**VILNIAUS UNIVERSITETAS**

**MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS**

**MATEMATINĖS STATISTIKOS KATEDRA**

**Olga Škliar**

# PAGREITINTŲJŲ GEDIMŲ PARAMETRINIS MODELIS IR JO TAIKYMAI

Magistro darbas

**Vadovas**
**prof. V. Bagdonavičius**

**VILNIUS, 2006**

## RÉSUMÉ

On s'intéresse à la durée de vie $T$ des montages pour arthrodèse lombaire (on les appelle unités dans la suite) quand ceux-ci sont soumis à des charges cycliques déterminées par une valeur minimale et une valeur maximale de charge en Newton. La durée de vie est exprimée en nombre de cycles avant la rupture de l'unité. Trois types de charge sont disponibles: 28-280N, 30-300N et 35-350N. Ces types de charges seront appelés stress dans la suite. Etant entendu que la charge maximale est toujours dix fois plus grande que la charge minimale, nous convenons de noter $x$ la valeur minimale du stress. On a accumulé les données de plusieurs expériences pour des unités de types différents (Diapason et Xia). Pendant une expérience, une unité d'un certain type fonctionne sous un stress choisi et on observe la durée de vie de celle-ci (ou le moment de censure si l'unité n'est pas rompue pendant un temps choisi pour la durée de l'expérience). Le but principal est d'estimer la valeur du stress $x_{cr}$, pour lequel on peut garantir avec une probabilité donnée $\gamma$ le fonctionnement sans rupture des unités d'un certain type pendant cinq millions de cycles.

La résolution statistique de ce problème nécessite des modèles décrivant la probabilité de panne $P(T \le t \mid x,$ type de produit) d'unités d'un certain type sous le stress $x$ dans n'importe quel intervalle $[\,0, t\,]$. La difficulté principale dans le choix d'un modèle approprié réside dans le fait que les données sont accumulées sous des stress accélérés qui donnent les durées de vie extrêmement plus courtes que la durée de vie sous la valeur (inconnue) $x_{cr}$. Cette difficulté, qui n'est pas insurmontable, est renforcée par le fait que les variances observées des durées de vie sont grandes. Aussi, le nombre d'essais pour des unités de tel ou tel type concret est relativement petit et enfin le nombre de valeurs des stress différents appliqués ne dépasse pas trois. Par exemple, la figure, qui est obtenue après estimation en unifiant les données de deux types d'unités, utilise trois valeurs des stress (28, 30 et 35) et les durées de vie moyennes sont approximativement 18000, 450000 et 80000 cycles, donc il semble évident que l'extrapolation à cinq millions cycles (i.e. 625 fois plus que 80000) peut donner une très grande variance dans l'estimation de $x_{cr}$ même dans le cas où le modèle est idéalement choisi. Une petite déviation du modèle idéal (qui est inévitable) peut donner des erreurs de prédiction dont il faut tenir compter.

Les calculs préliminaires ont étés faits sur les données présentées dans la table 3.1. On a choisi cette table car il n y a pas au vu des données une différence statistiquement significative entre les durées de vie des deux types d'unités. Nous disposons alors de 37 unités et de trois niveaux de stress. En effet l'extrapolation actuelle est très sensible aux données disponibles. Si on change une ou deux valeurs extrêmes des durées de vie sous le stress 28, nous nous rendons compte que la position de courbes est stable pour les valeurs de stress proches des stress étudiés mais il devient instable pour des valeurs de stress proche de $x_{cr}$. On ne peut donc pas espérer que l'estimateur de $x_{cr}$ qui est donné par (3.7) soit très fiable si on utilise les données disponibles.

Finalement, on a obtenu que l'estimation du stress $x_{cr}$ qui garantir avec la probabilité $\gamma = 0.95$ le fonctionnement sans pannes pendant cinq millions de cycles est 14,2 (soit approximativement une charge 14-140N). Mais comme il a déjà été souligné, nous manquons d'expériences sous les stress inférieurs à 28 pour extrapoler correctement.

**TURINYS**

# 1 ĮVADAS

Šis darbas yra skirtas išnagrinėti Pagreitintųjų Gedimų (PG) parametrinį modelį ir jo taikymus. Gedimo Laiko Regresijos (GTR) duomenys gaunami stebint gedimų momentus junginių, funkcionuojančių esant kovariančių, tokių kaip temperatūra, įtampa, krūvis, spaudimas, drėgnumas, konstrukcija, gamyba ir t.t. įvairioms reikšmėms. GTR duomenų analizės tikslas yra įvertinti šių kintamųjų patikimumą, veikiant apibrėžtoms, mus dominančių kintamųjų, reikšmėms. Atskiru atveju, pagreitintojo gyvenimo tyrimų (PGT) duomenys renkami iš eksperimentų, atliktų didesnės nei įprasta apkrovos sąlygomis, ir vertinant patikimumą įprastos apkrovos sąlygomis.

Duomenys, naudojami skaičiavimams atlikti, yra prancūzų kompanijos „Stryker Spine" eksperimentinių bandymų rezultatai. Ši kompanija dirbti tarptautiniu mastu pradėjo vėlyvais 1980, kaip Dimso korporacija Prancūzijoje, Bordo mieste. Nuo 1996 metų, po to kai ji buvo pristatyta JAV rinkoje, įmonė greitai tapo pagrindine stuburo implantų rinkos dalyve. Šiuo metu kompanija nori pradėti masinę gamybą implantų, naudojamų juosmens ankilozei. Dirbtinė ankilozė (arthrodesis) yra dirbtinis sąnario tarp dviejų kaulų sukaulinimas operacijos būdu. Pastaroji atliekama įvedant į sąnarį implantą, užpildytą akytuoju kaulu. Tai daroma tam, kad sumažinti sunkiai numalšinamą skausmą sąnaryje, kuris negali būti pasiektas vaistais nuo skausmo, įtvarais ir kitomis įprastai siūlomomis procedūromis. Dažniausiai ši operacija atliekama stuburo, rankos, kelio ir kulkšnio sąnariams.

Dirbtinė ankilozė gali būti atlikta dviem būdais:

- Kaulų tiltas gali būti sukurtas tarp dviejų kaulų, naudojant kaulą iš bet kurios žmogaus kūno vietos arba iš kaulų banko, kad paskatinti kaulo augimą.
- Metaliniai implantai gali būti prijungti prie dviejų kaulų, kad laikyti juos kartu pozicijoje, kuri yra palanki kaulo augimui.

Operacijos ir gydymo pabaigoje, kurie trunka nuo kelių mėnesių iki metų, du artimiausi kaulai yra sujungiami ir tarp jų nebūna jokio judėjimo. Tai gali paveikti faktiškai tvirtinant kaulus, kaip pirminis sprando sujungimas. Eksperimentiniai tyrimai rodo stuburo slankstelių stabilumo padidėjimą, atlikus dirbtinę ankilozę.

Mus domina implantų, naudojamų juosmens ankilozės metu darbo laikas $T$, kuomet juos cikliškai veikia apkrovos, apibrėžtos minimalia ir maksimalia reikšme, išreikšta Niutonais. Gyvenimo trukmė yra išreikšta ciklų skaičiumi iki implanto gedimo. Galimi trys apkrovos tipai: 28-280N, 30-300N, 35-350N. Žinoma, kad maksimali apkrova yra visada dešimt kart didesnė nei minimali. Susitarkime žymėti mažiausią apkrovos reikšmę $x$. Buvo surinkti daugelio eksperimentų su įvairiais implantų tipais (Diapason ir Xia) duomenys. Eksperimento metu konkretaus tipo implantas dirba, veikiamas pasirinkta apkrova, ir stebima jo gyvenimo trukmė (arba cenzūravimo momentas, jei implantas nesugedo eksperimento metu). Pagrindinis tikslas yra įvertinti apkrovos $x_{cr}$ reikšmę, kuriai su duota tikimybe $\gamma$ galima garantuoti darbą be tam tikro tipo implantų gedimų 5 milijonus ciklų.

Šios problemos statistinis sprendimas reikalauja modelių, aprašančių gedimo tikimybę $P(T \le t \mid x$, gaminio tipas) konkretaus tipo implantų, veikiamų $x$ apkrova, nesvarbu kokiame intervale $[0, t]$. Pagrindinis sunkumas, renkantis tinkamą modelį, yra tas, kad turimi duomenys tiktai prie padidintų apkrovų, kurios duoda funkcionavimo trukmę trumpesnę nei prie nežinomos apkrovos $x_{cr}$. Taip pat kiekvieno konkretaus tipo implantų skaičius yra santykinai mažas ir galiausiai skirtingų pritaikytų apkrovų reikšmių skaičius neviršija trijų. Pavyzdžiui, diagramoje, gautoje po vertinimo, apjungus dviejų implantų tipų duomenis, naudojant tris apkrovos reikšmes (28, 30 ir 35) ir, kuomet vidutinės gyvenimo trukmės yra apytiksliai 18000, 45000 ir 80000 ciklų, taigi rodos akivaizdu, kad ekstrapoliacija iki 5000000 ciklų (625 kartų daugiau nei 80000) gali duoti labai didelę $x_{cr}$ įverčio dispersiją, netgi tuo atveju, kai modelis yra idealiai parinktas. Vienas mažas nukrypimas nuo idealaus modelio (kuris yra neįmanomas) gali sąlygoti prognozavimo klaidas, į kurias reikia atsižvelgti.

Pirminiai paskaičiavimai buvo atlikti, remiantis duomenimis, pateiktais 3.1 lentelėje. Pasirinkome šią lentelę, nes tarp dviejų implantų tipų gyvenimo trukmių nebuvo pastebėta statistiškai reikšmingo skirtumo. Tokiu atveju mes disponuojame 37 implantais ir trimis apkrovos lygiais. Duomenų dispersijos yra akivaizdžiai didelės. Kad teisingai ekstrapoliuoti, reikės būtinai gauti duomenis apie bandymus su mažesnėmis apkrovomis (pavyzdžiui su 26 ir 24). Išties, tikroji ekstrapoliacija yra labai jautri disponuojamiems duomenims. Jeigu pakeisti vieną ar dvi ekstremalias gyvenimo trukmių, su apkrova 28, reikšmes, gauname, kad kreivių padėtis yra stabili apkrovos reikšmėms, kurios yra artimos nagrinėtoms. Tačiau stebime kreivės nestabilumą, kuomet apkrovos reikšmės yra artimos $x_{cr}$. Taigi negalima tikėtis, kad gautas $x_{cr}$ įvertis, bus labai patikimas, jei naudosime tiktai turimus duomenis.

Pavyzdžiui gavome, kad apkrovos $x_{cr}$ įvertis, kuris su tikimybe $\gamma = 0{,}95$ garantuoja funkcionavimą be gedimų penkių milijonų ciklų metu, yra lygus 14,2 (bus apytiksliai 14.2-142N apkrova). Kaip jau buvo pabrėžta, tam, kad tinkamai ekstrapoliuoti, mums trūksta bandymų su žemiausia apkrova 28.

# 2 TEORINĖ DALIS

## PAGREITINTŲJŲ GEDIMŲ PARAMETRINIAI MODELIAI

### 2.1 PG modelio parametrizacija

Tegul

$$x(\cdot) = (x_0(\cdot),..., x_m(\cdot))^T,$$

bus kintanti laike ir daugiamatė kovariantė; čia $x_0(t) \equiv 1$ ir $x_1(\cdot),..., x_m(\cdot)$ yra vienmatės kovariantės.

