

Vilniaus universitetas  
Fizikos fakultetas  
Kvantinės elektronikos katedra

Dominykas Bričkus

**ŠILUMINIS LEŠIS CILINDRINIAME STRYPE SU TEMPERATŪRIŠKAI  
PRIKLAUSANČIAIS YAG KRISTALO PARAMETRAIS**

Magistrantūros studijų baigiamasis darbas

Lazerinė fizika ir optinės technologijos

Studentas

Dominykas Bričkus

Vadovas

prof. habil. dr. Aleksandr Dementjev

Recenzentas

doc. dr. Viačeslav Kudriašov

Katedros vedėjas

prof. habil. dr. Valdas Sirutkaitis

Vilnius 2016

## Turinys

1. ĮVADAS.....	3
2. ŠILUMINIAI EFEKTAI KIETOJO KŪNO LAZERIUOSE.....	4
3. INTEGRALINĖS IŠRAIŠKOS IR JŲ SKAITINIS MODELIAVIMAS.....	7
4. ŠILUMOS PERNEŠIMO LYGTIES SPRENDIMAS.....	10
4.1. Integralinė temperatūros išraiška.....	10
4.2. Temperatūros pasiskirstymo aproksimacija paraboliniam kaupinimui.....	12
4.3. Analitinės temperatūros pasiskirstymo išraiškos.....	14
5. TERMOOPTINIO IR FOTOELASTINIO EFEKTŲ TEORIJA.....	16
5.1. Termoelastinės lygtys.....	16
5.2. YAG kristalo elastingos sąvybės.....	19
5.3. Fotoelastinis efektas ir termooptinių koeficientų sąryšiai kubiniams kristalams.....	20
5.4. Plokščiųjų įtempių ir plokščiųjų deformacijų artiniai.....	24
5.5. Fotoelastinių koeficientų naudojimas.....	25
5.6. Apibendrinti termooptiniai koeficientai.....	29
6. APIE GALIMYBĘ PANAIKINTI ŠL SFERINĘ ABERACIJĄ.....	32
6.1. Šiluminio laidumo koeficiento įnešta aberacija.....	32
6.2. Šiluminio lęšio židinio apibrėžimas.....	33
6.3. Termooptinio ir šiluminio plėtimosi koeficientų temperatūrinės priklausomybės įtaka...	35
6.4. Bendros sferinės aberacijos panaikinimo galimybė.....	38
6.5. Sferinės aberacijos įtaka pluošto kokybei.....	41
7. IŠVADOS.....	44
8. NUORODOS.....	45
9. PADĖKA.....	51
10. SANTRAUKA.....	51
11. BIBLIOGRAFINIS APRAŠAS.....	52
12. ANOTACIJA.....	52

## 1. ĮVADAS

Lazeriniais diodais kaupinami kietojo kūno lazeriai (KKL) leidžia sugeneruoti aukštos vidutinės galios ir geros pluošto kokybės spinduliuotę [1]. Todėl tokie lazeriai pastaruoju metu vis plačiau naudojami ne tik fundamentiniuose ir taikomuosiuose tyrimuose, bet ir pramonėje bei medicinoje [2-4]. Tačiau dėl kvantinio defekto (energetinio skirtumo tarp kaupinimo ir lazerinių fotonų) lazerio kristalai neišvengiamai įkaista ir dėl susidariusių temperatūros gradientų, kurie savo ruožtu sukelia lūžio rodiklio pokyčius, atsiranda taip vadinamas šiluminis lęšis [5,6]. Šis lęšis paprastai turi dideles aberacijas. Šiluminių efektų (ŠE) sukeltos sferinės aberacijos (SA) kietojo kūno lazeriuose yra viena iš pagrindinių pluošto kokybės degradacijos aukštos galios lazerinėse sistemose priežasčių [7]. Dėl to intensyviai ieškoma būdų kaip sumažinti šiluminio lęšio (ŠL) optinę galią ir jo aberacijas bei pagerinti pluošto kokybę.

ŠE analizei skirtos specializuotos monografijos [8,9] ir apžvalgos [5,6]. Jiems skiriama daug dėmesio ir bendrojo pobūdžio lazeriams skirtose veikaluose [2,10-17], tame tarpe ir lazerio vadovėliuose studentams [18,19]. Tačiau, nemažai ŠL savybių dar lieka detaliam neišnagrinėtų arba jos yra nekorektiškai interpretuojamos. Visų pirma, tai liečia aktyviųjų elementų (AE) parametrų temperatūrinės priklausomybės nuoseklų įskaitymą, nes temperatūros pokyčiai AE tūryje siekia šimtus laipsnių. Antra, temperatūros gradientų sukelti įtempiai bei deformacijos yra labai sudėtingos, bendru atveju, reikalauja brangių komercinių programų jų paskaičiavimui. Todėl paprastai naudojamos taip vadinamos plokščiųjų deformacijų (PD) arba įtempių (PI) aproksimacijos. Deja, dažnai nepaisoma jų naudojamo sąlygų, vietoj išraiškų gaunamų PD atvejui naudojamos išraiškos PI atvejui, dėl ko ženkliai padidinamas paskaičiuojamas optinių kelių skirtumas (OKS). Trečia, fotoelastinis efektas (FE) keičia lūžio rodiklį veikiant kartu su termooptiniu efektu (TO). FE lūžio rodiklio pokyčiui apskaičiuoti galima naudoti indukuotus įtempius arba deformacijas, tik reikia tvarkingai naudoti atitinkamus AE termooptinius parametrus  $(\partial n / \partial T)_\sigma$  arba  $(\partial n / \partial T)_\epsilon$ . Sąryšis tarp jų mechaniškai izotropiniams kubiniams  $m3m$  simetrijos kristalams buvo surastas [20] darbe. Šis sąryšis bendrojo mechaninio ir optinio anizotropiškumo kubiniams kristalams nebuvo žinomas. Darbuose [14,21] buvo parodyta, kad SA galima panaikinti parenkant atitinkamą kaupinimo pluošto parabolinį skirstinį kai TO parametras nepriklauso nuo temperatūros. Deja, apibendrinimas [15] į atvejį, kai TO parametras priklausomas nuo temperatūros yra neteisingas. Be to, šiuose darbuose nebuvo įskaitomas FE bei AE sienelių išgaubtumo indeliai į sukeltą OKS.

Šio darbo tikslas yra nuosekliai teoriškai aprašyti termooptinį ir fotoelastinį efektus kubiniuose kristaluose įskaitant YAG kristalo šilumos laidumo, termooptinio ir šiluminio plėtimosi koeficientų temperatūrinės priklausomybės įtaką šiluminio lęšio optiniai galiai ir sferinei aberacijai nevienalyčiai kaupiname YAG aktyviajame elemente. Šiame darbe dalinai panaudoti pranešimų konferencijose [22-26] bei straipsnių [27-29] rezultatai.

## 2. ŠILUMINIAI EFEKTAI KIETOJO KŪNO LAZERIUOSE

Netolydus temperatūros pasiskirstymas AE kietojo kūno lazeriuose su optiniu kaupinimu sukelia šiluminius įtempius, deformacijas ir galinių sienelių išsipūtimą. Tada AE lūžio rodiklis keičiasi dėl jungtinio tiesinio termooptinio (TO) ir fotoelastinio (FE) efektų poveikio. Įvairūs šiluminių efektų aspektai KKL yra tyrinėti daugelyje monografijų ir apžvalgų [4-19]. Šiluminio lęšio (ŠL) problema buvo pirmiausia nagrinėta stiklo lazeriams [8,9,12,14,15,30], kai blykstinės lempos buvo naudojamos ilgų AE kaupinimui. Dėl to, plokščiųjų deformacijų (PD) artinys cilindriniam strypams [31] buvo taikomas šilumos sukeltų įtempių ir deformacijų aprašymui. Šiame artinyje plokščios galinės sienelės išlieka plokščios ašinės simetrijos kaupinimui. Lūžio rodiklio pokyčio nuo temperatūros aprašymui literatūroje dažnai minimas TO koeficientas  $\beta_\sigma = (\partial n / \partial T)_{\sigma=0}$ , dėl to, kad jis gali būti nesunkiai išmatuojamas naudojant laisvai besiplečiantį bandinį ties nuliniiais įtempiais [7,20]. Kitas TO koeficientas  $\beta_\epsilon = (\partial n / \partial T)_{\epsilon=0}$  ties nulinėmis deformacijomis yra naudojamas rečiau [6,7,20]. Deja, iš principo skirtingi TO koeficientai dažnai yra naudojami jų neatskiriant ir tiesiog užrašomi kaip  $dn/dT$  [8,10,12,14-19,30,32,33],  $\partial n / \partial T$  [11,13,34] arba  $\delta n / \delta T$  [35].

