Turinys

1. Įvadas

Tarkime yra nagrinėjama skaičių

$$y_1 , y_2, ... , y_N$$

generalinė visuma, kurios vidurkiui $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j$ įvertinti išrenkama tūrio n paprasta atsitiktinė imtis be grąžinimo:

$$y_{i_1}, y_{i_2}, ..., y_{i_n},$$

kur $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_n \le N$. Jeigu skaičiai $y_1, y_2, ... , y_N$ yra gaminio charakteristikos, kurias matavimo prietaisai rodo su paklaida ε, tai kiekvienas skaičius $y_1, y_2, ..., y_N$ virsta atsitiktiniu dydžiu

$$y_1+\varepsilon_1, y_2+\varepsilon_2, ... , y_N+\varepsilon_N .$$

čia $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ... , \varepsilon_N$ yra vienodai pasiskirstę nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Jų pasiskirstymo funkciją pažymėkime F(x). Jei matavimo prietaisai be sisteminės paklaidos, tai jų matematinė viltis $M\varepsilon_i$ yra lygi nuliui, t.y.

$$M\varepsilon_i = 0,$$

visiems i = 1, 2, ... , N. ε_i dispersiją $D\varepsilon_i$ žymėsime σ^2, t.y. $\sigma^2 = D\varepsilon_i$, i=1, 2, ... , N. Atsitiktinio dydžio $y_i+\varepsilon_i$ tikimybinis skirstinys yra:

$$G_i(x) = P\{y_i + \varepsilon_i < x\} = P\{\varepsilon_i < x - y_i\} = F(x - y_i),$$

kur i = 1, 2 , … , N.

Pažymėkime $\xi_i = y_i + \varepsilon_i$, i = 1, 2, … , N.

Dabar mūsų stebėjimo objektas yra nepriklausomų atsitiktinių dydžių

$$\xi_1, \xi_2, \dots , \xi_N$$

generalinė visuma, kurios tyrimams panaudosime paprastą atsitiktinę imtį be grąžinimo. Imties išrinkimui pasinaudosime Bengt von Bahr [1] pasiūlytu metodu.

Tarkime $\vec{I} = (I_1, I_2, \dots , I_N)$ yra indikatorių vektorius nepriklausomas nuo $\xi_1, \xi_2, \dots , \xi_N$.

Kiekvienam nulių - vienetų rinkiniui $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots , \nu_N)$, čia $\nu_j = 0$ arba 1, visiems j = 1, 2, … , N, priskiriam tikimybę

$$P(\vec{I} = \vec{\nu}) = \binom{N}{n}^{-1} ,$$

kai sekoje $\nu_1, \nu_2, \dots , \nu_N$ yra n vienetų ir N-n nulių.

Paprastą atsitiktinę imtį pažymėkime

$$\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_n},$$

kur $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_n \le N$. Nagrinėsime sumos

$$S_n = I_1\xi_1 + I_2\xi_2 + \dots + I_N\xi_N,$$

kur $P\{I_j = 1\} = \frac{n}{N}$ ir $P\{I_j = 0\} = 1 - \frac{n}{N}$, tikimybinį skirstinį

$$F_{Nn}(x) = P\{S_n < x\}.$$

Pastebėkime, kad $S_n = I_1 (y_1 + \varepsilon_1) + I_2 (y_2 + \varepsilon_2) + \dots + I_N (y_N + \varepsilon_N) = \sum_{j=1}^{N} I_j y_j + \sum_{j=1}^{N} I_j \varepsilon_j$.

2. Uždaviniai

Bengt von Bahr [1] įrodė

Teorema. Tegul $X_1, X_2, ..., X_N$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, iš kurių atsitiktinai išrenkame n elementų, o jų suma žymima S_n.

Jei $EX_k = \mu_k$, $EX_k^2 = \beta_k$, $E|X_k|^3 = \gamma_k$, kur $\sum_{k=1}^{N} \mu_k = 0$, $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \beta_k = 1$, $\alpha^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mu_k^2$

ir $\gamma = \max_{1 \le k \le N} \gamma_k$, tada

$$\left| P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n(1-f\alpha^2)}} \le x \right) - \Phi(x) \right| \le \frac{60\gamma}{\sqrt{n}(1-f\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$$

kur $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ yra normuota Gauso pasiskirstymo funkcija ir $f = \frac{n}{N}$.

