

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
INFORMATIKOS KATEDRA

Baigiamasis bakalauro darbas

Algoritminė prekyba naudojant „prekyba poromis“
(Algorithmic trading using pairs training)

Atliko: 4 kurso, 1 grupės studentė

Žydrūnė Rinkevičiūtė (parašas)

Darbo vadovas:

dr. Aistis Raudys (parašas)

Vilnius
2016

Turinys

Ivadas	3
1. Galimai susijusių porų sąrašas	4
1.1. „Coca-cola“ ir „Pepsi“	4
1.2. „Walmart“ ir „Target“	5
1.3. Naftos rūšys „West Texas Intermediate“ ir „Brent Crude Oil“	6
1.4. „Renault“ ir „PSA Peugeot Citroen“	7
1.5. Koreliacijos koeficientas	8
1.6. Akcijų poros pasirinkimas	10
2. Strategijos rašymas	10
2.1. Duomenų apdorojimas	10
2.2. Tikrinimas ar egzistuoja kointegracija	12
2.3. Porų prekybos strategija	13
2.4. Porų prekybos rezultatai	15
2.5. Automatinis geriausių parametų radimas	18
2.6. Porų prekybos rezultatai, radus geriausius parametrus	20
3. Porų prekybos privalumai ir trūkumai	21
3.1. Privalumai	21
3.2. Trūkumai	22
Išvados	24
Summary	25
Literatūros sąrašas	26
Priedai	27
Priedas Nr.1 <i>poruPrekyba.m</i>	27
Priedas Nr.2 <i>poruGrafikas.m</i>	28
Priedas Nr.3 <i>strategija.m</i>	28
Priedas Nr.4 <i>poros2.m</i>	30
Priedas Nr.5 <i>geriausiParametrai.m</i>	30

Ivadas

Darbo tikslas

Suprasti porų prekybos principus ir remiantis jais aprašyti prekybos strategiją.

Uždaviniai

Porų paieška, tinkamų porų atrinkimas, pasinaudojant analize ir matematiniais metodais, strategijos aprašymas-programavimas, strategijos optimizavimas.

Akcijų ir vertybinių popierių pasaulis yra pilnas neaiškumo ir rizikos. Tačiau daug investuotojų mato potencialą uždirbti iš akcijų biržos su pasirinkta informacija ir strategija. Viena dalis investuotojų perka akcijas remdamiesi turima informacija apie tam tikras firmas, kita dalis naudoja strategijomis, kurios pagrįstos akcijų rinkos supratimu ir elgesiu apskritai. Viena iš daugelio strategijų yra prekyba poromis.

Porų prekyboje investuotojai pasirenka dvi koreliuotas, t.y. tarpusavyje priklausančias akcijų poras arba kitas panašias akcijas, kurioms egzistuoja kointegracija, kurią jau smulkiai aprašiau savo kursiniame projektiniame darbe, ir prekiauja pagal našumą viena kitos atžvilgiu. T.y. perkama, kai akcijos vertė yra žymiai sumažėjusi ir parduodama, kai akcijos vertė yra žymiai pakilusi.

Algoritminė prekyba naudojant „prekyba poromis“ – tai automatizuota prekyba, kai operacijų atlikimą nusprendžia tam tikri algoritmai, t. y. nusprendžiama kada akciją A mes pirsime (long pozicija), o akciją B – parduosime (short pozicija) ir atvirkščiai. Yra daug platformų, kurios leidžia prekybininkui iš anksto užprogramuoti veiksmų atlikimą. Aš pasirinkau MATLAB programavimo kalbą.

Šiame darbe parodysiu, kaip reikia rasti tinkamas akcijų poras, kuriomis norime prekiauti, tam panaudosiu algoritmus, kuriuos aprašiau savo kursiniame projektiniame darbe, taip pat naujus metodus, kurie leidžia kuo tiksliau atsirinkti tinkamas akcijas. Taip pat suprogramuosiu ir išnagrinėsiu porų prekybos strategiją, ją optimizuosiu, pateiksiu porų prekybos esminius privalumus ir trūkumus.

1. Galimai susijusių porų sąrašas

Prieš pradedant konstruoti prekybos strategiją mums reikia pasirinkti tokias akcijų poras, kurios yra galimai susijusios. Investuotojai sugaišta daug laiko analizuodami rinką ir ieškodami potencialių vertybinių popierių į kuriuos galėtų investuoti, na o porų prekyboje mums reikia rasti potencialias poras, kuriomis norime prekiauti. T.y. turime atlikti tyrimą, kurio tikslas rasti poras, kurios turi kažką bendro, tiksliau sakant yra kointegruotos. Galime rinktis tokias akcijų poras, kurių įmonės gamina panašius produktus, pavyzdžiui gėrimų kompanijos „Coca-cola“ ir „Pepsi“, mažmeninės prekybos tinklai, tokie kaip „Walmart“ ir „Target“, naftos akcijos, automobilių kompanijos ir panašiai. Toliau būtent jas ir išnagrinėsiu ir pasirinksiu tinkamiausią akcijų porą. [Cha09]

Kad geriau susigaudytume ir suprastume ar pasirinktų porų ryšys yra stiprus spręsiu ne tik iš grafikų bet taip pat apskaičiuosiu koreliacijos koeficientą, kuris taip pat yra labai svarbus rodiklis ir padeda tinkamai pasirinkti.

Toliau paanalizuosiu keletą akcijų porų, kurias paimiau iš skirtingų sferų, pritaikysiu koreliacijos koeficientą ir nuspręsiu, kurios akcijos yra tinkamiausios.

1.1. „Coca-cola“ ir „Pepsi“

Pirmoji akcijų pora, kurią nusprendžiau išanalizuoti yra „Pepsi“ ir „Coca-cola“ firmų akcijos. Tai patys populiariausi nealkoholiniai gėrimai, jų skonis yra labai panašus ir net galima teigti, kad jis beveik niekuo nesiskiria. Šios kompanijos pradėjo varžytis nuo 1903 metų, kai „Pepsi“ užregistravo savo prekės ženklą. Šių dviejų kompanijų konkurencija prilyginama karui be kraujo, kuris tęsiasi visą XX amžių ir tebevyksta dabar.

Kai kalbama apie porų prekybą šios akcijų poros dažnai pateikiamos kaip pavyzdys, todėl, kad viena kitą jos nori vis pralenkti – išlaikomas puikus kointegracijos ryšys, todėl manau būtina jas paanalizuoti. Pats geriausias būdas pamatyti kaip laiko eilutės elgiasi tai pažvelgti į jų grafikus.

Naudodamasi Google finance pažiūrėsiu kaip atrodo mano pirmoji pasirinkta pora ir ar tikrai konkurencingumą galime sulygtinti su kointegruotumu. Pirmame grafike pasirinkau 2015-2016 metus „Coca-cola“ pralenkė „Pepsi“ ir kolkas pirmauja (1 pav.). Galime iš arčiau pažvelgti, pasirinkę paskutinių trijų mėnesių laikotarpį (2 pav.). Kaip matome tarp šių laiko eilučių egzistuoja kointegracija, bet „Coca-cola“ pralenkusi „Pepsi“. Visgi tikėtina, kad ateityje „Pepsi“ vėl pralenks „Coca-cola“.



2 pav. „Coca-cola” ir „Pepsi” istorinės kainos 2015-2016 m. (laikotarpis - 1 metai)



2 pav. „Coca-cola” ir „Pepsi” istorinės kainos 2016 m. (laikotarpis – 3 mėnesiai)

1.2. „Walmart” ir „Target”

Antroji akcijų pora, kurią pasirinkau yra „Walmart” ir „Target” įmonių akcijos. „Walmart” yra JAV akcinė bendrovė žinoma kaip didžiausias mažmeninės prekybos tinklas visame pasaulyje. „Target” yra antroje vietoje einanti po „Walmart” taip pat užsiimanti mažmenine prekyba bei įsikūrusi JAV.

Šios dvi įmonės taip pat yra tarpusavyje lyginamos, nors „Walmart” ir yra labai išsiplėtusi tai dar nereiškia, kad ji yra geresnė, kitiems daug labiau patinka „Target”. Aišku tarp šių dviejų įmonių taip pat vyksta varžytuvės. Pasižiūrėkime ar galėtume prekiauti šių įmonių akcijomis.

Imame taip pat istorines kainas paskutinių vienerių metų laikotarpį (3 pav.). Grafike matome, kad „Target” akcijos yra gerokai aukščiau už „Walmart” ir metų laikotarpyje tai nepakito.