Pagal PG modelį išgyvenamumo funkcija pagal $x(\cdot)$ yra tokio pavidalo

$$S_{x(\cdot)}(t) = S_0\left(\int_0^t r(\tau)d\tau\right). \tag{2.1}$$

Jeigu kovariantės yra pastovios laike, tuomet modelis (2.1) yra užrašomas kaip

$$S_{x(\cdot)}(t) = S_0(r(x)t). \tag{2.2}$$

Funkcija *r* yra parametrizuojama sekančiu būdu:

$$r(x) = e^{-\beta^T z}, \tag{2.3}$$

čia $\beta = (\beta_0, \cdots, \beta_m)^T$ yra nežinomų parametrų vektorius ir

$$z = (z_0, \cdots, z_m)^T = (\varphi_0(x), \cdots, \varphi_m(x))^T$$

yra nurodytų funkcijų $\varphi_i$ vektorius, su $\varphi_0(t) \equiv 1$.

Pagal parametrizuotą PG modelį išgyvenamumo funkcija pagal $x(\cdot)$ yra tokio pavidalo

$$S_{x(\cdot)}(t) = S_0\left(\int_0^t e^{-\beta^T x(\tau)}d\tau\right), \tag{2.4}$$

ir $x_j(\cdot)$ ($j = 1,\ldots,m$) yra nebūtinai stebimos kovariantės. Tai gali būti kai kurios nurodytos funkcijos $\varphi_j(x)$. Nepaisant to, mes naudojame tokį patį $x_j$ žymėjimą $\varphi_j(x)$.

Jeigu kovariantės yra pastovios laike, tuomet modelis (2.4) yra užrašomas šitaip

$$S_x(t) = S_0(e^{-\beta^T x}t), \tag{2.5}$$

ir gedimo laiko $T_x$ logaritmas pagal *x* gali būti užrašytas, kaip

$$\ln\{T_x\} = \beta^T x + \varepsilon,$$

kur atsitiktinio kintamojo $\varepsilon$ išgyvenamumo funkcija nepriklauso nuo *x* ir yra $S(t) = S_0(\ln t)$. Pastebėkime, kad *lognormalaus gedimo-laiko atveju* $\varepsilon$ *dispersija yra normali ir mes turime standartinį dauginį tiesinės regresijos modelį.*

Laike besikeičiančioms kovariantėms atsitiktinio dydžio

$$R = \int_0^{T_{(x\cdot)}} e^{-\beta^T x(\tau)}d\tau$$

skirstinys nepriklauso nuo nežinomų parametrų ir turi išgyvenamumo funkciją $S_0(t)$. Aptarkime funkcijos $\varphi_i$ pasirinkimą.

#### 2.1.1 Tolydžiosios kovariantės

Pirma, tarkime, kad kovariantės yra tolydžios (krūvis, temperatūra, slėgis, įtampa, spaudimas).

Jeigu modelis (2.2) laikosi $E_0$, tuomet visiems $x_1, x_2 \in E_0$

$$S_{x_2}(t) = S_{x_1}(\rho(x_1, x_2)t), \tag{2.6}$$

kur funkcija $\rho(x_1, x_2) = r(x_2)/r(x_1)$ rodo mastelio svyravimo laipsnį. Akivaizdu, kad $\rho(x, x) = 1$.

Iš pradžių, tarkime, kad *x* yra vienmatis. Mastelio svyravimų norma yra nustatoma *be galo maža charakteristika* (žr. Viertl (1988)):

$$\delta(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\rho(x, x+\Delta x) - \rho(x, x)}{\Delta x} = [\log r(x)]' . \tag{2.7}$$

Taigi visiems $x \in E_0$ funkcija *r(x)* yra tokia:

$$r(x) = r(x_0)\exp\left\{\int_{x_0}^{x} \delta(\upsilon)d\upsilon\right\}, \tag{2.8}$$

kur $x_0 \in E_0$ yra fiksuota kovariantė.

Tarkime, kad $\delta(x)$ yra proporcingas apibrėžtai funkcijai *u(x)* :

$$\delta(x) = \alpha\, u(x) .$$

Šiuo atveju,

$$r(x) = e^{-\beta_0 - \beta_1 \varphi_1(x)}, \tag{2.9}$$

kur $\varphi_1(x)$ yra pirminis *u(x)*, o $\beta_0, \beta_1$ yra nežinomi parametrai.

**2.1 PAVYZDYS**

$\delta(x) = \alpha$**,** $\varphi_1(x) = x$, pavyzdžiui mastelio svyravimų laipsnis yra pastovus, tuomet

$$r(x) = e^{-\beta_0 - \beta_1 x} . \tag{2.10}$$

Tai yra *log-tiesinis modelis*.

**2.2 PAVYZDYS**

$\delta(x) = \alpha / x$, $\varphi_1(x) = \ln x$. Tuomet

$$r(x) = e^{-\beta_0 - \beta_1 \log x} = \alpha_1 x^{\beta_1} . \tag{2.11}$$

Tai yra *laipsninio dėsnio modelis*.

**2.3 PAVYZDYS**

$\delta(x) = \alpha / x^2$**,** $\varphi_1(x) = -1/x$. Tuomet

$$r(x) = e^{-\beta_0 - \beta_1 / x} = \alpha_1 e^{-\beta_1 / x} . \tag{2.12}$$

Tai yra *Arrhenius modelis*.

**2.4 PAVYZDYS**

$\delta(x) = \alpha / x(1-x)$, $\varphi_1(x) = \ln \dfrac{x}{1-x}$. Tuomet

$$r(x) = e^{-\beta_0 - \beta_1 \ln\frac{x}{1-x}} = \alpha_1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\beta_1}, 0 < x < 1. \tag{2.13}$$

Tai yra *Meeker-Luvalle modelis* (1995).

Arrhenius modelis naudojamas tam, kad modeliuoti gaminio išgyvenamumo laiką, kai kovariantė yra temperatūra, laipsninio dėsnio modeliui – kuomet kovariantė yra įtampa, mechaninis apkrovimas. Log-tiesinis modelis taikomas patvarumo ir nuovargio duomenų analizei, bandant įvairias elektronines komponentes (žr. Nelson (1990)). Meeker-Luvalle modelis naudojamas, kai *x* yra drėgnumo santykis.

Jeigu nelabai aišku, kurį iš pirmųjų trijų modelių pasirinkti, tuomet galima paimti didesnę modelių klasę. Pavyzdžiui, visi šie modeliai yra atskiri atvejai modelių klasės, apibrėžtų $\delta(x) = \alpha x^{\gamma}$ su nežinomu $\gamma$ ar funkcijos *r(x)* sąlygomis, tokiu būdu

$$r(x) = \begin{cases} e^{-\beta_0 - \beta_1 (x^{\varepsilon} - 1)/\varepsilon}, & jei\ \varepsilon \neq 0 \\ e^{-\beta_0 - \beta_1 \log x}, & jei\ \varepsilon = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

Šiuo atveju turi būti įvertintas parametras $\varepsilon$.

Modelis (2.6) gali būti apibendrintas. Galima tarti, kad $\delta(x)$ yra kelių kovariantės apibrėžtų funkcijų tiesinė kombinacija:

$$\delta(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i(x).$$

Tokiu atveju,

$$r(x) = \exp\left\{ -\beta_0 - \sum_{i=1}^{k} \beta_i z_i(x) \right\}, \tag{2.15}$$

kur $z_i(x)$ yra duotos kovariantės funkcijos, $\beta_0, \cdots, \beta_k$ yra nežinomi (galbūt ne visi iš jų) parametrai.

**2.5 PAVYZDYS**

$\delta(x) = 1/x + \alpha / x^2$. Tuomet

$$r(x) = e^{-\beta_0 - \beta_1 \log x - \beta_2 / x} = \alpha_1 x e^{-\beta_2 / x}, \tag{2.16}$$

Kur $\beta_1 = -1$. Tai *Eyring modelis*, taikomas kuomet kovariantė *x* yra temperatūra.

**2.6 PAVYZDYS**

$\delta(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i / x^i$ **.** Tuomet

$$r(x) = \exp\left\{ -\beta_0 - \beta_1 \log x - \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i / x^i \right\}. \tag{2.17}$$

Tai *apibendrintas Eyring modelis*.

Dabar tarkime, kad kovariantė $x = (x_1, \cdots, x_m)$ yra daugiamatė. Jeigu nėra jokių sąveikų tarp $(x_1, \cdots, x_m)$ tuomet gali būti panaudotas modelis

$$r(x) = \exp\left\{ -\beta_0 - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} \beta_{ij} z_{ij}(x_i) \right\}, \tag{2.18}$$

čia $z_{ij}(x_i)$ yra apibrėžtos funkcijos, $\beta_{ij}$ – nežinomi parametrai.

**2.7 PAVYZDYS**

Jeigu pirmosios kovariantės įtaka yra apibrėžta laipsninio dėsnio modeliu, o antroji – Arrhenius modeliu, tuomet turime tokį modelį

$$r(x_1, x_2) = \exp\{-\beta_0 - \beta_1 \log x_1 - \beta_2 / x_2\}. \tag{2.19}$$

Taigi čia $k_1 = k_2 = 1$.

Jeigu tarp kovariančių yra sąveika, tuomet turi būti įtrauktos papildomos sąlygos.

**2.8 PAVYZDYS**

Tarkime, kad tarp kovariančių $x_1$ ir $x_2$, apibrėžtų 2.7 pavyzdyje, yra sąveika. Tuomet gali būti įvertintas modelis

$$r(x_1, x_2) = \exp\{-\beta_0 - \beta_1 \log x_1 - \beta_2 / x_2 - \beta_3 (\log x_1) / x_2\}. \tag{2.20}$$

### *2.1.2 Atskiros ir nominaliosios kovariantės*

Jeigu kovariantės yra nominaliosios (vartotojų skaičius, besinaudojančių sistema vienu metu), tuomet funkcijų forma turi tokį pat pavidalą, kaip ir tolydžiųjų kovariančių atveju, pvz. $\varphi_j$ gali būti $\varphi_j(x) = x$, ln *x* arba 1/*x*.

Jeigu *j*-oji kovariantė yra nominalioji (vietovė, apdirbamosios pramonės įmonė, dizainas), ir ji įgyja $k_j$ reikšmių, tuomet *x* suprantamas kaip $(k_j - 1)$-matis vektorius

$$x_j = (x_{j1}, \cdots, x_{j,k-1})^T,$$

imant $k_j$ įvairių dydžių

$$(0,0,\cdots,0)^T, (1,0,\cdots,0)^T, (0,1,\cdots,0)^T, \cdots, (0,0,\cdots,1)^T,$$

ir $\beta_j$ yra $(k_j - 1)$-matis:

$$\beta_j = (\beta_{j1}, \cdots, \beta_{j,k_j-1})^T.$$

Taigi, jeigu *j*-oji kovariantė yra nominalioji, o kitos yra tolydžiosios arba diskrečios, tuomet

$$\beta^T x = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{j-1} x_{j-1} + \sum_{l=1}^{k_j-1} \beta_{jl} x_{jl} + \beta_{j+1} x_{j+1} + \cdots + \beta_m x_m. \tag{2.21}$$

Gautas modelis yra ekvivalentus modeliui (2.5) su $m + k_j - 2$ vienmačių kovariančių. Jeigu $k_j = 2$, kovariantė $x_j$ yra dichotominė, įgyjanti dvi reikšmes 0 arba 1.

## *2.2 Regresijos koeficientų interpretacija*

Tarkime, kad kovariantės yra pastovios laike. Tuomet, pagal PG modelį (2.5), $T_x$ gedimo laiko *p*-kvantilis yra

$$t_p(x) = e^{\beta^T x} S_0^{-1}(1-p), \tag{2.22}$$

taigi logaritmas

$$\ln\{t_p(x)\} = \beta^T x + c_p \tag{2.23}$$

yra tiesinė regresijos parametrų funkcija; čia $c_p = \ln(S_0^{-1}(1-p))$.