Dešinėje nelygybės pusėje yra reiškinys

$$\frac{60\gamma}{\sqrt{n}(1-f\alpha^2)^{\frac{3}{2}}},$$

kurio optimalumas yra nežinomas. Šio uždavinio sprendimui yra reikalingas pasiskirstymo funkcijos $F_{Nn}(x)$ asimptotinis skleidinys. Mes įrodėme, kad

$$P\{S_n < x\} = \Phi(x) - \frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} (u^3 - 3u) du - \frac{(\alpha_4 - \frac{3}{N})}{4!n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} (u^4 - 6u^2 + 3) du + ... =$$

$$= \Phi(x) - \frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}} \right) + \frac{(\alpha_4 - \frac{3}{N})}{4!n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(3xe^{-\frac{x^2}{2}} + x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} \right) + ...$$

Šioje teoremoje yra atsakymas nuo ko priklauso skirtumo

$$P\{S_n < x\} - \Phi(x)$$

įvertis.

3. Įrodymas

$F_{Nn}(x)$ nagrinėsime charakteringųjų funkcijų metodu. Tarkime ξ_j charakteringoji funkcija yra

$$f_j(t) = Me^{it\xi_j} \quad , \quad j = 1, 2, \dots , N.$$

Yra įrodyta [2], kad sumos S_n charakteringoji funkcija yra

$$f_{S_n}(t) = \binom{N}{n}^{-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_n \le N} f_{i_1}(t) f_{i_2}(t) \dots f_{i_n}(t) . \qquad (1)$$

Šią formulę Bengt von Bahr [1] panaudoja $F_{Nn}(x)$ aproksimavimui normalaus dėsnio charakteringąja funkcija $e^{ita - \frac{t^2}{2}\sigma^2}$, kur $\sigma > 0$ ir $a \in (-\infty, +\infty)$.

Patogesnė ir paprastesnė formulė yra gauta darbe [2]:

$$f_{S_n}(t) = \frac{1}{2\pi P_N(n)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta n} \prod_{k=1}^{N} (q + pe^{i\theta} f_k(t)) d\theta \ .$$

Ją galime užrašyti ir taip:

$$f_{S_n}(t) = \binom{N}{n}^{-1} \sum_{s}{}^{*} (-1)^{n-s} \prod_{m=1}^{n} \frac{1}{k_m! m^{k_m}} \left(\sum_{k=1}^{N} f_k^{\,m}(t) \right)^{k_m} ,$$

kur $P_N(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$, $p = \dfrac{n}{N}$, q = 1-p, o $\sum_s^{*}$ žymi sumavimą pagal visus neneigiamus sveikuosius lygties

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = s,$$

$$k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$$

sprendinius.

Jeigu $g(t) = Me^{it\varepsilon_1}$ yra a.d. ε_1 charakteringoji funkcija, tai

$$f_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dG_j(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x - y_j) = \begin{bmatrix} x - y_j = u \\ x = y_j + u \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(y_j + u)} dF(u) = e^{ity_j} Me^{it\varepsilon_1}$$

Gavome, kad

$$f_j(t) = e^{ity_j} g(t) . \qquad (2)$$

Iš (1) ir (2) lygybių išplaukia, kad

$$f_{S_n}(t)=\binom{N}{n}^{-1}\sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_n\le N}\left(e^{ity_{j_1}}g(t)\right)\left(e^{ity_{j_2}}g(t)\right)\ldots\left(e^{ity_{j_n}}g(t)\right)=$$
$$=g^n(t)\frac{1}{C_N^n}\sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_n\le N}e^{it(y_{j_1}+y_{j_2}+\ldots+y_{j_n})}=g^n(t)\cdot f_{Z_n}(t), \qquad (3)$$

kur $f_{Z_n}(t) = \frac{1}{C_N^n}\sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_n\le N}e^{it(y_{j_1}+y_{j_2}+\ldots+y_{j_n})}$.

R. Erdös ir A. Rényi [3] yra įrodę, kad

$$f_{Z_n}(t)=\frac{1}{P_N(n)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\theta n}\prod_{j=1}^{N}(q+pe^{ity_j+i\theta})d\theta.$$

Iš (3) lygybės seka, kad a.d.

$$\varepsilon=\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j I_j=\varepsilon_1(\omega)+\varepsilon_2(\omega)+\ldots+\varepsilon_n(\omega) \quad \text{ir} \quad Z_n=\sum_{j=1}^{N}y_j I_j(\omega),$$

kur $I_1+I_2+\ldots+I_N = n$,yra nepriklausomi a.d., kadangi

$$f_{S_n}(t)=g^n(t)\cdot f_{Z_n}(t) \quad \text{ir} \quad S_n = \varepsilon + Z_n .$$

Gausime $S_n/\sqrt{n}$ charakteringosios funkcijos $\overline{f_n}(t)$ tikslią išraišką, kuri bus naudinga kitų paklaidų įvertinimui.

