VILNIAUS UNIVERSITETAS

**Alesia Kolupayeva**

# NORMUOTŲ PARABOLINIŲ FORMŲ $L$ FUNKCIJŲ SĄSŪKŲ REIKŠMIŲ PASISKIRSTYMAS

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01 P)

Vilnius, 2011

Disertacija rengta 2007–2011 metais Vilniaus universitete.

**Mokslinis vadovas:**
Prof. Habil. Dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)

**Disertacija ginama Vilniaus universiteto Matematikos mokslo krypties taryboje:**

**Pirmininkas:**
Prof. Dr. Gediminas Stepanauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)

**Nariai:**
Prof. Habil. Dr. Artūras Dubickas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P);
Prof. Habil. Dr. Eugenijus Manstavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P);
Prof. Dr. Roma Kačinskaitė (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P);
Doc. Dr. Virginija Garbaliauskienė (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P).

**Oponentai:**
Prof. Dr. Ramūnas Garunkštis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P);
Doc. Dr. Darius Šiaučiūnas (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P).

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2011 m. rugsėjo 22 d. 14 val. Vilniaus universiteto Nuotolinių studijų centre.
Adresas:
Šaltinių g. 1 A, LT-03225 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2011 m. rugpjūčio ... d.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

**Alesia Kolupayeva**

# VALUE-DISTRIBUTION OF TWISTED $L$-FUNCTIONS OF NORMALIZED CUSP FORMS

Summary of Doctoral Dissertation
Physical sciences, Mathematics (01 P)

Vilnius, 2011

The scientific work was carried out in 2007–2011 in Vilnius University.

**Scientific supervisor:**
Prof. Dr. Habil. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01 P)

**The thesis is defended in the council of Mathematics of Vilnius University:**

**Chairman:**
Prof. Dr. Gediminas Stepanauskas (Vilniaus University, Physical sciences, Mathematics – 01 P).

**Members:**
Prof. Dr. Habil. Artūras Dubickas (Vilniaus University, Physical sciences, Mathematics – 01 P);
Prof. Dr. Habil. Eugenijus Manstavičius (Vilniaus University, Physical sciences, Mathematics – 01 P);
Prof. Dr. Roma Kačinskaitė (Šiauliai University, Physical sciences, Mathematics – 01 P);
Assoc. Prof. Virginija Garbaliauskienė (Šiauliai University, Physical sciences, Mathematics – 01 P).

**Opponents:**
Prof. Dr. Ramūnas Garunkštis (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01 P).
Assoc. Prof. Darius Šiaučiūnas (Šiauliai University, Physical sciences, Mathematics – 01 P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on September 22, 2011, in Vilnius University, remote Education Study Center at 2 pm.
Address:
Šaltinių 1 A, LT-03225, Vilnius, Lithuania.

The summary of the dissertation was distributed on August ..., 2011.
The dissertation in available at the Library of Vilnius University.

# DISERTACINIO DARBO APRAŠYMAS

**Mokslinė problema ir tyrimo objektas.** Tyrimo objektas yra normuotų parabolinių Hekės eigenformų $L$ funkcijų sąsūkos su Dirichlė charakteriu, kai charakterio modulis neaprėžtai auga. Mokslinė problema – šių sąsūkų ribinės teoremos apie silpnąjį tikimybinių matų konvergavimą.

**Tikslas ir uždaviniai.** Darbo tikslas – įrodyti ribines teoremas apie silpnąjį tikimybinių matų konvergavimą normuotų parabolinių Hekės eigenformų $L$ funkcijų sąsūkoms su Dirichlė charakteriu neaprėžtai augančio charakterio modulio atžvilgiu.

Darbo uždaviniai yra šie:

1. Įrodyti ribinę teoremą normuotų parabolinių Hekės eigenformų $L$ funkcijų sąsūkoms su Dirichlė charakteriu moduliui.
2. Įrodyti ribinę teoremą normuotų parabolinių Hekės eigenformų $L$ funkcijų sąsūkų su Dirichlė charakteriu argumentui.
3. Įrodyti ribinę teoremą normuotų parabolinių Hekės eigenformų $L$ funkcijų sąsūkoms su Dirichlė charakteriu kompleksinėje plokštumoje.
4. Įrodyti jungtinę ribinę teoremą normuotų parabolinių Hekės eigenformų $L$ funkcijų sąsūkoms su Dirichlė charakteriu.

**Aktualumas.** Analizinėje skaičių teorijoje $L$ funkcijos užima svarbią vietą. Dirichlė $L$ funkcijos naudojamos tiriant pirminių skaičių pasiskirstymą aritmetinėse progresijose, o automorfinių formų $L$ funkcijos buvo įvestos šių formų tyrimui. Parabolinių formų $L$ funkcijos suvaidino pagrindinį vaidmenį įrodant Ferma (Fermat) paskutinę teoremą. Automorfinių formų $L$ funkcijų sąsūkos su Dirichlė charakteriu yra naudojamos tiriant automorfinių formų Furjė koeficientus aritmetinėse progresijose ir kitose su tuo susijusiose problemose. Kai progresijos skirtumas yra didėjantis, aritmetinių objektų reikšmių pasiskirstymas aritmetinėse progresijose yra labai sudėtingas. Tokio tipo uždaviniams spręsti reikalingos $L$ funkcijų sąsūkos su neaprėžtai augančiu charakterio moduliu. Todėl $L$ funkcijų sąsūkų su augančiu moduliu tyrimas yra gana svarbus analizinėje skaičių teorijoje. $L$ funkcijų sąsūkas nagrinėjo daugelis garsių matematikų S. Čoula (Chowla), P. Erdiošas (Erdös), P. D. T. A. Eliotas (Elliott), K. Macumotas (Matsumoto), P. Sarnakas (Sarnak), H. Ivaniecas (Iwaniec) ir kiti. P. D. T. A. Eliotas gavo pirmuosius tikimybinius rezultatus šioje srityje.

**Tyrimų metodai.** Yra taikomi analiziniai ir tikimybiniai metodai. Ribinių teoremų įrodymui naudojamas charakteristinių transformacijų metodas. Be to, yra taikomi Dirichlė charakterių ir $L$ funkcijų teorijos elementai.

**Naujumas ir praktinė vertė.** Visi disertacijos rezultatai yra nauji. Normuotų parabolinių Hekės eigenformų $L$ funkcijų sąsūkoms su Dirichlė charakteriu ribinės teoremos iki šiol nebuvo žinomos. Todėl gauti rezultatai užpildo buvusią spragą ir gali būti taikomi tolesniuose šių sąsūkų tyrimuose.

**Darbo struktūra.** Disertacija yra parašyta anglų kalba. Ją sudaro įvadas, keturi skyriai, išvados, mokslinių publikacijų disertacijos tema sąrašas ir žymenys. Bendra darbo apimtis – 72 puslapiai.

