VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
TIKIMYBIŲ IR SKAIČIŲ TEORIJOS KATEDRA

Tomas Paulauskas

Diskrečioji ribinė teorema Matsumoto dzeta funkcijai analizinių funkcijų erdvėje

Magistro darbas

Vadovas: prof. A. Laurinčikas

Vilnius
2006

Turinys

Įvadas

Tegul, kaip įprasta, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ ir $\mathbb{C}$ atitinkamai yra natūraliųjų, sveikųjų, realiųjų ir kompleksinių skaičių aibės. Visiems $m \in \mathbb{N}$ apibrėžiame $g(m) \in \mathbb{N}$. Be to, tegul $a_m^{(j)} \in \mathbb{C}$ ir $f(j,m) \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq g(m)$. Apibrėžiame laipsnio $f(1,m)+...+f(g(m),m)$ polinomą

$$A_m(X) = \prod_{j=1}^{g(m)} (1 - a_m^{(j)} X^{f(j,m)}).$$

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o p_m reiškia m- ąjį pirminį skaičių. K. Matsumoto [8] darbe apibrėžė ir nagrinėjo dzeta funkciją

$$\varphi(s) = \prod_{m=1}^{\infty} A_m^{-1}(p_m^{-s}), \qquad (*)$$

kai yra patenkintos sąlygos

$$g(m) \leq c_1 p_m^{\alpha}, \ \left|a_m^{(j)}\right| \leq \ p_m^{\beta};$$

čia c_1 yra teigiama, o α ir β yra neneigiamos konstantos. Begalinė sandauga (*) konverguoja absoliučiai, kai $\sigma > \alpha + \beta + 1$, ir apibrėžia holomorfinę funkciją $\varphi(s)$, kuri nelygi nuliui. Nesunku pastebėti, kad Matsumoto dzeta funkcija $\varphi(s)$ su $\sigma > \alpha + \beta + 1$ gali būti užrašyta absoliučiai konverguojančia Dirichlė eilute

$$\varphi(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m^s},$$

ir koeficientai b_m tenkina įvertį $b_m = O(m^{\alpha+\beta+\varepsilon})$ su kiekvienu teigiamu ε.

Pastebime, kad funkcija $\varphi(s)$ yra įvairių klasikinių dzeta funkcijų apibendrinimas: Rymano dzeta funkcijos, Dirichlė L-funkcijų, Dedekindo dzeta funkcijų, parabolinių formų dzeta funkcijų ir taip toliau. Pirmąsias ribines teoremas tikimybinių matų silpno konvergavimo prasme įrodė pats K. Matsumoto [8] ir A. Laurinčikas [7] darbe. Šiuose teoremose buvo nagrinėjamos aibės $\{\varphi(\sigma+it) \in A\}$ arba $\{\varphi(s+i\tau) \in A\}$. Pirmuoju atveju A yra kompleksinės plokštumos aibė, o antruoju – analizinių funkcijų erdvės aibė. Be to, čia t ir τ tolydžiai kinta intervale $[0, \mathrm{T}]$. Tokio tipo ribinės teoremos yra vadinamos tolydžiomis. Galima nagrinėti ir kitokį atvejį, kai t ir τ perbėga reikšmes iš diskrečios aibės, pavyzdžiui, aritmetinės progresijos. Tokios ribinės teoremos vadinamos diskrečiomis. Funkcijai $\varphi(s)$ pirmosios diskrečios ribinės teoremos buvo įrodytos R. Kačinskaitės darbuose [3] – [5].

Tegul, kai $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$,

$$\mu_N(...) = \frac{1}{N+1} \# (0 \leq m \leq N : ...).$$

Čia vietoje daugtaškių rašoma sąlyga, kurią turi tenkinti m, o $\#A$ reiškia aibės A elementų skaičių. Simboliu $\mathcal{B}(S)$ žymėsime erdvės S Borelio aibių klasę. Be to, tegul $D=\{s\in C:\sigma>\alpha+\beta+1\}$, o $H(D)$ yra analizinių srityje D funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija. Darbe [6] buvo nagrinėtas tikimybinio mato

$$P_N(A)=\mu_N(\varphi(s+imh)\in A),\quad \mathrm{A}\in\mathcal{B}(\mathrm{H(D)}),$$

silpnas konvergavimas, kai $N\to\infty$. Čia $h>0$ yra fiksuotas skaičius. Tiksliam teoremos formulavimui mums yra reikalinga viena topologinė struktūra.