Tarkim $f_k(t)$ yra X_k , k = 1, 2, … , N charakteringoji funkcija. Tada

$$\overline{f_n}(t)=\binom{N}{n}^{-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_n\le N}\prod_{j=1}^{n}f_{i_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right),$$

kur $f_{i_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}y_{i_j}}Me^{i\frac{t}{\sqrt{n}}\varepsilon}$.

Dauginame abi puses iš tos pačios funkcijos $e^{t^2/2}$ ir gauname

$$e^{t^2/2}\overline{f_n}(t)=\binom{N}{n}^{-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_n\le N}\prod_{j=1}^{n}\left[e^{t^2/2n}f_{i_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Tarkime z $\in$C ir g(z) yra funkcija pavidalo

$$g(z) = \binom{N}{n}^{-1} \prod_{k=1}^{N} \left(1 + z e^{t^2/2n} f_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

tuomet g(z) $= g(0) + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{z^\nu}{\nu!} g^{(\nu)}(0) = \binom{N}{n}^{-1} + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{z^\nu}{\nu!} g^{(\nu)}(0)$

čia $g^{(\nu)}(0) = \binom{N}{n}^{-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_\nu \le N} \prod_{j=1}^{\nu} e^{t^2/2n} f_{i_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right), \qquad \frac{d^\nu}{dx^\nu} g(x)_{\big|x=0} = g^{(\nu)}(x)_{\big|x=0} = g^{(\nu)}(0)$.

Funkciją g(z) užsirašysime mums patogesniu pavidalu:

$$g(z) = \binom{N}{n}^{-1} \prod_{k=1}^{N} \left(1 + z\left[\left(e^{t^2/2n} f_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1\right) + 1\right]\right) = \binom{N}{n}^{-1} \prod_{k=1}^{N} \left((1+z) + z\left(e^{t^2/2n} f_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)\right) =$$
$$= \binom{N}{n}^{-1} \prod_{k=1}^{N} (1+z) \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{z}{1+z}\left(e^{t^2/2n} f_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)\right) = \binom{N}{n}^{-1} (1+z)^N \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{z}{1+z}\left(e^{t^2/2n} f_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)\right) =$$

$$= \binom{N}{n}^{-1} (1+z)^N \exp\left\{\ln \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{z}{1+z}\left(e^{t^2/2n} f_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)\right)\right\} =$$
$$= \binom{N}{n}^{-1} (1+z)^N \exp\left\{\sum_{k=1}^{N} \ln\left(1 + \frac{z}{1+z}\left(e^{t^2/2n} f_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)\right)\right\}$$

Kadangi ln(1+x) = $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j}$, kai $-1 < x \le 1$, gauname

$$g(z) = \binom{N}{n}^{-1} (1+z)^N \exp\left\{\sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \left(\frac{z}{1+z}\right)^j \left(e^{t^2/2n} f_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)^j\right\} =$$
$$= \binom{N}{n}^{-1} (1+z)^N \exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \left(\frac{z}{1+z}\right)^j \sum_{k=1}^{N} \left(e^{t^2/2n} f_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1\right)^j\right\}.$$

Toliau pasinaudosime sekančia lema.

LEMA. Tegul laipsninė eilutė $\sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j$ konverguoja į funkciją f(x) taško x = 0 aplinkoje (arba yra jos asimptotinis skleidinys, kai x→0). Tada

$$e^{f(x)} = 1+\sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j,$$

kur

$$b_j = \sum{}^{*} \frac{a_1^{\nu_1} \ldots a_j^{\nu_j}}{\nu_1! \ldots \nu_j!}, \tag{4}$$

Suma $\sum^{*}$ yra imama pagal visus $\nu_1, \ldots, \nu_j$ ($\nu_j = 0, 1, 2, \ldots$), kurie tenkina lygybę

$$\nu_1 + 2\nu_2 + \ldots + j\nu_j = j. \tag{5}$$

Mūsų atveju $x = \frac{z}{1+z}$, $a_j(t) = \frac{(-1)^{j+1}}{j} \sum_{k=1}^{N} \left(e^{t^2/2n} f_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1 \right)^j$.