**Problemos apžvalga ir pagrindiniai rezultatai.** Tegul $\mathbb{Z}$ yra sveikųjų skaičių aibė. $SL(2,\mathbb{Z})$ žymėsime pilnąją modulinę grupę, t. y.

$$SL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad-bc=1 \right\}.$$

Be to, tegul $U$ yra viršutinė pusplokštumė kartu su begalybe, t. y.

$$U = \{z \in \mathbb{C} : z = x+iy, \quad y>0\}.$$

Tarkime, kad $F(z)$ yra holomorfinė funkcija srityje $U$, visoms matricoms

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$$

su kuriuo nors lyginiu sveikuoju skaičiumi $\kappa$ tenkinanti funkcinę lygtį

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{\kappa} F(z).$$

Tuomet akivaizdu, kad $F(z)$ yra periodinė funkcija ir begalybėje turi skleidinį Furjė eilute

$$F(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}c(m)\mathrm{e}^{2\pi imz}.$$

Sakome, kad funkcija $F(z)$ yra holomorfinė ir nykstanti begalybėje, jei $c(m)=0$ atitinkamai su $m<0$ ir $m\leq 0$ . Funkcija $F(z)$ yra vadinama holomorfine ir nykstančia paraboliniuose taškuose, jei visiems

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})$$

funkcija

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)(cz+d)^{-\kappa}$$

yra atitinkamai holomorfinė ir nykstanti begalybėje. Jei $F(z)$ yra holomorfinė paraboliniuose taškuose, tai ji vadinama svorio $\kappa$ moduline forma, ir

$$F(z)=\sum_{m=0}^{\infty}c(m)\mathrm{e}^{2\pi imz}$$

yra jos Furjė eilutė begalybėje. Jei svorio $\kappa$ modulinė forma $F(z)$ yra nykstanti paraboliniuose taškuose, tai ją vadiname svorio $\kappa$ paraboline forma. Šiuo atveju $F(z)$ yra išskleidžiama begalybėje Furjė eilute

$$F(z)=\sum_{m=1}^{\infty}c(m)\mathrm{e}^{2\pi imz}.$$

Parabolinių formų klasikinis pavyzdys yra Ramanudžano (Ramanujan) parobolinė forma $\Delta(z)$, apibrėžiama formule

$$\Delta(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\tau(m)\mathrm{e}^{2\pi imz}=\mathrm{e}^{2\pi iz}\prod_{m=1}^{\infty}(1-\mathrm{e}^{2\pi imz})^{24}.$$

Formos $\Delta(z)$ svoris yra 12. L. Mordelas (Mordell) [18] įrodė, kad Ramanudžano funkcija $\tau(m)$ yra multiplikatyvi ($\tau(mn)=\tau(m)\tau(n)$ visiems $m,n\in\mathbb{N}$, $(m,n)=1$) ir pirminiams $p$ bei sveikiesems $k\geq 2$ tenkina sąryšį

$$\tau(p^{k+1})=\tau(p)\tau(p^k)-p^{11}\tau(p^{k-1}).$$

Be to, iš Delinio (Deligne) rezultato [3] turime įvertį

$$|\tau(p)| \le 2p^{\frac{11}{2}}.$$

Svorio $\kappa$ parabolinė forma $F(z)$ yra vadinama Hekės eigenforma, jeigu ji yra visų Hekės operatorių

$$(T_n f)(z) = n^{\kappa-1} \sum_{d|n} d^{-\kappa} \sum_{b=0}^{d-1} f\left(\frac{nz+bd}{d^z}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

eigenfunkcija. Tuomet yra žinoma, kad $c(1) \neq 0$. Todėl forma $F(z)$ gali būti normuojama. Vadinasi, normuota parabolinė Hekės eigenforma begalybėje yra išreiškiama Furjė eilute

$$F(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c(m) \mathrm{e}^{2\pi i m z}, \quad c(1) = 1.$$

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o $F(z)$ yra svorio $\kappa$ normuota parabolinė Hekės eigenforma. Su ja galima susieti $L$ funkciją $L(s, F)$, apibrėžiamą Dirichlė eilute

$$L(s, F) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s}.$$

Remiantis Delinio įrodyta [3] Veilio (Weil) hipoteze,

$$|c(m)| \le m^{\frac{\kappa-1}{2}} d(m);$$

čia $d(m)$ yra daliklių funkcija

$$d(m) = \sum_{d|m} 1.$$

Todėl funkcijos $L(s, F)$ Dirichlė eilutė konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$ ir apibrėžia čia analizinę funkciją. Funkcija $L(s, F)$ gali būti analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą ir tenkina funkcinę lygtį

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s, F) = (-1)^{\frac{\kappa}{2}}(2\pi)^{s-\kappa}\Gamma(\kappa - s)L(\kappa - s, F);$$

čia $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija. Funkcijos $L(s, F)$ kritinė juosta yra $\{s \in \mathbb{C} : \frac{\kappa-1}{2} < \sigma < \frac{\kappa+1}{2}\}$, jai priklauso netrivialūs $L(s, F)$ nuliai.

Šie nuliai yra išsidėstę simetriškai realiosios ašies ir kritinės tiesės $\sigma = \frac{\kappa}{2}$ atžvilgiu. Rymano hipotezės analogas funkcijai $L(s, F)$ teigia, kad visi netrivialūs nuliai $L(s, F)$ yra kritinėje tiesėje $\sigma = \frac{\kappa}{2}$.

Funkcijos $L(s, F)$ Dirichlė eilutės koeficientai $c(m)$ yra multiplikatyvūs ir pirminiams $p$ bei $k \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ tenkina sąryšį

$$c(p^{k+1}) = c(p)c(p^k) - p^{\kappa-1}c(p^{k-1}).$$

Todėl funkciją $L(s, F)$ pusplokštumėje $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$ galima užrašyti Oilerio sandauga

$$\begin{aligned} L(s, F) &= \prod_p \left(1 - \frac{c(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s-\kappa+1}}\right) \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{\alpha(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta(p)}{p^s}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{0.1}$$

pagal pirminius skaičius; čia $\alpha(p)$ ir $\beta(p)$ yra tokie jungtiniai kompleksiniai skaičiai, kad $\alpha(p) + \beta(p) = c(p)$ ir

$$|\alpha(p)| \leq p^{\frac{\kappa-1}{2}}, \quad |\beta(p)| \leq p^{\frac{\kappa-1}{2}}.$$

Kaip ir kitos $L$ funkcijos, funkcija $L(s, F)$ turi tikimybinį ribinį pasiskirstymą tokia prasme. Simboliu $\mathcal{B}(S)$ žymime erdvės $S$ Borelio aibių klasę. Tegul

$$\Omega = \prod_p \gamma_p;$$

čia $\gamma_p = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ su kiekvienu pirminiu $p$. Pagal Tichonovo teoremą su sandaugos topologija ir pataškine daugyba begaliniamatis toras $\Omega$ yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Todėl erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja tikimybinis Haro (Haar) matas $m_H$. Gauname tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Tegul $\omega(p)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ projekcija į koordinatinę erdvę $\gamma_p$.