Kointegracija taip pat įžvelgiama tam tikrose atkarpose.



3 pav. „Walmart“ ir „Target“ istorinės kainos 2015-2016 m. (laikotarpis - 1 metai)

Pažvelkime taip pat į paskutinių trijų mėnesių laikotarpį (4 pav.).



4 pav. „Walmart“ ir „Target“ istorinės kainos 2016 m. (laikotarpis - 3 mėnesiai)

Imdami mažesnį laikotarpį matome, kad visgi „Walmart“ buvo pralenkusi „Target“, bet jau matydama jų grafikus norėčiau daryti išvadą, kad šių akcijų nesirinksiu, nes nėra matomų kryptingų abiejų akcijų eilučių judėjimų, na bet tolesniame skyrelyje apskaičiavusi koreliacijos koeficientą nuspręsiu galutinai, kaip gi reiktų teisingiausiai pasielgti.

1.3. Naftos rūšys „West Texas Intermediate“ ir „Brent Crude Oil“

Dar viena pora, kurią noriu paanalizuoti tai naftos rūšys „West Texas Intermediate“ ir „Brent Crude oil“. „West Texas Intermediate“ pagrindu sudaromi ateities sandoriai, kuriais galima prekiauti tarpžemyninėse biržose ir Amerikoje.

„West Texas Intermediate“ nafta, Šiaurės Amerikoje, laikoma kaip etalonas, kai reikia lyginti su kitomis naftos rūšimis, šios naftos rūšis naudojama įkainojant kitas naftos rūšis. Ji vertinama

dėl geros kokybės, sudėtyje ji turi mažai sieros. Daugiausiai naudojama benzinui gaminti, tad turi didelę paklausą.

„Brent Crude oil“ nafta išgaunama Šiaurės jūroje bei taipogi laikoma etalonu Europoje, Afrikoje ir Artimuosiuose Rytuose. „Brent Crude oil“ taip pat naudojama kainų formavimui akcijų biržose. Ši nafta nuo „West Texas Intermediate“ skiriasi tuo, kad yra klampesnė ir sieringesnė.

Pasižiūrėkime kaip atrodo šių dviejų akcijų grafikas (5 pav.).

Kaip matome, kointegracija egzistuoja tarp šių dviejų laiko eilučių. Taip pat pasižiūrėkime kaip atrodo trijų paskutinių mėnesių grafikas (6 pav.).



5 pav. „Brent“ ir „West Texas“ istorinės kainos 2015-2016 m. (laikotarpis - 1 metai)



6 pav. „Brent“ ir „West Texas“ istorinės kainos 2016 m. (laikotarpis – 3 mėnesiai)

1.4. „Renault“ ir „PSA Peugeot Citroen“

Na ir nusprendžiau paanalizuoti dar vieną porą „Renault“ ir „PSA Peugeot Citroen“ – tai automobilių gamintojai. „Renault“ – tai dviejų prancūzų brolių įkurta garsi automobilių gamintoja.

firma „PSA Peugeot Citroen“ taip pat Prancūzijoje įsikūrusi antra pagal dydį automobilių gamintoja Europoje. Ši įmonė gamina „Citroen“ ir „Peugeot“ automobilius.

Pasižiūrėkime kaip atrodo grafikas šių akcijų porų (7 pav.). Čia taip pat ryškiai matosi, kad kointegracija egzistuoja. Paimkime trumpesnę laikotarpį trijų mėnesių (8 pav.), kaip matome ši akcijų pora tikrai linkusi judėti kartu.



7pav. „Renault“ ir „PSA Peugeot Citroen“ istorinės kainos 2015-2016 m. (laikotarpis - 1 metai)



8 pav. „Renault“ ir „PSA Peugeot Citroen“ istorinės kainos 2016 m. (laikotarpis – 3 mėnesiai)

1.5. Koreliacijos koeficientas

Koreliacijos koeficientas naudojamas įvertinti pasirinktų porų ryšio stiprumą. Jo reikšmės kinta nuo -1 iki 1, kur:

- 1 reiškia, kad egzistuoja teigiama koreliacija (pavyzdžiui, kai akcija A ir akcija B juda kartu aukštyn arba žemyn).

- -1 reiškia, kad egzistuoja neigiama koreliacija (pavyzdžiui, kai akcija A juda aukštyn, o B juda žemyn).
- 0 reiškia, kad koreliacija neegzistuoja (pavyzdžiui, kai akcijos nėra priklausomos viena nuo kitos ir akcijos A ir B juda aukštyn ir žemyn visiškai atsitiktinai).

Vadinasi kuo koreliacijos koeficientas yra didesnis, tuo ryšys yra stipresnis. Dauguma prekyautojų tiki, kad jei porų koreliacijos koeficientas yra 1 arba labai artimas vienetui, tai tikėtina, kad poros judės kartu dar daugelį dienų ir tikrai iš jų uždirbsime.[Cha09] Koreliacijos koeficientą nesunkiai galima apskaičiuoti panaudojant Exel funkciją CORREL.

Kuri aprašoma taip:

$$\text{Correl}(X, Y) = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 \sum (y - \bar{y})^2}}$$

,kur $\bar{x}$ ir $\bar{y}$ yra imties vidurkiai.

	Coca-cola	Pepsi	Walmart	Target	Brent	West	Renault	Psa
	103,43	44,98	67,59	80,12	207,97	178,7	84,56	13,95
	102,96	44,8	66,87	79,5	206,33	177,59	84,44	14,06
	102,97	44,63	68,91	81,33	207,45	178,2	87,84	14,49
	102,63	44,68	69,42	83,29	209,35	180,25	88,71	14,08
	102,6	44,53	69,3	82,6	208,92	179,64	88,28	14,19
	102,8	44,71	69,47	82,6	208,61	179,54	88,07	14,03
	101,98	44,54	68,72	82,33	208,97	179,9	86,98	13,86
	100,99	43,66	68,47	82,75	208,97	179,7	88,3	14,1
	102,44	44,37	69,21	82,87	210,1	180,75	89,13	14,23
	104,32	46,6	69,77	83,98	209,9	180,32	90	14,3
	103,72	46,22	69,86	83,42	209,24	179,78	87,84	13,83
	103,77	46,1	69,06	82,6	207,78	178,68	87,38	13,62
	103,16	45,83	68,8	81,78	208,01	179,11	87,46	14,08
	104,12	46,04	69,15	81,56	208	178,92	86,01	14,06
	104,91	46,65	68,8	80,78	205,92	177,09	82,96	13,59
	104,3	46,44	67,4	79,77	204,02	175,44	82,56	13,6
	105,08	46,87	68,06	80,88	204,5	175,66	82,02	13,38
	103,6	46,36	68,22	81,57	203,95	175,29	82,1	13,12
	103,92	46,71	69,04	82,17	206,42	177,04	80,5	13,44
	103,1	46,53	68,64	82,1	204,19	175,82	81,84	13,72
	103,82	46,89	69,1	82,3	206,25	177,12	86,25	14,67
koeficientas	0,8725319		0,88807		0,994465		0,722744	

1 lentelė. Koreliacijos koeficiento skaičiavimas

1.6. Akcijų poros pasirinkimas

Paanalizavusi keturias akcijų poras nusprendžiau pasirinkti naftos akcijas, nes iš grafiko galima matyti, kad šios akcijos yra kointegruotos tarpusavyje ir kadangi koreliacijos koeficientas (1 lentelė) yra beveik 1, tai ryšys labai stiprus. Tuo tarpu kitos poros, kaip matome, neturi tokio stipraus ryšio. Kad jos yra kointegruotos yra tik 80-90% tikimybė, ką mums ir parodo koreliacijos koeficientas.[Cha09] Prekiauti jomis būtų neverta.