Dabar gauname, kad

$$g(z) \doteq \binom{N}{n}^{-1} (1+z)^N \exp\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^j \frac{(-1)^{j+1}}{j} \sum_{k=1}^{N} \left(e^{t^2/2n} f_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1 \right)^j \right\} =$$

$$= \binom{N}{n}^{-1} (1+z)^N \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^j \sum{}^{*} \frac{a_1^{\nu_1}(t) \ldots a_j^{\nu_j}(t)}{\nu_1! \ldots \nu_j!} \right).$$

Pažymėkime

$$b_k(t) = e^{t^2/2n} f_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

ir

$$B_j(t) = \frac{(-1)^{j+1}}{j} \sum_{k=1}^{N} b_k^j(t), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Pasinaudodami šiais pažymėjimais gauname, kad

$$g(z)=\binom{N}{n}^{-1}(1+z)^N\left\{1+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{z}{1+z}\right)^j\sum{}^*\frac{a_1^{\nu_1}(t)\ldots a_j^{\nu_j}(t)}{\nu_1!\ldots\nu_j!}\right\}=$$
$$=\binom{N}{n}^{-1}(1+z)^N+\sum_{j=1}^{\infty}z^j(1+z)^{N-j}\sum{}^*\frac{a_1^{\nu_1}(t)\ldots a_j^{\nu_j}(t)}{\nu_1!\ldots\nu_j!}\binom{N}{n}^{-1} \tag{6}$$

Pagal (4), (5) ir (6) gauname

$$g(z)=\binom{N}{n}^{-1}\left\{(1+z)^N\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\sum{}^*\left(\frac{z}{1+z}\right)^{i_1}\frac{B_1^{i_1}}{i_1!}\left(\frac{z}{1+z}\right)^{2i_2}\frac{B_2^{i_2}}{i_2!}\ldots\left(\frac{z}{1+z}\right)^{ji_j}\frac{B_j^{i_j}}{i_j!}\right)\right\}=$$
$$=\binom{N}{n}^{-1}\left\{(1+z)^N+\sum_{j=1}^{\infty}\sum{}^*\frac{B_1^{i_1}}{i_1!}\frac{B_2^{i_2}}{i_2!}\ldots\frac{B_j^{i_j}}{i_j!}z^{i_1+2i_2+\ldots+ji_j}(1+z)^{N-i_1-2i_2-\ldots-ji_j}\right\}.$$

Tarkime, kad $z=e^{i\theta}$ ir $B_j=B_j(t)$. Tada

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\theta n}g(e^{i\theta})d\theta=\binom{N}{n}^{-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\theta n}\prod_{k=1}^{N}\left(1+e^{i\theta}e^{\frac{t^2}{2n}}f_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)d\theta=$$
$$=\binom{N}{n}^{-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_n\le N}e^{t^2/2n}f_{i_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)e^{t^2/2n}f_{i_2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\ldots e^{t^2/2n}f_{i_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\binom{N}{n}^{-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_n\le N}e^{t^2/2}\prod_{j=1}^{n}f_{i_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right),$$

nes $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\theta(n-l)}d\theta=\begin{cases}1, n=l\\0, n\ne l\end{cases}$.

Galime rašyti ir taip:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\theta n}g(e^{i\theta})d\theta=\binom{N}{n}^{-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\theta n}(1+e^{i\theta})^N d\theta+\binom{N}{n}^{-1}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\theta n+i\theta j}(1+e^{i\theta})^{N-j}d\theta\sum{}^*\frac{B_1^{i_1}}{i_1!}\frac{B_2^{i_2}}{i_2!}\ldots\frac{B_j^{i_j}}{i_j!}=$$
$$=\binom{N}{n}^{-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\theta n}\sum_{l=0}^{N}\binom{N}{l}e^{i\theta l}1^{N-l}d\theta+\binom{N}{n}^{-1}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\theta(n-j)}\sum_{m=0}^{N-j}\binom{N-j}{m}e^{i\theta m}1^{N-j-m}d\theta\sum{}^*\frac{B_1^{i_1}}{i_1!}\frac{B_2^{i_2}}{i_2!}\ldots\frac{B_j^{i_j}}{i_j!}=$$
$$=\sum_{l=0}^{N}\binom{N}{l}\binom{N}{n}^{-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\theta(n-l)}d\theta+\binom{N}{n}^{-1}\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=0}^{N-j}\binom{N-j}{m}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\theta(n-j-m)}d\theta\sum{}^*\frac{B_1^{i_1}}{i_1!}\frac{B_2^{i_2}}{i_2!}\ldots\frac{B_j^{i_j}}{i_j!}=\frac{\binom{N}{n}}{\binom{N}{n}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=0}^{N-j}\binom{N-j}{m}\binom{N}{n}^{-1}\sum{}^{*}\frac{B_1^{i_1}}{i_1!}\frac{B_2^{i_2}}{i_2!}\cdots\frac{B_j^{i_j}}{i_j!}=1+\sum_{j=1}^{n}\binom{N-j}{n-j}\binom{N}{n}^{-1}\sum{}^{*}\frac{B_1^{i_1}}{i_1!}\frac{B_2^{i_2}}{i_2!}\cdots\frac{B_j^{i_j}}{i_j!}=$$

$$=1+\sum_{j=1}^{n}\frac{n!}{N!}(N-j)(N-j-1)\ldots(n-j+1)\sum{}^{*}\frac{B_1^{i_1}}{i_1!}\frac{B_2^{i_2}}{i_2!}\cdots\frac{B_j^{i_j}}{i_j!} \qquad (7)$$