Tegul

$$m(x) = \mathbf{E}\{T_x\}$$

yra vienetų *vidutinis gyvenimas* pagal *x*. Tuomet

$$m(x) = e^{\beta^T x} \int_0^\infty S_0(u) du \tag{2.24}$$

ir logaritmas

$$\ln\{m(x)\} = \beta^T x + c \tag{2.25}$$

yra taip pat regresijos parametrų tiesinė funkcija; čia

$$c = \ln\left\{\int_0^\infty S_0(u) du\right\}.$$

Pažymėkime

$$MR(x,y)=\frac{m(y)}{m(x)} \text{ ir } QR(x,y)=\frac{t_p(y)}{t_p(x)} \tag{2.26}$$

atitinkamai vidurkių ir kvantilių santykius.

PG modeliui

$$MR(x,y)=QR(x,y)=e^{\beta^T(y-x)}. \tag{2.27}$$

Taigi $e^{\beta^T(y-x)}$ yra *vidurkių santykis, atitinkantis kovariantes x ir y*.

Manykime, kad parametrų $\beta_j$ interpretacija yra pagal modelį (2.5).

### *2.2.1 Modeliai be sąveikų*

a) *Tolydžiosios arba diskrečios kovariantės*

Tarkime, kad *j*-oji kovariantė $x_j$ yra tolydi arba diskreti. Tuomet

$$e^{\beta_j}=\frac{e(x_1,\ldots,x_j+1,\ldots,x_m)}{e(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_m)}=MR_j, \tag{2.28}$$

*yra vidurkių santykis atitinkantis* $x_j$ *pasikeitimą per matavimo vienetą.*

b) *Nominaliosios kovariantės*

Sakykime, kad $x_j=(x_{j1},\cdot,\ldots,x_{j,k_j-1})^T$ yra nominalusis. Pirmoji jo reikšmė yra $(0,\cdots,0)^T$, ir (*i*+1)-oji reikšmė yra $(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T$, kur vienetas yra *i*-oji koordinatė. Tuomet

$$e^{\beta_{ji}}=\frac{e(x_1,\ldots,x_{j-1},(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0),x_{j+1},\ldots,x_m)}{e(x_1,\ldots,x_{j-1},(0,0,\cdots,0),x_{j+1},\ldots,x_m)}=MR_{ji} \tag{2.29}$$

*yra vidurkių santykis atitinkantis* $x_j$ *pasikeitimus nuo pirmosios iki (i+1)-osios reikšmės.*

### *2.2.2 Modeliai su sąveikomis*

Jeigu *j*-osios kovariantės įtaka vidutiniam gyvenimui yra skirtinga įvairioms kitų kovariančių reikšmėms, tuomet tarp kovariančių yra sąveika ir modelis turi būti modifikuotas.

a) *sąveika tarp tolydžiųjų arba diskrečiųjų kovariančių*

Jeigu yra dvi tolydžios arba diskrečios kovariantės, ir tarp jų yra sąveika, tuomet

$$\beta^T x=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_1x_2. \tag{2.30}$$

Trims kovariantėms

$$\beta^T x=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_3+\beta_4x_1x_2+\beta_5x_1x_3+\beta_6x_2x_3+\beta_7x_1x_2x_3 \tag{2.31}$$

ir taip toliau.

Tuo atveju, kai yra dvi kovariantės, vidurkių santykis

$$MR_2(x_1)=\frac{m(x_1,x_2+1)}{m(x_1,x_2)}=e^{\beta_1+\beta_3x_1} \tag{2.32}$$

priklauso nuo $x_1$ reikšmės. Taigi

$$e^{\beta_1+\beta_3x_1} \tag{2.33}$$

*yra vidurkių santykis, atitinkantis* $x_2$ *pasikeitimą per matavimo vienetą, kita kovariantė yra fiksuojama ir lygi* $x_1$.

b) *Sąveika tarp tolydžiųjų ar diskrečių ir nominaliųjų kovariančių*

Tarkime, kad yra dvi kovariantės: $x_1$ yra tolydi arba diskreti, o $x_2$ yra nominalioji, su *k* galimų reikšmių.

Tuomet

$$\beta^T x = \beta_1 x_1 + \sum_{i=1}^{k_2-1} \beta_{2i} x_{2i} + \sum_{i=1}^{k_2-1} \beta_{12i} x_1 x_{2i} \ , \tag{2.34}$$

ir vidutinis santykis

$$MR_{2i}(x_1) = \frac{e(x_1,(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0))}{e(x_1,(0,\cdots,0))} = e^{\beta_{2i}+\beta_{12i}x_1} \tag{2.35}$$

priklauso nuo $x_1$ reikšmės.

Taigi šiame pavyzdyje

$$e^{\beta_{2i}+\beta_{12i}x_1}$$

*yra vidurkių santykis atitinkantis* $x_2$ *pasikeitimą nuo pirmosios iki (i+1) reikšmės, kitos kovariantės yra fiksuojamos ir yra lygios* $x_1$.

c) *Sąveika tarp nominaliųjų kovariančių*

Tegul abu $x_1$ ir $x_2$ yra nominalieji kintamieji, turintys tris reikšmes kiekvienas. Tuomet

$$x_1 = (x_{11}, x_{12})^T, \ x_2 = (x_{21}, x_{22})^T \ ,$$

ir

$$\beta^T x = \beta_{11}x_{11} + \beta_{12}x_{12} + \beta_{21}x_{21} + \beta_{22}x_{22} + \beta_{1121}x_{11}x_{21} + \beta_{1122}x_{11}x_{22} + \beta_{1221}x_{12}x_{21} + \beta_{1222}x_{12}x_{22} \, .$$

Šiuo atveju santykis

$$MR_{22}(x_1) = \frac{e(x_1,(1,0))}{e(x_1,(0,0))} = e^{\beta_{21}+\beta_{1121}x_{11}+\beta_{1221}x_{12}}$$

priklauso nuo $x_1 = (x_{11}, x_{12})^T$ reikšmės.

Taigi

$$e^{\beta_{21}+\beta_{1121}x_{11}+\beta_{1221}x_{12}}$$

*yra vidurkių santykis atitinkantis* $x_2$ *pasikeitimą nuo pirmos iki antros reikšmės, kita kovariantė yra fiksuojama ir lygi* $x_1 = (x_{11}, x_{12})^T$.

Apibendrinimas yra akivaizdus, jeigu kovariantės įgyja tris ar daugiau reikšmes.

### *2.2.3 Nuo laiko priklausantys regresijos koeficientai*

Nagrinėkime PG modelį su kovariantėmis priklausančiomis nuo laiko

$$S_{x(\cdot)} = G\left\{ \int_0^t e^{-\beta^T(u)x(u)} du \right\}. \tag{2.36}$$

Nagrinėsime koeficientus $\beta_i(t)$ modelyje $\beta_i(t) = \beta_i + \gamma_i g_i(t)$, (*i*=1,2,…,m), kur $g_i(t)$ yra apibrėžtos deterministinės funkcijos arba spėjamų procesų realizacijos. Šiuo atveju PG modelis su nuo laiko priklausančiais koeficientais ir pastoviais ar nuo laiko priklausančiomis kovariantėmis gali būti užrašytas (2.4) pavidalu su įvairia kovariančių interpretacija. Iš tikrųjų, tegul

$$\theta = (\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_{2m})^T = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_m, \gamma_1, \cdots, \gamma_m)^T \ ,$$

$$z(\cdot) = (z_0(\cdot), z_1(\cdot), \cdots, z_{2m}(\cdot))^T = (1, x_1(\cdot), \cdots, x_m(\cdot), x_1(\cdot)g_1(\cdot), \cdots, x_m(\cdot)g_m(\cdot))^T \, . \tag{2.37}$$

Tuomet

$$\beta^T(u)x(u) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{m}(\beta_i + \gamma_i g_i(t))x_i(t) = \theta^T z(u).$$

Taigi PG modelis su nuo laiko priklausančiais regresijos koeficientais gali būti užrašytas taip

$$S_{z(\cdot)} = G\left\{\int_0^t e^{-\theta^T z(u)}du\right\}. \tag{2.38}$$

Mes turime PG modelį, kuriame nežinomi parametrai ir kovariantės yra apibrėžtos (2.37).

## *2.3 GL duomenų analizė: pasiskirstymų šeimos, apibrėžiamos mastelio formos parametrais*

### *2.3.1 Modelis ir duomenys*

Tarkime, kad PG modelis:

$$S_{x(\cdot)}(t) = S_0\left(\int_0^t e^{-\beta^T x(\tau)}d\tau\right), \tag{2.39}$$

arba PG modelis su nuo laiko priklausančiais regresijos koeficientais, ir tegul $S_0$ priklauso apibrėžtai išgyvenamumo funkcijų mastelio klasei:

$$S_0(t) = G_0\{(t/\eta)^\nu\} \quad (\eta, \nu > 0).$$

Pavyzdžiui, jeigu t > 0

$$G_0(t) = e^{-t},\ G_0(t) = (1+t)^{-1},\ G_0(t) = 1 - \Phi(\ln t),$$

tuomet atitinkamai gauname Veibulo, loglogistinių ir lognormaliųjų pasiskirstymų šeimas. Čia Φ yra standartinio normalaus pasiskirstymo funkcija.

Parametras $\eta$ gali būti įtrauktas į koeficientą $\beta_0$, taigi tarkime, kad

$$S_0(t;\sigma) = G_0(t^{1/\sigma}),\ \sigma = 1/\nu.$$

Atkreipkite dėmesį į tai, kad vertinant PG modelį su nuo laiko priklausančiais regresijos koeficientais $\beta_i(t) = \beta_i + \gamma_i g_i(t)$, netgi pastovių kovariančių atveju modelis (2.36) yra suvedamas į PG modelį (2.38), kuris yra ekvivalentus modeliui (2.39) su nuo laiko priklausančiomis kovariantėmis $z(\cdot)$. Taigi visi rezultatai, gauti PG modeliui, su nuo laiko priklausančiomis kovariantėmis gali būti perrašyti PG modeliui su nuo laiko priklausančiais regresijos koeficientais ir pastoviomis arba nuo laiko priklausančiomis kovariantėmis. Visose formulėse

$$m,\ \beta = (\beta_{1,}\cdots,\beta_m)^T,\ x^i(\cdot) = (x_1^{(i)}(\cdot) = (x_1^{(i)}(\cdot),\cdots,x_m^{(i)}(\cdot))^T$$

gali būti pakeisti į

$$2m,\ \theta = (\beta_1,\cdots,\beta_m,\gamma_1,\cdots,\gamma_m)^T,$$

$$z^{(i)}(\cdot) = (x_1^{(i)}(\cdot),\cdots,x_m^{(i)}(\cdot),x_1^{(i)}(\cdot)g_1(\cdot),\cdots,x_m^{(i)}(\cdot)g_m(\cdot))^T$$

atitinkamai.

**EKSPERIMENTŲ PLANAS:**

Stebime *n* vienetų. Yra tikrinamas *i*-asis vienetas pagal reikšmę

$$x^{(i)}(\cdot) = (x_0^{(i)}(\cdot),\ldots,x_m^{(i)}(\cdot))^T$$

galimų laike kintančių ir daugiamačių kovariančių

$$x(\cdot) = (x_0(\cdot), \dots, x_m(\cdot))^T.$$

Tariama, kad duomenys yra cenzūruojami nepriklausomai iš dešinės.