2. Strategijos rašymas

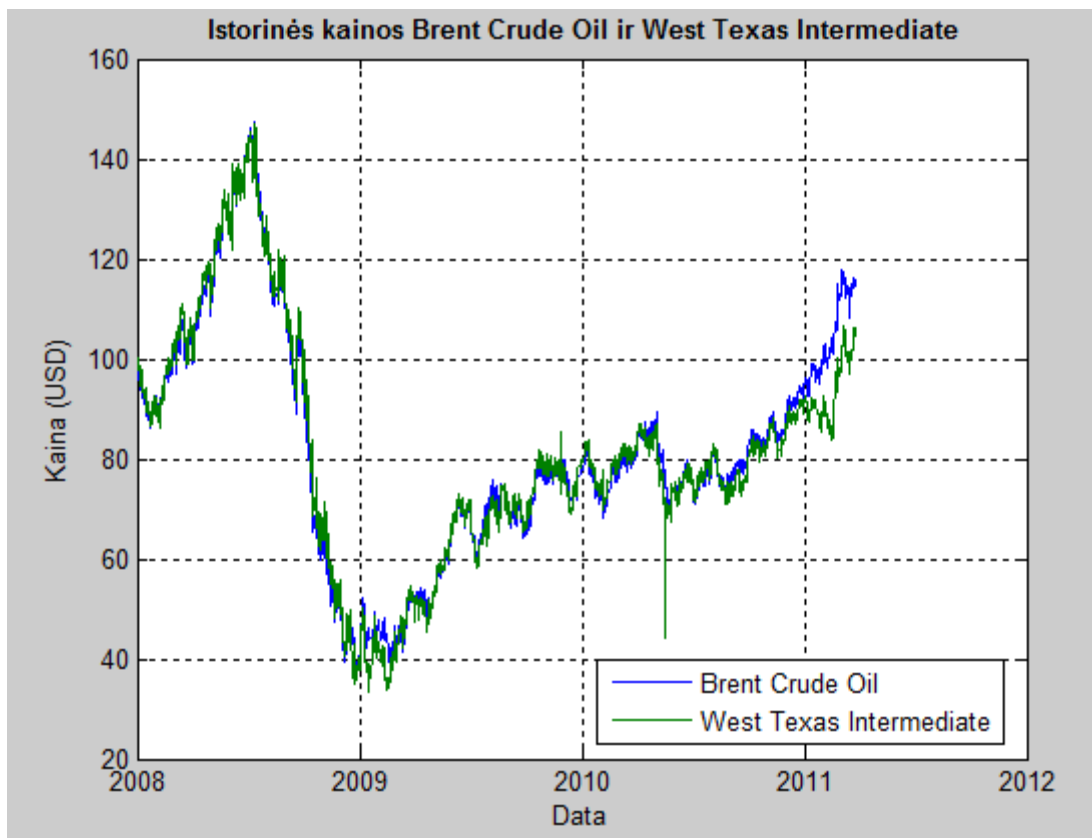
Nusprendžiau imti naftos akcijas, t.y. „West Texas Intermediate” ir „Brent Crude Oil” ir joms suprogramuoti strategiją, kad galėtume jomis prekiauti ir uždirbti. Strategijos rašymui naudosisi MATLAB programavimo kalbą ir Econometrix Toolbox įrankį, kuris palengvins mums darbą, galėsime tirti kointegraciją ir analizuoti akcijas.

2.1. Duomenų apdorojimas

Iš pradžių mums reikalingi istoriniai akcijų duomenys. Juos atsisiunčiau iš MATLAB duomenų bazės, kad būtų lengviau iš Microsoft Access formato konvertavau į Microsoft Excel formatą abiejų akcijų duomenis ir naudodama *xlsread* funkciją galiu toliau lengvai dirbti su duomenimis. [Cha09]

Dar vienas pastebėjimas, kadangi šių akcijų istorines kainas nėra taip lengva gauti, kai kur galima už tam tikrą mokestį nusipirkti, tai aš naudosisi keturių metų senumo istorinius duomenis, bet kadangi tai pavyzdinė strategija tai tokie duomenys bus tinkami.

Nusibraižysiu akcijų grafiką ir paanalizuosiu (9 pav.). Kaip matome iš grafiko iki 2011 metų „Brent Crude Oil” ir „West Texas Intermediate” akcijomis buvo galima be vargo prekiauti ir uždirbti, bet nuo 2011 metų panašu, kad šios strategijos mes taikyti nebegalėtume. Bet taip nėra, mes galime savo modelį modifikuoti, rasdami tam tikras reikšmes ir prekiaudami dienos akcijomis ir mes taip pat galime iš jų pasipeldyti. [Cha13]

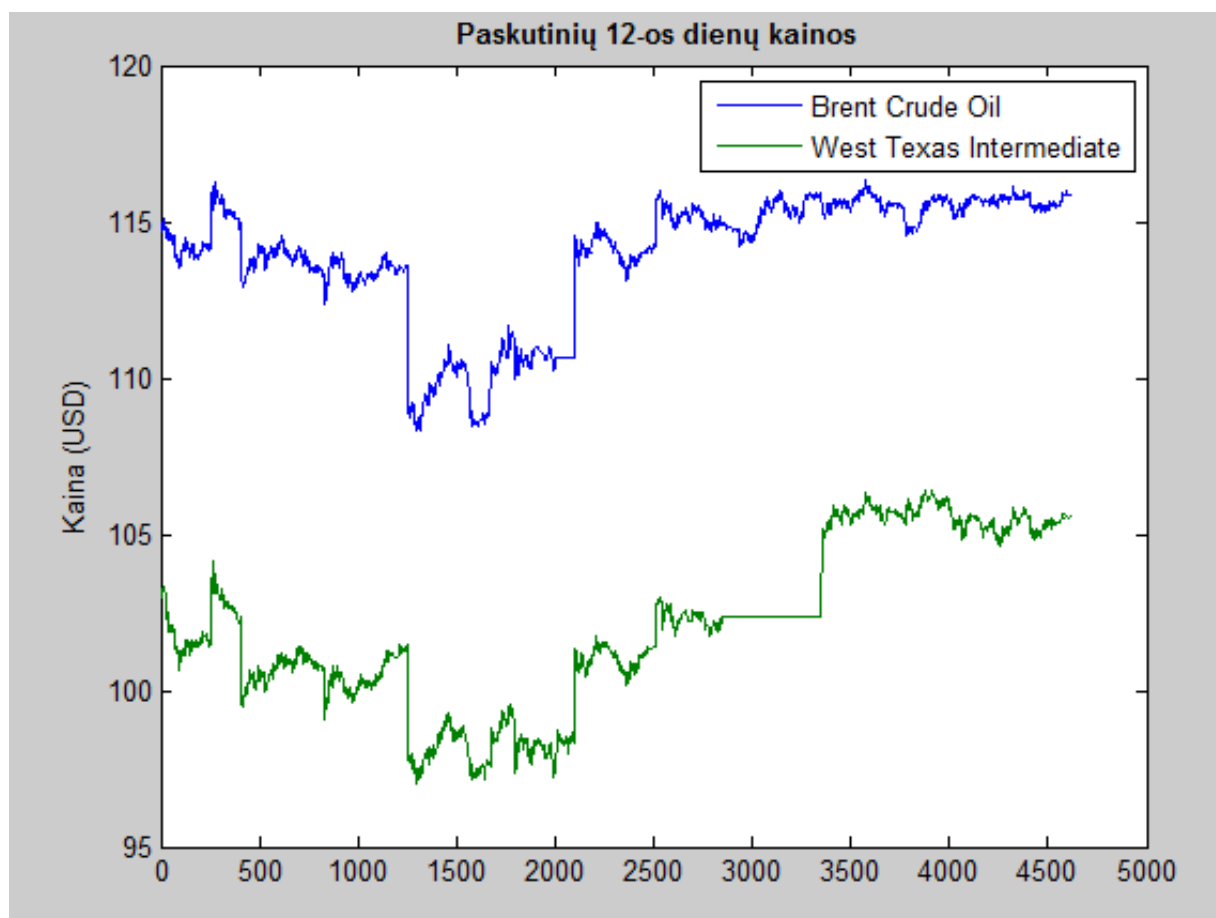


9 pav. Istorinių kainų grafikas

Susikoncentruokime į turimų duomenų paskutines dvylika dienų:

```
laikoEilutes = [Brent(end-4620+1 : end, 4) West(end-4620+1 :
end, 4)];
plot(laikoEilutes)
legend('Brent Crude Oil','West Texas Intermediate');
title('{\bf Paskutinių 12-os dienų kainos}');
ylabel('Kaina (USD)');
```

Gauname paskutinių dvylikos dienų grafiką (10 pav.). Kai išsididinome grafiką galime aiškiai matyti, kad eilutės tam tikruose intervaluose juda tikrai taip pat, toliau rašant strategiją mes būtent ir susikoncentruosime į tas vietas, kur pavyzdžiui intervalas yra nuo 1300 iki 1700 ir panašiai.