W.Koechner (žr. [10] ir nuorodas viduje) ir J.D.Foster su L.M.Osterink [36] buvo pirmieji sukūrę teorinį modelį šiluminiam lęšiui ir dvejojam lūžimui Nd:YAG kristale užaugintame pagal kristalografinę kryptį [111]. Mechanškai izotropinės YAG savybės leido naudoti PD artinį įtempių pasiskirstymams su bendru ašinės simetrijos temperatūros pasiskirstymu. Tačiau šis modelis buvo taikomas tik tolydžiam kaupinimui. Buvo parodyta, kad ties tolydžiu šiluminio cilindrinio AE apkrovimu su temperatūriškai nepriklausančiu šiluminio laidumo koeficientu yra gaunamas kvadratinės formos radialinis temperatūros pasiskirstymas, o skersinis įtempių ir deformacijų išsidėstymas yra taip pat kvadratinis. TO lūžio rodiklio pokyčio dalis buvo aprašoma naudojant koeficientą  $\beta_\sigma$  ir išvedant lūžio rodiklio FE dalies pokyčio išraiškas buvo panaudota tai, kad Nd:YAG yra kubinis simetrijos klasės  $m3m$  kristalas. Bedimensiniai FE koeficientai  $C_{r,\theta}$  (prieš parabolinius temperatūros narius) buvo įvesti [36] FE dalies aprašymui šilumos sukkelto lūžio rodiklio pokyčio aprašymui. Vėliau jie buvo priimti pirmame leidime Koechner'io monografijos [10] ir yra plačiai naudojami iki dabar, netgi leidiniuose studentams [18,19]. Reikia pažymėti, kad daug kam nežinomame straipsnyje [37] abi kryptys [001] ir [111] buvo aptartos strypo ir disko formos AE padarytiems iš YAG arba  $Al_2O_3$ . Rezultatai iš [37] vėliau buvo panaudoti monografijoje [8].

Panašiu metu buvo pradėti tyrinėjimai šiluminių efektų aukštos galios lazerių languose [38,39]. Plokščiųjų įtempių artinys buvo naudojamas optinių iškraipymų plonuose disko formos kristalo languose aprašymui neatsižvelgiant į mechaninę ar fotoelastinę anizotropiją. Apibendrintas parametras  $\chi = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3$  buvo įvestas [40] optinių iškraipymų languose apskaičiavimui, kur  $\chi_1 = dn/dT$  yra temperatūrinė lūžio rodiklio pokyčio išvestinė ties nuliniiais įtempiais,

$\chi_2 = (n_0 - 1)\alpha_T(1 + \nu)$  yra šiluminio plėtimosi (išsipūtimo) narys PĮ artinyje ir  $\chi_3$  yra elastooptinis narys ( $n_0$  yra pradinis lūžio rodiklis,  $\alpha_T$  yra tiesinio šiluminio plėtimosi koeficientas ir  $\nu$  yra Puasono Puasono santykis). Šis metodas buvo toliau vystomas C.A.Klein'o [41,42]. Kaip bus vėliau parodyta, išraiška pagal poliarizaciją suvidurkintai FE lūžio rodiklio pokyčio daliai, gauta iš [42], yra neteisinga ilgiems strypams.

Apibendrinti TO koeficientai  $\chi_{r,\theta}$  buvo pasiūlyti [43]. Šie koeficientai įtraukė TO koeficientą  $dn/dT$ , išsipūtimo narį  $\chi_2$  ir lūžio rodiklio pokyčio PE dalį išreikštą per  $C_{r,\theta}$  su nuorodą į monografiją [10]. Įvairūs netikslumai buvo padaryti pradiniam pasiūlyme. Buvo teisingai nurodyta apžvalginiam straipsnyje [6], kad FE “konstantos”  $C_{r,\theta}$  yra skirtingos, kai naudojami PD ar PĮ artiniai. Tačiau, taip pat buvo teigiama, kad “W. Koechner published incorrect values of these coefficients in his reference book [10] because the temperature term in the Hook law has been omitted.” Nepaisant šių pastabų, koeficientai  $C_{r,\theta}$  ir  $\chi_{r,\theta}$  buvo toliau naudojami senoje formoje (žr. [17,19,30,32-34]. Tai gali būti dėl susidariusio įspūdžio iš plačiai cituojamų Cousins et al. darbų [43,44], kad per galus kaupinamiems AE reikia būtinai taikyti PĮ artinį su apibendrintais TO koeficientais  $\chi_{r,\theta}$ , įtraukiančiais išsipūtimo narį  $\chi_2$  ir nepatikslintus  $\partial n / \partial T$  ir  $C_{r,\theta}$ . Pagrindinis tikslas naujo straipsnio [45] buvo patikrinti analitines išraiškas gautas iš Koechner ir Foster su Osterink modelių naudojant baigtinių elementų metodus. Šiame straipsnyje buvo padaryta išvada: “that the Koechner and Foster&Osterink treatments are correct, and that Chenais et al. [6] made mistakes in their derivation of the thermally-induced strain”. Šie neaiškumai buvo išspręsti straipsniuose [7,20], nors darbas [45] darbo autoriams [7,20] dar tuo metu nebuvo žinomas. Buvo parodyta, kad skirtingos, bet iš principo teisingos, išraiškos FE koeficientams  $C_{r,\theta}$  naudojant tą patį PD artinį buvo gaunamos dėl skirtingų TO koeficientų ir skirtingų FE efekto aprašymų:  $(\partial n / \partial T)_{\sigma=0}$  ir piezooptinis FE efekto variantas buvo naudojami darbuose [10,36], kai tuo tarpu  $(\partial n / \partial T)_{\varepsilon=0}$  ir elastooptinis FE efekto variantas buvo naudojami apžvalgoje [6].

Daug darbų yra atlikta ieškant metodų ŠL aberacijoms sumažinti ir pluošto kokybei pagerinti [5-7,14,15,21,46-48]. Vienas iš pagrindinių veiksnių, dėl kurio atsiranda SA, yra kaupinimo pluošto nevienalytis pasiskirstymas kristale. Supaprastintas ŠL priklausomybės nuo skersinio kaupinimo pluošto profilio modelis buvo sukurtas temperatūriškai nepriklausantiems AE parametrams [5,8]. Tačiau papildomas veiksnys lemiantis sferines aberacijas yra temperatūrinė šiluminio laidumo koeficiento priklausomybė [7,14,15,21,46,47,49-56]. Iš šios temperatūrinės priklausomybės seka, kad net ir tolydžiam kaupinimui gaunami neparaboliniai aukštesnio laipsnio nariai skersiniame temperatūros pasiskirstyme [21,49,50]. Buvo pastebėta [21], kad šią šiluminio koeficiento

temperatūrinės priklausomybės sukeltą aberaciją galima kompensuoti tam tikros formos kaupinimo pasiskirstymu. Darbo [21] rezultatai buvo publikuoti pirmame monografijos [14] leidime. Antrame leidime [15] šie rezultatai buvo apibendrinti temperatūriškai priklausančiam termooptiniui koeficientui  $dn/dT$ . Deja, gauti rezultatai nėra tikslūs dėl neteisingo šiluminio lęšio galios ir optinio kelio skirtumo apibrėžimo atvejui su temperatūriškai priklausančiu TO. Išsami šiluminės AE fiziniu savybių, tokių kaip šiluminis laidumas, termooptinis koeficientas ir šiluminio plėtimosi koeficientas, priklausomybės įtakos šiluminiam lęšiui ir sferinėms aberacijoms analizė buvo atlikta darbe [47]. Tačiau buvo naudojama skirtinga šiluminio laidumo priklausomybė, o darbų [14,15,21] rezultatai nebuvo analizuoti. Be to, įvairios termooptinio koeficiento priklausomybės YAG kristalui naudotos [14,15,21,47] buvo paimtos iš matavimų kriogeninėse temperatūrose ir pakankamai skiriasi nuo naujesnių matavimų aukštesnėse temperatūrose [56]. Bet svarbiausiai yra tai, kad darbe [47] naudojamos temperatūros skersinio pasiskirstymo aproksimacijos nėra pakankamai tikslios, kaip ir vėlesniuose darbuose [53-55].