Tegul $T_i$ ir $C_i$ yra $i$-ojo vieneto gedimo ir cenzūravimo laikai,

$$X_i = T_i \wedge C_i, \ \delta_i = \mathbf{1}_{\{T_i \le C_i\}}.$$

Pažymėkime $S_i$ išgyvenamumo funkciją $S_{x^{(i)}(\cdot)}$. Modelis (2.4) gali būti užrašyti tokiu pavidalu

$$S_i(t;\beta,\sigma) = G_0\left\{\left(\int_0^t e^{-\beta^T x^{(i)}(u)} du\right)^{1/\sigma}\right\}. \tag{2.40}$$

Jeigu $x^{(i)}$ yra pastovus, tuomet

$$S_i(t) = G\left(\frac{\ln t - \beta^T x^{(i)}}{\sigma}\right), \tag{2.41}$$

kur

$$G(u) = G_0(e^u), \ u \in \mathbf{R}.$$

Pastebėkime, kad atsitiktinio kintamojo pasiskirstymas

$$R_i = \left\{\int_0^{T_{x^{(i)}(\cdot)}} e^{-\beta^T x^{(i)}(\tau)} d\tau\right\}^{1/\sigma} \tag{2.42}$$

yra ne-parametrinis su išgyvenamumo funkcija $G_0$. Pastoviam $x^{(i)}$:

$$R_i = \{T_{x^{(i)}} e^{-\beta^T x^{(i)}}\}^{1/\sigma}.$$

Nustatykime

$$g(u) = -G'(u), \ h(u) = \frac{g(u)}{G(u)}. \tag{2.43}$$

Veibulo dėsniui:

$$G(u) = e^{-e^u}, \ g(u) = e^u e^{-e^u}, \ h(u) = e^u, \ (\ln h)'(u) = 1; \tag{2.44}$$

loglogistiniam dėsniui:

$$G(u) = (1+e^u)^{-1}, \ g(u) = \frac{e^u}{(1+e^u)^2}, \ h(u) = e^u(1+e^u)^{-1}, \ (\ln h)'(u) = (1+e^u)^{-1}; \tag{2.45}$$

Lognormaliąjam dėsniui:

$$G(u) = 1 - \Phi(u), \ g(u) = \varphi(u), \ h(u) = \frac{\varphi(u)}{1-\Phi(u)}, \ (\ln h)'(u) = h(u) - u, \tag{2.46}$$

su

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

### *2.3.2 Regresijos parametrų maksimalaus tikėtinumo įvertis*

Tikėtinumo funkcija yra

$$L(\beta,\sigma) = \prod_{i=1}^n \left\{\frac{1}{\sigma} e^{-\beta^T x^{(i)}(X_i)} \left(\int_0^{X_i} e^{-\beta^T x^{(i)}(u)} du\right)^{-1} \times \right.$$
$$\left. h\left(\frac{1}{\sigma}\ln\left(\int_0^{X_i} e^{-\beta^T x^{(i)}(u)} du\right)\right)\right\}^{\delta_i} G\left(\frac{1}{\sigma}\ln\left(\int_0^{X_i} e^{-\beta^T x^{(i)}(u)} du\right)\right). \tag{2.47}$$

Jeigu $x^{(i)}$ yra pastovūs, tuomet tikėtinumo funkcija yra

$$L(\beta,\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sigma X_i}h\left(\frac{\ln X_i-\beta^T x^{(i)}}{\sigma}\right)\right\}^{\delta_i}G\left(\frac{\ln X_i-\beta^T x^{(i)}}{\sigma}\right). \quad (2.48)$$

Rezultatyvios funkcijos yra

$$U_l(\beta;\sigma)=\frac{\partial \ln L(\beta,\sigma)}{\partial \beta_l}=\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} z_l^{(i)}(\beta)a_i(\beta,\sigma)+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\left(z_l^{(i)}(\beta)-x_l^{(i)}(X_i)\right),\ (l=0,1,...,m),$$

$$U_{m+1}(\beta;\sigma)=\frac{\partial \ln L(\beta,\sigma)}{\partial \sigma}=\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\{\nu_i(\beta,\sigma)a_i(\beta,\sigma)-\delta_i\}; \quad (2.49)$$

čia

$$\nu_i(\beta,\sigma)=\frac{1}{\sigma}\ln\left(\int_0^{X_i}e^{-\beta^T x^{(i)}(u)}du\right),\ a_i(\beta,\sigma)=h(\nu_i(\beta,\sigma))-\delta_i(\ln h)'(\nu_i(\beta,\sigma)),$$

$$z_l^{(i)}(\beta)=\frac{\int_0^{X_i}x_l^{(i)}(u)e^{-\beta^T x^{(i)}(u)}du}{\int_0^{X_i}e^{-\beta^T x^{(i)}(u)}du}, \quad (2.50)$$

ir funkcija *h* pateikta (2.43). Pastovių kovariančių atveju rezultatyvios funkcijos yra

$$U_l(\beta;\sigma)=\frac{\partial \ln L(\beta,\sigma)}{\partial \beta_l}=\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}x_l^{(i)}a_i(\beta,\sigma),\ (l=0,1,...,m),$$

$$U_{m+1}(\beta;\sigma)=\frac{\partial \ln L(\beta,\sigma)}{\partial \sigma}=\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\{\nu_i(\beta,\sigma)a_i(\beta,\sigma)-\delta_i\}, \quad (2.51)$$

kur

$$\nu_i(\beta,\sigma)=\frac{\ln X_i-\beta^T x^{(i)}}{\sigma},\ a_i(\beta,\sigma)=h(\nu_i(\beta,\sigma))-\delta_i(\ln h)'(\nu_i(\beta,\sigma)), \quad (2.52)$$

ir $(\ln h)'(u)$ yra pateikta (2.43).

*Maksimalaus tikėtinumo įverčiai* $\hat\beta_j,\hat\sigma$ gaunami sprendžiant lygčių sistemą $U_l(\beta,\sigma)=0$ ($l$= 0,1,...,$m$+1).

### 2.3.3 Pagrindinių patikimumo charakteristikų įverčiai

Tarkime, kad $x(\cdot)=(x_1(\cdot),\cdots,x_m(\cdot))^T$ yra sutartinė kovariantė, kuri gali skirtis nuo $x^{(i)}(\cdot),(i=1,\cdots,n)$.

*Išgyvenamumo funkcijos* $S_{x(\cdot)}(t)$ *įvertis:*

$$\hat S_{x(\cdot)}(t)=G_0\left\{\left(\int_0^t e^{-\hat\beta^T x(u)}du\right)^{1/\hat\sigma}\right\}. \quad (2.53)$$

Tuo atveju, kai *x* yra pastovus, išgyvenamumo funkcijos $S_x(t)$ įvertis yra

$$\hat S_x(t)=G\left(\frac{\ln t-\hat\beta^T x}{\hat\sigma}\right). \quad (2.54)$$

PG modelyje su nuo laiko priklausančiais regresijos koeficientais manoma, kad

$$\hat S_{z(\cdot)}(t)=G_0\left\{\left(\int_0^t e^{-\hat\theta^T z(u)}du\right)^{1/\hat\sigma}\right\},$$

kur $\theta=(\beta_1,\cdots,\beta_m,\gamma_1,\cdots,\gamma_m)^T$, $z^{(i)}(\cdot)=(x_1^{(i)}(\cdot),\cdots,x_m^{(i)}(\cdot),x_1^{(i)}(\cdot)g_1(\cdot),\cdots,x_m^{(i)}(\cdot)g_m(\cdot))^T$.

*p-kvantilio įvertis* $t_p(x(\cdot))$ *:*

Įvertis $\hat{t}_p(x(\cdot))$ tikrina lygtį:

$$G_0\left\{\left(\int_0^{\hat{t}_p(x(\cdot))} e^{-\hat{\beta}^T x(u)} du\right)^{1/\hat{\sigma}}\right\} = 1 - p. \tag{2.55}$$

Jeigu *x* yra pastovus, tuomet

$$\hat{t}_p(x) = e^{\hat{\beta}^T x}\left\{G_0^{-1}(1-p)\right\}^{\hat{\sigma}}. \tag{2.56}$$

*Vidutinio gedimo laiko* $m(x(\cdot))$ *įvertis:*

$$\hat{m}(x(\cdot)) = \int_0^\infty \hat{S}_{x(\cdot)}(u)du. \tag{2.57}$$

Jeigu *x* yra pastovus, tuomet

$$\hat{m}(x) = \hat{\sigma} e^{\hat{\beta}^T x}\int_0^\infty u^{\hat{\sigma}-1} G_0(u)du. \tag{2.58}$$

*Vidutinių santykių įverčiai:*

Vidutinis santykis *MR(x,y)* (žr. (2.27)) yra vertinamas

$$\hat{MR}(x,y) = e^{\hat{\beta}^T (y-x)}. \tag{2.59}$$

1) Modeliai be sąveikų.

a) Tolydi arba diskreti kovariantė $x_j$.

Vidutinis santykis $MR_j$ (žr. (2.28)) yra vertinamas

$$\hat{MR} = e^{\hat{\beta}_j}. \tag{2.60}$$

b) Nominalioji kovariantė $x_j$.

Vidutinis santykis $MR_{ji}$, (žr. (2.29)), yra vertinamas

$$\hat{MR}_{ji} = e^{\hat{\beta}_{ji}}. \tag{2.61}$$

2) Modeliai su sąveikomis.

a) Tolydus (diskretus) × tolydūs (diskretūs) kintamieji.

Jeigu dvi tolydžios (diskrečios) kovariantės, pavyzdžiui $x_1$ ir $x_2$, sąveikauja, tuomet vidutinis santykis $MR_2(x_1)$, (žr. (2.32)), vertinamas

$$\hat{MR}_2(x_1) = e^{\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_3 x_1}. \tag{2.62}$$

b) Tolydi (diskreti) × nominalioji.

Jeigu tolydi (diskreti) kovariantė $x_1$ sąveikauja su $k_2$-vertinamąja nominaliąja kovariante $x_2$, tuomet vidutinis santykis $MR_{2i}(x_1)$, (žr. modelį (2.35)), vertinamas

$$\hat{MR}_{2i}(x_1) = e^{\hat{\beta}_{2i} + \hat{\beta}_{12i} x_1}. \tag{2.63}$$

c) Nominalioji × nominaliosios kovariantės.