10 pav. Paskutinių 12-os dienų kainos

2.2. Tikrinimas ar egzistuoja kointegracija

Kai jau nusibraižėme laiko eilučių grafikus galime pritaikyti mano kursiniame projektiniame darbe aprašytą algoritmą, kuris patikrina ar eilutėms egzistuoja kointegracija. Algoritmas, kurį pritaikysiu, tai bus Engle-Granger algoritmas, kuris atrodo taip: $Y(:, 1) = Y(:, 2 : \text{end}) * b + X * a + e$ ir gavus likutinę vertę e , jai pritaikomas vienetinės šaknies testas. [Rin16]

Taip pat savo kursiniame projektiniame darbe buvau minėjusi, kad šis testas ne visada parodo gerus rezultatus, nes visada yra imamas vienintelis santykis ir iš jo nusprendžiama ar egzistuoja kointegracija. [Rin16] Pabandykime panaudoti šį algoritmą ir pažiūrėti kokius gauname rezultatus. Iš pradžių šį testą panaudosiu visiems turimiems mūsų istoriniams duomenims:

```
egcitest([Brent West])
```

Ir atsakymas $ans = 1$. Kointegracija egzistuoja, o dabar pabandykime pažiūrėti, ką šis algoritmas pasakys apie paskutines dvylika dienų, kurios kaip matome iš grafiko (10 pav.) yra gan nutolusios viena nuo kitos, bet turi vis kažkurioje vietoje kointegraciją, tai yra bendrą judėjimą.

```
[h] = egcitest(laikoEilutes);
display(h);
```

Na ir rezultatas $h = 0$, kuris sako, kad kointegracija tarp šių akcijų porų neegzistuoja, nors žvelgdami į grafiką (10 pav.) puikiai matome, kad mažesniuose plotuose, pavyzdžiui kur x ašies skalė yra nuo 0 iki 2500 kointegracija tikrai egzistuoja, mes galime paimti dar mažesnę skalę, sakykime nuo 1700 iki 2000 ir pažiūrėkime ką dabar gausime:

```
[h, ~, ~, ~, reg1] = egcitest(laikoEilutes(1700:2000, :));
display(h)
```

Ir dabar gavome $h = 1$ vadinasi kointegracija visgi egzistuoja, nors antras rezultatas mums to neparodė. Kintamasis *reg1* mums parodo pilną informaciją, kurią apskaičiavo mūsų naudojamas Engle-Grange algoritmas, tokią kaip kointegravimo regresijos koeficientus, liekanas, standartines klaidų liekanas ir visą naudingą informaciją, kurią galima panaudoti konstruojant kokią nors kitą prekybos strategiją.

Norėdami pamatyti kointegravimo regresijos koeficientus, būtent mūsų konstruojamai strategijai tiesiog įvedame taip:

```
reg1.coeff
```

Ir mūsų atsakymas yra $ans = 69.4561 \ 0.4196$

Kitų algoritmų kointegracijai tirti nebetaikysiu, nes mes jau nusibraižėme laiko eilučių grafikus iš kurių galėjome pamatyti ar jos juda viena linkme, taip pat apskaičiavome koreliacijos koeficiento reikšmę bei pritaikėme Engle-Granger algoritmą. To tikrai pakanka ir galime sutelkti dėmesį į strategiją.

2.3. Porų prekybos strategija

Dabar sukonstruosiu porų prekybos strategiją. Ši strategija mums parodys, kiek mes uždirbsime, jei prekiausime „West Texas Intermediate“ ir „Brent Crude Oil“ akcijomis. Noriu pabrėžti, kad strategija bus konstruojama dienų minutiniams duomenims.

```
if ~exist('skale','var')
    skate = 1;
end
```

```

if ~exist('kaina','var')
    kaina = 0;
end

if ~exist('plitimas','var')
    plitimas = 1;
end

if nargin == 1
    % numatytos reikšmės
    M = 420;
    N = 60;
elseif nargin == 2
    error('POROS:NeraNustatytasSubalansuotasLaikotarpis',...
        'Turi būti apibrėžtas subalansuotas laikotarpis M ir N reikšmės')
end

```

Labai dažnai poros būna kointegruotos arba nekointegruotos ir išmetami papildomi įspėjimai, bet šie įspėjimai labiau yra svarbūs vedant tam tikras statistikas, o man to nereikia, tai tiesiog galima pasinaudojus MATLAB komanda `off`, juos tiesiog išjungti.

```

warning('off', 'econ:egcitest:LeftTailStatTooSmall')
warning('off', 'econ:egcitest:LeftTailStatTooBig')

```

Toliau konstruojame strategiją tokiu būdu: visiems $N = 60$ laikotarpiams naudojame ankstesnių $M = 420$ laikotarpių vertės informaciją, kad galėtume įvertinti kointegravimo santykius (jei tik jie egzistuoja).

Tada mes naudojame šį apskaičiuotą santykį, nustatyti prekybos galimybėms iki kito balansavimo dienos.

Apsirašome ciklą, vėl skaičiuojame kiekvienam balansuojamam laikotarpiui Engle-Granger algoritmu ar egzistuoja kointegracija:

```

s = zeros(size(poros));
indicate = zeros(length(poros),1);

```

```
for i = max(M,N) : N : length(s)-N
    [h,~,~,~,reg1] = egctest(poros(i-M+1:i, :))
```

Na ir galiausiai jei h reikšmė nėra lygi 0 mes prekiaujame. O jei ji lygi nuliui tie rezultatai atmetami, nes jie mums nereikalingi prekyboje.

Strategijos žingsniai:

1. Apskaičiuojame liekanas paskutinių N

```
res = poros(i:i+N-1, 1) ...
      - (reg1.coeff(1) + reg1.coeff(2).*poros(i:i+N-
1, 2));
```

2. Jei liekana yra didelė ir teigiama, tai tikėtina, kad pirmoji akcija mažės, o antroji didės, jei liekana didelė ir neigiama, vadinasi pirmoji akcija didės, o antroji mažės. Taigi jei liekana didelė ir teigiama mums reikia pirmąją akciją parduoti, jai nustatyti *short* poziciją, o antrąją akciją pirkti – nustatyti *long* poziciją. Jei liekana yra didelė ir neigiama mums reikia pirmąją akciją pirkti – *long* pozicija, o antrąją parduoti – *short* pozicija.

```
indicate(i:i+N-1) = res/reg1.RMSE;

s(i:i+N-1, 2) = (res/reg1.RMSE > plitimas) ...
               - (res/reg1.RMSE < -plitimas);
s(i:i+N-1, 1) = -reg1.coeff(2) .* s(i:i+N-1, 2);
```

2.4. Porų prekybos rezultatai

Kad galėtume pamatyti, kaip gi sekėsi prekiauti ir kiek uždirbome nubraižysiu grafikus iš kurių matysime prekybos rezultatus.

Taigi apskaičiuokime našumo statistiką. Našumo statistikai priklauso tokie kintamieji, kaip šarpo rodiklis (*angl. sharpe*), indikatorius, ir pinigine grąža. Šarpo rodiklis – parodo papildomos investavimo grąžos dydį, tenkantį vienam rizikos (standartinio nuokrypio) vienetui. Teigiamas šarpo rodiklis rodo fondo sugebėjimą generuoti didesnę grąžą nei siūlo nerizikingos investicijos. Kai šarpo rodiklis yra aukščiau vieneto – fondo valdytojui pavyko sugeneruoti už prisiimtą riziką didesnę grąžą, kai žemiau vieneto – nepavyko.[Web16] Indikatorius – parodo kiek buvo nupirkta

vienos akcijos ir kiek parduota kitos. Ir grąža tiesiog atvaizduoja, kiek gi mes uždirbome iš šios strategijos.

```
r = sum([0 0; s(1:end-1, :) .* diff(poros) -
abs(diff(s))*kaina/2] ,2);
sh = skale*sarpo(r,0);
```