Tegul $D = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{\kappa}{2}\}$. $H(D)$ žymėsime analizinių srityje $D$ funkcijų erdvę su tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija. Erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžiame $H(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą $L(s, \omega, F)$ formule

$$L(s, \omega, F) = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha(p)\omega(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta(p)\omega(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Simboliu $meas\{A\}$ žymėsime mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą.

Tegul $P_L$ yra atsitiktinio elemento $L(s, \omega, F)$ pasiskirstymas, t. y.

$$P_L(A) = m_H(\omega \in \Omega : L(s, \omega, F) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Tada teisinga tokia ribinė teorema [9].

**0.1 teorema** *Tikimybinis matas*

$$\frac{1}{T} meas\big\{\tau \in [0, T] : L(s + i\tau, F) \in A\big\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

*kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_L$.*

Dabar tarkime, kad $\chi$ yra Dirichlė charakteris moduliu $q$. Tada, kai $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$, $L$ funkcijos $L(s, F)$ sąsūka $L(s, F, \chi)$ susieta su forma $F(z)$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$L(s, F, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)\chi(m)}{m^s}$$

ir gali būti analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą. Be to, pusplokštumeje $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$ funkcija $L(s, F, \chi)$ gali būti užrašyta Oilerio sandauga pagal pirminius

$$L(s, F, \chi) = \prod_p \Big(1 - \frac{\alpha(p)\chi(p)}{p^s}\Big)^{-1} \Big(1 - \frac{\beta(p)\chi(p)}{p^s}\Big)^{-1}; \qquad (0.2)$$

čia kompleksiniai skaičiai $\alpha(p)$ ir $\beta(p)$ yra tokie pat kaip ir (0.1) formulėje.

Panašus rezultatas yra teisingas ir sąsūkai $L(s, F, \chi)$. Apibrėžiame $H(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą $L(s, \omega, F, \chi)$ formule

$$L(s, \omega, F, \chi) = \prod_p \Big(1 - \frac{\alpha(p)\chi(p)\omega(p)}{p^s}\Big)^{-1} \Big(1 - \frac{\beta(p)\chi(p)\omega(p)}{p^s}\Big)^{-1},$$

o $P_{L,\chi}$ pažymime jo pasiskirstymą, t. y.

$$P_{L,\chi}(A) = m_H(\omega \in \Omega : L(s, \omega, F, \chi) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Tuomet [17] darbe buvo gautas toks tvirtinimas.

**0.2 teorema** *Tikimybinis matas*

$$\frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : L(s+i\tau, F, \chi) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

*kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_{L,\chi}$.*

0.1 ir 0.2 teoremos buvo pritaikytos funkcijų $L(s,F)$ ir $L(s,F,\chi)$ universalumo įrodyme.

Tegul

$$D_0 = \left\{ s \in \mathbb{C} : \frac{\kappa}{2} < \sigma < \frac{\kappa+1}{2} \right\}.$$

**0.3 teorema (16)** *Tegul $K$ yra juostos $D_0$ kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, o funkcija $f(s)$ yra tolydi, neturi nulių aibėje $K$ ir analizinė jos viduje. Tuomet kiekvienam $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |L(s+i\tau, F) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

[17] straipsnyje buvo įrodytas 0.3 teoremos analogas funkcijai $L(s, F, \chi)$.

Pastebime, kad 0.2 teoremoje charakterio $\chi$ modulis $q$ yra fiksuotas. Pasirodo, kad funkcijos $L(s,F,\chi)$ asimptotinį elgesį galima apibūdinti tikimybinėmis ribinėmis teoremomis, kai modulis $q$ nėra fiksuotas ir auga, t. y. nagrinėti $L(s,F,\chi)$ asimptotinį elgesį parametro $q$ atžvilgiu.

Prieš pristatant disertacijos rezultatus, trumpai apžvelgsime analizinės skaičių teorijos tikimybinius rezultatus gautus tam tikro parametro atžvilgio.

Pirmieji rezultatai šioje srityje buvo gauti Dirichlė $L$ funkcijoms $L(s,\chi)$, apibrėžiamoms eilute

$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}, \quad \sigma > 1,$$

o kitiems $s$ – analiziniu pratęsimu. Priminsime, kad charakteris $\chi$ moduliu $q$ yra pagrindinis, jei $\chi(m) = 1$ visiems $(m,q) = 1$, ir yra žymimas $\chi_0$. Jeigu $\chi \neq \chi_0$, tada funkcija $L(s,\chi)$ yra sveikoji, o funkcija $L(s,\chi_0)$ turi paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu

$$\prod_{p|q} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big).$$

Pirmąjį rezultatą Dirichlė $L$ funkcijoms $L(s,\chi)$ su neaprėžtai augančiu moduliu gavo Čoula ir Erdiošas [2]. Jie įrodė ribinę teoremą funkcijai $L(1,\chi)$ su realiu charakteriu $\chi$. Tolimesnis progresas šioje srityje priklauso Eliotui. Pareikalaukime, kad $q$ būtų pirminis skaičius.

Kai $Q \geq 2$, tegul

$$M_Q = \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi (\mathrm{mod}\ q) \\ \chi \neq \chi_0}} 1.$$

Yra žinoma, kad

$$M_Q = \frac{Q^2}{2 \log Q} + \mathrm{O}\Big(\frac{Q^2}{\log^2 Q}\Big).$$

Trumpumo dėlei tegul

$$\mu_Q(\ldots) = M_Q^{-1} \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi (\mathrm{mod}\ q) \\ \chi \neq \chi_0 \\ \ldots}} 1;$$

čia vietoje daugtaškio įrašoma sąlyga, kurią tenkina pora $(q, \chi(\mathrm{mod}\, q))$.

Tegul

$$\varepsilon(\chi) = \prod_{m=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{\chi(m)}{m^s}\Big) \mathrm{e}^{-\chi(m) m^{-s}}.$$

[4] straipsnyje buvo įrodyta tokia teorema.

**0.4 teorema** *Tarkime, kad $\sigma > \frac{1}{2}$. Tada, kai $Q \to \infty$, pasiskirstymo funkcija*

$$\mu_Q\big(|\varepsilon(\chi)|^{-1} |L(s,\chi)| < x\big)$$

*silpnai konverguoja į pasiskirstymo funkciją.*

Kai $L(s,\chi) \neq 0$, $\frac{1}{2} < \sigma \leq 1$, tegul $\arg L(s,\chi)$ yra funkcijos $L(s,\chi)$ argumento reikšmė, apibrėžtą tolydžiu postūmiu iš taško $s = 2$ lanku, kuriame $L(s,\chi)$ nevirsta nuliumi. Taigi, funkcijos $L(s,\chi)$ argumentas yra apibrėžtas tik $2\pi i$ sveikojo kartotinio tikslumu. [5] straipsnyje buvo gauta ribinė teorema $L(s,\chi)$ argumentui. Kad suformuluotume šią teoremą, priminsime pasiskirstymo funkcijų mod 1 apibrėžimą ir konvergavimą.