Jeigu dvi nominaliosios kovariantės $x_1$ ir $x_2$ (su, tarkime, trimis galimomis reikšmėmis) sąveikauja, tuomet vidutinis santykis $MR_{22}$ vertinamas

$$e^{\hat{\beta}_{21} + \hat{\beta}_{1121} x_{11} + \hat{\beta}_{1221} x_{12}}. \tag{2.64}$$

### 2.3.4 Asimptotinis regresijos parametrų įverčių pasiskirstymas

Pagal reguliavimo sąlygas maksimalaus tikėtinumo įverčių $(\hat{\beta},\hat{\sigma})^T$ pasiskirstymas dideliems *n* yra aproksimuojamas pagal normalųjį dėsnį:

$$(\hat{\beta},\hat{\sigma})^T \approx N_{m+2}((\beta,\sigma)^T, \sum{}^{-1}(\beta,\sigma)).$$

Kovariacijų matrica $\sum{}^{-1}(\beta,\sigma)$ yra vertinama pagal

$$\mathbf{I}^{-1}(\hat{\beta},\hat{\sigma}) = (I^{ls}(\hat{\beta},\hat{\sigma}))_{(m+2)\times(m+2)}, \tag{2.65}$$

kur

$$\mathbf{I}(\beta,\sigma) = (I_{lk}(\beta,\sigma))_{(m+2)\times(m+2)} \tag{2.66}$$

yra matrica su sekančiais elementais:

$$I_{ls}(\beta,\sigma) = -\frac{\partial^2 \ln L(\beta,\sigma)}{\partial\beta_l\partial\beta_s},\ I_{l,m+1}(\beta,\sigma) = -\frac{\partial^2 \ln L(\beta,\sigma)}{\partial\beta_l\partial\sigma},$$

$$I_{m+1,m+1}(\beta,\sigma) = -\frac{\partial^2 \ln L(\beta,\sigma)}{\partial\sigma^2}\quad (l,s = 0,\cdots,m).$$

Detaliau, įverčio $\hat{\beta}_j$ dispersija yra vertinama pagal

$$\mathbf{Va\hat{r}}\{\hat{\beta}_j\} = I^{jj}(\hat{\beta},\hat{\sigma}) \tag{2.67}$$

ir

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{(\mathbf{Va\hat{r}}\hat{\beta}_j)^{1/2}} \approx N(0,1),\ (j=0,\ ...,\ m). \tag{2.68}$$

Matricos $\mathbf{I}(\beta,\sigma)$ elementų išraiškos yra (žr. užrašymus (2.50)):

$$I_{ls}(\beta,\sigma) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} y_l^{(i)}(\beta)y_s^{(i)}(\beta))c_i(\beta,\sigma) - \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} y_{ls}^{(i)}(\beta)(a_i(\beta,\sigma)+\sigma\delta_i),$$

$$I_{l,m+1}(\beta,\sigma) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} y_l^{(i)}(\beta)(v_i(\beta,\sigma)c_i(\beta,\sigma)+a_i(\beta,\sigma)),\ l,s = 0,\ldots,m$$

$$I_{m+1,m+1}(\beta,\sigma) = \frac{1}{\sigma}U_{m+1}(\beta,\sigma) + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} v_i(\beta,\sigma)(v_i(\beta,\sigma)c_i(\beta,\sigma)+a_i(\beta,\sigma)), \tag{2.69}$$

kur

$$c_i(\beta,\sigma) = h'(v_i(\beta,\sigma)) - \delta_i(\ln h)''(v_i(\beta,\sigma)),$$

$$y_{ls}^{(i)}(\beta) = \frac{\int_0^{X_i} x_l^{(i)}(u)e^{-\beta^T x^{(i)}(u)}du\int_0^{X_i} x_s^{(i)}(u)e^{-\beta^T x^{(i)}(u)}du}{\left(\int_0^{X_i} e^{-\beta^T x^{(i)}(u)}du\right)^2} - \frac{\int_0^{X_i} x_l^{(i)}(u)x_s^{(i)}(u)e^{-\beta^T x^{(i)}(u)}du}{\int_0^{X_i} e^{-\beta^T x^{(i)}(u)}du}. \tag{2.70}$$

Jeigu $x^{(i)}$ yra pastovūs laike, tuomet

$$I_{ls}(\beta,\sigma) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_l^{(i)}x_s^{(i)}c_i(\beta,\sigma),$$

$$I_{l,m+1}(\beta,\sigma) = \frac{1}{\sigma}U_l(\beta,\sigma) + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_l^{(i)}v_i(\beta,\sigma)c_i(\beta,\sigma),$$

$$I_{m+1,m+1}(\beta,\sigma) = \frac{1}{\sigma}U_{m+1}(\beta,\sigma) + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} v_i(\beta,\sigma)(v_i(\beta,\sigma)c_i(\beta,\sigma)+a_i(\beta,\sigma)). \tag{2.71}$$

Pastebėkime, kad nuo laiko priklausančių regresijos koeficientų $m, \beta, x^{(i)}$ atveju, jie yra pakeičiami $2m, \theta, z^{(i)}$.

### 2.3.5 Aproksimatyvūs patikimumo intervalai išgyvenamumo funkcijoms

Išgyvenamumo funkcijos, kvantiliai, vidutinės gyvenimo trukmės ir vidutiniai santykiai yra $\beta$ ir $\sigma$ parametrų funkcijos. Taigi asimptotiniai pasiskirstymai ir aproksimaciniai patikimumo intervalai jiems gaunami naudojant delta metodą.

*Aproksimaciniai patikimumo intervalai išgyvenamumo funkcijoms*

Formulė

$$\left(\left(1+\frac{1-S(t,\hat\theta)}{S(t,\hat\theta)}e^{\sigma_Q(\hat\theta)\omega_{1-\alpha/2}}\right)^{-1},\left(1+\frac{1-S(t,\hat\theta)}{S(t,\hat\theta)}e^{-\sigma_Q(\hat\theta)\omega_{1-\alpha/2}}\right)^{-1}\right)$$

reiškia, kad bet kuriam $x(\cdot)=(x_0(\cdot),x_1(\cdot),\cdots,x_m(\cdot))\in E_0$, $x_o(\cdot)=1$, aproksimacinis $(1-\alpha)$-patikimumo intervalas išgyvenamumo funkcijai $S_{x(\cdot)}(t)$ apibrėžiamas formule

$$\left(1+\frac{1-\hat S_{x(\cdot)}(t)}{\hat S_{x(\cdot)}(t)}\exp\left\{\pm\hat\sigma_{Q_{x(\cdot)}}(t)\omega_{1-\alpha/2}\right\}\right)^{-1}, \tag{2.72}$$

kur $\omega_\alpha$ yra normalaus dėsnio $N(0,1)$ α-kvantilis ir

$$\hat\sigma^2_{Q_{x(\cdot)}}(t)=\frac{J^T_{S_{x(\cdot)}(t)}\mathbf{I}^{-1}(\hat\beta,\hat\sigma)J_{S_{x(\cdot)}(t)}}{\hat S^2_{x(\cdot)}(t)(1-\hat S_{x(\cdot)}(t))^2}, \tag{2.73}$$

$$J^T_{S_{x(\cdot)}(t)}=-\frac{G'(G^{-1}(\hat S_{x(\cdot)}(t)))}{\hat\sigma^2_{Q_{x(\cdot)}}(t)}\times\left(\hat\sigma_{Q_{x(\cdot)}}(t)\frac{\int_0^t x^T(u)e^{-\hat\beta^T x(u)}du}{\int_0^t e^{-\hat\beta^T x(u)}du},\ln\{\int_0^t e^{-\hat\beta^T x(u)}du\}\right).$$

Jeigu $x$ yra pastovus laike, tuomet

$$J^T_{S_x(t)}=-\frac{G'(G^{-1}(\hat S_x(t)))}{\hat\sigma^2_{Q_x}(t)}\times\left(\hat\sigma_{Q_x}(t)x^T,\ln t-\hat\beta^T x\right).$$

*Aproksimaciniai patikimumo intervalai kvantiliams*

Formulė

$$\left(g(\hat\theta)\exp\{-\sigma_K(\hat\theta)\omega_{1-\alpha/2}\},g(\hat\theta)\exp\{\sigma_K(\hat\theta)\omega_{1-\alpha/2}\}\right)$$

reiškia, kad aproksimacinis(1-α) – patikimumo intervalas $p$-kvantiliui $t_p(x(\cdot))$ yra

$$\hat t_p(x(\cdot))\exp\left\{\pm\hat\sigma_{K_p(x(\cdot))}\omega_{1-\alpha/2}\right\}, \tag{2.74}$$

kur

$$\hat\sigma^2_{K_p(x(\cdot))}=\frac{1}{\hat t_p^2(x(\cdot))}J^T_{t_p(x(\cdot))}\mathbf{I}^{-1}(\hat\beta,\hat\sigma)J_{t_p(x(\cdot))},$$

kur

$$J^T_{t_p(x(\cdot))}=e^{\hat\beta^T x(\hat t_p(x(\cdot)))}\left(\int_0^{\hat t_p(x(\cdot))}x(u)e^{-\hat\beta^T x(u)}du,(G_0^{-1}(1-p))^{\hat\sigma}\ln G_0^{-1}(1-p)\right).$$

Pastoviam laike $x$ mes turime

$$J^T_{t_p(x)}=\hat t_p(x)(x,\ln G_0^{-1}(1-p)).$$

*Aproksimacinis patikimumo intervalas vidutinei gyvenimo trukmei*

Formulė

$$\left(g(\hat{\theta})\exp\{-\sigma_K(\hat{\theta})\omega_{1-\alpha/2}\}, g(\hat{\theta})\exp\{\sigma_K(\hat{\theta})\omega_{1-\alpha/2}\}\right)$$

reiškia, kad aproksimacinis (1-α) – patikimumo intervalas vidutinei gyvenimo trukmei $m(x(\cdot))$ yra

$$\hat{m}(x(\cdot))\exp\left\{\pm\frac{\hat{\sigma}_{m(x(\cdot))}(\hat{\beta},\hat{\sigma})}{\hat{m}(x(\cdot))}\omega_{1-\alpha/2}\right\}, \tag{2.75}$$

kur

$$\hat{\sigma}^2_{m(x(\cdot))} = J^T_{m(x(\cdot))}\mathbf{I}^{-1}(\hat{\beta},\hat{\sigma})J_{m(x(\cdot))},$$

$$J_{m(x(\cdot))} = \int_0^\infty J_{S_{x(\cdot)}(t)}dt.$$

Jeigu *x=const*, tuomet

$$\hat{\sigma}^2_{m(x)}(\hat{\beta},\hat{\sigma}) = \sum_{l=0}^{m+1}\sum_{s=0}^{m+1} b_l(\hat{\beta},\hat{\sigma})I^{ls}(\hat{\beta},\hat{\sigma})b_s(\hat{\beta},\hat{\sigma})$$

ir

$$b_i(\hat{\beta},\hat{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial\hat{\beta}_i}\hat{m}(x) = \hat{m}(x)x_i \quad (i = 0,1,\ldots,m),$$

$$b_{m+1}(\hat{\beta},\hat{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial\hat{\sigma}}\hat{m}(x) = \frac{\hat{m}(x)}{\hat{\sigma}} + \hat{\sigma}e^{\hat{\beta}^T x}\int_0^\infty u^{\hat{\sigma}-1}G_0(u)\ln u du.$$

*Aproksimuoti patikimumo intervalai vidutiniams santykiams*

Formulė

$$\left(g(\hat{\theta})\exp\{-\sigma_K(\hat{\theta})\omega_{1-\alpha/2}\}, g(\hat{\theta})\exp\{\sigma_K(\hat{\theta})\omega_{1-\alpha/2}\}\right)$$

reiškia, kad aproksimacinis (1-α) – patikimumo intervalas vidutiniam santykiui *MR(x,y)* yra

$$\left(\exp\left\{\hat{\beta}^T(y-x) - \hat{\sigma}_{MR}\right\}\omega_{1-\alpha/2}, \exp\left\{\hat{\beta}^T(y-x) + \hat{\sigma}_{MR}\right\}\omega_{1-\alpha/2}\right), \tag{2.76}$$

kur

$$\hat{\sigma}^2_{MR} = \sum_{l=0}^{m}\sum_{s=0}^{m}(y_l - x_l)I^{ls}(\hat{\beta},\hat{\sigma})(y_s - x_s). \tag{2.77}$$

## 2.4 Eksperimentų planai pagreitinto gyvenimo bandymuose (PGB)

PGB tikslas yra pateikti įverčius pagrindinėms patikimumo charakteristikoms prie normaliosios apkrovos, naudojant pagreitintų eksperimentų duomenis, kuomet gaminiai yra bandomi didesnės nei normaliosios apkrovos sąlygomis.

Apkrova $x_2$ yra didesnė nei apkrova $x_1(\cdot), x_2(\cdot) > x_1(\cdot)$, jei bet kokiam $t \geq 0$ nelygybė $S_{x_1(\cdot)}(t) \geq S_{x_2(\cdot)}(t)$ išlieka, ir egzistuoja $t_0 > 0$ toks, kad $S_{x_1(\cdot)}(t_0) > S_{x_2(\cdot)}(t_0)$.