Tegul $\gamma=\{s\in\mathbb{C}:|s|=1\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje, o

$$\Omega=\prod_p \gamma_p,$$

kur $\gamma_p=\gamma$ visiems pirminiams skaičiams p. Su sandaugos topologija ir pataškine daugyba begaliniamatis toras Ω yra kompaktiška topologinė Abelio grupė. Taigi erdvėje $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja tikimybinis Haro matas m_H, ir mes gauname tikimybinę erdvę $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),m_H)$. Tegul $\omega(p)$ yra elemento $\omega\in\Omega$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_p. Tada formulė

$$\omega(m)=\prod_{p^\alpha\|m}\omega^\alpha(p),$$

kur $p^\alpha\|$m reiškia, kad $p^\alpha|$m bet $p^{\alpha+1}\nmid$m, duoda funkcijos $\omega(p)$ plėtinį į aibę N. Aišku, kad $\omega(m)$ yra pilnai multiplikuota funkcija.

Tikimybinėje erdvėje $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),m_H)$ apibrėžiame $H(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą $\varphi(s,\omega)$ formule

$$\varphi(s,\omega)=\prod_p\prod_{j=1}^{g(m)}\left(1-\frac{\omega^{f(j,m)}(p)a_m^{(j)}}{p^{sf(j,m)}}\right)^{-1}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_m\omega(m)}{m^s},\ s\in D,\ \omega\in\Omega,$$

o jo pasiskirstymą pažymime P_φ. Tuomet [6] straipsnyje buvo įrodytas toks tvirtinimas.

1 teorema. Tarkime, kad $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ yra iracionalus skaičius visiems sveikiems $k\neq 0$. Tada tikimybinis matas P_N, kai $N\to\infty$, silpnai konverguoja į P_φ.

Svarbu yra gauti ribinę teoremą be prielaidos, kad $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ yra iracionalus skaičius visiems sveikiems $k\neq 0$. Magistro darbo tikslas yra įrodyti ribinę teoremą matams P_N su tokiu h, kuriam $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ yra racionalus skaičius kuriems nors sveikiems $k\neq 0$. Tarkime, kad egzistuoja sveiki skaičiai $k\neq 0$, kuriems $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ yra racionalus skaičius. Akivaizdu, kad pakanka nagrinėti tik tokius sveikuosius teigiamus k. Tegul k_0 yra mažiausias iš jų. Tada nesunku pastebėti kad kiekvienas k su anksčiau minėta savybe yra k_0 kartotinis. Iš tikrųjų, mes turime, kad $k = ak_0 + b$ su $0 \le b < k_0$. Tada

$$\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\} = \exp\left\{\frac{2\pi a k_0}{h}\right\}\exp\left\{\frac{2\pi b}{h}\right\},$$

kur $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ ir $\exp\left\{\frac{2\pi a k_0}{h}\right\}$ yra racionalūs skaičiai. Taigi, $\exp\left\{\frac{2\pi b}{h}\right\}$ irgi turi būti racionalus skaičius, tačiau tai prieštarauja k_0 apibrėžimui ,nes $0 \le b < k_0$.

Tegul $\exp\left\{\frac{2\pi k_0}{h}\right\} = \frac{m_0}{n_0}$, $m_0, n_0 \in N$, $(m_0, n_0) = 1$. Apibrėžiame $\Omega_h = \{\omega \in \Omega : \omega(m_0) = \omega(n_0)\}$. Tada Ω_h yra uždaras Ω pogrupis, taigi Ω_h yra taip pat kompaktiška topologinė Abelio grupė. Todėl erdvėje $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h))$ galime apibrėžti tikimybinį Haro matą m_{hH}. Tada mes turime tikimybinį erdvę $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h), m_{hH})$.

Kai $\sigma > \alpha + \beta + 1$, tegul

$$\varphi(s, \omega_h) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m \omega_h(m)}{m^s} = \prod_p \prod_{j=1}^{g(m)} \left(1 - \frac{\omega_h^{f(j,m)}(p) a_m^{(j)}}{p^{sf(j,m)}}\right)^{-1}, \ \omega_h \in \Omega_h .$$

Pastaroji eilutė ir sandauga absoliučiai konverguoja srityje $\sigma > \alpha + \beta + 1$ visiems $\omega_h \in \Omega_h$. Taigi gerai žinomos Dirichlė eilutės savybės rodo, kad eilutė konverguoja tolygiai kiekviename kompaktiškame tos srities poaibyje. Todėl $\varphi(s, \omega_h)$ yra $H(D)$- reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h), m_{hH})$. Tegul to atsitiktinio elemento pasiskirstymas $\varphi(s)$ yra $P_{\varphi h}$, tai yra

$$P_{\varphi h}(A) = m_{hH}(\omega_h \in \Omega_h : \varphi(s, \omega_h) \in A), \ A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Pagrindinis darbo rezultatas yra tokia teorema.