Funkcija $G(x)$ yra vadinama pasiskirstymo funkcija mod 1 tada ir tik tada, jei tenkina tokias sąlygas:

1). yra didėjanti plačiaja prasme;
2). yra tolydi iš dešinės, t. y. $G(x+0) = G(x)$ visiems $x \in \mathbb{R}$;
3). $G(x) = 1$ su $x \geq 1$ ir $G(x) = 0$ su $x < 0$.

Pasiskirstymo funkcija $G_n(x)$ mod 1, $n \in \mathbb{N}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja mod 1, jeigu egzistuoja tokia pasiskirstymo funkcija $G(x)$ mod 1, kad visiems taškams $x_1$, $x_2$, $0 \leq x_1 \leq x_2 < 1$, kurie yra $G(z)$ tolydumo taškai, turime, kad

$$\lim_{n\to\infty} \big(G_n(x_2) - G_n(x_1)\big) = G(x_2) - G(x_1).$$

Taigi, kai $0 \leq x < 1$, ribinė funkcija $G(x)$ yra nusakoma tik adityvios konstantos tikslumu.

Suformuluosime pagrindinį [5] darbo rezultatą.

**0.5 teorema** *Kiekviename pusplokštumės* $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{1}{2}\}$ *taške* $s$

$$\mu_Q\Big(\frac{1}{2\pi} \arg L(s,\chi) \leq x (\mathrm{mod}\ 1)\Big),$$

*kai* $Q \to \infty$, *silpnai konverguoja į tolydžią pasiskirstymo funkciją* mod 1. *Ribinės pasiskirstymo funkcijos Furjė transformacija yra*

$$\prod_p \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} -\frac{k}{2} \\ m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{k}{2} \\ m \end{pmatrix} \frac{1}{p^{2m\sigma}}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

E. Stankus apibendrino 0.4 ir 0.5 teoremas tikimybiniams matams kompleksinėje plokštumoje [19]. Tegul $P$ yra tikimybinis matas erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$. Priminsime, kad funkcija

$$w(\tau,k) \overset{def}{=} \int\limits_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} |z|^{i\tau} \mathrm{e}^{ik\arg z} \mathrm{d}P, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

yra vadinama mato $P$ charakteristine transformacija. Yra žinoma, kad matas $P$ vienareikšmiškai yra nusakomas funkcija $w(\tau,k)$. Tegul pirminiams $p$ ir $m \in \mathbb{N}$ funkcija $c_{\tau,k}(m)$ yra multiplikatyvi ir apibrėžiama formule

$$c_{\tau,k}(p^m) = \frac{\xi(\xi+1)\ldots\xi(\xi+k-1)}{m!}$$

su $\xi = \frac{i\tau+k}{2}$ ir

$$w_P(\tau,k) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{\tau,k}(m) c_{\tau,-k}(m)}{m^{2\sigma}}, \quad \sigma > \frac{1}{2}.$$

**0.6 teorema** ([19]) *Tarkime, kad* $\sigma > \frac{1}{2}$. *Tada*

$$\mu_Q\big(L(s,\chi) \in A\big), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

*kai* $Q \to \infty$, *silpnai konverguoja į tikimybinį matą* $P$ *erdvėje* $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$, *apibrėžtą charakteristine transformacija* $w_P(\tau, k)$.

Panašūs rezultatai į 0.4, 0.5 ir 0.6 teoremas realiemsiems charakteriams buvo gauti atitinkamai [6] ir [20] darbuose.

Aukščiau minėtos ribinės teoremos yra ribinių teoremų parametro atžvilgiu pavyzdžiai. Dabar priminsime kai kuriuos su aptarta problematika susijusius rezultatus. Tegul $\omega(p)$ yra apibrėžiamas kaip ir 0.1 teoremoje. Pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$ apibrėžiame

$$L(s,\omega) = \prod_p \Big(1 - \frac{\omega(p)}{p^s}\Big)^{-1}.$$

**0.7 teorema** ([1]) *Kai* $p \to \infty$ *pirminių skaičių sekoje,*

$$\frac{1}{p-1}\#\Big\{\chi : \chi \textit{ yra Dirichlė charakteris} \bmod p \textit{ ir } \quad L(s,\chi) \in A\Big\},$$

$A \in \mathcal{B}(H(D))$, *silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento* $L(s,\omega)$ *pasiskirstymą.*

0.7 teorema buvo pritaikyta įrodant funkcijos $L(s,\chi)$ universalumą $\chi$-atžvilgiu [1]. Ją nepriklausomai vienas nuo kito taip pat gavo S. M. Gonekas (Gonek) [8] ir K. M. Eminjanas (Eminyan) [7].

**0.8 teorema** ([1]) *Tegul* $K \subset D$ *yra kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, o funkcija* $f(s)$ *yra tolydi, neturi nulių aibėje* $K$ *ir analizinė jos viduje. Tuomet kiekvienam* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{p\to\infty} \frac{1}{p-1} \quad \# \quad \Big\{\chi : \chi \textit{ yra Dirichlė charakteris} \bmod p \\ \textit{ir } \sup_{s\in K} |L(s,\chi) - f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Taip pat yra žinomi pasiskirstymo funkcijų, susijusių su įvairiomis $L$ funkcijomis, įverčiai vieno ar kito parametro atžvilgiu. Bene įdomiausi šios tematikos rezultatai yra gauti [12] darbe.

Dabar pristatysime disertacijos rezultatus.

1 skyriuje yra įrodoma ribinė teorema matui

$$P_{Q,\mathbb{R}}(A) \stackrel{def}{=} \mu_Q\Big(|L(s,F,\chi)| \in A\Big), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Tegul

$$\eta = \eta(\tau) = \frac{i\tau}{2}, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

ir pirminiams $p$ bei $k \in \mathbb{N}$

$$d_\tau(p^k) = \frac{\eta(\eta+1)\ldots(\eta+k-1)}{k!}, \quad d_\tau(1) = 1.$$

Apibrėžiame koeficientus

$$a_\tau(p^k) = \sum_{l=0}^{k} d_\tau(p^l)\alpha^l(p)d_\tau(p^{k-l})\beta^{k-l}(p)$$

ir

$$b_\tau(p^k) = \sum_{l=0}^{k} d_\tau(p^l)\overline{\alpha}^l(p)d_\tau(p^{k-l})\overline{\beta}^{k-l}(p);$$

čia $\alpha(p)$ ir $\beta(p)$ yra funkcijos $L(s,F)$ Oilerio sandaugos koeficientai, o $\overline{z}$ žymi skaičiaus $z$ jungtinį. Be to, kai $m \in \mathbb{N}$, tegul

$$a_\tau(m) = \prod_{p^l \| m} a_\tau(p^l)$$

ir

$$b_\tau(m) = \prod_{p^l \| m} b_\tau(p^l);$$

čia $p^l \| m$ reiškia, kad $p^l | m$, bet $p^{l+1} \nmid m$.