### 3. INTEGRALINĖS IŠRAIŠKOS IR JŲ SKAITINIS MODELIAVIMAS

Esant pakankamai lėtiems kaupinimo laikiniams pokyčiams šilumos laidumo lygtyje nelieka nario, surišto su AE deformacijomis (detačiau žr. 5.1 poskyrį). Todėl termoelastinis uždavinys paprastai sprendžiamas tokiu būdu. Pradžioje surandamas temperatūros pasiskirstymas AE [57,58] ir po to surandami įtempiai ir deformacijos bei poslinkiai [31]. Įtempių bei deformacijų analitines išraiškas galima surasti tik panaudojus PD arba PĮ artinius [31]. Šie artiniai integraliniu pavidalu priklauso nuo radialinio temperatūros pasiskirstymo. Kai AE šilumos laidumo koeficientas nepriklauso nuo temperatūros, tai vienalyčiam kaupinimui cilindrinio strypo formos AE galima surasti pakankamai paprastą parabolinį temperatūros pasiskirstymą [5-20,57,58]. Tada ir integralai įtempių arba deformacijų išraiškose analitiškai suintegruojami ir gaunamas paprastas parabolinis radialinis šių dydžių pasiskirstymas [5-20].

Bendru atveju, gaunami analitiniai temperatūros sprendimai yra labai grioždiški (detačiau žr. [57,58] ir 4 skyrių). Jų savybes sunku numatyti. Todėl vis tiek tenka naudoti skaitinius ir grafinius metodus. Patogiau užrašyti temperatūros arba įtempių ir deformacijų išraiškas integraliniame pavidale ir skaitmeniškai jas integruoti, negu sumuoti iki 700 narių sudėtingų formulių [59]. Be to, iš gautų integralinių išraiškų nesunkiai galima gauti atitinkamas formules per specialias funkcijas (žr. 4 skyrių). Norint tiksliau atitikti naudojamų artinių sąlygoms (pvz. PĮ arba PD artiniams) buvo naudojamas nuo išilginės koordinatės nepriklausantis kaupinimas, nes bendru atveju įtempių ar deformacijų 3D pasiskirstymas yra labai sudėtingas ir jį galima nagrinėti tik naudojant brangias komercines programas [25].

Skaičiavimams atlikti buvo naudojama Python programinė kalba su Numpy ir Scipy funkcijų bibliotekomis. Tai nemokami, lengvai prieinami įrankiai leidžiantys naudoti matricinį skaičiavimą (panašiai kaip Matlab programoje), bei turintys mums reikalingas matematinės funkcijas [60]. Taip pat buvo pasinaudota PyQt4 moduliu, kad būtų sukurta grafinė sąsaja. Dauguma skaičiavimų buvo atlikti tiesiogiai pagal analitines lygtis. Skaitiniai metodai buvo pritaikyti skaičiuojant integralus, polinominius skleidimus ir kai kurių lygčių sprendimus. Skaitiniai integralai buvo skaičiuojami įvairiose išraiškose tolimesniuose skyriuose ir iš pradžių buvo paskaičiuoti patiems paprasčiausiems atvejams, kai galima sulyginti su analitiniais sprendimais. Pavyzdžiui tam, kad apskaičiuoti  $q_1$  buvo pritaikytas trapezoidinis [61,62] skaitmeninio integravimo metodas tokiu principu:

```
#integralas nuo 0 iki r
#q(x)*x*dx
def q1(q,r):
    n=numpy.size(q)
    q1=numpy.ndarray(n)
    h=(r[-1]-r[0])/n
    q1[0]=0
```

```

for i in range(n-1):
    i+=1
    q1[i]=q1[i-1]+(h/2)*(q[i-1]*r[i-1]+q[i]*r[i])
return q1

```

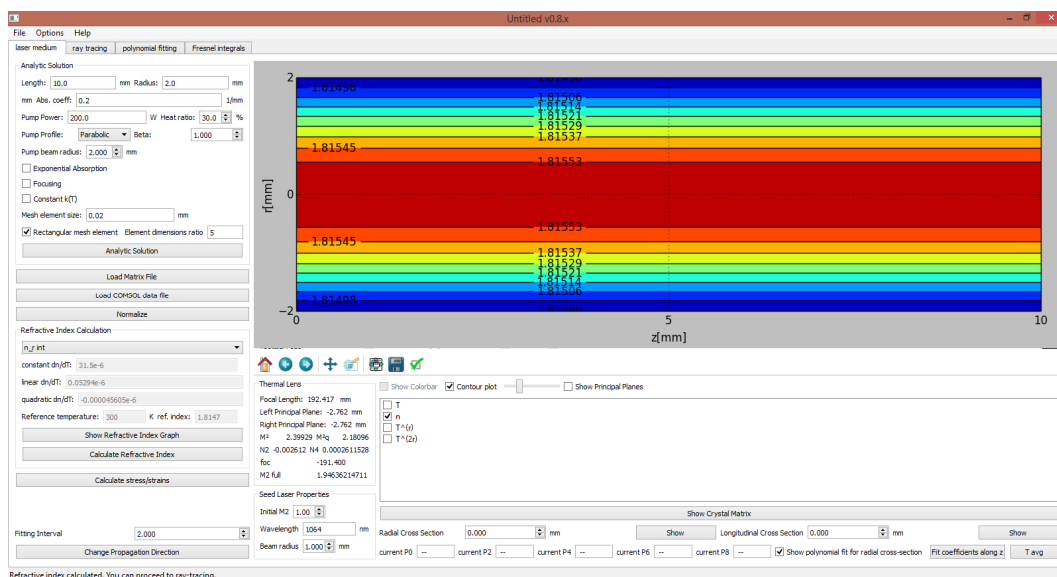
Kaip matote skaičiuojamas  $q_1(r) = \int_0^r Q(x) dx$  tipo integralas, kai į funkciją paduodami  $Q(r)$  ir  $r$  duomenų masyvai.  $q_1$  sukuriamas tokios pat dimensijos, kaip ir  $Q(r)$  ir surandamas  $dx$  elementas. Žinome, kad integralas  $q_1(0)=0$ , o tada kiekvienai sekančiai  $r$  reikšmei pridedamas trapezoidinis elementas  $(h/2)*(q[i-1]*r[i-1]+q[i]*r[i])$  prie praėjusios reikšmės. Buvo nustatyta, kad temperatūros pasiskirstymai gauti integruojant sutampa su analitinėmis išraiškomis gautais rezultatais. Aišku, tikslumas priklauso nuo  $n$ , t.y. nuo to į kiek taškų yra padalintas intervalas, tačiau didinant taškų skaičių rezultatas visada artėja į analitinį sprendinį. Norint papildomai padidinti tikslumą, nedidinant taškų skaičiaus ir tuo pačiu skaičiavimo trukmės, galima naudoti kitokius integravimo metodus, tokius kaip Simpsono, Simpsono 3/8, Milne, Boole taisyklės, Gausinė kvadratura [61,63].