2 teorema. Tarkime, kad $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ kuriems nors sveikiems $k \ne 0$ yra racionalus skaičius. Tada tikimybinis matas P_N, kai $N \to \infty$ konverguoja silpnai į $P_{\varphi h}$.

1. Tikimybių teorijos elementai

Šiame skyrelyje priminsime kai kurias tikimybių teorijos sąvokas ir tvirtinimus.

1.1 apibrėžimas. Tegul Ω yra netuščia aibė. Ω poaibių šeima F vadinama σ - algebra (σ - kūnu), jeigu

a) $\Omega \in F$,
b) jei $A \in F$, tai $A^c \in F$,
c) jei $A_m \in F$, $m = 1,2,...,$ tai $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in F$.

1.2 apibrėžimas. Neneigiama funkcija $P : F \to \mathbb{R}$, tenkinanti sąlygas,

a) $P(\Omega) = 1$,
b) $P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} P(A_m)$ visiems $A_m \in F$, $A_k \cap A_l = \varnothing$, jei $k \neq l$,

vadinama tikimybiniu matu.

1.3 apibrėžimas. Trejetas (Ω, F, P) vadinamas tikimybine erdve.

1.4 apibrėžimas. Tegul A yra bet kuri aibių sistema. Tuomet mažiausias σ - kūnas, kuriam priklauso sistema A, yra vadinamas σ - kūnu, generuotu sistemos A.

1.5 apibrėžimas. Tegul S yra metrinė erdvė. Tuomet šios erdvės atvirų aibių sistemos generuotas σ - kūnas yra vadinamas Borelio σ - kūnu arba Borelio aibių klase ir žymimas $\mathcal{B}(S)$.

1.6 apibrėžimas. P_n ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$. Sakome, kad matas P_n silpnai konverguoja į P, kai $n \to \infty$, jei

$$\int_S f dP_n \to \int_S f dP, \quad n \to \infty,$$

kiekvienai realiai, aprėžtai, tolydžiai funkcijai f erdvėje S.

1.7 apibrėžimas. Funkcija $h : S \to S_1$ vadinama mačiąja, jeigu $h^{-1}\mathcal{B}(S_1) \subset \mathcal{B}(S)$, t.y. pirmavaizdis $h^{-1}A \in \mathcal{B}(S)$, $A \in \mathcal{B}(S)$.

Tegul S ir S_1 yra metrinės erdvės, ir tegul $h : S \to S_1$ yra mati funkcija. Tuomet kiekvienas tikimybinis matas P mačioje erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ indikuoja vienintelį tikimybinį matą Ph^{-1} mačioje erdvėje $(S_1, \mathcal{B}(S_1))$, apibrėžiamą lygybe $Ph^{-1}(A) = P(h^{-1}A)$, $A \in \mathcal{B}(S_1)$.

1.8 apibrėžimas. Funkcija $h: S \to S_1$ vadinama tolydžiąja, jeigu aibė $h^{-1}G_1$ yra atvira erdvėje S kiekvienai atvirai aibei $G_1 \in S_1$.

1.1 lema. Tegul $h: S \to S_1$ yra tolydi funkcija, ir tegul P_n ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S, B(S))$. Tegul P_n silpnai konverguoja į P, kai $n \to \infty$. Tuomet $P_n h^{-1}$ silpnai konverguoja į Ph^{-1}, kai $n \to \infty$.

1.9 apibrėžimas. Tegu aibėje G yra apibrėžta grupės bei topologinė struktūra. Aibė G vadinama topologine grupe, jeigu funkcija $h: G \times G \to G$, apibrėžiama lygybe $h(x, y) = xy^{-1}$, yra tolydi.

1.10 apibrėžimas. Topologinė grupė vadinama kompaktiška, jeigu jos topologija kompaktiška.

1.11 apibrėžimas. Borelio matas P kompaktiškoje topologinėje grupėje G vadinamas invariantišku, jeigu $P(A) = P(xA) = P(Ax)$ visiems $A \in \mathcal{B}(G)$ ir $x \in G$. Čia $xA = \{xy : y \in A\}$ ir $Ax = \{yx : y \in A\}$.

1.12 apibrėžimas. Invariantiškas Borelio matas kompaktiškoje topologinėje grupėje vadinamas Haro matu.

1.13 apibrėžimas. Tegul A yra bet kokia aibė, ir tegul aibė X_a yra apibrėžta visiems $a \in A$. Tuomet funkcijų f, apibrėžtų aibėje A ir tenkinančių sąlygą $f(a) \in X_a$, Dekarto sandauga yra žymima

$$\prod_{a \in A} X_a \,. \tag{1}$$

Aibės X_a yra vadinamos koordinatinėmis aibėmis.