Tegul $P_\mathbb{R}$ yra tikimybinis matas erdvėje $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ apibrėžtas charakteristine transformacija

$$w_0(\tau) = w_1(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_\tau(m)b_\tau(m)}{m^{2\sigma}}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \sigma > \frac{\kappa+1}{2}.$$

Tada pagrindinis 1 skyriaus rezultatas yra tokia teorema [14].

**1.1 teorema** *Tarkime, kad $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$. Tada matas $P_{Q,\mathbb{R}}$, kai $Q \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_\mathbb{R}$.*

2 disertacijos skyriuje yra nagrinėjamas sąsūkos $L(s,F,\chi)$ argumento reikšmių pasiskirstymas. Pusplokštumėje $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$ funkcija $L(s,F,\chi)$ neturi nulių. Funkcijos $L(s,F,\chi)$ argumentą $\arg L(s,F,\chi)$ apibrėžiame tolydžiu postūmiu nuo pagrindinės argumento reikšmės taške $s=\frac{\kappa+3}{2}$ išilgai laužtės, jungiančios taškus $\frac{\kappa+2}{3}$, $\frac{\kappa+2}{3}+it$ ir $\sigma+it$. Nagrinėjame matą

$$P_{Q,\gamma}(A) \overset{def}{=} \mu_Q\Big(\exp\{i\arg L(s,F,\chi)\}\in A\Big), \quad A\in\mathcal{B}(\gamma);$$

čia $\gamma$ yra kompleksinės plokštumos vienetinis apskritimas. Tegul

$$\theta=\theta(k)=\frac{k}{2}, \quad k\in\mathbb{Z},$$

ir pirminiams $p$ bei $l\in\mathbb{N}$

$$d_k(p^l)=\frac{\theta(\theta+1)\dots(\theta+l-1)}{l!}, \quad d_k(1)=1.$$

Panašiai kaip 1.1 teoremoje, kai $m\in\mathbb{N}$, apibrėžiame koeficientus

$$a_k(m)=\prod_{p^l\|m} a_k(p^l)$$

ir

$$b_k(m)=\prod_{p^l\|m} b_k(p^l);$$

čia

$$a_k(p^l)=\sum_{j=0}^{l} d_k(p^j)\alpha^j(p)d_k(p^{l-j})\beta^{l-j}(p)$$

ir

$$b_k(p^l)=\sum_{j=0}^{l} d_{-k}(p^l)\overline{\alpha}^j(p)d_{-k}(p^{l-j})\overline{\beta}^{l-j}(p).$$

Be to, tegul $P_\gamma$ yra tikimybinis matas erdvėje $(\gamma,\mathcal{B}(\gamma))$, apibrėžtas Furjė transformacija

$$f(k)\overset{def}{=}\int_\gamma x^k \mathrm{d}P_\gamma=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_k(m)b_k(m)}{m^{2\sigma}}, \quad \sigma>\frac{\kappa+1}{2}.$$

Tegul $P_n$, $n \in \mathbb{N}$, ir $P$ yra tikimybiniai matai erdvėje $(\gamma, \mathcal{B}(\gamma))$. Primename, kad silpnas $P_n$, kai $n \to \infty$, konvergavimas į $P$ yra ekvivalentus konvergavimui

$$P_n(A) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} P(A)$$

visiems lankams $A \subset \gamma$ su visais nulinio $P$ mato galiniais taškais.

Tada [15] straipsnyje įrodyta tokia teorema.

**2.1 teorema** *Tarkime, kad* $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$. *Tada, kai* $Q \to \infty$, $P_{Q,\gamma}$ *silpnai konverguoja į matą* $P_\gamma$.

Šią teoremą galima formuloti ir taip [15].

**2.2 teorema** *Tarkime, kad* $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$. *Tada, kai* $Q \to \infty$,

$$\mu_Q\Big(\frac{1}{2\pi} \arg L(s, F, \chi) \le x (\text{mod } 1)\Big)$$

*silpnai konverguoja* mod 1 *į pasiskirstymo funkciją* mod 1, *apibrėžiamą Furjė transformacija* $f(k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3 disertacijos skyriuje mes apjungiame 1.1 ir 2.1 teoremas ir įrodome ribinę teoremą funkcijai $L(s, F, \chi)$ kompleksinėje plokštumoje su neaprėžtai augančiu charakterio moduliu.

Tarkime $P_n$, $n \in \mathbb{N}$, ir $P$ yra tikimybiniai matai erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$. Sakome, kad $P_n$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja $\mathbb{C}$ prasme į $P$, jei $P_n$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į $P$ ir

$$\lim_{n \to \infty} P_n(\{0\}) = P(\{0\}).$$

Tegul

$$\xi = \xi(\tau, \pm k) = \frac{i\tau \pm k}{2}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ir pirminiams $p$ bei $l \in \mathbb{N}$

$$d_{\tau, \pm k}(p^l) = \frac{\xi(\xi+1)\dots(\xi+l-1)}{l!}, \quad d_{\tau, \pm k}(1) = 1.$$

Apibrėžiame koeficientus

$$a_{\tau,k}(p^l) = \sum_{j=0}^{l} d_{\tau,k}(p^l)\alpha^j(p) d_{\tau,k}(p^{l-j})\beta^{l-j}(p)$$

ir

$$b_{\tau,k}(p^l) = \sum_{j=0}^{l} d_{\tau,-k}(p^l)\overline{\alpha}^j(p) d_{\tau,-k}(p^{l-j})\overline{\beta}^{l-j}(p).$$

Taip pat tegul

$$a_{\tau,k}(m) = \prod_{p^l \| m} a_{\tau,k}(p^l), \quad b_{\tau,k}(m) = \prod_{p^l \| m} b_{\tau,k}(p^l), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ tikimybinį matą $P_{\mathbb{C}}$ apibrėžiame charakteristine transformacija

$$w(\tau, k) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{\tau,k}(m) b_{\tau,k}(m)}{m^{2\sigma}}, \quad \sigma > \frac{\kappa+1}{2}.$$

Tegul

$$P_{Q,\mathbb{C}}(A) = \mu_Q\Big(L(s, F, \chi) \in A\Big), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Tada pagrindinis 3 skyriaus rezultatas yra ši teorema [10].