Kai j = 1, turime $\binom{N-j}{n-j}\binom{N}{n}^{-1}=\frac{n!}{N!}(N-1)(N-2)\ldots n=\frac{n}{N}$,

kai j = 2, $\binom{N-j}{n-j}\binom{N}{n}^{-1}=\frac{n!}{N!}(N-2)(N-3)\ldots n(n-1)=\frac{n(n-1)}{N(N-1)}$,

kai j = 3, $\binom{N-j}{n-j}\binom{N}{n}^{-1}=\frac{n!}{N!}(N-3)(N-4)\ldots n(n-1)(n-2)=\frac{n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}$.

Įsistatę į (7), gauname

$$\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\theta n}g(e^{i\theta})d\theta=1+\frac{n}{N}\frac{B_1}{1!}+\frac{n(n-1)}{N(N-1)}\left(\frac{B_1^2}{2!}+\frac{B_2}{1!}\right)+\frac{n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}\left(\frac{B_1^3}{3!}+\frac{B_1}{1!}\frac{B_2}{1!}+\frac{B_3}{1!}\right)+\ldots$$

$$\binom{N}{n}^{-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_n\le N}\prod_{j=1}^{n}f_{i_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=e^{-\frac{t^2}{2}}+\sum_{j=1}^{n}\frac{n!}{N!}(N-j)(N-j-1)\ldots(n-j+1)\,*$$

$$*\sum{}^{*}\frac{B_1^{i_1}}{i_1!}\frac{B_2^{i_2}}{i_2!}\cdots\frac{B_j^{i_j}}{i_j!}\,e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Charakteringoji funkcija $f_{i_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ yra lygi:

$$f_{i_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_{i_j}(x)dx\ .$$

Sudauginame abi puses pagal j. Tada:

$$\prod_{j=1}^{n} f_{i_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_{i_1,i_2,\dots,i_n}(x)dx$$

ir

$$p_{i_1,i_2,\dots,i_n}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\prod_{j=1}^{n} f_{i_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)dt\ .$$

$$P\left\{\frac{\xi_{i_1}+\xi_{i_2}+\dots+\xi_{i_n}}{\sqrt{n}}<x\right\}=\int_{-\infty}^{x} p_{i_1,i_2,\dots,i_n}(u)du\ .$$

$$\binom{N}{n}^{-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_n\le N}\prod_{j=1}^{n} f_{i_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\int_{-\infty}^{x}\binom{N}{n}^{-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_n\le N} p_{i_1,i_2,\dots,i_n}(u)e^{itu}du\ .$$

$$\binom{N}{n}^{-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_n\le N} p_{i_1,i_2,\dots,i_n}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\binom{N}{n}^{-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_n\le N}\prod_{j=1}^{n} f_{i_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)dt\approx$$
$$\approx\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{n}{N}\frac{B_1}{1!}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{n(n-1)}{N(N-1)}\left(\frac{B_1^2}{2!}+\frac{B_2}{1!}\right)dt+\dots \tag{8}$$

$$B_1(t)=\frac{(-1)^2}{1}\sum_{k=1}^{N} b_k(t)=\sum_{k=1}^{N}\left(e^{\frac{t^2}{2n}} f_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)-1\right)=\sum_{k=1}^{N}\frac{f_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{t^2}{2n}}}{e^{-\frac{t^2}{2n}}}$$

$$f_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{t^2}{2n}}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}x}dF_k(x)-\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}x}d\Phi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}x}d\left[F_k(x)-\Phi(x)\right],$$

kur $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du$ − standartinio normalaus skirstinio pasiskirstymo funkcija.

$$\frac{f_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{t^2}{2n}}}{e^{-\frac{t^2}{2n}}}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\left(i\frac{t}{\sqrt{n}}\right)x-\frac{1}{2}\left(i\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2}d\left[F_k(x)-\Phi(x)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}P_l(u)\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^l d\left[F_k(u)-\Phi(u)\right]=$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^l\int_{-\infty}^{\infty}P_l(u)d\left[F_k(u)-\Phi(u)\right],$$

kur $P_l(u)$ − Meixner daugianariai, $P_0(u) = 1$ ir

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\left[F_k(u)-\Phi(u)\right]=1-1=0.$$