1.14 apibrėžimas. Sandaugos (1) projekcija P_a į koordinacinę aibę X_a apibrėžiama formule $P_a(f) = f(a)$.

1.15 apibrėžimas. Silpniausia topologija aibėje (1), kurios atžvilgiu visos projekcijos yra tolydžios, vadinama sandaugos topologija.

Tegul P yra tikimybinis matas erdvėje $(\gamma^m, \mathcal{B}(\gamma^m))$. Čia γ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje. Tuomet mato P Furjė transformacija $g(k_1, ..., k_m)$ apibrėžiama formule

$$g(k_1, ..., k_m) = \int_{\gamma^m} x_1^{k_1} ... x_m^{k_m} \, dP \,.$$

Čia $k_1, ..., k_m \in Z$, $x_1, ..., x_m \in \gamma$.

1.2 lema. Tegul $\{P_n\}$ tikimybinių matų seka erdvėje $(\gamma^m, B(\gamma^m))$, o $\{g_n(k_1,...,k_m)\}$ - atitinkama Furjė transformacijų seka. Tarkime, jog kiekvienam sveikųjų skaičių rinkiniui $(k_1,...,k_m)$ egzistuoja riba

$$g(k_1,...,k_m) = \lim_{n\to\infty} g_n(k_1,...,k_m) .$$

Tuomet erdvėje $(\gamma^m, \mathcal{B}(\gamma^m))$ egzistuoja tikimybinis matas P, į kurį, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja matas P_n. Be to $g(k_1,...,k_m)$ yra mato P Furjė transformacija.

1.16 apibrėžimas. Matų šeima $\{P\}$ erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ yra vadinama suspausta, jei kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja kompaktinė aibė K, kad visiems $P \in \{P\}$ galioja nelygybė

$$P(k) > 1 - \varepsilon .$$

1.17 apibrėžimas. Matų šeima $\{P\}$ yra vadinama reliatyviai kompaktiška, jei kiekviena tos šeimos seka turi silpnai konverguojantį posekį.

Matų šeimos suspaustumo ir reliatyvaus kompaktiškumo savybės riša Prochorovo teoremos.

1.3 lema. Jei matų šeima yra suspausta, tai ji yra reliatyviai kompaktiška.

1.4 lema. Tegul S yra pilna separabili metrinė erdvė. Jei šioje erdvėje matų šeima yra reliatyviai kompaktiška, tai ji yra ir suspausta.

1.18 apibrėžimas. Atsitiktinio S-reikšmio elemento ξ erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P)$ pasiskirstymu vadiname matą

$$P(A) = P\{\xi \in A\},\ A \in \mathcal{B}(S) .$$

1.19 apibrėžimas. Sakome, jog atsitiktinis elementas ξ_n konverguoja į atsitiktinį elementą ξ, kai $n \to \infty$, pagal pasiskirstymą, jei atsitiktinio elemento ξ_n pasiskirstymas silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento pasiskirstymą. Konvergavimas pagal pasiskirstymą žymimas $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$.

1.5 lema. Tegul erdvė (S, δ) yra separabili, o $Y_n, Y_{1n}, Y_{2n},...$ yra S - reikšmiai atsitiktiniai elementai, apibrėžti toje pačioje tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P)$. Tarkime, kad $X_{kn} \xrightarrow[n\to\infty]{\infty} X_k$ kiekvienam k ir $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\infty} X$. Jei kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(\delta(X_{kn}, Y_n) \geq \varepsilon) = 0 ,$$

tai tuomet $Y_k \xrightarrow[n\to\infty]{\infty} X$.

Visų minėtų rezultatų įrodymai yra [1] monografijoje.

2. Ribinės teoremos Dirichlė polinomams

Tegul

$$\varphi_n(s)=\sum_{m=1}^{n}\frac{b_m}{m^s},$$

ir

$$P_{p_n,N}(A)=\mu_N(s+imh)\in A), \qquad A\in\mathcal{B}(H(D)).$$

3 teorema. Erdvėje $(H(D),\mathcal{B}(H(D)))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P_{φ_n}, kad $P_{\varphi_n,N}$ silpnai konverguoja į P_{φ_n}, kai $N\to\infty$.

Norėdami įrodyti 3 teoremą, mes remsimės tokiu tvirtinimu. Tegul $p_1,\dots,p_r$ yra skirtingi pirminiai skaičiai, kurie dalija sandaugą

$$\prod_{\substack{k=1\\ b_m\neq 0}}^{n} k .$$

Apibrėžkime

$$\Omega_r=\prod_{j=1}^{r}\gamma_{p_j},$$

kur $\gamma_{p_j}=\gamma$ kai $j=1,\dots,r$. Be to, tegul $\Omega_{hr}=\{\omega\in\Omega_r:\omega(m_0)=\omega(n_0)\}$. Apibrėžkime tikimybinį matą

$$\mathrm{Q}_{hN}(A)=\mu_N((p_1^{imh},\dots,p_r^{imh})\in A), \quad A\in B(\Omega_r).$$

4 lema. Tikimybinis matas Q_{hN}, kai $N\to\infty$, silpnai konverguoja į Haro matą m_{hr} erdvėje $(\Omega_{hr},\mathcal{B}(\Omega_{hr}))$.