**3.1 teorema** *Tarkime, kad $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$. Tada, kai $Q \to \infty$, $P_{Q,\mathbb{C}}$ silpnai konverguoja $\mathbb{C}$ prasme į matą $P_{\mathbb{C}}$.*

Paskutinis, 4 skyrius, disertacijoje yra skirtas $r$-mačiam 1.1 teoremos atvejui.

Tegul $r \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $P$ yra tikimybinis matas erdvėje $(\mathbb{R}^r, \mathcal{B}(\mathbb{R}^r))$, o $P_j$, $j = 1, \dots, r$, $P_{j_1,j_2}$, $j_2 > j_1 = 1, \dots, r-1, \dots$, $P_{1,\dots,j-1,j+1,\dots,r}$, $j = 1, \dots, r$, yra atitinkamai mato $P$ vienmatis, dvimatis, ..., $(r-1)$-matis marginalieji matai. Funkcijos

$$\begin{aligned}
&w_{k_j}(\tau_j) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} |x_j|^{i\tau_j} \operatorname{sgn}^{k_j} x_j \mathrm{d}P_j, \quad \tau_j \in \mathbb{R}, \quad k_j = 0,1, \quad j = 1, \dots, r, \\
&w_{k_{j_1},k_{j_2}}(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} \int\limits_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} |x_{j_1}|^{i\tau_{j_1}} \operatorname{sgn}^{k_{j_1}} x_{j_1} |x_{j_2}|^{i\tau_{j_2}} \operatorname{sgn}^{k_{j_2}} x_{j_2} \mathrm{d}P_{j_1,j_2}, \\
&\tau_{j_1}, \tau_{j_2} \in \mathbb{R}, k_{j_1}, k_{j_2} = 0,1, \quad j_2 > j_1 = 1, \dots, r-1, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&w_{k_1,\dots,k_{j-1},k_{j+1},\dots,k_r}(\tau_1, \dots, \tau_{j-1}, \tau_{j+1}, \dots, \tau_r) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} \dots \int\limits_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} |x_1|^{i\tau_1} \operatorname{sgn}^{k_1} x_1 \dots |x_{j-1}|^{i\tau_{j-1}} \operatorname{sgn}^{k_{j-1}} x_{j-1} \\
&\quad \times |x_{j+1}|^{i\tau_{j+1}} \operatorname{sgn}^{k_{j+1}} x_{j+1} \dots |x_r|^{i\tau_r} \operatorname{sgn}^{k_r} x_r \mathrm{d}P_{1,\dots,j-1,j+1,\dots,r}, \\
&\tau_1, \dots, \tau_{j-1}, \tau_{j+1}, \dots, \tau_r \in \mathbb{R}, \ k_1, \dots, k_{j-1}, k_{j+1}, \dots, k_r = 0,1, \\
&j = 1, \dots, r,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& w_{k_1,\dots,k_r}(\tau_1,\dots,\tau_r) \\
& = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \dots \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} |x_1|^{i\tau_1}\operatorname{sgn}^{k_1}x_1 \dots |x_r|^{i\tau_r}\operatorname{sgn}^{k_r}x_r \mathrm{d}P, \\
& \tau_1,\dots,\tau_r \in \mathbb{R}, \quad k_1,\dots,k_r = 0,1,
\end{aligned}
$$

yra vadinamos $(\mathbb{R}^r, \mathcal{B}(\mathbb{R}^r))$ tikimybinio mato $P$ erdvėje $(\mathbb{R}^r, \mathcal{B}(\mathbb{R}^r))$ charakteristinėmis transformacijomis. Matas $P$ vienareikšmiškai yra apibrėžiamas jo charakteristinėmis transformacijomis [13].

Tegul $F_j(z)$, $j = 1,\dots,r$, yra pilnos modulinės grupės holomorfinė normuota parabolinė svorio $\kappa_j$ Hekės eigenforma su Furjė skleidiniu

$$
F_j(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c_j(m)\mathrm{e}^{2\pi imz}, \quad c_j(1) = 1.
$$

Tegul $L(s, F_j)$ yra atitinkama $L$ funkcija, pusplokštumeje $\sigma > \frac{\kappa_j+1}{2}$ apibrėžiama eilute

$$
L(s, F_j) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_j(m)}{m^s},
$$

su Oilerio sandauga pagal pirminius

$$
L(s, F_j) = \prod_p \Big(1 - \frac{\alpha_j(p)}{p^s}\Big)^{-1}\Big(1 - \frac{\beta_j(p)}{p^s}\Big)^{-1};
$$

čia $\alpha_j(p)$ ir $\beta_j(p)$ yra kompleksiniai jungtiniai skaičiai, tenkinantys sąryšį $\alpha_j(p) + \beta_j(p) = c_j(p)$.

4 skyriuje yra tiriamas $L$ funkcijų sąsūkų $L(s_1, F_1, \chi)$, ..., $L(s_r, F_r, \chi)$, $s_j = \sigma_j + it_j$, rinkinio reikšmių pasiskirstymas; čia $\chi$ yra Dirichlė charakteris moduliu $q$, $q$ yra pirminis skaičius ir

$$
\begin{aligned}
L(s_j, F_j, \chi) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_j(m)\chi(m)}{m^{s_j}} \\
&= \prod_p \Big(1 - \frac{\alpha_j(p)\chi(p)}{p^{s_j}}\Big)^{-1}\Big(1 - \frac{\beta_j(p)\chi(p)}{p^{s_j}}\Big)^{-1},
\end{aligned}
$$

pusplokštumeje $\sigma_j > \frac{\kappa_j+1}{2}$.

Apibrėžiame koeficientus

$$
a_{j;\tau}(m) = \prod_{p^k \| m} a_{j;\tau}(p^k), \quad b_{j;\tau}(m) = \prod_{p^k \| m} b_{j;\tau}(p^k), \quad j = 1,\dots,r;
$$

čia

$$a_{j;\tau}(p^k) = \sum_{l=0}^{k} d_\tau(p^l)\alpha_j^l(p) d_\tau(p^{k-l})\beta_j^{k-l}(p)$$

ir

$$b_{j;\tau}(p^k) = \sum_{l=0}^{k} d_\tau(p^l)\overline{\alpha}_j^l(p) d_\tau(p^{k-l})\overline{\beta}_j^{k-l}(p).$$