Jeigu turim optinio kelio skirtumo pasiskirstymą, tai kvadratinis narys įneša fokusavimą, o aukštesnio laipsnio nariai – aberacijas. Dėl to yra naudinga mokėti įrašyti duotai funkcijai polinominę eilutę. Jeigu turime analitinę funkcijos išraišką, tai galime padaryti skleidami ją Teiloro eilute. Tuo tarpu, kai mes turime nežinomą funkciją, pavyzdžiui gautą skaitinio integravimo metodu, buvo naudojama numpy modulio funkcija polyfit [64]. Ši funkcija remiasi mažiausių kvadratų metodu [62], kai tam tikru algoritmu keičiami polinomo koeficientai tol, kol įrašyto polinomo ir duotos funkcijos kiekvieno taško skirtumo kvadratų suma pasiekia minimalią vertę [65]. Į polyfit funkciją paduodame nepriklausančio kintamojo, bei nežinomos funkcijos duomenų masyvus, polinomo narių skaičių ir papildomai galima nustatyti toleruojamą paklaidą. Kadangi įprastiniu nustatymu buvo pastebėta, kad paklaida nežymi, tai šis nustatymas buvo ir paliktas. Svarbu pažymėti, kad jeigu yra aukštesnių, nei ketvirto laipsnio narių gauti koeficientai, net ir prie kvadratinio ir ketvirto laipsnio nario keisis, jeigu keisime įrašomo polinomo laipsnį. Tokiu atveju mes didiname įrašomo polinomo laipsnį, tol kol šis pokytis sumažėja iki tenkinamos paklaidos. Buvo nustatyta, kad koeficientai gauti šiuo metodu, bei pagal Teiloro eilutes žinomoms funkcijoms turi gerą atitikimą.

Nediferencialines lygtis, net ir labai sudėtingas, skaitmeniškai išspręsti gali būti labai paprasta. Pats paprasčiausias būtų grafinis metodas, kai paskaičiuojama nežinoma funkcija ir jos šaknis randama, ten kur kertamas nulis. Šis susikirtimas gali būti nustatomas pagal tai, kad funkcija keičia ženklą, bet tada rezultatas smarkiai priklausys nuo to, į kiek taškų padalintas intervalas. Jeigu yra mažiau taškų, buvo naudojamas kitoks sprendimo būdas, kai mes pasinaudojame anksčiau minėtu polinominiu įrašymu. Jeigu sprendžiama funkcija pakankamai tvarkinga, polinomas iš kelių narių pakankamai gerai ją aprašys, ir tada galima pasinaudoti numpy modulio funkcija, randančia polinomo šaknis. Kai tam tikra problema turi daugiau nei vieną kintamąjį, buvo naudojama scipy modulio



funkcija fsolver, kuri automatiškai parenka optimalų algoritmą, pagal kurį suranda lygties sprendimą [65].



3.1 pav. Programos langas.

Funkcijos naudotos šiame darbe, kartu su funkcijomis iš kitų panašių darbų buvo apjungtos grafine sąsaja naudojantis PyQt4 moduliu (3.1 pav.). Tikimasi sukurti įrankį, kuris padėtų kuriant lazerines sistemas įvertinti šiluminio lęšio galia ir jo sukiamas aberacijas, bei galimus kompensavimo pasirinkimus. Planuojama ateityje įtraukti dar daugiau funkcijų praplečiančių programos panaudojimą bendresniems atvejams, kai dalis skaičiavimų gali būti atliekami kitomis programomis ir jų duomenys įkeliami.

## 4. ŠILUMOS PERNEŠIMO LYGTIES SPRENDIMAS

### 4.1. Integralinė temperatūros išraiška

Šiluminio laidumo koeficiento  $k(T)$  vertės nurodomos literatūroje yra gana išbarstytos dėl įvairių priežasčių. Yra žymi priklausomybė nuo legiravimo laipsnio [66,67]. Pavyzdžiui, 0.5 at.% Nd:YAG kristalui šiluminio laidumo koeficientas sumažėja apie 25% palyginus su nelegiruotu YAG. Eksperimentiniai duomenys neseniai analizuoti [51] yra gerai įrašomi kaip  $k(T) \sim 1/T$  tarp 160K iki 500 K. Dėl to, galima manyti, kad tiesinė aproksimacija  $k(T) = k_0(T_r/T)$  yra labiau tinkama nei priklausomybė  $k_\xi(T) = k_0(T_r/T)^\xi$  naudota [47,54] su  $\xi = 0.7$ .  $k(T)$  buvo naudotas [7,14,21,46,47,50-53] su skirtingomis šiluminio laidumo vertėmis  $k_0$  temperatūrai  $T_r$ . Labiausiai įtikinanti  $k_0$  vertė yra 0.105 W/(cm K), kai atskaitos temperatūra  $T_r = 300$  K.

Bendru atveju stacionarią šilumos lygtį galima užrašyti kaip

$$\nabla(k(T)\nabla T(x,y,z)) + Q_h(x,y,z) = 0, \quad (4.1)$$

kur  $Q_h$  yra šiluminio apkrovimo tankis. Šią lygtį galima nesunkiai išspręsti baigtinių elementų metodu, tačiau mus dominančiam atvejui galima rasti ir analitinius sprendimus. Analitinės išraiškos leidžia daug greičiau ir paprasčiau rasti temperatūros pasiskirstymą. Skaitinis temperatūros pasiskirstymo galuose kaupinamuose lazeriniuose strypuose nustatymas parodė, [50,68] kad atmetus išilginę z-išvestinės pusiausvyrinėje šilumos pernešimo lygtyje su radiališkai simetriniu šildymo pasiskirstymu temperatūros pasiskirstymas smarkiai nesikeičia homogeniniams (nekompozitiniams) strypams su ilgiu  $L$  didesniu nei strypo spindulys  $R$ , kai šaldymas vyksta per šonus. Taigi, neskaitant išilginio šilumos pernešimo per strypo galines sienes, šilumos laidumo lygtis cilindrinėse koordinatėse tampa pakankamai paprasta:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( k(T)r \frac{dT}{dr} \right) = -Q_h(r,z). \quad (4.2)$$

Cilindrinio paviršiaus elementui šilumos nutekėjimas konvekciniu būdu su šilumos pernešimo koeficientu  $h$  į išorinį rezervuarą su temperatūra  $T_a$

$$-k(T)(\partial T / \partial r)_{r=R} = h(T(R) - T_a). \quad (4.3)$$

Taip pat iš problemos simetrijos galima matyti, kad ties optine ašimi

$$(\partial T / \partial r)_{r=0} = 0 \quad (4.4)$$

Pritaikant kraštinę sąlygą (4.3) šilumos lygčiai galima rasti temperatūrą ties strypo šonais, kuri priklauso nuo bendros sugertos galios ir šilumos nuvedimo koeficiento  $h$ :

$$T_R = T_w + q_1(R)/(hR) = T_w + T_h \quad (4.5)$$

Įvedant  $q_1(r) = \int_0^r Q(x)xdx$ , pilna šiluminio apkrovimo galia yra

$P_h = 2\pi Lq_1(R) = 2\pi L \int_0^R Q_h(r)rdr$ . Ką galima suintegruoti, naudojant kraštinę sąlygą (4.3), konstanta

$T(0)$  gali būti rasta ir bendras sprendinys gali būti užrašytas tokioje formoje