Pažymėkime normaliąją apkrovą $x_0 = (x_{00}, x_{01}, \cdots, x_{0m}), x_{00} = 1$. Tegu PG modelis galioja apkrovų aibėje *E*, tuomet bet kokiam $x(\cdot) \in E$:

$$S_{x(\cdot)}(t) = S_0\left(\int_0^t r\{x(\tau)\}d\tau\right). \tag{2.78}$$

Jeigu $x(\tau) \equiv x = const$, tuomet

$$S_x(t) = S_0(r(x)t). \tag{2.79}$$

Dažniausiai pagreitinti eksperimentai yra atliekami su vienmate apkrova ($m$ = 1), kartais su dvimate ($m$ = 2).

Pagreitintuose bandymuose gali būti naudojami keli eksperimentų planai. Mus domina *pirmasis planas*.

### 2.4.1 Pirmasis eksperimentų planas

Tegul $x_1,\ldots,x_k$ yra pastovios laike pagreitintos apkrovos:

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_k ;$$

čia $x_i = (x_{i0}, x_{i1}, \cdots, x_{im}), x_{i0} = 1$. Normalioji apkrova $x_0$ nėra naudojama eksperimento metu.

*Yra bandomos k-grupių. i-toji grupė iš $n_i$ vienetų, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, yra testuojama su $x_i$ apkrova. Duomenys gali būti pilni arba cenzūruoti nepriklausomai iš dešinės.*

Jeigu funkcijos $r$ pavidalas yra visiškai nežinomas ir naudojamas šis eksperimentų planas, funkcija $S_{x_0}$ niekada negali būti vertinama, kai tariama, kad yra žinoma parametrinė šeima, kuriai priklauso $S_{x_0}(t)$ pasiskirstymas.

Pavyzdžiui, jeigu $S_0(t) = e^{-(t/\theta)^{\alpha}}$, tuomet pastovioms apkrovoms

$$S_x(t) = \exp\left\{ -\left( \frac{r(x)}{\theta} t \right)^{\alpha} \right\}.$$

Pagal pateiktą eksperimentų planą gali būti įvertinti parametrai

$$\alpha, \frac{r(x_1)}{\theta}, \cdots, \frac{r(x_k)}{\theta}$$

ir funkcijos

$$S_{x_1}(t), \ldots, S_{x_k}(t).$$

Vis dėlto, funkcija *r(x)* yra visiškai nežinoma, parametras $r(x_0)$ negali būti užrašytas kaip žinoma šių įvertintų parametrų funkcija. Taigi $r(x_0)$ ir, vadinasi, $S_{x_0}(t)$ negali būti įvertinti.

Taigi, funkcija $r$ turi būti pasirinkta iš funkcijų klasės. Dažnai yra naudojamas modelis

$$S_x(t) = S_0(e^{-\beta^T x} t), \tag{2.80}$$

su $x = (x_0, \cdots, x_m)^T$, $\beta = (\beta_0, \cdots, \beta_m)^T$, kur $x_j$ gali būti ne apkrovos komponentės, bet kai kurios funkcijos $\varphi_j(x)$ iš jų.

Funkcijų $\varphi_j(x)$ pasirinkimas yra labai svarbus pagreitinto gyvenimo bandymuose, nes *normalioji apkrova nėra eksperimente panaudotų apkrovų srityje*, ir netinkamas modelio pasirinkimas gali duoti netinkamus patikimumo charakteristikų su normaliąja apkrova įverčius.

## 2.5 Parametrinis vertinimas PGB pagal PG modelį

Tarkime, kad pradinė išgyvenamumo funkcija $S_0$ PG modelyje (2.1) priklauso apibrėžtai pasiskirstymų klasei.

Kiekvienas iš PGB eksperimentų planų yra atskiras atvejis eksperimentų plano, aprašyto dalyje (2.3.1).

Pirmasis planas yra atskiras atvejis to bendrojo plano, imant

$$x^{(i)} = \begin{cases} x_1, & i = 1, \cdots, n_1, \\ x_2, & i = n_1 + 1, \cdots, n_1 + n_2, \\ \cdots & \cdots \\ x_k, & i = \sum_{j=1}^{k-1} n_j + 1, \cdots, n \end{cases}, \tag{2.81}$$

kur $x_j = (x_{j0}, \cdots, x_{jm})$ $(i = 1, \cdots, k)$.

Antrasis planas: $x^{(i)}(\cdot) = x(\cdot)$ bet kokiam $i = 1, \cdots, n$, kur

$$x(\tau) = \begin{cases} x_1, & 0 \le \tau < t_1, \\ x_2, & t_1 \le \tau < t_2, \\ \cdots & \cdots \\ x_k, & t_{m-1} \le \tau < t_k \end{cases}, \tag{2.82}$$

ir $x_j = (x_{j0}, \cdots, x_{jm})$ $(j = 1, \cdots, k)$.

Pastebėkime skirtumą. Pirmojo plano atveju, pastovioji apkrova $x_j$ naudojama *visą laiką j-ąjai vienetų grupei*. Antrojo plano atveju, pastovioji apkrova $x_j$ naudojama *visiems vienetams intervale* $[t_{j-1}, t_j)$.

Trečiasis planas: $x^{(i)}(\tau) = x_1, \tau \ge 0$ $(i = 1, \cdots, n_1)$;

$$x^{(i)}(\tau) = \begin{cases} x_1, & \tau < t_1, \\ x_0, & \tau \in [t_1, t_2] \end{cases}, (i = n_1 + 1, \cdots, n), \tag{2.83}$$

kur $x_j = (x_{j0}, \cdots, x_{jm})$ ($i$ = 1,2).

### *2.5.1 Pagrindinių patikimumo charakteristikų su normaliąja apkrova įverčiai*

*Pirmasis ir antrasis planai*

Įverčiai patikimumo funkcijos $S_{x_0}(t)$, $p$-kvantilio $t_p(x_0)$ ir vidutinio laiko $m(x_0)$ su normaliąja apkrova $x_0$ yra apskaičiuojami, naudojant formules (2.54), (2.56) ir (2.58) (mastelio pasiskirstymų šeimos), taip pat apibendrinto Veibulo bei eksponentinio pasiskirstymo, ir visose formulėse tariama, kad $x = x_0$.

Pasirenkant apibrėžtą mastelio pasiskirstymų šeimą ir *r(x)* parametrizacijos, gaunamos konkrečios įverčių formulės.

**2.9 PAVYZDYS**

Jeigu $T_{x_0}$ turi Veibulo pasiskirstymą, pvz.

$$S_{x_0}(t) = e^{-(t/\theta)^\nu},\ t \ge 0,$$

ir pasirinkta Arrhenius parametrizacija (pavyzdžiui, apkrova yra temperatūra), pvz.

$$r(x) = e^{-\beta_0 - \beta_1 / x},$$

tuomet

$$G(t) = \exp\{\exp(-t)\},\ \hat{S}_{x_0(t)} = \exp\left\{-\exp\left\{\frac{\ln t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 / x_0}{\hat{\sigma}}\right\}\right\},\ \hat{t}_p(x_0) = e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 / x_0}(-\ln(1-p))^{\hat{\sigma}}.$$

**2.10 PAVYZDYS**

Jeigu $T_{x_0}$ turi loglogistinį pasiskirstymą, pvz.

$$S_{x_0}(t) = (1 + (t/\theta)^\nu)^{-1},\ t \ge 0,$$

ir laipsninio dėsnio parametrizacija yra pasirinkta (pavyzdžiui, apkrova yra įtampa), pvz.

$$r(x) = e^{-\beta_0 - \beta_1 \ln x},$$

tuomet

$$G(t) = (1 + e^t)^{-1}, \ \hat{S}_{x_0}(t) = \left[1 + \exp\left(\frac{\ln t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \ln x_0}{\hat{\sigma}}\right)\right]^{-1}, \ \hat{t}_p(x_0) = e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \ln x_0}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\hat{\sigma}}.$$

**2.11 PAVYZDYS**

Jeigu $T_{x_0}$ turi lognormalųjį pasiskirstymą ir pasirinkta Eyring parametrizacija, pvz.

$$r(x) = e^{-\beta_0 - \beta_1 \ln x - \beta_2 / x},$$

tuomet

$$G(t) = 1 - \Phi(t), \ \hat{S}_{x_0}(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \ln x_0 - \hat{\beta}_2 / x_0}{\hat{\sigma}}\right), \ \hat{t}_p(x_0) = e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \ln x_0 + \hat{\beta}_2 / x_0 + \hat{\sigma}\Phi^{-1}(p)}.$$

**2.12 PAVYZDYS**

Tegul gedimo laikas $T_{x_0}$ turi Veibulo pasiskirstymą ir apkrova $x = (x_1, x_2)^T$ yra dvimatė (pavyzdžiui, įtampa ir temperatūra), bei pasirinkta parametrizacija (2.19),

tuomet

$$\hat{S}_{x_0}(t) = \exp\left\{-\exp\left\{\frac{\ln t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \ln x_{10} - \hat{\beta}_2 / x_{20}}{\hat{\sigma}}\right\}\right\}, \hat{t}_p(x_0) = e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \ln x_{10} + \hat{\beta}_2 / x_{20}}\{-\ln(1-p)\}^{\hat{\sigma}}.$$

# 3 TIRIAMOJI DALIS

## *3.1 Duomenys*

Duomenys, naudojami skaičiavimams atlikti, yra prancūzų kompanijos „Stryker Spine“ eksperimentinių bandymų su implantais rezultatai. Mus domina implantų, naudojamų juosmens ankilozės metu, darbo laikas *T*, kuomet juos cikliškai veikia apkrovos, apibrėžtos minimalia ir maksimalia reikšme, išreikšta Niutonais. Gyvenimo trukmė yra išreikšta ciklų skaičiumi iki implanto gedimo. Galimi trys apkrovos tipai: 28-280N, 30-300N, 35-350N. Žinoma, kad maksimali apkrova yra visada dešimt kart didesnė nei minimali. Susitarkime žymėti mažiausią apkrovos reikšmę *x*. Buvo surinkti daugelio eksperimentų su įvairiais implantų tipais (Diapason ir Xia) duomenys. Eksperimento metu konkretaus tipo implantas dirba, veikiamas pasirinkta apkrova, ir stebima jo gyvenimo trukmė (arba cenzūravimo momentas, jei implantas nesugedo eksperimento metu). Pagrindinis tikslas yra įvertinti $x_{cr}$ – kritinę apkrovos reikšmę, kuriai su duota tikimybe $\gamma$ galima garantuoti darbą be tam tikro tipo implantų gedimų 5 milijonus ciklų.

Duomenys pateikiami 3.1 lentelėje ir yra suskirstyti pagal apkrovos tipus. Be to, yra nurodytas jų darbo laikas, išreikštas ciklų iki implanto sugedimo skaičiumi.

**3.1 LENTELĖ**

| **Apkrovos grupė** | **Ciklų skaičius** | **Apkrovos dydis** |
|---|---|---|
| 1 | 69952 | 28 |
| 1 | 80204 | 28 |
| 1 | 72322 | 28 |
| 1 | 54940 | 28 |
| 1 | 163868 | 28 |
| 1 | 52351 | 28 |
| 1 | 44586 | 28 |
| 1 | 96290 | 28 |
| 1 | 49984 | 28 |
| 1 | 194560 | 28 |
| 2 | 59851 | 30 |
| 2 | 24245 | 30 |
| 2 | 35742 | 30 |
| 2 | 29827 | 30 |
| 2 | 26944 | 30 |
| 2 | 56671 | 30 |
| 2 | 23237 | 30 |
| 2 | 34568 | 30 |
| 2 | 37800 | 30 |
| 2 | 27118 | 30 |
| 2 | 27784 | 30 |

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 47184 | 30 |
| 2 | 37681 | 30 |
| 2 | 26489 | 30 |
| 2 | 23975 | 30 |
| 2 | 23253 | 30 |
| 2 | 44875 | 30 |
| 3 | 12506 | 35 |
| 3 | 9070 | 35 |
| 3 | 21410 | 35 |
| 3 | 14887 | 35 |
| 3 | 9193 | 35 |
| 3 | 15168 | 35 |
| 3 | 14165 | 35 |
| 3 | 14836 | 35 |
| 3 | 11195 | 35 |
| 3 | 11093 | 35 |

## *3.2 Teorijos taikymas*

### *3.2.1 Naudotas statistinis modelis. Tikėtinumo funkcija*

Kritinė apkrovos reikšmė $x_{cr}$ tenkina lygtį

$$G_{x_{cr}}(t_g) = P\{T > t_g \mid x_{cr}\} = \gamma\,, \tag{3.1}$$

kur $\gamma = 0{,}95$.