Tegul $P_{\mathbb{R}^r}$ yra tikimybinis matas erdvėje $(\mathbb{R}^r, \mathcal{B}(\mathbb{R}^r))$, apibrėžiamas charakteristinėmis transformacijomis

$$\begin{cases} w_{k_j}(\tau_j) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{a_{j;\tau_j}(m) b_{j;\tau_j}(m)}{m^{2\sigma_j}}, \quad j = 1, \dots, r, \\ w_{k_{j_1}, k_{j_2}}(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}) \\ = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{m_1 m_2 = m} \frac{a_{j_1;\tau_{j_1}}(m_1) a_{j_2;\tau_{j_2}}(m_2)}{m_1^{s_{j_1}} m_2^{s_{j_2}}} \sum\limits_{n_1 n_2 = m} \frac{b_{j_1;\tau_{j_1}}(n_1) b_{j_2;\tau_{j_2}}(n_2)}{n_1^{\overline{s}_{j_1}} n_2^{\overline{s}_{j_2}}}, \\ \quad j_2 > j_1 = 1, \dots, r-1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ w_{k_1, \dots, k_{j-1}, k_{j+1}, \dots, k_r}(\tau_1, \dots, \tau_{j-1}, \tau_{j+1}, \dots, \tau_r) \\ = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{\substack{m_1 \dots m_{j-1} \\ \times m_{j+1} \dots m_r = m}} \frac{a_{1;\tau_1}(m_1) \dots a_{j-1;\tau_{j-1}}(m_{j-1}) a_{j+1;\tau_{j+1}}(m_{j+1}) \dots a_{r;\tau_r}(m_r)}{m_1^{s_1} \dots m_{j-1}^{s_{j-1}} m_{j+1}^{s_{j+1}} \dots m_r^{s_r}} \\ \qquad \times \sum\limits_{\substack{n_1 \dots n_{j-1} \\ \times n_{j+1} \dots n_r = m}} \frac{b_{1;\tau_1}(n_1) \dots b_{j-1;\tau_{j-1}}(n_{j-1}) b_{j+1;\tau_{j+1}}(n_{j+1}) \dots b_{r;\tau_r}(n_r)}{n_1^{\overline{s}_1} \dots n_{j-1}^{\overline{s}_{j-1}} n_{j+1}^{\overline{s}_{j+1}} \dots n_r^{\overline{s}_r}}, \\ \quad j = 1, \dots, r, \\ w_{k_1, \dots, k_r}(\tau_1, \dots, \tau_r) \\ = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{m_1 \dots m_r = m} \frac{a_{1;\tau_1}(m_1) \dots a_{r;\tau_r}(m_r)}{m_1^{s_1} \dots m_r^{s_r}} \sum\limits_{n_1 \dots n_r = m} \frac{b_{1;\tau_1}(n_1) \dots b_{r;\tau_r}(n_r)}{n_1^{\overline{s}_1} \dots n_r^{\overline{s}_r}}, \\ \quad \sigma_j > \frac{\kappa_j + 1}{2}, \quad j = 1, \dots, r. \end{cases}$$

Pagrindinis 4 skyriaus rezultatas yra tokia teorema [11]. Tegul

$$P_{Q,\mathbb{R}^r}(A) = \mu_Q\Big(\big(|L(s_1, F_1, \chi)|, \dots, |L(s_r, F_r, \chi)|\big) \in A\Big), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^r).$$

**4.1 teorema** *Tarkime, kad* $\sigma_j > \frac{\kappa_j + 1}{2}$, $j = 1, \dots, r$. *Tada, kai* $Q \to \infty$, $P_{Q,\mathbb{R}^r}$ *silpnai konverguoja į matą* $P_{\mathbb{R}^r}$.

Disertacijoje mes nagrinėjame tikimybinio mato, apibrėžiamo sąsūkoms $L(s, F, \chi)$, silpnąjį konvergavimą absolutaus funkcijos $L(s, F, \chi)$ eilutės konvergavimo pusplokštumėje. Tikimės, kad šį rezultatą galima būtų pratęsti į sritį $\sigma > \frac{\kappa}{2}$, tačiau, mūsų nuomone, tai yra sudėtinga. Esminis skirtumas nuo Dirichlė $L$ funkcijų atvejo yra tas, kad eilutė, apibrėžianti $L(s, F, \chi)$ su $\chi \neq \chi_0$, pusplokštumėje $\sigma > \frac{\kappa}{2}$ nekonverguoja.

**Išvados.** Tarkime, jog $F$ yra normuota parabolinė Hekės eigen forma pilnosios modulinės grupės atžvilgiu, $L(s, F)$ yra susieta su šia forma $L$ funkcija, o $L(s, F, \chi)$ yra funkcijos $L(s, F)$ sąsūka su Dirichlė charakteriu moduliu $q$, $q$ yra pirminis skaičius.

Kai $q \to \infty$, nustata, kad funkcijai $L(s, F, \chi)$ teisingi tokie asimptotiniai tvirtinimai:

1). ribinė teorema moduliui $|L(s, F, \chi)|$;

2). ribinė teorema $\arg L(s, F, \chi)$;

3). ribinė teorema funkcijai $L(s, F, \chi)$ kompleksinėje plokštumoje;

4). jungtinė ribinė teorema rinkiniui $|L(s_1, F_1, \chi)|, \ldots, |L(s_r, F_r, \chi)|$.

Visos ribinės teoremas yra apie tikimybinių matų silpnąjį konvergavimą.

**Aprobacija.** Disertacijos rezultatai buvo pristatyti Lietuvos matematikų draugijos konferencijose (2008, 2009, 2010, 2011), $10^{th}$ International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics (2010 m. birželio 28 d.– liepos 2 d., Vilnius), $16^{th}$ International Conference " Mathematical Modeling and Analysis" (2011 m. gegužės 25–28 d., Sigulda, Latvija), International Conference $27^{th}$ Journées Arithmétiques (2011 m. birželio 27 d.– liepos 1 d., Vilnius), o taip pat Vilniaus universiteto Skaičių teorijos seminare bei Šiaulių universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto seminare.

Dėkoju moksliniam vadovui prof. habil. dr. A. Laurinčikui už paramą ir dėmesį per doktorantūros studijas. Esu dėkinga Vilniaus universiteto Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedros ir Šiaulių universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto nariams už diskusijas ir moralinę paramą. Dėkoju Šiaulių universitetui už finansinę paramą.

**Publikacijų disertacijos tema sąrašas.**

1. A. Kolupayeva, Value-distribution of twisted $L$-functions of normalized cusp forms, *Lietuvos Matematikos Rinkinys. LMD darbai*, **51** (spec. issue) (2010), 35–40.

2. A. Kolupayeva, Value-distribution of twisted automorphic $L$-functions III, *Šiauliai Math. Semin.*, **6** (14) (2011), 21–33.

3. A. Kolupayeva, A. Laurinčikas, Value-distribution of twisted automorphic $L$-functions, *Lith. Math. J.*, **48** (2) (2008), 203–211.

4. A. Kolupayeva, A. Laurinčikas, Value-distribution of twisted automorphic $L$-functions II, *Lith. Math. J.*, **50** (3) (2010), 284–292.

5. A. Kolupayeva, A. Laurinčikas, Value-distribution of twisted $L$-functions of normalized cusp forms, *submitted.*

**Cituota literatūra.**


1. B. Bagchi, The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series, Ph. D. Thesis, Calcutta, *Indian Statistical Institute*, 1981.