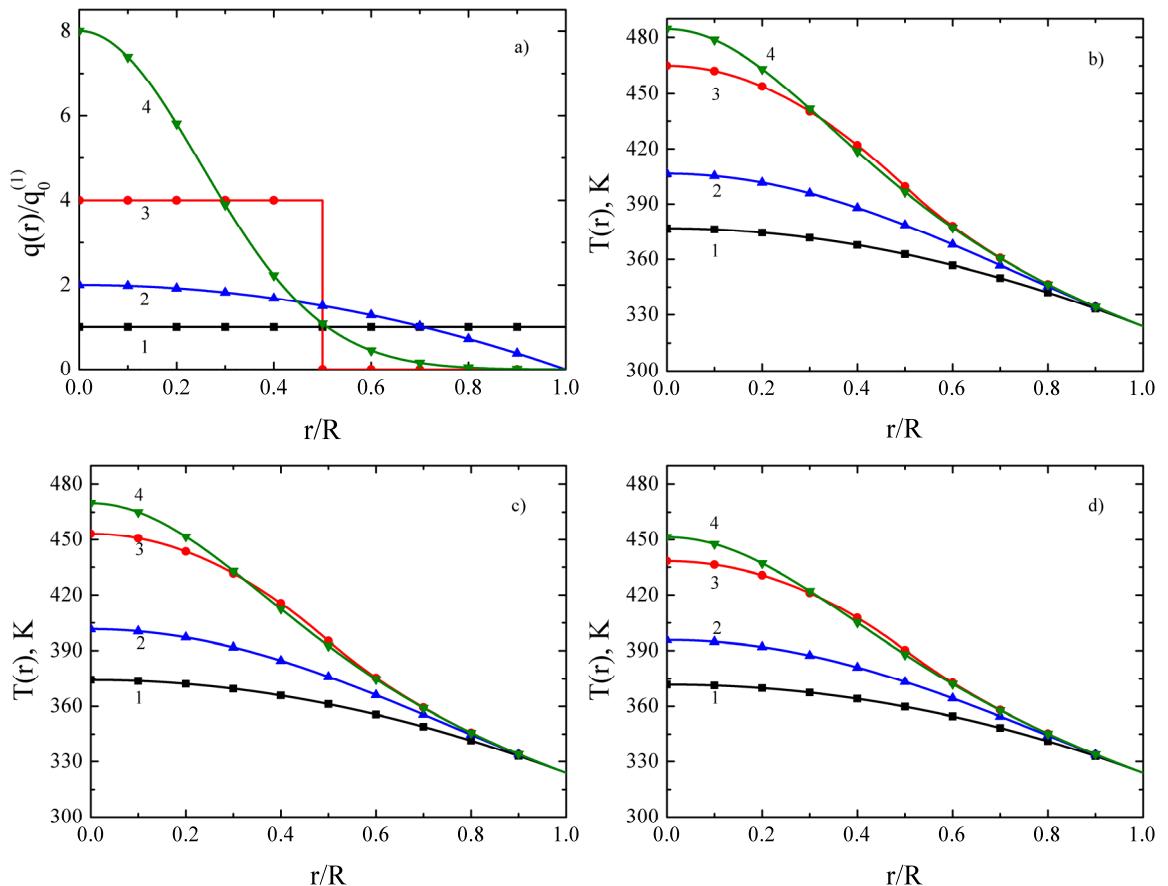
$$T(r) = T_R \left[ 1 + \frac{(1-\xi)q_2(r)}{k(T_R)T_R} \right]^{1-\xi}, \quad (4.6)$$

kur  $q_2(r) = \int_r^R (q_1(x)/x)dx$ . Iš (4.6) galima nesunkiai rasti sprendinį temperatūriškai nepriklausomui atvejui ( $\xi = 0$ ):

$$T(r) = T_R + q_2(r)/k_0. \quad (4.7)$$

Atvejui, kai  $\xi \rightarrow 1$  sprendinys įgauna eksponentinę

$$T(r) = T_R \exp[q_2(r)/(k_0 T_r)] \quad (4.8)$$



4.1. pav. a) Šiluminio apkrovimo tankio ir temperatūros radialinis pasiskirstymas įvairiems kaupinimo profiliams imant b)  $\xi=1$ , c)  $\xi=0.7$ , d)  $\xi=0$ . Kreivė 1 – tolydus kaupinimas, 2 – parabolinis, 3 – stačiakampis, 4 –Gauso pasiskirstymo.

Iš formulių (4.6) ir (4.5) galima rasti sprendimus bet kokiam šilumos pasiskirstymui integruojant skaitmeniškai, o kai kuriems pasiskirstymams galima gauti analitines išraiškas

[7,21,47,49-54]. 4.1 pav. pavaizduoti sprendimai skaitiniu integravimu gauti sprendimai įvairaus tipo kaupinimo pasiskirstymams ir skirtingoms šiluminio laidumo koeficiento priklausomybėms. Ypač naudingas sprendinys gali būti randamas polinominiui skersiniui kaupinimo pasiskirstymui, nes įvairias funkcijas galima aproksimuoti per Teiloro eilutes:

$$Q_h(r) = Q_0 \sum_{i=0}^m b_i \left(\frac{r}{R}\right)^i \quad (4.9)$$

Svarbu tvarkingai išvesti šiluminio pasiskirstymo išraišką su normalizavimo nariu, tokiu kad bendra galia suintegravus per visa strypą būtų lygi duotajai  $P_h = 2\pi L q_1(R)$

$$Q_0 = \frac{P_h}{\pi R^2 L} \left( 2 \sum_{i=0}^m \frac{b_i}{i+2} \right) \quad (4.10)$$

Įterpiant (4.9) į (4.6) ir integruojant imant  $\xi = 1$  ir turint omeny, kad  $(\partial T / \partial r)_{r=0} = 0$  gauname

$$T(r) = T_R \exp \left[ \frac{Q_0 R^2 / k_0}{T_r} \sum_{i=0}^m \frac{b_i}{(i+2)^2} \left[ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{i+2} \right] \right], \quad (4.11)$$

Ypač paprastas sprendinys plokščiam kaupinimui ( $b_0 \neq 0, b_i = 0, i \neq 0$ ) randamas iš (4.11). Jis sutampa su atveju iš [50], kur kaupinimo spindulys yra lygus strypo spinduliui. Paraboliniui kaupinimo skirstiniui ( $b_0 = 1, b_2 \neq 0$  ir  $b_i = 0$  su  $i \neq 0, 2$ ), žinomi sprendiniai [47,15] gaunami iš (4.11).

Kai galia yra maža ir temperatūros pokyčiai nedideli galima laikyti kad šiluminio laidumo koeficientas yra konstanta  $k(T) \approx k_0$ . Tada sprendinį (4.11) galima lengvai transformuoti į žinomą lygtį polinominiam kaupinimo skirstiniui [69]

$$T(r) = T_a + \frac{k_0 T_k}{hR} \sum_{i=0}^m \frac{b_i}{(i+2)} + T_k \sum_{i=0}^m \frac{b_i}{(i+2)^2} \left[ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{i+2} \right]. \quad (4.12)$$

Kaip ir gerai žinoma [6] gauname parabolinį temperatūros pasiskirstymą vienalyčiam kaupinimui ( $b_0 = 1, b_i = 0, i \neq 0$ ) iš (4.12).

Reikia pažymėti, kad normalizuojant  $Q$  eksponentinis faktorius artėja į nulį, kai pluoštas pilnai telpa į strypą, tačiau jeigu Gauso pluoštas yra palyginamų matmenų su strypo spinduliu, šio nario nepaisymas pridėtų pakankamas paklaidas, kaip kad paskaičiuotas [54] maksimalus temperatūros pokytis  $\Delta T(0) \cong 30$  K besiskiriantis nuo teisingos vertės  $\Delta T(0) \cong 37$  K naudojant tuos pačius parametrus.

## 4.2. Temperatūros pasiskirstymo aproksimacija paraboliniam kaupinimui

Išraiškoje (4.6) narys

$$\mu(r) = \frac{(1-\xi)q_2(r)}{k(T_R)T_R} \quad (4.13)$$

yra palyginus mažas realistiškam kaupinimui ( $P_h < 100$ ), vadinasi galima išskleisti temperatūros pasiskirstymą. Paraboliniam kaupinimui  $\mu(r) = a + b\rho^2 + c\rho^4$ , kur  $\rho = r/R$  ir

$$a = (1-\xi)\eta(1+b_2/4) \quad (4.14)$$

$$b = -(1-\xi)\eta \quad (4.15)$$

$$c = -b_2(1-\xi)\eta/4 \quad (4.16)$$

$$\eta = \frac{P_h}{4\pi Lk(T_R)T_R(1+b_2/2)} \quad (4.17)$$

Taigi temperatūros skirstinys  $T(X = \rho^2) = T_R [1 + a + bX + cX^2]^{1/(1-\xi)}$  gali būti aproksimuotas kaip  $T_a(X) = T_c + T'(X=0)X + T''(X=0)X^2/2 + \dots$  (4.18)

arba

$$T_a(r) \approx T_c + T_2(r/R)^2 + T_4(r/R)^4 \quad (4.19)$$

Buvo surasta, kad

$$T_c = T_R [1 + (1-\xi)\eta(1+b_2/4)]^{1/(1-\xi)}, \quad (4.20a)$$

$$T_2 = -\eta T_R [1 + (1-\xi)\eta(1+b_2/4)]^{\xi/(1-\xi)} = -\eta T_R (T_c/T_R)^\xi, \quad (4.20b)$$

$$T_4 = T_2 b_2/4 + \eta^2 \xi T_c/2. \quad (4.20c)$$

Nesunku parodyti, kad išraiškos artėja į žinomas, kai  $\xi \rightarrow 1$ .