Lemos įrodymas yra duotas [6] darbe.

3 teoremos įrodymas. Apibrėžkime funkciją $u:\Omega_r\to H(D)$ formule

$$u(x_1,\dots,x_r)=\sum_{m=1}^{n}\frac{b_m}{m^s}\prod_{\substack{p_j^{k_j}\| m\\ 1\le j\le r}}(x_j^{k_j})^{-1}, \quad (x_1,\dots,x_r)\in\Omega_r .$$

Akivaizdu, kad funkcija u yra tolydi erdvėje Ω_r ir

$$\varphi_n(s+imh)=u(p_1^{imh},\dots,p_r^{imh}).$$

Kadangi $P_{\varphi_n,N} = Q_{hN} u^{-1}$, ir, remiantis 4 lema, tikimybinis matas Q_{hN} konverguoja silpnai į m_{hr}, kai $N \to \infty$, iš 1.1 lemos gauname, kad $P_{\varphi_n,N} = Q_{hN} u^{-1}$silpnai konverguoja į $m_{hr}u^{-1}$, kai $N \to \infty$.

Pastaba. Ribinis matas P_{φ_n} 3 teoremoje yra $m_{hr}u^{-1}$.

Tegu $\omega_{hr} \in \Omega_{hr}$,

$$\varphi_n(s, \omega_h) = \sum_{m=1}^{n} \frac{b_m \omega_h(m)}{m^s},$$

ir

$$\hat{P}_{\varphi_n,N}(A) = \mu_N(\varphi_n(s + imh, \omega_h) \in A, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

5 teorema. Tikimybinis matas $\hat{P}_{\varphi_n,N}$ silpnai konverguoja į $m_{hr}u^{-1}$, kai $N \to \infty$.

Įrodymas. Funkcija, $u_1 : \Omega_r \to \Omega_r$ apibrėžkime formule

$$u_1(x_1,\ldots,x_r) = (x_1\omega_h^{-1}(p_1),\ldots,x_r\omega_h^{-1}(p_r)).$$

Remiantis 3 teoremos įrodymu, tikimybinis matas $\hat{P}_{\varphi_n,N}$ silpnai konverguoja į $m_{hr}v^{-1}$, kai $N \to \infty$, kur

$$v(x_1,\ldots,x_r) = \sum_{m=1}^{n} \frac{b_m \omega_h(m)}{m^s} \left(\prod_{\substack{p_j^{k_j} \| m \\ 1 \le j \le r}} x_j^{k_j} \right)^{-1} = \sum_{m=1}^{n} \frac{b_m}{m^s} \left(\prod_{\substack{p_j^{k_j} \| m \\ 1 \le j \le r}} x_j^{k_j} \omega_h^{-k_j}(p_j) \right)^{-1} = u(u_1(x_1,\ldots,x_r)),$$

$(x_1,\ldots,x_r) \in \Omega$. Kadangi Haro matas m_{hr} yra invariantiškas postūmių taškais iš Ω_{hr} atžvilgiu, iš čia gauname, kad tikimybinis matas $\hat{P}_{\varphi_n,N}$ silpnai konverguoja į matą $m_{hr}(u(u_1))^{-1} = (m_{hr}u_1^{-1}) = m_{hr}u^{-1}$, kai $N \to \infty$.

3. 2 teoremos įrodymas

Pirmiausia mes prisiminsime keletą ergodinės teorijos rezultatų. Tegu $a_h = \{ p^{-ih} : p$ - pirminis skaičius$\}$. Apibrėžkime transformaciją f_h aibėje Ω_h formule $f_h(\omega_h) = a_h \omega_h$, $\omega_h \in \Omega_h$. Tada f_h yra mati matą išlaikantį transformacija tikimybinėje erdvėje $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h), m_{hH})$.

Aibė $A \in \mathcal{B}(\Omega_h)$ yra vadinama invariantiška transformacijos atžvilgiu f_h, jei aibės A ir $A_h = f_h(A)$ skiriasi viena nuo kitos mato m_{hH} nuline aibe, kitaip sakant, jeigu $m_{hH}(A \Delta A_h) = 0$, kur Δ reiškia simetrišką skirtumą.