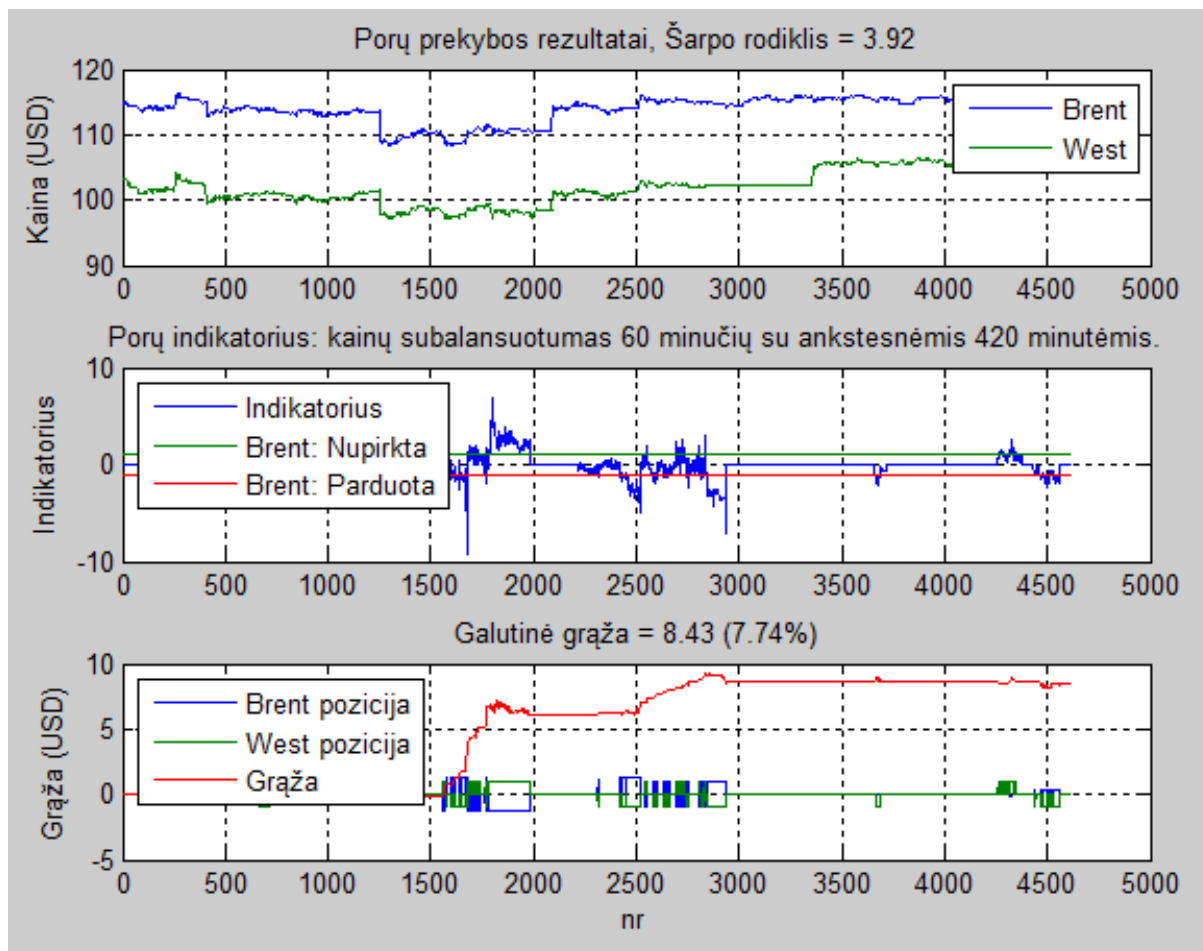
Na ir galiausiai liko mums viską atvaizduoti grafiškai, visus tris svarbiausius kintamuosius aprašome taip: šarpo rodiklis – ax(1), indikatorius – ax(2), grąža – ax(3).

```
ax(1) = subplot(3,1,1);
plot(poros), grid on
legend('Brent','West')
title(['Porų prekybos rezultatai, Šarpo rodiklis = ',num2str(sh,3)])
ylabel('Kaina (USD)')

ax(2) = subplot(3,1,2);
plot([indicate,plitimas*ones(size(indicate)),-
plitimas*ones(size(indicate))])
grid on
legend(['Indikatorius'],'Brent: Nupirkta','Brent:
Parduota',...
'Location','NorthWest')
title(['Porų indikatorius: kainų subalansuotumas '
num2str(N)...
' minučių su ankstesnėmis ' num2str(M) '
minutėmis.'])
ylabel('Indikatorius')

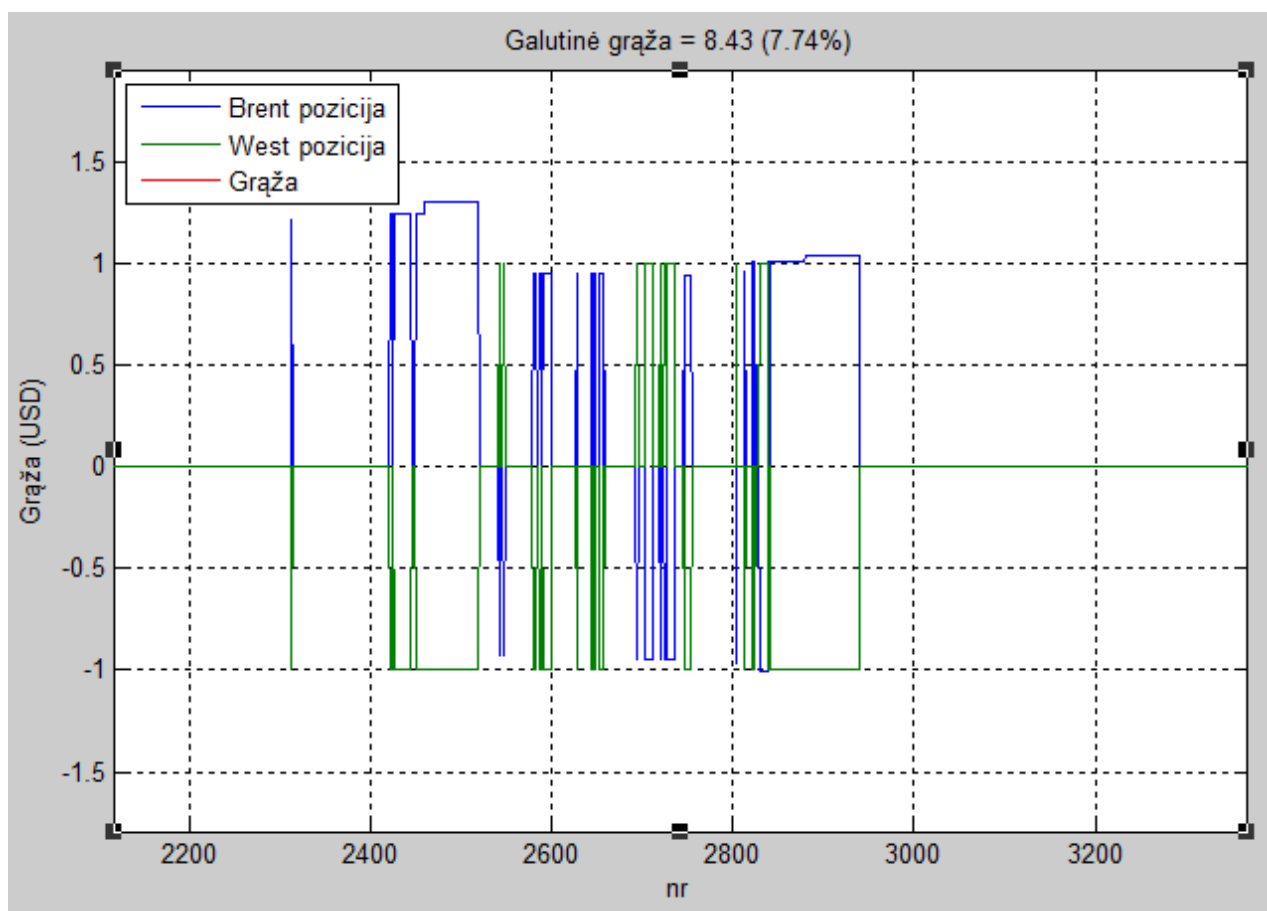
ax(3) = subplot(3,1,3);
plot([s,cumsum(r)]), grid on
legend('Brent pozicija','West pozicija','Graża',...
'Location','NorthWest')
title(['Galutinė grąža = ',num2str(sum(r),3), '
(',num2str(sum(r)/mean(poros(1,:))*100,3), '%) '])
ylabel('Graża (USD)')
xlabel('nr')
linkaxes(ax,'x')
```

Na ir gauname štai tokius grafikus (11 pav).