$$T_c = T_R \exp[\eta(1+b_2/4)] \quad (4.21a)$$

$$T_2 = -\eta T_c \quad (4.21b)$$

$$T_4 = T_c (-\eta b_2/4 + \eta^2/2) \quad (4.21c)$$

Artutinės išraiškos koeficientams  $T_{c,2,4}$  gali būti gautos iš (4.20a) turint omeny, kad antras narys skliaustuose yra pakankamai mažas. Tada naudojant skleidimą  $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)x^2/2 + \dots$  nesunku gauti supaprastintas išraiškas iš pirmų narių

$$T_c \cong T_R [1 + \eta(1+b_2/4)] \quad (4.22a)$$

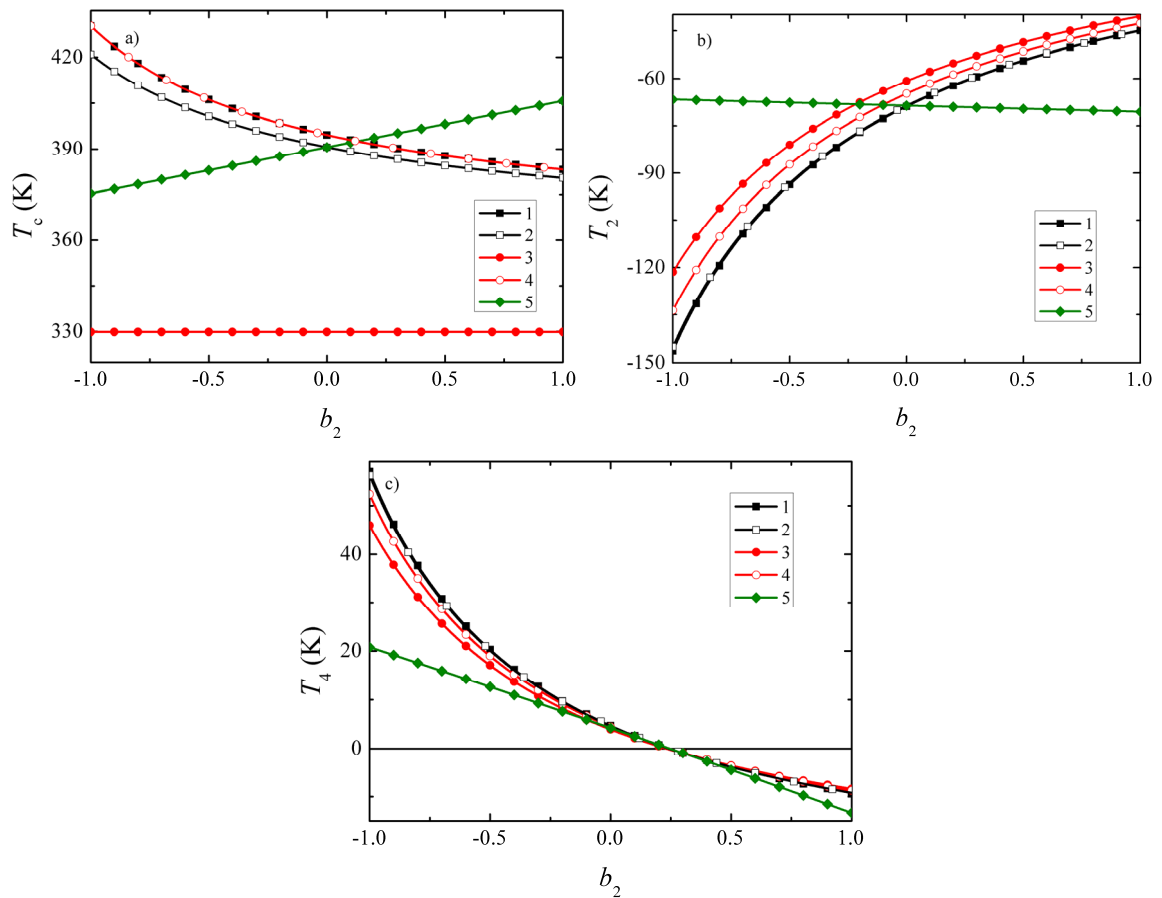
$$T_2 \cong -\eta T_R [1 + \xi\eta(1+b_2/4)] \quad (4.22b)$$

$T_4$  gauname iš (4.20c) su naujomis vertėmis iš (4.22a) ir (4.22b). Tokios artutinės išraiškos skiriasi nuo tikrų (4.20) labai nežymiai. Tuo tarpu [47] siūlomas artinys prilygina  $T_c/T_R \sim 1$ : “Usually, the variation of the temperature can be considered as being small; a 20% variation between the center

and the periphery of the rod would be an important gradient ( $T_c - T_R \sim 60$  K), but a small absolute variation.” Tačiau sunku sutikti, kad 20% yra nežymi paklaida, ypač kai priklausomai nuo konkretaus atvejo, ji gali ir dar labiau išaugti. Buvo pastebėta, kad paklaida tarp tikros temperatūros, ir gautos iš Teiloro skleidimo iki ketvirto laipsnio yra didžiausia ties strypo šonais. Taigi mes įvertinome  $\varepsilon = [T_a(r) - T(r)]/T(r)$  ties  $r = R$ , kas duoda tiesiog

$$\varepsilon_R = (T_c + T_2 + T_4 - T_R)/T_R \quad (4.23)$$

Imant šiluminį apkrovimą  $P_h = 60$  W 8mm ilgio ir 4mm diametro strypui paklaida nesiekė 5%, o intervale  $0 \leq b_2 \leq 1$  paklaida mažesnė, nei 0.5%.



4.2 pav. Temperatūrinio pasiskirstymo koeficientų priklausomybė nuo parabolinio kaupinimo  $b_2$  koeficiento.

### 4.3. Analitinės temperatūros pasiskirstymo išraiškos

4.1 pav. pavaizduoti temperatūros pasiskirstymo koeficientai gauti pagal tikslias (1), artutines (2) išraiškas, bei naudojant lygtis iš darbų [47] (3,4) ir [54] (5). Reikia pažymėti, kad artinys gaunamas iš Teiloro skleidimo (2) turi labai gerą atitikimą, ypač  $T_2$  ir  $T_4$  koeficientams, todėl nėra prasmės naudoti kažkokius kitus artinius. Bendru atveju analitiniai sprendiniai gali būti ne visada tokie patogūs. Tada koeficientus  $T_2$  ir  $T_4$  apskaičiuojame skaitiniais metodais. Naudojant bendrąjį sprendinį (4.6), taip pat galima gauti temperatūrą

$$T(r) = \left( T_a + \frac{P_h}{h2\pi RL} \right) \exp\left( \frac{Q_{G0} w_p^2 q_2(r)}{4k_0 T_r} \right) \quad (4.24)$$

Gauso kaupinimo profiliui  $Q_h(r) = Q_{G0} \exp[-2(r/w_p)^2]$ , kur

$$Q_{G0} = 2P_h / \{ \pi w_p^2 L [1 - \exp[-2(R/w_p)^2]] \}, \quad (4.25)$$

Šiuo atveju, visa sugerta galia

$$P_h = 2\pi L \int_0^R Q_h r dr = \frac{\pi L Q_{G0} w_p^2}{2} [1 - \exp[-2(R/w_p)^2]] \quad (4.26)$$

Ši išraiška labai patogi naudojimui, nes integralą galima išreikšti per klaidos funkciją. Išreiškiant per polinominę eilutę, galima rasti sprendinį ir supergauso kaupinimui

$$Q_h(r) = Q_0 \exp[-2(r/w_p)^2] = Q_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n (r/w_p)^{4n}}{n!}. \quad (4.27)$$

Tada, gauname išraišką

$$\ln \frac{T(r)}{T(0)} = - \int_0^r \frac{q(\rho) d\rho}{a\rho} = - \frac{Q_0 r^2}{4k_0 T_r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2r^4/w^4)^n}{(2n+1)^2 n!}, \quad (4.28)$$

kuri gali būti užrašyta naudojantis hipergeometrinės funkcijos apibrėžimu [70]

$${}_2F_2(a_1, a_2, b_1, b_2; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n}{(b_1)_n (b_2)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad (4.29)$$

kur  $(a_k)_n = a_k(a_k+1)(a_k+2)\dots(a_k+n-1)$  yra specialus užrašymas žinomas kaip Ponchhammer simbolis.