Tada

$$B_1(t)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^l\int_{-\infty}^{\infty}P_l(u)d\left(\sum_{k=1}^{N}\left[F_k(u)-\Phi(u)\right]\right)$$

ir

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}-itx}\frac{n}{N}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^l\frac{1}{l!}\int_{-\infty}^{\infty}P_l(u)d\left(\sum_{k=1}^{N}\left[F_k(u)-\Phi(u)\right]\right)dt=$$

$$=\frac{n}{N}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^l\frac{1}{l!}\int_{-\infty}^{\infty}P_l(u)d\left(\sum_{k=1}^{N}\left[F_k(u)-\Phi(u)\right]\right)*\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(it)^l e^{-\frac{t^2}{2}-itx}dt=$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}n\left(\frac{(-1)}{\sqrt{n}}\right)^l\frac{d^l}{dx^l}\varphi(x)\frac{1}{l!}\int_{-\infty}^{\infty}P_l(u)d\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[F_k(u)-\Phi(u)\right]\right)\qquad(9)$$

kur $\varphi(x)=\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}-itx}$ dt ir $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(it)^l e^{-\frac{t^2}{2}-itx}dt=(-1)^l\frac{d^l}{dx^l}\varphi(x).$

$$e^{\left(i\frac{t}{\sqrt{n}}\right)x-\frac{1}{2}\left(i\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{P_m(x)}{m!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^m$$

Mums reikia rasti Meixner daugianarius $P_m(x)$.

Pakeiskime $\frac{it}{\sqrt{n}}$ į ε:

$$e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{P_m(x)}{m!}\varepsilon^m$$

Imame abiejų pusių išvestines ν = 1, 2, … pagal ε ir gauname

$$e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(x-\varepsilon)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{P_m(x)}{m!}m\varepsilon^{m-1}=\frac{P_1(x)}{1!}*1+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{P_m(x)}{m!}m\varepsilon^{m-1}$$

Kai ε = 0, gauname

$$P_1(x) = x.$$

Rasime išvestinę, kai ν = 2,

$$\left(e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(x-\varepsilon)\right)'=e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(x-\varepsilon)(x-\varepsilon)+e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(-1)=\frac{P_2(x)}{2!}*2*1+\sum_{m=3}^{\infty}\frac{P_m(x)}{m!}m(m-1)\varepsilon^{m-2}$$

Kai ε = 0, gauname

$$P_2(x) = x^2 - 1 .$$

Ieškome išvestinės, kai ν = 3,

$$\left(e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(x-\varepsilon)\right)''=\left(e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(x-\varepsilon)(x-\varepsilon)+e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(-1)\right)'=\left(e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(x-\varepsilon)(x-\varepsilon)+e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(-1)\right)(x-\varepsilon)+$$

$$+\left(e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(x-\varepsilon)\right)(-1)-e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(x-\varepsilon)=e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(x-\varepsilon)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon)-e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(x-\varepsilon)-2e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(x-\varepsilon)=$$

$$=\frac{P_3(x)}{3!}*3!+\sum_{m=4}^{\infty}\frac{P_m(x)}{m!}m(m-1)(m-2)\varepsilon^{m-3}$$

Kai ε = 0, gauname

$$P_3(x) = x^3 - 3x .$$

Rasime išvestinę, kai ν = 4,

$$\left(e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(x-\varepsilon)\right)'''=\left(\left(e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(x-\varepsilon)(x-\varepsilon)+e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(-1)\right)(x-\varepsilon)+\left(e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(x-\varepsilon)\right)(-1)-e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(x-\varepsilon)\right)'=$$

$$=\left(\left(e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(x-\varepsilon)(x-\varepsilon)+e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(-1)\right)(x-\varepsilon)+e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(x-\varepsilon)(-1)-e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(x-\varepsilon)\right)(x-\varepsilon)-$$

$$-\left(e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(x-\varepsilon)(x-\varepsilon)+e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(-1)\right)-2\left(e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(x-\varepsilon)(x-\varepsilon)+e^{\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2}{2}}(-1)\right)=\frac{P_4(x)}{4!}*4!+$$

$$+\sum_{m=5}^{\infty}\frac{P_m(x)}{m!}m(m-1)(m-2)(m-3)\varepsilon^{m-4}$$

Kai $\varepsilon = 0$, gauname

$$P_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3 .$$

Pažymėsime:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u dF_k(u) = \mu_k \text{ ir } \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dF_k(u) = \beta_k .$$

Dabar padarysime tokias prielaidas:

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k = 0,$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \beta_k = 1.$$