Aibėje Ω_h transformacija vadinama ergodine, jei jos invariantiškų aibių σ- kūnas susideda tik iš aibių, kurioms matas m_{hH} yra lygus 0 arba 1.

6 lema. Transformacija f_h yra ergodinė.

Lemos įrodymą galima rasti [6] straipsnyje.

Remiantis 3 ir 5 teoremomis, tikimybiniai matai $P_{\varphi_n, N}$ ir $\hat{P}_{\varphi_n, N}$ silpnai konverguoja į tą patį matą $m_{hr} u^{-1}$, kai $N \to \infty$. Trumpumo dėlei, pažymėkime šį matą P_n.

7 lema. Tikimybinių matų šeima $\{P_n\}$ yra suspausta.

Įrodymas. Tegul θ_N yra atsitiktinis dydis, apibrėžtas kurioje nors tikimybinėje erdvėje $(\hat{\Omega}, \mathcal{B}(\hat{\Omega}), P)$, su reikšmėmis mh, $m = 0,1,\dots,N$, ir

$$P(\theta_N = mh) = \frac{1}{N+1}, \quad m = 0,1,\dots,N .$$

Pasižymime

$$X_{N,n}(s) = \varphi(s + i\theta_N) .$$

Tada, remiantis 3 teorema, turime, kad

$$X_{N,n}(s) \xrightarrow[N \to \infty]{D} X_n , \tag{2}$$

kur X_n yra $H(D)$- reikšmės atsitiktinis elementas su pasiskirstymu P_n.

Gerai žinoma, kad egzistuoja pusplokštumės D kompaktiškų poaibių seka $\{K_n\}$, kad

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n ,$$

be to, aibės K_n galime pasirinkti taip, kad jos turėtų savybes:

1^0 $K_n \subset K_{n+1}$;

2^0 jei K yra kompaktiška aibė ir $K \subset D$, tada $K \subseteq K_n$ kuriems nors n.

Tegul $f, g \in H(D)$ ir

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)},$$

kur

$$\rho_n(f,g) = \sup_{s \in K_n} \left| f(s) - g(s) \right|.$$

Tada nesunku pastebėti, kad ρ yra metrika erdvėje $H(D)$, kuri indukuoja jos topologiją. Tegul $M_l > 0$. Tada, pritaikę Čebyšovo nelygybę, gauname, kad

$$P\left(\sup_{s \in K_l} \left| X_{N,n}(s) \right| > M_l \right) \le \frac{1}{(N+1)M_l} \sum_{m=0}^{N} \sup_{s \in K_l} \left| \varphi_n(s+imh) \right|. \tag{3}$$

Funkcijos $\varphi(s)$ Dirichlė eilutė konverguoja absoliučiai srityje D, todėl ji konverguoja tolygiai kompaktiškame srities D poaibyje. Taigi egzistuoja toks skaičius $R_l < \infty$, $l \in N$, kad

$$\sup_{n \ge 1} \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \sup_{s \in K_l} \left| \varphi_n(s+imh) \right| < R_l. \tag{4}$$

Tegul ε yra bet koks teigiamas skaičius ir $M_l = \dfrac{R_l 2^l}{\varepsilon}$. Tada iš (3) ir (4) gauname, kad

$$\limsup_{N \to \infty} P\left(\sup_{s \in K_l} \left| X_{N,n}(s) \right| > M_l \right) \le \frac{\varepsilon}{2^l}. \tag{5}$$

Dabar paimame funkciją $u: H(D) \to R$, apibrėžtą formule $u(f) = \sup_{s \in K_l} \left| f(s) \right|$, $f \in H(D)$. Aišku, kad funkcija u yra tolydi, taigi pagal (2) ir 1.1 lemą

$$\sup_{s \in K_l} \left| X_{N,n}(s) \right| \xrightarrow[N \to \infty]{D} \sup_{s \in K_l} \left| X_n(s) \right|.$$

Iš čia ir (5) gauname, jog

$$P\left(\sup_{s \in K_l} \left| X_n(s) \right| > M_l \right) \le \frac{\varepsilon}{2^l}. \tag{6}$$

Dabar apibrėžkime

$$H_\varepsilon = \{ f \in H(D) : \sup_{s \in K_l} |f(s)| \le M_l, l \ge 1\} .$$

Funkcijų šeima H_ε yra tolygiai aprėžta kiekviename kompakte $K \subset D$. Taigi pagal kompaktiškumo principą, H_ε yra kompaktiška aibė erdvėje $H(D)$. Be to, pagal (6)

$$P(X_n(s) \in H_\varepsilon) \ge 1 - \varepsilon \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} = 1 - \varepsilon$$

visiems $n \in N$. Tačiau P_n yra atsitiktinio elemento X_n pasiskirstymas. Vadinasi,

$$P_n(H_\varepsilon) \ge 1 - \varepsilon$$

visiems $n \in N$. Tai reiškia, kad tikimybinių matų šeima $\{P_n\}$ yra suspausta.