Lengva pastebėti, kad

$$\frac{(1/2)_n}{(3/2)_n} = \frac{(1/2)(3/2)\dots(1/2+n-1)}{(3/2)\dots(3/2+n-1)} = \frac{1}{2(3/2+n-1)} = \frac{1}{2n+1}. \quad (4.30)$$

Naudojant (4.26) ir (4.27), lygtis (4.25) gali būti pakeista į

$$T(r) = T(0) \exp\left[ - \frac{Q_0 r^2}{4k_0 T_r} {}_2F_2\left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{2r^4}{w^4} \right) \right]. \quad (4.31)$$

Hipergeometrinė funkcija nėra patogi praktiniams naudojimams dėl lėto konvergavimo. Pavyzdžiui, labai sudėtingos išraiškos gautos [71] atvejui net su nuo temperatūros nepriklausomu šiluminio laidumo koeficientu yra sunkiai pritaikomos.

**4 skyriaus išvados.** Rastas šilumos laidumo lygties su bendra temperatūrine šilumos laidumo koeficiento priklausomybe sprendinys integralinėje formoje, kuri galima patogiai panaudoti skaitinėje analizėje. Parodyta, kad mažas skleidimo parametras egzistuoja realiam šiluminiam apkrovimui, kuris leidžia gauti paprastas, bet tikslias analitines išraiškas radialiniam pasiskirstymui Teiloro eilučių skleidime.

## 5. TERMOOPTINIO IR FOTOELASTINIO EFEKTŲ TEORIJA

### 5.1. Termoelastinės lygtys

Tam kad išspręsti įtempių ir deformacijų problemą kietojo kūno lazeriuose, reikia panaudoti pagrindines lygtis apibūdinančias termoelastinius santykius vientisose anizotropinėse kietosiose terpėse [72]. Visų pirma, deformacijas galima išsireikšti per poslinkius  $u_i$  ( $i = x, y, z$ )

$$\varepsilon_{ij} = \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) / 2 \quad (5.1a)$$

Dinaminė pusiausvyra arba judėjimo lygtis seka iš Niutono dėsnų

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i \quad (5.1b)$$

Mūsų atveju nėra išorinės jėgos, įtempius ir deformacijas sukelia tik medžiagos kaitinimas. Apibendrintas Hooke'o dėsnis arba Duhamel-Neumann dėsnis [72] susieja įtempimų tenzoriaus pokytį  $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}(T) - \sigma_{ij}(T_{ref})$  su deformacijų tenzoriaus pokyčiu  $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}(T) - \varepsilon_{ij}(T_{ref})$  ir temperatūros pokyčiu  $\tilde{T} = T - T_{ref}$  palyginus su pradine būsena. Toliau darysime prielaidą, kad ties pradine temperatūra įtempiai ir deformacijos yra nuliniai.

$$\tilde{\sigma}_{ij} = c_{ijkl} (\tilde{\varepsilon}_{kl} - \alpha_{ij}^T \tilde{T}) = c_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl} - \beta_{ij}^T \tilde{T}, \quad (5.1c)$$

kur  $\alpha_{ij}^T$  yra šiluminio plėtimosi tenzoriaus komponentės,  $c_{ijkl}$  yra ketvirto laipsnio elastiškumo (standumo) tenzoriaus komponentės,  $\beta_{ij}^T$  yra šiluminės konstantos apjungiančios šiluminio plėtimosi koeficientą ir elastiškumo tenzorių  $\beta_{ij}^T = -c_{ijkl} \alpha_{kl}^T$  [72].

Šilumos nunešimo lygtis, kuri seka iš energijos tvermės dėsnio:

$$\rho C_e \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij}(T) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right) = Q_h(\vec{x}) + \beta_{ij}^T T_{ref} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_j} \quad (5.1d)$$

kur  $\rho$  - medžiagos tankis,  $C_e$  - savitoji šiluma ties pastoviu įtėmpiu,  $k_{ij}(T)$  - šiluminio laidumo tenzoriaus koeficientai,  $Q_h(\vec{x})$  - šiluminė apkrova sukelta lazerio aktyviosios medžiagos optinio kaupinimo,  $F_i$  - kūno jėgos komponentės. Taigi, kaitinamo kietojo kūno elastingės lygtys yra surištos su termodinamine šilumos perdavimo lygtimi [73]. Tačiau ties lėtos spartos šilumos padavimu, deformacijų generuojama šiluma yra nežymi. Ją atmetus galima lygtis (5.1c) ir (5.1d) spręsti atskirai. Tokiu atveju pirma surandama temperatūra, tada duotam temperatūros laukui surandami tiesinių termoelastinių lygčių sprendiniai. Atmetus deformacijų generuojamą šilumą ir ieškant pusiausvyrinės padėties sprendimo:



$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij}(T) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right) = -Q_h(\bar{x}), \quad (5.1e)$$

Šią lygtį mes jau išsprendėme praeitame skyriuje, todėl tiesiog įsistatome sprendimą į (5.1c), išsprendžiame lygčių (5.1abc) sistemą ir gauname įtempius ir deformacijas.

Apibendrintas Hooke'o dėsnis teigia, kad bendra deformacija  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^\sigma + \varepsilon_{ij}^T$  taške susideda iš įtempių sukeltos mechaninės deformacijos  $\varepsilon_{ij}^\sigma = s_{ijkl} \sigma_{kl}$  bei deformacijos sukeltos laisvo šiluminio plėtimosi  $\varepsilon_{ij}^T = \alpha_{ij}^T \tilde{T}$ , kur  $s_{ijkl}$  yra izoterminės ketvirto laipsnio slankumo tenzorius komponentės.

Ketvirto laipsnio standumo ir slankumo tenzoriai turi 81 komponentę, taigi ta pati Duhamel-Neumann lygtis matriciniame pavidale atrodo kaip:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1111} & s_{1122} & s_{1133} & s_{1123} & s_{1113} & s_{1112} & s_{1132} & s_{1131} & s_{1121} \\ s_{2211} & s_{2222} & s_{2233} & s_{2223} & s_{2213} & s_{2212} & s_{2232} & s_{2231} & s_{2221} \\ s_{3311} & s_{3322} & s_{3333} & s_{3323} & s_{3313} & s_{3312} & s_{3332} & s_{3331} & s_{3321} \\ s_{2311} & s_{2322} & s_{2333} & s_{2323} & s_{2313} & s_{2312} & s_{2332} & s_{2331} & s_{2321} \\ s_{1311} & s_{1322} & s_{1333} & s_{1323} & s_{1313} & s_{1312} & s_{1332} & s_{1331} & s_{1321} \\ s_{1211} & s_{1222} & s_{1233} & s_{1223} & s_{1213} & s_{1212} & s_{1232} & s_{1231} & s_{1221} \\ s_{3211} & s_{3222} & s_{3233} & s_{3223} & s_{3213} & s_{3212} & s_{3232} & s_{3231} & s_{3221} \\ s_{3111} & s_{3122} & s_{3133} & s_{3123} & s_{3113} & s_{3112} & s_{3132} & s_{3131} & s_{3121} \\ s_{2111} & s_{2122} & s_{2133} & s_{2123} & s_{2113} & s_{2112} & s_{2132} & s_{2131} & s_{2121} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{33} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{13} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{32} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix} \tilde{T} \quad (5.2)$$