11 pav. Porų prekybos rezultatai

Kaip matome šarpo rodiklis yra 3,92, vadinasi jis yra teigiamas bei didesnis už vienetą ir rodo, kad gauname didesnę grąžą nei prekiautume nerizikingomis investicijomis. Indikatoriaus grafike žalia linija žymi kiek mes akcijų nupirkome, raudona – kiek pardavėme, nuperkame visas, kurios yra virš žalios linijos, o parduodame visas akcijas, kur indikatoriaus linija žemyn kerta raudoną liniją. Grąžos grafike matome kur buvo „Brent Crude Oil“ ir „West Texas Intermediate“ pozicijos. Jei virš nulio vadinasi pirkome, jei mažiau nei nulis pardavėme, o jei lygu nuliui vadinasi nieko nedarėme, nes būtume neuždirbę. Taip pat matome kokia mūsų galutinė grąža, t.y. 8,43 \$. Vadinasi tiek mes uždirbome. Kad geriau matytųsi padidinsiu grąžos grafiką ir pažiūrėkime kaip gi prekiauvome šiomis akcijomis (12 pav.). Na ir pažvelgę matome, kada buvo nupirktos ar parduotos „Brent Crude Oil“ ar „West Texas Intermediate“ akcijos.



12 pav. Padidintas akcijų pozicijų grafikas

2.5. Automatinis geriausių parametrų radimas

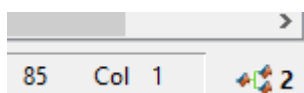
Su MATLAB programavimo kalba mes galime pasinaudoti `matlabpool` sąkinio, kuris leidžia naudoti kelis procesorius. [Web16b] Koks maksimalus kiekis procesorių bus naudojamas priklauso nuo kompiuterio. Mano atveju bus naudojami 2 procesoriai kurie dirbs nepriklausomai vienas nuo kito. Ši funkcija mums leis optimizuoti mūsų strategiją ir mes rasime geriausius parametrus M ir N , kuriuos jau aprašiau savo strategijoje.

Naudodamiesi jau aprašyta strategija, turimais duomenimis mes nustatysime ir patikrinsime geriausias kombinacijas, kurias naudodami mes gausime didžiausią grąžą naudodamiesi aprašyta prekybos strategija.

Su šia komanda iškviečiame *matlabpool*:

```
if matlabpool('size') == 0
    matlabpool local
end
```

Kaip jau minėjau mano atveju naudojamos taip vadinamos dvi MATLAB laboratorijos, kurios atlieka skirtingus skaičiavimus. Laboratorių skaičius priklauso nuo kompiuterio galingumo, jei kompiuterio procesorius būtų labai lėtas ir senas, manau negalėčiau šios funkcijos pritaikyti savo kodui. Kadangi mano procesorius yra dviejų branduolių, tai gali vienu metu apdoroti dvigubą informaciją. Norėdami sužinoti kiek pas jus laboratorių yra aktyvių galite pamatyti baigus kompiliuoti konsolėje išmetamame pranešime arba galite matyti MATLAB programos dešinėje pusėje apačioje (13 pav.).



13 pav. Aktyvios dvi laboratorijos

Apsibrėžiame kintamųjų režius, kurie bus naudojami rasti tinkamiausią prekybos tarpsnį, tai yra kokios minutės yra tinkamiausios mūsų strategijai. Taip pat apsirašome kitus mums reikalingus parametrus, kurie bus reikalingi.

```
paramM = 120:60:420;
paramN  = 10:10:60;
reziai = {paramM, paramN};

skale2 = sqrt(250*7*60);
kaina = 0.01;
```

Tada krepiamės į funkciją, kuri surenka visus mums reikalingus duomenis, tai yra visas akcijų kainas, kurios mums bus reikalingos apskaičiuojant geriausią šarpo rodiklį, pagal kurį ir bus rasti geriausi parametrai. Panaudodami tokį simbolį - @, galime nebekurti naujo funkcijos failo ir daug greičiau perduoti reikalingus gautus duomenis kitai funkcijai šiuo atveju funkcijai p2.

Kreipinys į funkciją:

```
p2 = @(x) poros2(x, laikoEilutes, skale2, kaina);
```

Ir apdorojami reikalingi duomenys:

```

[eilute,stulpelis] = size(x);
sh = zeros(eilute,1);
x = round(x);

if ~exist('skale','var')
    skate = 1;
end
if ~exist('kaina','var')
    kaina = 0;
end

parfor i = 1:eilute
    if stulpelis == 2
        [~,~,sh(i)] = strategija(duomenys, x(i,1), x(i,2),
1, skate,kaina);
    else
        [~,~,sh(i)] = strategija(duomenys, x(i,1), x(i,2),
x(i,3), skate,kaina);
    end
end
end

```

Jau turime viską, ko mums reikia ir belieka kreptis į kitą funkciją, kuri apskaičiuos geriausius kintamųjų M ir N reikšmes, kuriuos naudodami gausime didžiausią grąžą iš savo strategijos.

Pasinaudosime funkcijomis tic/toc, kad sužinotume per kiek laiko kompiuteris ras geriausius parametrus.

Ir kreipsimės į funkciją, kuri mums grąžins parametrus M ir N.

```

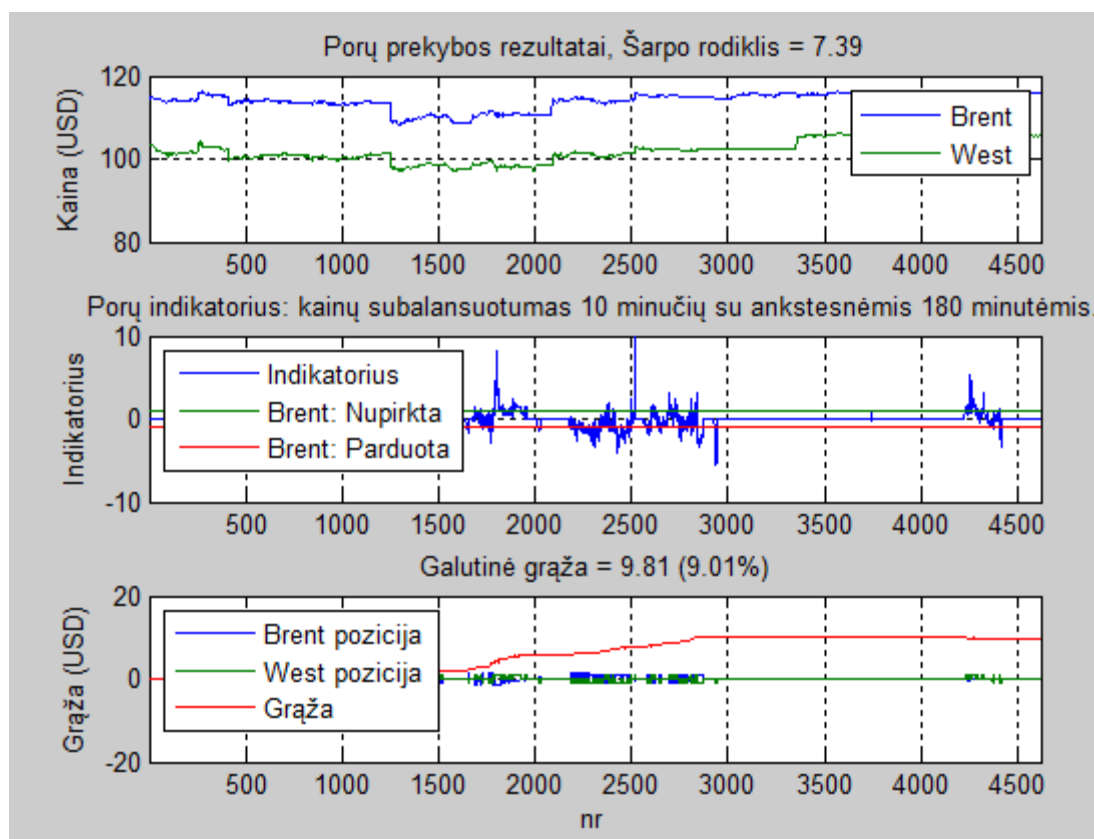
tic
[~,param] = geriausiParametrai(p2,reziai);
toc

```

Mano kompiuteris rado geriausius parametrus per 120.625149 sekundžių, apytiksliai per 2 minutes, belieka tik sužinoti, kokie gi tie geriausi parametrai yra.

2.6. Porų prekybos rezultatai, radus geriausius parametrus

Norėdama sužinoti reikšmes M ir N aš pasinaudosiu anksčiau apsirašyta funkcija *strategija*, kuri atspausdina šarpo rodiklį, indikatorių ir gaunama grąžą (14 pav.).