Dabar tegul $\omega_h \in \Omega_h$. Apibrėžkime tikimybinį matą

$$\hat{P}_N(A) = \mu_N(\varphi(s + imh, \omega_h) \in A), \qquad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

8 teorema. Tikimybiniai matai P_N ir $\hat{P}_N$ silpnai konverguoja į tą patį tikimybinį matą, kai $N \to \infty$.

Įrodymas. Pagal $\varphi_n(s)$ apibrėžimą srityje $\sigma > \alpha + \beta + 1$

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(s) = \varphi(s) .$$

Be to, konvergavimas yra tolygus kieviename kompaktiškame srities D poaibyje. Tegul $\varepsilon > 0$. Tada randame

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mu_N(\rho(\varphi_n(s+imh), \varphi(s+imh)) \ge \varepsilon)$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \sup_{N\to\infty} \frac{1}{(N+1)\varepsilon} \sum_{m=0}^{N} \rho(\varphi_n(s+imh), \varphi(s+imh)) = 0 . \tag{7}$$

Dabar tegul $X_N(s) = \varphi(s + i\theta_N)$. Tada iš (7) gauname, jog

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} P(\rho(X_{N,n}(s), X_N(s)) \le \varepsilon) = 0 . \tag{8}$$

Iš 7 lemos ir Prochorovo teoremos (1.3 lema) turime, kad tikimybinių matų šeima $\{P_n\}$ yra reliatyviai kompaktiška. Taigi egzistuoja toks posekis $\{P_{n_1}\} \subset \{P_n\}$, kad P_{n_1} silpnai konverguoja į kurį nors tikimybinį matą P, kai $n_1 \to \infty$. Taigi

$$X_{n_1} \xrightarrow[N\to\infty]{D} P . \tag{9}$$

Erdvė $H(D)$ yra separabili. Iš (2), (8) ir (9) matome, kad yra patenkintos 1.5 lemos sąlygos, todėl

$$X_N \xrightarrow[N\to\infty]{D} P. \tag{10}$$

Pastarasis sąryšis parodo, kad erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P, į kurį, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja matas P_N. Be to iš (10) ir gerai žinomų silpno matų konvergavimo savybių gauname, kad matas P yra nepriklausomas nuo posekio $\{P_{n_1}\}$ pasirinkimo. Kadangi šeima $\{P_n\}$ yra reliatyviai kompaktiška, iš čia gauname silpną P_n konvergavimą į P, kai $n \to \infty$.

Tokie pat samprotavimai pritaikomi ir atsitiktiniams elementams

$$\hat{X}_{N,n}(s,\omega_h) = \varphi_n(s + i\theta_{N,}\omega_h)$$

ir

$$\hat{X}_N(s,\omega_h) = \varphi_n(s + i\theta_{N,}\omega_h).$$

Naudodami 5 teoremą ir sąryšį $X_n \xrightarrow{D} P$, gauname, kad matas $\hat{P}_N$ taip pat silpnai konverguoja į P, $N \to \infty$. Teorema įrodyta.

Norint įrodyti 2 teoremą belieka parodyti, kad $P = P_{\varphi n}$. Tam tikslui prisiminsime Birkhofo teoremą. Tegul $E\xi$ yra atsitiktinis elemento ξ vidurkis.

9 lema. Tegul T yra mati matą išlaikanti ergodinė transformacija erdvėje $(\hat{\Omega}, \mathcal{B}(\hat{\Omega}), m)$. Tada kiekvienai funkcijai $f \in L^1(\hat{\Omega}, \mathcal{B}(\hat{\Omega}), m)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k \hat{\omega}) = E(f)$$

beveik visiems $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}$.

Tegul A yra mato P tolydumo aibė. Tada, remiantis 8 teorema, turime, kad

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N(\varphi(s + imh, \omega_h) \in A) = P(A). \tag{11}$$

Dabar mes fiksuojame aibę A ir apibrėžiame atsitiktinį elementą η erdvėje $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h), m_{hH})$ formule

$$\eta(\omega_h) = \begin{cases} 1, & jei \quad \varphi(s,\varphi_h) \in A, \\ 0, & jei \quad \varphi(s,\omega_h) \notin A. \end{cases}$$

Tada pastebime, kad

$$E\eta = \int_{\Omega_h} \eta dm_{hH} = m_{hH}(\omega_h \in \Omega_h : \varphi(s,\omega_h) \in A) = P_{\varphi h}(A). \tag{12}$$