2. S. Chowla and P. Erdös, A theorem on the values of $L$-function, *J. Indian Math. Soc.*, **15A** (1951), 11–18.

3. P. Deligne, La conjecture de Weil, *Inst. Hâutes Études Sci. Publ. Math.*, **43** (1974), 273–308.

4. P. D. T. A. Elliott, On the distribution of the values of $L$-series in the half-plane $\sigma > \frac{1}{2}$, *Indag. Math.*, **31** (3) (1971), 222–234.

5. P. D. T. A. Elliott, On the distribution of arg $L(s,\chi)$ in the half-plane $\sigma > \frac{1}{2}$, *Acta Arith.*, **20** (1972), 155–169.

6. P. D. T. A. Elliott, On the distribution of the values of quadratic $L$-series in the half-plane $\sigma > \frac{1}{2}$, *Invent. Math.*, **21** (1973), 319–338.

7. K. M. Eminyan, $\chi$-universality of the Dirichlet $L$-function, *Math. Notes*, **47** (1980), 618–622.

8. S. M. Gonek, Analytic Properties of Zeta and $L$-functions, *Ph. D. Thesis, University of Michigan*, 1979.

9. A. Granville, K. Soundararajan, Extreme values of $L(1,\chi_d)$, *Geom. Funct. Anal.*, **13** (2003), 992–1028.

10. A. Kolupayeva, Value-distribution of twisted $L$-functions of normalized cusp forms, *Liet. Matem. Rink.*, **51** (spec. issue) (2010), 35–40.

11. A. Kolupayeva, Value-distribution of twisted automorphic $L$-functions. III, *Šiauliai Math. Semin.*, **6** (14) (2011), 21–33.

12. Y. Lamzouri, Distribution of value of $L$-functions at the edges of the critical strip, *Proc. London Math. Soc.*, **100** (3) (2010), 835–863.

13. A. Laurinčikas, Multidimensional distribution of values of multiplicative functions, *Liet. Matem. Rink.*, **15** (2) (1975), 13–24 (in Russian).

14. A. Laurinčikas, A. Kolupayeva, Value-distribution of twisted automorphic $L$-functions, *Lith. Math. J.*, **48** (2) (2008), 203–211.

15. A. Laurinčikas, A. Kolupayeva, Value-distribution of twisted automorphic $L$-functions II, *Lith. Math. J.*, **50** (3) (2010), 284–292.

16. A. Laurinčikas, K. Matsumoto, The universality of zeta-functions atatached to certain cusp forms, *Acta Arith.* **98** (4) (2001), 345–359.

17. A. Laurinčikas, K. Matsumoto, The joint universality of twisted automorphic $L$-functions, *J. Math. Soc. Japan*, **56** (3) (2004), 923–939.

18. L. Mordell, On Mr. Ramanujan's emprical expansions of modular functions, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **19** (1917), 117–124.

19. E. Stankus, The distribution of $L$-functions, *Liet. Matem. Rink.*, **15** (3) (1975), 127–134 (in Russian).

20. E. Stankus, Distribution of Dirichlet $L$-functions with real characters in the half-plane $\sigma > \frac{1}{2}$, *Liet. Matem. Rink.*, **15** (4) (1975), 199–214 (in Russian).

**Summary.** Let $F$ be a holomorphic normalized Hecke eigen cusp form of weight $\kappa$ for the full modular group, $L(s, F)$ , $s = \sigma + it$, be the $L$-function attached to the form $F$, and let $L(s, F, \chi)$ denote a twist of $L(s, F)$ with a Dirichlet character $\chi$ modulo $q$. We consider the value distribution of $L(s, F, \chi)$ for $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$, where $q$ is a prime number and increases to infinity. For this, we prove limit theorems in the sense of weak convergence of probability measures in some spaces.

For $Q \geq 2$, let

$$M_Q = \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi (\text{mod } q) \\ \chi \neq \chi_0}} 1,$$

and

$$\mu_Q(\ldots) = M_Q^{-1} \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{\chi = \chi (\text{mod } q) \\ \chi \neq \chi_0 \\ \ldots}} 1,$$

where in place of dots a condition satisfied by a pair $(q, \chi(\text{mod } q))$ is to be written. Denote by $\mathcal{B}(S)$ the class of Borel sets of the space $S$. We obtain the weak convergence for probability measures

$$\begin{aligned} &\mu_Q\big(|L(s, F, \chi)| \in A\big), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \\ &\mu_Q\big(\arg L(s, F, \chi) \in A\big), \quad A \in \mathcal{B}(\gamma), \\ &\mu_Q\big(L(s, F, \chi) \in A\big), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}), \end{aligned}$$

where $\gamma$ is the unit circle on the complex plane, and $\sigma > \frac{\kappa+1}{2}$, as $Q \to \infty$. Also, the weak convergence for the measure

$$\mu_Q\Big(\big(|L(s_1, F_1, \chi)|, \ldots, |L(s_r, F_r, \chi)|\big) \in A\Big), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^r),$$

is discussed, where $F_1, \ldots, F_r$ are holomorphic normalized Heke eigen cusp forms of weights $\kappa_1, \ldots, \kappa_r$, respectively.

For the proofs, the method of characteristic transforms is applied, and the limit measures in limit theorems obtained are defined their characteristic transforms.

## Trumpos žinios apie autorę

### Gimimo data ir vieta

1980 m. vasario 6 d., Šiauliai.

### Išsilavinimas ir kvalifikacija:

1998 m. Šiaulių m. “Santarvės” vidurinė mokykla.

2002 m. Šiaulių universiteto Fizikos ir matematikos fakultetas, baigus Matematikos studijų programą, suteiktas matematikos bakalauro kvalifikacinis laipsnis.

2003 m. Šiaulių universiteto Edukologijos fakultetas, baigus Antrosios pakopos edukologijos krypties dalyko pedagogikos studijų programą, suteikta mokytojo profesinė kvalifikacija.

2006 m. Šiaulių universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, baigus Matematikos studijų programą, suteiktas matematikos magistro kvalifikacinis laipsnis ir mokytojo profesinė kvalifikacija.

### Darbo patirtis

2003–2006 m. Šiaulių “Salduvės” vidurinės mokyklos matematikos mokytoja.

Nuo 2006 m. Šiaulių universiteto Matematikos katedros asistentė.

## Short information about the author.

### Birth date and place

February 6, 1980, Šiauliai.

### Education:

1998 Šiauliai " Santarvė" secondary school.
2002 Šiauliai University, Faculty of Physics and Mathematics, Bachelor of Mathematics.
2003 Šiauliai University, Faculty of Education, Teacher.
2006 Šiauliai University, Faculty of Mathematics and Informatics, Master of Mathematics and Mathematics teacher.

### Working experience:

2003–2006 Šiauliai " Salduvė" secondary school, Mathematics teacher.
Since 2006 Šiauliai University, Mathematics department, assistant.