Naudosime tokį modelį:

patikimumo funkcija $G_x(t)$ yra tokio pavidalo

$$G_x(t) = \exp\{-\left(e^{-\beta_0 - \beta_1 \ln x} t\right)^{\delta}\}\,, \tag{3.2}$$

t.y. imame Veibulo skirstinių šeimą ir laipsninį modelį.

Eksperimento duomenys yra tokio pavidalo:

turime k-gaminių grupių; *i*-jai grupei maksimali eksperimento trukmė yra $t_i$ (*i*-je grupėje yra $n_i$-gaminių), o apkrova – $x_i$.

Užrašome $G_x(t)$ tokiu pavidalu:

$$G_x(t) = e^{-(e^{-\beta_0 - \beta_1 \ln x} t)^{\delta}} = e^{-e^{\delta \ln(e^{-\beta_0 - \beta_1 \ln x} t)}} = e^{-e^{\delta(-\beta_0 - \beta_1 \ln x + \ln t)}} =$$

$$= G(\delta(-\beta_0 - \beta_1 \ln x + \ln t)) = G\left(\frac{\ln t - \beta_0 - \beta_1 \ln x}{b}\right),$$

kur

$$G_x(t) = e^{-e^{t}}\,,\ b = 1/\delta\,.$$

Pažymėkime $\theta = (\beta_0, \beta_1, b)$ tikėtinumo funkciją

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{n_i} \lambda_i^{\delta_{ij}} (X_{ij};\theta) G_i (X_{ij};\theta);$$

čia

$$X_{ij} = \min\{T_{ij}, t_i\}, \ \delta_i = \mathbf{1}\{T_{ij} \le t_i\} = \begin{cases} 1, & jei \ \ T_{ij} \le t_i \\ 0, & jei \ \ T_{ij} > t_i \end{cases};$$

$$\lambda_i(t;\theta) = -\frac{G_i'(t;\theta)}{G_i(t;\theta)}, \ G_i = G_{x_i}.$$

Turėsime

$$G_x'(t) = G'\left(\frac{\ln t - \beta_0 - \beta_1 \ln x}{b}\right)\frac{1}{bt};$$

$$\lambda_x(t) = -\frac{G'\left(\frac{\ln t - \beta_0 - \beta_1 \ln x}{b}\right)}{G\left(\frac{\ln t - \beta_0 - \beta_1 \ln x}{b}\right)}\frac{1}{bt} = h\left(\frac{\ln t - \beta_0 - \beta_1 \ln x}{b}\right),$$

kur

$$h(u) = -\frac{G'(u)}{G(u)},$$

o Veibulo dėsniui

$$-G'(u) = e^u e^{-e^u}, \ h(u) = e^u.$$

Vadinasi,

$$L(\beta_0, \beta_1, b) = \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{n_i} e^{\delta_{ij}\left(\frac{\ln X_{ij} - \beta_0 - \beta_1 \ln x_i}{b}\right)} e^{-e^{\frac{\ln X_{ij} - \beta_0 - \beta_1 \ln x_i}{b}}} \left(\frac{1}{bX_{ij}}\right)^{\delta_{ij}},$$

ir, logaritmavus, gauname

$$\begin{gathered} \ln L(\beta_0, \beta_1, b) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \delta_{ij} \left(\frac{\ln X_{ij} - \beta_0 - \beta_1 \ln x_i}{b}\right) - \\ - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} e^{\frac{\ln X_{ij} - \beta_0 - \beta_1 \ln x_i}{b}} - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \delta_{ij} \ln b + const \end{gathered}. \tag{3.3}$$

### *3.2.2 Kritinės apkrovos reikšmės įvertis*

Mums reikia įvertinti kritinę apkrovos reikšmę $x_{cr}$. Prie šios apkrovos implantas funkcionuoja be gedimų ne mažiau kaip penkis milijonus ciklų su didele tikimybe $\gamma = 0,95$.

Iš (3.2) išplaukia, kad apkrovos reikšmė $x_{cr}$ apskaičiuojama pagal formulę

$$x_{cr} = \exp\left\{-\frac{b\ln(-\ln\gamma) - \ln t_g + \beta_0}{\beta_1}\right\}, \tag{3.4}$$

čia $\gamma = 0,95$ ir $t_g = 5000000$.

O jos įvertis yra

$$\hat{x}_{cr} = \exp\left\{-\frac{\hat{b}\ln(-\ln\gamma) - \ln t_g + \hat{\beta}_0}{\hat{\beta}_1}\right\}. \tag{3.5}$$

Kad gauti $b$, $\beta_0$, $\beta_1$ įverčius $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{b}$, reikia maksimizuoti pagal $\beta_0, \beta_1, b$ funkciją (žr. (3.3))

$$g(\beta_0, \beta_1, b) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\delta_{ij}\frac{\ln X_{ij} - \beta_0 - \beta_1 \ln x_i}{b} - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} e^{\frac{\ln X_{ij} - \beta_0 - \beta_1 \ln x_i}{b}} - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\delta_{ij}\ln b. \tag{3.6}$$

## 3.3 Praktiniai skaičiavimai

### 3.3.1 Užduoties apibendrinimas

Turime duomenis, pateiktus lentelėje 3.1, kur yra trys apkrovos tipai: $x_1 = 28$, $x_2 = 30$ ir $x_3 = 35$. Taip pat žinome, kad $\gamma = 0.95$, o $t_g = 5000000$.

Taigi mums reikia įvertinti kritinę apkrovos reikšmę $x_{cr}$, o tiksliau apskaičiuoti jos įvertį $\hat{x}_{cr}$, kuris su tikimybe $\gamma = 0{,}95$ garantuoja implanto funkcionavimą be gedimų penkis milijonus ciklų. Tam tikslui pasiekti naudosime formulę (3.5). Bet prieš tai mums reikės gauti $\beta_0, \beta_1, b$ įverčius $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{b}$, maksimizuojant funkciją (3.6). Gavus šiuos įverčius, galėsime apskaičiuoti mus dominančios kritinės apkrovos reikšmę.

### 3.3.2 Programinė realizacija

Visiems skaičiavimams atlikti buvo naudojama SAS programinė įranga. Lentelėje 3.2 pateikiama programa, kurios pagalba buvo gauti ne tik reikalingi įverčiai, bet ir, kaip pagalbinė medžiaga, grafikai. Reikia pastebėti, kad pradiniu artiniu paėmėme: $b = 1; \beta_0 = 97.1527; \beta_1 = -25.7676$. Šis artinys išplaukia iš to, kad

$$g(\beta_0, \beta_1, b) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\ln T_i - \beta_0 - \beta_1 \ln x_i}{b} - \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{\ln T_i - \beta_0 - \beta_1 \ln x_i}{b}},$$

kur

$$\beta_0 > 0, \beta_1 < 0, b > 0.$$

Mes turime, kad

$$x_{cr} = \exp\left\{-\frac{b\ln(-\ln 0.95) - \ln(5*10^6) + \beta_0}{\beta_1}\right\} = \exp\left\{-\frac{b\ln(-\ln 0.95) - \ln 5 - 6\ln 10 + \beta_0}{\beta_1}\right\}$$

Tegul $b$ = 1. Iš bandymų rezultatų matome, kad prie apkrovos lygios 28 vidutinė gyvenimo trukmė yra lygi 80000 ciklų, o prie 30 ir 35 – 45000 ir 18000 atitinkamai.

$$T \sim e^{-(t/\theta)^{\delta}}, \; ET = \theta\Gamma(1 + \frac{1}{\delta}).$$

Prie $x$ = 28 turime, kad

$$\theta_{28} = e^{\beta_0 + \beta_1 \ln 28} \text{ ir } e^{\beta_0 + \beta_1 \ln 28}\Gamma(1 + b) \approx 80000;$$

prie $x$ = 30 turime, kad

$$\theta_{30} = e^{\beta_0+\beta_1 \ln 30} \text{ ir } e^{\beta_0+\beta_1 \ln 30}\Gamma(1+b) \approx 45000;$$

prie $x$ = 35 turime, kad

$$\theta_{35} = e^{\beta_0+\beta_1 \ln 35} \text{ ir } e^{\beta_0+\beta_1 \ln 35}\Gamma(1+b) \approx 18000.$$

Taigi

$$\frac{ET_{28}}{ET_{30}} = \frac{\theta_{28}}{\theta_{30}} \approx e^{\beta_1(\ln 28-\ln 30)} \Rightarrow \beta_1(\ln 28-\ln 30) \approx \frac{80000}{45000} \Rightarrow \beta_1 \approx \frac{16}{9}\cdot\frac{1}{\ln 28-\ln 30} = -25.7676$$

$$e^{\beta_0} = \frac{80000}{e^{\beta_1 \ln 28}\Gamma(1+b)} \Rightarrow \beta_0 = \ln 80000 - \beta_1 \ln 28 - \underbrace{\ln\Gamma(2)}_{\downarrow\, 0} \Rightarrow \beta_0 = \ln 80000 - \beta_1 \ln 28 = 97.1527$$

**3.2 LENTELĖ**

```
Data duomenys;
input gr T_ij t_i apkrova;
X_ij = min (T_ij, t_i);
If T_ij <= t_i then Delta_ij=1;
else Delta_ij=0;
cards;
    1   69952    100000   28
    1   80204    100000   28
    1   72322    100000   28
    1   54940    100000   28
    1   163868   100000   28
    1   52351    100000   28
    1   44586    100000   28
    1   96290    100000   28
    1   49984    100000   28
    1   194560   100000   28
    2   59851    100000   30
    2   24245    100000   30
    2   35742    100000   30
    2   29827    100000   30
    2   26944    100000   30
    2   56671    100000   30
    2   23237    100000   30
    2   34568    100000   30
    2   37800    100000   30
    2   27118    100000   30
    2   27784    100000   30
    2   47184    100000   30
    2   37681    100000   30
    2   26489    100000   30
    2   23975    100000   30
    2   23253    100000   30
    2   44875    100000   30
    3   12506    100000   35
    3   9070     100000   35
    3   21410    100000   35
    3   14887    100000   35
    3   9193     100000   35
```

```
    3   15168   100000  35
    3   14165   100000  35
    3   14836   100000  35
    3   11195   100000  35
    3   11093   100000  35
;
run;

ods rtf body = 'NLP.rtf';
title 'Maksimizavimo rezultatas';
PROC NLP DATA=duomenys;
      MAX lnL;
      PARMS Beta0 = 97.1527, Beta1 = -25.7676, b = 1;
      BOUNDS Beta0 > 0, Beta1 < 0, b > 0;
      lnL = Delta_ij*(log(X_ij)-Beta0-Beta1*log(apkrova))/b -
              exp((log(X_ij)-Beta0-Beta1*log(apkrova))/b)-
              Delta_ij*log(b)
      ;
run;
%Let Beta0 = 36.412;
%Let Beta1 = -7.562888;
%Let b = 0.306276;
%Let xcr = 14.2;
data Graf1;
      do t = 0 to 150000 by 500;
      G = exp(-(exp(-&Beta0-&Beta1*log(28))*t)**(1/&b));
      G2 = exp(-(exp(-&Beta0-&Beta1*log(30))*t)**(1/&b));
      G3 = exp(-(exp(-&Beta0-&Beta1*log(35))*t)**(1/&b));
      output;
end;
goptions reset = (axis, legend, pattern, symbol, title, footnote)
interpol = join;
symbol1 height = 1 cv = red value = none;
symbol2 height = 1 cv = green value = none;
symbol3 height = 1 cv = gold value = none;
proc gplot data = Graf1;
plot (G G2 G3)*t / overlay Frame;
run;
quit;
data Graf2;
      do t = 0 to 10000000 by 1000;
      Gcr = exp(-(exp(-&Beta0-&Beta1*log(&xcr))*t)**(1/&b));
output;
end;
goptions reset = (axis, legend, pattern, symbol, title, footnote)
interpol = join;
symbol1 height = 1 cv = cyan value = none;
proc gplot data = Graf2;
plot (Gcr)*t / overlay Frame;
run;
quit;
ods rtf close;
```