Remiantis 6 ir 9 lemomis,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \eta(f_h^m(\omega_h)) = E\eta \tag{13}$$

beveik visiems $\omega_h \in \Omega_h$. Be to, iš η ir f_h apibrėžimų gauname, kad

$$\frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \eta(f_h^m(\omega_h)) = \mu_N(\varphi(s+imh,\omega_h) \in A).$$

Iš čia, (12) ir (13) gauname, jog

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N(\varphi(s+imh,\omega_h) \in A) = P_{\varphi h}(A)$$

beveik visiems ω_h. Taigi iš (11)

$$P(A) = P_{\varphi h}(A)$$

bet kuriai mato P tolydumo aibei A. Kadangi visos tolydumo aibės sudaro apibrėžiančią klasę [1], tai iš čia gauname, kad

$$P(A) = P_{\varphi h}(A)$$

visoms $A \in \mathcal{B}(H(D))$. Teorema įrodyta.

Išvados

Tegul funkcija $\varphi(s)$ $s = \sigma + it$, yra apibrėžta srityje $\sigma > \alpha + \beta + 1$ polinomine Oilerio sandauga

$$\varphi(s) = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{g(m)} \left(1 - \frac{a_m^{(j)}}{p_m^s}\right)^{-1} .$$

Magistro darbe įrodyta diskreti ribinė teorema analizinių funkcijų erdvėje $H(D)$, $D = \{s \in C : \sigma > \alpha + \beta + 1\}$, funkcijai $\varphi(s)$. Tegul

$$\mu_N(...) = \frac{1}{N+1} \#\,(0 \le m \le N : ...),$$

kur vietoje daugtaškio rašoma sąlyga, kurią tenkina m. Tarkime, kad $h > 0$ toks fiksuotas skaičius, kad kuriems nors sveikiems $k \neq 0$ skaičius $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ yra racionalus, o $\mathcal{B}(H(D))$ yra erdvės $H(D)$ Borelio aibių klasė. Darbe įrodyta, kad tikimybinis matas

$\mu_N(\varphi(s + imh) \in A$, $A \in \mathcal{B}(H(D))$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į vieno $H(D)$ reikšmio atsitiktinio elemento skirstinį.

Summary

For $\sigma > \alpha + \beta + 1$, define the function $\varphi(s)$, $s = \sigma + it$, by a polynomial Euler product

$$\varphi(s) = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{g(m)} \left(1 - \frac{a_m^{(j)}}{p_m^s}\right)^{-1} .$$

In our work, a discrete limit theorem in the space $H(D)$ of analytic on $D = \{s \in C : \sigma > \alpha + \beta + 1\}$ functions for the function $\varphi(s)$ is proved. Let

$$\mu_N(...) = \frac{1}{N+1} \# (0 \le m \le N : ...),$$

where in place of dots a condition satisfied by m is to be written. Suppose that $h > 0$ is a fixed number such that for some integers $k \neq 0$ the number $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ is racional, and denote by $\mathcal{B}(H(D))$ the class of Borel sets of the space $H(D)$. Then we prove that the probability measure

$$\mu_N(\varphi(s + imh) \in A, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

converges weakly to the distribution of one $H(D)$- valued random element as $N \to \infty$.

Literatūra

1. P. Billingsly, Convergence of Probability Measures, John Wiley, New York, 1968.
2. J.B. Conway, Functions of One Complex Variable, New York, Springer-Verlag, 1973.
3. R. Kačinskaitė, A discrete limit theorem for the Matsumoto zeta-function on the complex plane, Liet. Matem. Rink., 40(4), 475-492 (2000) (in Russian) = Lithuanian Math. J., 40(4), 364-378 (2000).
4. R. Kačinskaitė, A discrete limit theorem for the Matsumoto zeta-function in the space of analytic functions, Liet. Matem. Rink., 41(4), 441-448 (2001) (in Russian) = Lithuanian Math. J., 41(4), 344-350 (2001).
5. R. Kačinskaitė, A discrete limit theorem for the Matsumoto zeta-function in the space of meromorphic functions, Liet. Matem. Rink., 42(1), 46-67 (2002) (in Russian) = Lithuanian Math. J., 42(1), 37-53 (2002).
6. R. Kačinskaitė and A. Laurinčikas, On the value distribution of the Matsumoto zeta-function, Acta Math. Hung. (2005).
7. A. Laurinčikas, Limit theorems for the Matsumoto zeta-function, J. Théorie Nombres Bordeaux, 8, 143-158 (1996).
8. K. Matsumoto, Value distribution of zeta- functions, Lecture Notes in Math., Springer, 1434, 178-187 (1990).
9. A. Laurinčikas, Rymano dzeta funkcijos teorijos pagrindai, Vilniaus universitetas, 1992.