Tada,

kai $l = 1$:

$$\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} u d\left(\sum_{k=1}^{N}\left[F_k(u) - \Phi(u)\right]\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} u dF_k(u) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} u d\Phi(u) = 0 ,$$

kai $l = 2$,

$$\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} (u^2 - 1) d\left(\sum_{k=1}^{N}\left[F_k(u) - \Phi(u)\right]\right) = 0,$$

kai $l = 3$,

$$\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} (u^3 - 3u) d\left(\sum_{k=1}^{N}\left[F_k(u) - \Phi(u)\right]\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} u^3 dF_k(u) = \alpha_3 ,$$

kai $l = 4$,

$$\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} (u^4 - 6u^2 + 3) d\left(\sum_{k=1}^{N}\left[F_k(u) - \Phi(u)\right]\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} u^4 dF_k(u) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} u^4 d\Phi(u) = \alpha_4 - \frac{3}{N} ,$$

čia

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^4 d\Phi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u^4 \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u^3 e^{-\frac{u^2}{2}} d\left(-\frac{u}{2}\right)^2 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u^3 de^{-\frac{u^2}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^3 e^{-\frac{u^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} 3u^2 du = 3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du = 3 .$$

Dabar pratęsime (9) lygybę:

$$n\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx-\frac{t^2}{2}}\sum_{l=3}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{l}\int_{-\infty}^{\infty} P_l(u)d\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(F_k(u)-\Phi(u))\right)dt = n\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx-\frac{t^2}{2}}\frac{1}{3!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{3}\alpha_3 dt +$$

$$+n\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx-\frac{t^2}{2}}\frac{1}{4!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{4}(\alpha_4-\frac{3}{N})dt+\ldots=\frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx-\frac{t^2}{2}}(it)^3dt+\frac{(\alpha_4-\frac{3}{N})}{4!n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx-\frac{t^2}{2}}(it)^4dt=$$

$$=-\frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(x^3-3x)-\frac{(\alpha_4-\frac{3}{N})}{4!n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(x^4-6x^2+3),$$

kur $(-1)^3\frac{d^3}{dx^3}\varphi(x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}x(x^2-3)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(x^3-3x)$ ir

$$(-1)^4\frac{d^4}{dx^4}\varphi(x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(x^4-6x^2+3).$$

$$B_1^2(t)=\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{f_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)-e^{-\frac{t^2}{2n}}}{e^{-\frac{t^2}{2n}}}\right)^2 N^2 = N^2\sum_{l_1=1}^{\infty}\frac{1}{l_1!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{l_1}\int_{-\infty}^{\infty}P_{l_1}(u)d\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[F_k(u)-\Phi(u)\right]\right)*$$

$$*\sum_{l_2=1}^{\infty}\frac{1}{l_2!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{l_2}\int_{-\infty}^{\infty}P_{l_2}(u)d\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[F_k(u)-\Phi(u)\right]\right)=N^2\sum_{l_1=1}^{\infty}\sum_{l_2=1}^{\infty}\frac{1}{l_1!l_2!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{l_1+l_2} *$$

$$*\int_{-\infty}^{\infty}P_{l_1}(u)d\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[F_k(u)-\Phi(u)\right]\right)\int_{-\infty}^{\infty}P_{l_2}(u)d\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[F_k(u)-\Phi(u)\right]\right)=$$

$$=N^2\sum_{l_1=3}^{\infty}\sum_{l_2=3}^{\infty}\frac{1}{l_1!l_2!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{l_1+l_2}\int_{-\infty}^{\infty}P_{l_1}(u)d\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[F_k(u)-\Phi(u)\right]\right)*\int_{-\infty}^{\infty}P_{l_2}(u)d\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[F_k(u)-\Phi(u)\right]\right)=$$

$$=\frac{1}{36}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{6}N^2\alpha_3^{\;2}+\ldots$$

$$B_2(t) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} b_k^2(t) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{l=3}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^l \int_{-\infty}^{\infty} P_l(u)d\left([F_k(u) - \Phi(u)]\right)\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{3!}\right)^2\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^6\left(\int_{-\infty}^{\infty} P_3(u)d\left([F_k(u) - \Phi(u)]\right)\right)^2 + \ldots =$$

$$= -\frac{1}{2} * \frac{1}{36} N\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^6 \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty} P_3(u)d\left([F_k(u) - \Phi(u)]\right)\right)^2 + \ldots = -\frac{1}{2} * \frac{1}{36} N\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^6 \alpha_{l3} + \ldots,$$

čia $\alpha_{l3} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty} P_3(u)d\left([F_k(u) - \Phi(u)]\right)\right)^2$.

