illustrate that the mathematical games and plays can be interesting and stimulating of students.

In this work some example of such a games a given, the attempts to analyze them are provided and the solutions are involved.

We work could convince that through games one can get some knowledge too.

For students it could appear more interesting and not so routine. The author hopes that some elements of this work may be used for teaching of youngsters and be useful and even attractive.

LITERATŪRA

1. A. Domoriadas; *Matematiniai žaidimai ir sąmojo uždaviniai;* Kaunas; ŠVIESA;1972.
2. M. Gardneris; *Matematika laisvalaikiu;* Kaunas; ŠVIESA;1980.
3. A. Grincevičius, J. Mačys; *Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiadų uždaviniai;* Kaunas; ŠVIESA; 1990.
4. R. Kašuba; *Kaip spręsti, kai nežinai kaip;* Vilnius; TEV;2006.
5. P. Tannenbaumas, R. Arnoldas; *Kelionės į šiuolaikinę matematiką;* Vilnius;TEV; 1995.
6. Vadovėlis V klasei; *Matematika;* Kaunas; ŠVIESA; 1979.
7. N. Vilenkinas; K*ombinatorika;* Kaunas; ŠVIESA; 1979.
8. М. Гарднер; *Математические чудеса и тайны;* Москва; Наука; 1982.
9. Ф. Мостеллер; *Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями;* Москва; Наука; 1975.