14 pav. Porų prekybos rezultatai su rasta geriausiais parametrais

Kaip matome šarpo rodiklis pakilo nuo 3,92 iki 7,39. Vadinasi tikrai pagerinome savo prekybos rezultatus, kuo šarpo rodiklis didesnis tuo didesnė gaunama grąža. Grąža kaip matome padidėjo nuo 7,74% iki 9,01 %. Vadinasi padidėjo mūsų gaunamos pajamos 1,27%. Na ir rasti geriausi parametrai yra tokie $M = 180$ minučių ir $N = 10$ minučių.

3. Porų prekybos privalumai ir trūkumai

Kaip žinome daugelis dalykų turi privalumus ir trūkumus. Tas pats galioje ir prekyboje, kiekviena strategija turi savų plusų ir minusų, taigi išskyriau juos žemiau.

3.1. Privalumai

- **Kontroliuojama rizika**

Svarbiausia porų prekyboje yra *long* pozicijos susiejimas su *short* pozicija dviejų kointegruotų akcijų. Taip tarsi sukuriamą apsaugą kai viena akcija išeidama iš prekybos veikia kaip apsauga kitos akcijos atžvilgiu. Tokiu būdu rizika yra šiek tiek kontroliuojama. Pavyzdžiui, prekybininkas prekiauja poromis, A akcija yra *long* pozicijoje, o B - *short* pozicijoje ir sakykime abiejų akcijų kainos staigiai krenta. Taigi patirti nuostoliai su A

akcija, kuri buvo *long* pozicijoje yra sušvelninami su B akcija, kuri buvo *short* pozicijoje. [Fol13]

- **Pelnas yra nepriklausomas nuo rinkos krypties**

Kitas patrauklus porų prekybos bruožas yra galimybė pasipelnyti iš rinkos ar ji kyla, ar ji krinta ar tiesiog yra stabili. Taip yra todėl, nes ši strategija yra nepriklausoma nuo rinkos, o tik turi ryšį tarp dviejų akcijų, kurioms aktualios ir *long* ir *short* pozicijos. Kad būtų aiškiau strategijos kurios paremtos tik *long* pozicijomis uždirba iš rinkos kilimo, o strategijos, kurios yra orientuotos tik į *short* pozicijas uždirba iš rinkos kritimo. [Vid04]

- **Nėra kryptinės rizikos**

Kryptinė rizika apima sąlytį su kainų pokyčiais. Pavyzdžiui *long* pozicija susiduria su rizika, kad kainos judės žemyn. Porų prekyboje antras elementas veikia kaip apsauga nuo pirmojo, tokiu būdu panaikinant krypties riziką. Nes pelnas priklauso nuo kainų pokyčio tarp dviejų akcijų, o ne nuo to kuria kryptimi kiekvienas juda. Krypties rizika yra pašalinta. [Fol13]

- **Mažesni grynųjų lėšų išmokėjimai**

Pavyzdžiui jei prekyba pasiekia nerealizuojamas pelnas 10,000 \$ per vieną dieną, o kitą dieną sumažėjo 6,000 \$, tai vadinasi bus išmokama 4,000 \$. Pinigų valdymas yra labai svarbus, nes visada yra rizika, kad jie bus prarasti. Strategija paremta pelno gavimu (remiantis istorine duomenų analize) ir nustato kiek pinigų turi skirti prekybininkas. Jei strategija turi didžiausią lėšų išmokėjimą, kuris yra 5,000 \$, tai mums reikia gauti mažiausiai 5,000 \$ įskaitant visus galimus nuostolius. Kadangi nuostoliai iš *short* pozicijos švelnina prieaugį iš laiminčios – *long* – pozicijos, porų prekyba paprastai apima mažesnius lėšų išmokėjimus. [Fol13]

3.2. Trūkumai

- **Prekyba reikalauja dvigubų komisinių mokesčių**

Tai yra turbūt akivaizdžiausias trūkumas, nes prekyboje reikalinga mokėti komisinius mokesčius, kai mes ateiname į prekybą ir kai iš jos išeiname. Komisiniai mokesčiai yra nustatomi atsižvelgiant į istorinius modelius, kurie parodo ar iš šios strategijos buvo daug ar mažai uždirbta. [Fol13]

- **Rizikos valdymas**

Taigi pasirodo ir rizikos valdymas, kurį aprašiau kaip privalumą, kai kuriose situacijose gali būti netgi trūkumas. Išplitimas gali sumažinti pelną. Nes mūsų uždėtis priklauso nuo išplitimo, kuo jis didesnis, tuo mes daugiau uždirbame. Išplitimas yra suma,

kur pardavimo kaina viršija rinkos kainą, arba kitaip sakant tai kainų skirtumas kur pirkėjas žada sumokėti ir pardavėjas nori gauti už tą akciją. Prekybos apimtis žymiai veikia išplitimą – akcijų prekyboje, kuriomis dažnai prekiaujama paprastai yra mažesnis išplitimas, pavyzdžiui prekiaujame dviem poromis X ir Y, X kaina yra 100\$, o Y – 105\$, taigi plitimas yra 5\$ per mažas, bet jei jis dėl duomenų klaidos tampa 6\$, t.y. Y – klaidingai tampa 106\$, taigi mes ruošiamės suklysti parduodami Y ir pirkdami X, o kuriomis retai prekiaujama – kainų skirtumas yra daug didesnis. [Cha13]

Išvados

Išnagrinėjau 4 akcijų poras, kurios literatūroje yra naudojamos kaip kointegruotų porų pavyzdžiai, bet tik viena pora tiko prekybai, tad galiu daryti išvadą, kad visada reikia patiems praktiškai įsitikinti, kad akcijos yra tikrai tinkamos prekiauti. Literatūroje dažnai pateikiamos tokios akcijų poros, kur tikimybė, kad jos yra kointegruotos yra 80-90%. Remdamasi savo darbe išdėstyta medžiaga, galiu išskirti 3 esminius žingsnius, kurie yra būtini norint identifikuoti kointegruotas akcijų poras:

1. Randame poras, kurios yra susijusios, tai dažniausiai yra ta pačia produkcija prekiaujančios įmonės.
2. Nusibraižome tų porų grafikus, naudodamiesi istoriniais akcijų duomenimis ir žiūrime ar poros turi tendenciją judėti kartu.
3. Apskaičiuojame koreliacijos koeficientą. Kai koreliacijos koeficientas yra lygus 1 arba mano atveju 0,99 vadinasi radome tinkamas poras ir galime jas rinktis savo prekybai.

Savo darbo antrame skyrelyje aprašiau prekybos strategiją, kuri sėkmingai veikia ir yra gaunamas pelnas. Optimizavusi strategiją, padidinau gaunamą pelną.

Darbo metu pasiekti rezultatai:

- Išanalizuotos ir palygintos keturios akcijų poros ir iš jų atrinkta tinkamiausia.
- Suprogramuota prekybos strategija.
- Optimizuota prekybos strategija, randant geriausius parametrus.
- Remiantis perskaityta literatūra suformuluoti esminiai porų prekybos privalumai ir trūkumai.

Ir galiausiai, rašydama šį darbą, skaitydama literatūrą, susipažinau su statistinio arbitražo principu, taikomu akcijų biržose, įskaitant arbitražas tarp žaliavų ir arbitražas tarp akcijų. Taip pat susipažinau su kointegracija bei kitais matematiniais laiko eilučių analizės metodais. Perpratau paralelinio skaičiavimo sistemą MATLAB aplinkoje: išmokau sukurti ir suprogramuoti prekybines sistemas, išmokau panaudoti skirtingus optimizavimo metodus.

Summary

Algorithmic trading using pairs training

Pairs trading is a market neutral trading strategy that matches long position with short position in a pair of highly correlated two stocks. This is when we buy a share A when its value is very low (long position) and sell a share B when its value is too high (short position).

Algorithmic trading – Is such a trade when we programmed trading strategy using algorithms and other calculations. The computer decides when to buy and when to sell. However, there are few serious problems which we have to solve.

The main problem is to find pairs which are suitable for make profit. I separated three basic steps that we have to carry out in search of the potential pairs. First of all, we have to find related stocks. Secondly, we have to plot the time series graph using historical data. Finally, we have to calculate the correlation coefficient. If the correlation coefficient is equal to one or approximately one, we have found right pairs.

In this thesis, I presented a pairs trading strategy. I used the matlabpool function and optimized the pairs trading strategy .Strategy has generated higher profit.