Užrašysime trečią (8) lygybės dėmenį:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{n(n-1)}{N(N-1)}\left(\frac{B_1^2}{2!} + \frac{B_2}{1!}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{n(n-1)}{N(N-1)} *$$

$$* \left(\frac{1}{72}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^6 N^2 \alpha_3^{\ 2} + \ldots - \frac{1}{2} * \frac{1}{36} N\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^6 \alpha_{l3} + \ldots\right)dt = \frac{1}{72}\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{N}}\frac{1}{n}\alpha_3^{\ 2}\frac{d^6}{dx^6}\varphi(x) + \ldots$$

$$+ \ldots - \frac{1}{72}\frac{1-\frac{1}{n}}{(N-1)}\frac{1}{n}\alpha_{l3}\ \frac{d^6}{dx^6}\varphi(x) + \ldots = \frac{1}{72}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{d^6}{dx^6}\varphi(x)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{N}}\alpha_3^{\ 2} - \frac{1}{N-1}\alpha_{l3}\right) + \ldots$$

4. Išvados

Dabar galime suformuluoti tokias teoremas:

1 TEOREMA. Teisinga lygybė

$$P\{S_n < x\} = \Phi(x) - \frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}(u^3 - 3u)du - \frac{(\alpha_4 - \frac{3}{N})}{4!n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}(u^4 - 6u^2 + 3)du + ... =$$

$$= \Phi(x) - \frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + \frac{(\alpha_4 - \frac{3}{N})}{4!n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(3xe^{-\frac{x^2}{2}} - x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + ...$$

kur $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du$ − standartinio normalaus skirstinio pasiskirstymo funkcija,

$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} u^3 dF_k(u) = \alpha_3$ ir $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} u^4 dF_k(u) = \alpha_4$.

2 TEOREMA. Teisinga lygybė

$$\binom{N}{n}^{-1}\sum_{1\le i_1 < i_2 < ... < i_n \le N} p_{i_1, i_2, ..., i_n}(x) = \varphi(x) - \frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(x^3 - 3x) - \frac{(\alpha_4 - \frac{3}{N})}{4!n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(x^4 - 6x^2 + 3) +$$

$$+ \frac{1}{72}\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{d^6}{dx^6}\varphi(x)\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{N}}\alpha_3^{\ 2} - \frac{1}{N-1}\alpha_{l3}\right) + ...,$$

kur $p_{i_1, i_2, ..., i_n}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\prod_{j=1}^{n} f_{i_j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)dt$.

Iš šios teoremos išplaukia *1 teoremos* tvirtinimas.

Summary

Bengt von Bahr in [1] proved the following theorem:

THEOREM. Let $X_1, X_2, \dots, X_N$ be independent random variables and let S_n be the sum of n of them chosen at random. If $EX_k = \mu_k$, $EX_k^2 = \beta_k$, $E|X_k|^3 = \gamma_k$, where $\sum_{k=1}^{N} \mu_k = 0$, $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \beta_k = 1$, $\alpha^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mu_k^2$ and $\gamma = \max_{1 \le k \le N} \gamma_k$, then

$$\left| P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n(1 - f\alpha^2)}} \le x \right) - \Phi(x) \right| \le \frac{60\gamma}{\sqrt{n}(1 - f\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$$

where $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ is the normalized Gaussian distribution function and $f = \frac{n}{N}$.

We proved that

$$P\{S_n < x\} = \Phi(x) - \frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} (u^3 - 3u) du - \frac{(\alpha_4 - \frac{3}{N})}{4!n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} (u^4 - 6u^2 + 3) du + \dots =$$

$$= \Phi(x) - \frac{\alpha_3}{3!\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}} \right) + \frac{(\alpha_4 - \frac{3}{N})}{4!n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(3xe^{-\frac{x^2}{2}} - x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} \right) + \dots$$

This is the answer what the difference's $P\{S_n < x\} - \Phi(x)$ estimator depends on.

Literatūra

1. B e n g t   v o n   B a h r „On Sampling from a Finite Set of Independent Random Variables“, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 24, 279 – 286(1972);
2. С т е ф а н и я   М и к о л а й т и т е „о выборке из конечной совокупности независимых случайных величин“, применение теории вероятностей и математической статистики, 1979;
3. P. E r d ö s   and   A. R é n y i „On a central limit theorem for samples from a finite population“, Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci., Ser. A, 4, 49-61 (1959);
4. J. M e i x n e r „Orthogonale Polynomsysteme mit einer besonderen gestalt der Erzeugenden funktion“, Received 24 May, 1933; read 15 June, 1933;
5. A. B i k e l i s „Об оценке остаточного члена в центральной предельной теореме для выборок, взятых из конечных множеств“, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 4 (1969) 345 – 354;
6. J. K r u o p i s „Matematinė statistika“, Mokslo ir enciklopedijų leidykla, 1993 m.