### 3.3.3 Rezultatai

Gavome tokius nežinomų parametrų įverčius (žr. 1 priedą, 1.1 pav.):

$$\hat{b} = 0.306276; \hat{\beta}_0 = 36.412001; \hat{\beta}_1 = -7.563888.$$

Atitinkamai, įstačius juos į formulę (3.5), apskaičiuojame $\hat{x}_{cr}$:

$$\hat{x}_{cr} = \exp\left\{-\frac{0.306276\ln(-\ln 0.95) - \ln(5*10^6) + 36.412001}{-7.563888}\right\} = 14.2. \qquad (3.7)$$

Taigi implanto kritinės apkrovos $x_{cr}$ įvertis, kuris su tikimybe $\gamma = 0,95$ garantuoja funkcionavimą be gedimų penkis milijonus ciklų, yra lygus 14,2 (bus apytiksliai 14.2-142N apkrova).

Piešinyje 2.1 pavaizduotos patikimumo funkcijos $G_x(t)$ prie skirtingų apkrovos $x$ reikšmių (kai $x$ = 28, $x$ = 30 ir $x$ = 35) kreivės. Reikia pastebėti, kad mažėjant apkrovai implanto gyvenimo trukmė ilgėja. Taip pavyzdžiui prie apkrovos $x$ = 35 pusė visų gaminių sugęs apytiksliai po 12000 – 14000 ciklų, kai veiks $x$ = 30 apkrova tokios pat implantų dalies gedimą stebėsime tik po 40000, o stebint funkciją $G_x(t)$ apkrovai $x$ = 28, stebime pailgėjusią iki 66000 – 68000 ciklų pusės visų implantų gyvenimo trukmę.

Piešinyje 2.2 pavaizduota patikimumo funkcijos $G_x(t)$ kreivė, veikiant apskaičiuotai kritinei apkrovai $x$ = 14.2. Matome, kad netgi po penkių milijonų ciklų 95% visų implantų vis dar veiktų be gedimų, o po dešimties milijonų ciklų – apie 60% visų gaminių.

# IŠVADOS

Pasiūlytas Pagreitintųjų gedimų parametrinis modelis yra pavyzdys, kuris, panaudojus programinės įrangos SAS priemones, leidžia įvertinti implanto kritinės apkrovos $x_{cr}$ reikšmę, kuriai su duota tikimybe $\gamma$ galima garantuoti darbą be tam tikro tipo gedimų nustatytą ciklų skaičių. Pagrindinis sunkumas buvo tame, kad atliktų bandymų duomenų buvo mažai, o pastarųjų dispersijos buvo akivaizdžiai didelės. Taip pat truko rezultatų bandymų, atliktų su mažesnėmis apkrovomis (artimesnėmis ieškomai kritinei reikšmei). Taigi, norint gauti labiau patikimą $x_{cr}$ įvertį, reikėtų atlikti pakartotinus skaičiavimus su išplėstu duomenų rinkiniu.

Situacija, išnagrinėta šiame darbe, yra vienas iš daugelio galimų Pagreitintųjų gedimų parametrinio modelio taikymo atvejų pavyzdžių. Įvairiose kompanijose, užsiimančiose pavyzdžiui produkcijos gamyba, dažnai iškyla klausimas, kaip per trumpiausią laiką galima išskaičiuoti optimalius gaminio parametrus, kad kuo greičiau pradėti jo gamybą. Štai tokiais atvejais, kuomet yra įmanoma atlikti bandymus prie padidintų apkrovų, (jos duoda funkcionavimo trukmę trumpesnę nei prie nežinomos apkrovos $x_{cr}$), šio modelio taikymas yra ypač naudingas. O taip pat tuomet, kai kiekvieno konkretaus tipo vienetų skaičius yra santykinai mažas (mūsų atveju, skirtingų pritaikytų apkrovų reikšmių skaičius neviršija trijų).

Ateityje, mūsų nagrinėtiems duomenims, galima būtų įvertinti išgyvenamumą ne tik kaip apkrovos funkciją bet ir kaip implanto tipo funkciją. Šiuo atveju, mes turėtume apjungti visus duomenis, kurie atititinka kelis implantų tipus, ir įvertinti regresijos parametrus. Įvertinta išgyvenamumo funkcija priklausytų nuo apkrovos ir nuo visų kovariančių. Ją galima būtų naudoti kritiniai disponuojamų implantų apkrovai įvertinti, be to ji leistų puikiai prognozuoti įvairių implantų išgyvenamumą, keičiant kovariančių, aprašančių naujus implantus, reikšmes.

Įvairių gedimų priežastys yra dar viena svarbi problema, kurią taip pat galima būtų bandyti išspręsti. Kadangi kiekvienas implantas potencialiai turi kelias gedimo priežastis, kurias ir reikėtų stebėti karu su gyvenimo trukme. Mes žinome, kad egzistuoja modeliai, naudojantys visumą duomenų, kurie gali įvertinti išgyvenamumo funkciją kiekvienai priežasčiai. Todėl prognozės tokiu būdu turi būti daromos apibendrintai arba atskirai gedimo priežasčiai. Kovariančių poveikis taip pat gali būti analizuojamas giliau.

## LITERATŪROS SĄRAŠAS


Bagdonavičius, V. and Nikulin, M. (2002) *Accelerated Life Models. Modelling and Statistical Analysis.*

Mann, N.R., Schafer, R.E. and Singpurwalla, N.D. (1974) *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*. New York: John Wiley and Sons.

Nelson, W. and Macarthur, E. (1992) *Accelerated Testing: Statistical models, test plans, and data analysis*.

Lawless, J.F. (2004) *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. New York: John Wiley and Sons.

Singpurwalla, N.D. (1971) *Inference from Accelerated Life Test When Observations are Obtained form Censored Samples*, Technometrics.

Thernau, T.M. and Grambsch, P.M. (2000) *Modeling Survival Data*. *Extending the Cox Model*. New York: Springer.

Viertl, R. (1988) *Statistical Methods in Accelerated Life Testing*. Göttingen: Vandenhoeck and Ruprecht.

# PRIEDAI

## *1 Priedas. SAS programos išdava*

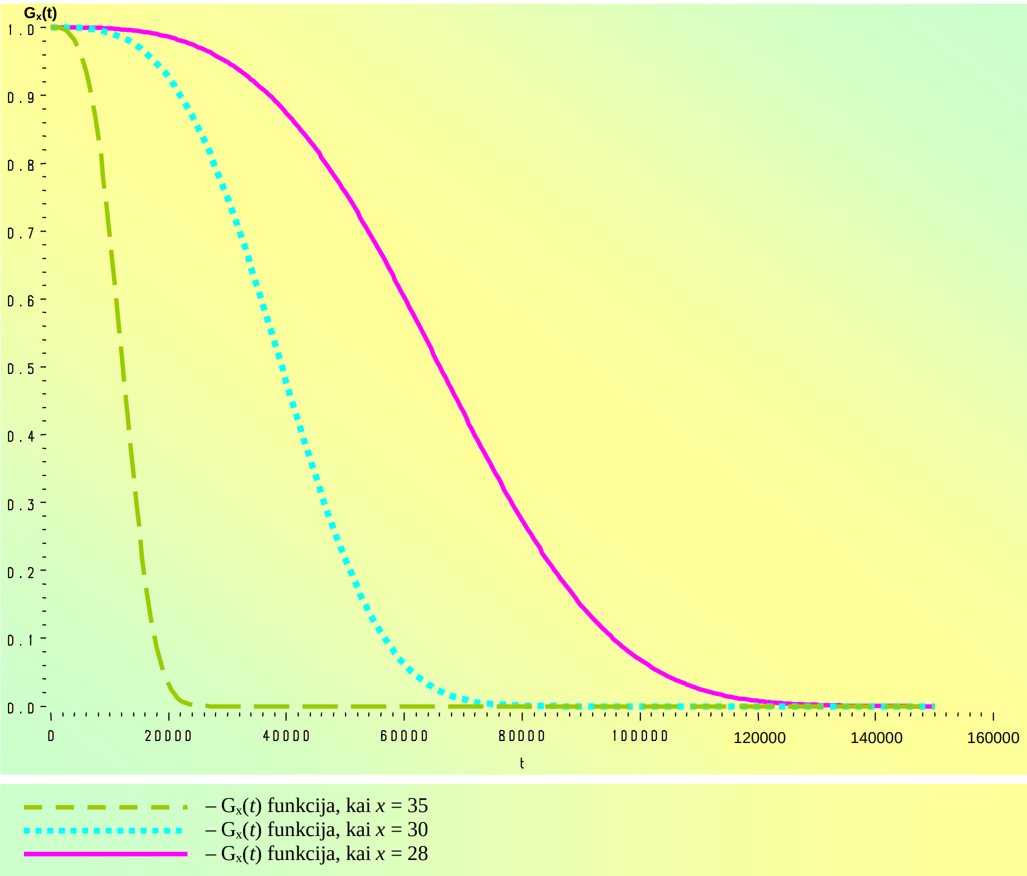
| Optimization Start | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Parameter Estimates** | | | | | |
| **N** | **Parameter** | **Estimate** | **Gradient Objective Function** | **Lower Bound Constrain t** | **Upper Bound Constrain t** |
| **1** | **Beta0** | 97.150000 | 548.260735 | 0 | . |
| **2** | **Beta1** | -25.770000 | 1944.863648 | . | 0 |
| **3** | **b** | 1.000000 | 2077.901325 | 0 | . |

**1.1 pav. Pradinis parametrų $\beta_0, \beta_1, b$ artinys**

| Optimization Results | | | |
|---|---|---|---|
| **Parameter Estimates** | | | |
| **N** | **Parameter** | **Estimate** | **Gradient Objective Function** |
| **1** | **Beta0** | 36.412001 | 6.3754224E-9 |
| **2** | **Beta1** | -7.562888 | 2.1615787E-8 |
| **3** | **b** | 0.306276 | 1.7657014E-8 |

**1.2 pav. Gauti parametrų $\beta_0, \beta_1, b$ įverčiai**

## 2 Priedas. Patikimumo funkcijos $G_x(t)$ grafikai




**2.1 pav. Patikimumo funkcijos $G_x(t)$ veikiant skirtingoms apkrovoms kreivės**

## 2 Priedas (tęsinys). Patikimumo funkcijos $G_x(t)$ grafikai


**2.2 pav. Patikimumo funkcijos $G_x(t)$ veikiant $x_{cr} = 14.2$ apkrovai kreivė**