At the end I separated advantages and disadvantages of pairs trading. Advantages of pairs trading are: controlled risk, profit regardless of market direction, no directional risk, smaller drawdowns. Also, there are disadvantages of pairs trading such as twice the commissions and fees and the outcomes of execution risk.

Literatūros sąrašas

- [Vid04] G.Vidyamurthy, Pairs Trading: Quantitative Methods and Analysis, 2004
- [Rin16] Ž.Rinkevičiūtė, Kursinis projektinis darbas: Algoritminė prekyba naudojant „prekyba poromis“, 2016
- [Rin15] Ž.Rinkevičiūtė, Kursinis darbas: Algoritminė prekyba naudojant „prekyba poromis“, 2015
- [Cha09] E.P.Chan, Quantitative Trading: How to Build Your Own Algorithmic Trading Business, 2009
- [Cha13] E.P.Chan, Algorithmic Trading: Winning Strategies and Their Rationale, 2013
- [APS05] S.C.Andrade, V.di Pietro, M.S.Seasholes, Understanding the Profitability of Pairs Trading, 2005
- [Web16a] Investavimo žodynas, URL: <http://zodynas.vz.lt/sarpo-rodiklis>, 2016
- [Ven09] P.Venkataraman, Applied Optimization with MATLAB Programming, 2009
- [Web16b] URL: <http://se.mathworks.com>, 2016
- [Fol13] J.Folger, Guide to Pairs Trading, 2013
- [Wan09] J.Wang, Pairs Trading with Robust Correlation, 2009
- [Web16c] URL: <http://www.investopedia.com/>, 2016
- [Web16d] URL: <https://www.google.com/finance>, 2016
- [Qua12] G.Quant, Statistical Arbitrage – Correlation vs. Cointegration, 2012
- [Les99] James P. LeSage Applied Econometrics using MATLAB, 1999
- [Gor06] G. Gorter, Pairs Trading, 2006

Priedai

Priedas Nr.1 *poruPrekyba.m*

```

Brent = xlsread ('Brent.xlsx');
Brent = Brent(:,2:5);
West = xlsread ('West.xlsx');
West = West(:,2:5);

poruGrafikas(Brent, West);

laikoEilutes = [Brent(end-4620+1 : end, 4) West(end-4620+1 : end, 4)];
plot(laikoEilutes)
legend('Brent Crude Oil','West Texas Intermediate');
title('{\bf Paskutinių 12-os dienų kainos}');
ylabel('Kaina (USD)');

%% kointegracijos tyrimas
egcitest([Brent West])
[h] = egcitest(laikoEilutes);
%%
[h, ~, ~, ~, reg1] = egcitest(laikoEilutes(1700:2000, :));
display(h)
%%
display(reg1)
reg1.coeff

%% porų prekybos funkcijos iškvietimas
strategija(laikoEilutes, 420, 60)

%% strategijos optimizavimas
if matlabpool('size') == 0
    matlabpool local
end

paramM = 120:60:420;
paramN = 10:10:60;
reziai = {paramM, paramN};

skale2 = sqrt(250*7*60);
kaina = 0.01;

p2 = @(x) poros2(x, laikoEilutes, skale2, kaina);

tic
[~,param] = geriausiParametrai(p2,reziai);
toc

strategija(laikoEilutes, param(1), param(2), 1, skale2, kaina)

```

Priedas Nr.2 *poruGrafikas.m*

```
function poruGrafikas(Brent, West)

plot(Brent(:,1), Brent(:,4), West(:,1), West(:,4))

datetick('x')
grid on
xlabel('Data')
ylabel('Kaina (USD)')
title('{\bf Istorinės kainos Brent Crude Oil ir West Texas Intermediate}')
legend('Brent Crude Oil', 'West Texas Intermediate', 'Location', 'best');
```

Priedas Nr.3 *strategija.m*

```
function varargout = strategija(poros, M, N, plitimas, skale, kaina)

if ~exist('skale','var')
    skale = 1;
end

if ~exist('kaina','var')
    kaina = 0;
end

if ~exist('plitimas', 'var')
    plitimas = 1;
end

if nargin == 1
    % numatytos reikšmės
    M = 420;
    N = 60;
elseif nargin == 2
    error('POROS:NeraNustatytasSubalansuotasLaikotarpis',...
        'Turi būti apibrėžtas subalansuotas laikotarpis M ir N reikšmės')
end
warning('off', 'econ:egcitest:LeftTailStatTooSmall')
warning('off', 'econ:egcitest:LeftTailStatTooBig')

%
s = zeros(size(poros));
reiksme = zeros(length(poros),1);

for i = max(M,N) : N : length(s)-N
    [h,~,~,~,regl] = egcitest(poros(i-M+1:i, :));
    if h ~= 0
        res = poros(i:i+N-1, 1)...
            - (regl.coeff(1) + regl.coeff(2).*poros(i:i+N-1, 2));
        reiksme(i:i+N-1) = res/regl.RMSE;

        s(i:i+N-1, 2) = (res/regl.RMSE > plitimas) ...
            - (res/regl.RMSE < -plitimas);
        s(i:i+N-1, 1) = -regl.coeff(2) .* s(i:i+N-1, 2);
    end
end
```

```

%% apskaiciuojam ir spausdinam prekybos rezultatus

r = sum([0 0; s(1:end-1, :) .* diff(poros) - abs(diff(s))*kaina/2]
,2);
sh = skale*sarpo(r,0)*100;

if nargout == 0
    ax(1) = subplot(3,1,1);
    plot(poros), grid on
    legend('Brent','West')
    title(['Porų prekybos rezultatai, Šarpo rodiklis = ',num2str(sh,3)])
    ylabel('Kaina (USD)')

    ax(2) = subplot(3,1,2);
    plot([reiksme,plitimas*ones(size(reiksme)), -
plitimas*ones(size(reiksme))])
    grid on
    legend(['Indikatorius'],'Brent: Nupirkta','Brent: Parduota',...
'Location','NorthWest')
    title(['Porų indikatorius: kainų subalansuotumas ' num2str(N)...
' minučių su ankstesnėmis ' num2str(M) ' minutėmis.'])
    ylabel('Indikatorius')

    ax(3) = subplot(3,1,3);
    plot([s,cumsum(r)]), grid on
    legend('Brent pozicija','West's pozicija','Graža',...
'Location','NorthWest')
    title(['Galutinė graža = ',num2str(sum(r),3), ' ',
',num2str(sum(r)/mean(poros(1,:))*100,3), '%')])
    ylabel('Graža (USD)')
    xlabel('nr')
    linkaxes(ax,'x')

else
    %% grazinamos reikšmes
    for i = 1:nargout
        switch i
            case 1
                varargout{1} = s; % signalas
            case 2
                varargout{2} = r; % return (pnl)
            case 3
                varargout{3} = sh; % sarpo rodiklis
            case 4
                varargout{4} = reiksme; % indikatorius
            otherwise

                warning('POROS:IsvedamiKintamieji',...
'Per daug isvedamu kintamuju');

        end
    end
end
end

```

Priedas Nr.4 *poros2.m*

```
function sh = poros2(x,duomenys,skale,kaina)

[eilute,stulpelis] = size(x);
sh = zeros(eilute,1);
x = round(x);

if ~exist('skale','var')
    skate = 1;
end
if ~exist('kaina','var')
    kaina = 0;
end

parfor i = 1:eilute
    if stulpelis == 2
        [~,~,sh(i)] = strategija(duomenys, x(i,1), x(i,2), 1,
skale,kaina);
    else
        [~,~,sh(i)] = strategija(duomenys, x(i,1), x(i,2), x(i,3),
skale,kaina);
    end
end
```

Priedas Nr.5 *geriausiParametrai.m*

```
function [respmax,varmax,resp,var] = geriausiParametrai(fun,reziai)

if nargin ~= 0
    %% sukuriama israiska ndgrid
    N = length(reziai);
    if N == 1
        var = reziai;
    else
        var = cell(1,N);
        [var{:}] = ndgrid(reziai{:});
    end
    %% atmetami nereikalingi parametrai
    sz = size(var{1});
    for i = 1:N
        var{i} = var{i}(:);
    end
    resp = fun(cell2mat(var));
    %% randama maksimali reiksme
    [respmax,idx] = max(resp);
    for i = 1:N
        varmax(i) = var{i}(idx);
    end
    %% pertvarkoma produkcija
    if nargin > 2
        resp = reshape(resp,sz);
        for i = 1:N
            var{i} = reshape(var{i},sz);
        end
    end
else
    warning ('Nera parametru');
end
```