Slankumo ir standumo tenzorių simetrijos pasekmė yra galimybė sukeisti pirmą ir antrą indeksus vietomis gaunant tą pačią reikšmę. Matricą galima papildomai supaprastinti pasinaudojus savybe, kad pirmą indeksų pora galima keisti su antrąja. Įrodymas seka iš deformacijos atliekamo darbo grįžtamumo. Taigi, šios simetrijos sąlygos duoda 21 nepriklausomą komponentę. Deformacijos tenzorius simetrija taip pat reiškia, kad  $\alpha_{ij}^T = \alpha_{ji}^T$  ir nepriklausomų šiluminio plėtimosi tenzorius komponentių skaičius sumažėja nuo devynių iki šešių [72]. Sutrumpintame Voigt'o užrašyme deformacijų, įtempių ir šiluminio plėtimosi tenzoriai užrašomi kaip vektoriai pagal taisykles:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha_{11}^T \\ \alpha_{22}^T \\ \alpha_{33}^T \\ 2\alpha_{23}^T \\ 2\alpha_{13}^T \\ 2\alpha_{12}^T \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \\ \alpha_4^T \\ \alpha_5^T \\ \alpha_6^T \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \beta_{11}^T \\ \beta_{22}^T \\ \beta_{33}^T \\ \beta_{23}^T \\ \beta_{13}^T \\ \beta_{12}^T \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \beta_3^T \\ \beta_4^T \\ \beta_5^T \\ \beta_6^T \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Voigt'as taip pat įvedė supaprastinimą su dviem indeksais slankumo ir standumo tenzoriams vietoj keturių pagal tokį dėsnį:  $ii \rightarrow i$  ir  $ij \rightarrow 9 - i - j$  kai  $i \neq j$ . Vadinasi, apibendrintas Hooke'o dėsnis gali būti perrašytas supaprastintom matricom:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1111} & s_{1122} & s_{1133} & 2s_{1123} & 2s_{1113} & 2s_{1112} \\ s_{1122} & s_{2222} & s_{2233} & 2s_{2223} & 2s_{2213} & 2s_{2212} \\ s_{1133} & s_{2233} & s_{3333} & 2s_{3323} & 2s_{3313} & 2s_{3312} \\ 2s_{1123} & 2s_{2223} & 2s_{3323} & 4s_{2323} & 4s_{2313} & 4s_{2312} \\ 2s_{1113} & 2s_{2213} & 2s_{3313} & 4s_{2313} & 4s_{1313} & 4s_{1312} \\ 2s_{1112} & 2s_{2212} & 2s_{3312} & 4s_{2312} & 4s_{1312} & 4s_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11}^T \\ \alpha_{22}^T \\ \alpha_{33}^T \\ 2\alpha_{23}^T \\ 2\alpha_{13}^T \\ 2\alpha_{12}^T \end{pmatrix} \tilde{T} \quad (5.4a)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1123} & c_{1113} & c_{1112} \\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2223} & c_{2213} & c_{2212} \\ c_{1133} & c_{2233} & c_{3333} & c_{3323} & c_{3313} & c_{3312} \\ c_{1123} & c_{2223} & c_{3323} & c_{2323} & c_{2313} & c_{2312} \\ c_{1113} & c_{2213} & c_{3313} & c_{2313} & c_{1313} & c_{1312} \\ c_{1112} & c_{2212} & c_{3312} & c_{2312} & c_{1312} & c_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11}^T \\ \beta_{22}^T \\ \beta_{33}^T \\ \beta_{23}^T \\ \beta_{13}^T \\ \beta_{12}^T \end{pmatrix} \tilde{T} \quad (5.4b)$$

Tačiau reikia nepamiršti, kad toks užrašymas nereiškia, kad ketvirtos eilės slankumo ar standumo tenzorius pavirto į antros eilės tenzorių. Bet kokiuose veiksmuose su tenzorių transformacijomis reikia grįžti prie pilno užrašymo su keturiais indeksais. Jeigu yra žinomas šarba  $\hat{c}$  tenzorius, tai vienas gali būti apskaičiuojamas iš kito pagal matricų inversiją [74]. Pavertime iš  $s_{pq}$  į  $s_{ijkl}$  yra svarbu atsižvelgti į daugiklius atsirandančius dėl indeksų permaišymo:

$$s_{ij} \rightarrow s_{ijij}, s_{i,9-k-l} \rightarrow 2s_{iikl}, s_{9-i-j,9-k-l} \rightarrow 4s_{ijkl} \quad (5.5)$$

Atitinkamai daugiklis 2 atsiranda deformacijų vektoriuje  $\varepsilon_i$  ir šiluminio plėtimosi vektoriuje  $\alpha_i^T$ , kai indeksas  $i > 3$ . Tuo tarpu slankumo matrica išlaiko nepakitusių koeficientus. Daugiklių parinkimas yra susitarimo klausimas, tačiau svarbu išlaikyti nuoseklų daugiklių pritaikymą. Tenzorius galima ypač paprastai užrašyti kubinės simetrijos atveju Voigto žymėjimu, slankumo tenzorius atrodys kaip:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Izotropinio kristalo atveju  $c_{44}$  yra likusių koeficientų kombinacija, vadinasi elastiškumą galima apibūdinti vos dviem parametrais.

## 5.2. YAG kristalo elastingės sąlybės

Itrio aliuminio granatas (YAG) yra labiausiai paplitusi lazerinė terpė, kuri legiruojama  $\text{Nd}^{3+}$ ,  $\text{Yb}^{3+}$  ir kitais jonais. Jis pasižymi kubine kristaline struktūra [36]. Kubinės medžiagos turi tris nepriklausomas elastinges konstantas ir vieną nepriklausomą šiluminio plėtimosi koeficientą  $\alpha_{ij}^T = \alpha_T \delta_{ij}$  arba šiluminio slankumo  $\beta_{ij}^T = \beta_T \delta_{ij}$  parametą [72]. Kubiniams kristalams nepriklausomos slankumo komponentės gali būti rastos naudojant nepriklausomas standumo komponentes [74]:

$$s_{1111} = s_{11} = \frac{c_{11} + c_{12}}{(c_{11} - c_{12})(c_{11} + 2c_{12})} \quad (5.7a)$$

$$s_{1122} = s_{12} = \frac{-c_{12}}{(c_{11} - c_{12})(c_{11} + 2c_{12})} \quad (5.7b)$$

$$4s_{1212} = s_{66} \equiv s_{44} = 1/c_{66} = 1/c_{44} \quad (5.7c)$$

Kubiniai kristalai elgiasi kaip mechaniškai izotropinė terpė [74], jeigu tenkinama sąlyga:

$$c_{44} = (c_{11} - c_{12})/2 \quad \text{arba} \quad s_{44} = 2(s_{11} - s_{12}) \quad (5.8)$$

Galima rasti įvairių verčių standumo tenzorius komponentėms YAG kristalui [75]. Sąlyga geriausiai tenkinama, jeigu naudojamos vertės:

$$c_{11} = 3.49 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, \quad c_{12} = 1.21 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, \quad c_{44} = 1.14 \times 10^{11} \text{ N/m}^2. \quad (5.9)$$

Naudojant šias vertes galime apskaičiuoti ir slankumo vertes:

$$s_{11} = 0.35687 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}, \quad s_{12} = -0.0919 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}, \quad s_{44} = 0.8772 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}. \quad (5.10)$$

Taigi, izotropinė sąlyga yra beveik išpildyta:

$$s_{44} = 0.8772 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N} \approx 2(s_{11} - s_{12}) = 0.89754 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}. \quad (5.11)$$

Izotropinėms medžiagoms standumo tenzorius turi formą [73]

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (5.12)$$

kur  $\lambda$  ir  $\mu$  yra Lamé konstantos. Galima apskaičiuoti atskiras komponentes:

$$c_{11} = \lambda + 2\mu, \quad c_{12} = \lambda, \quad c_{44} = \mu. \quad (5.13)$$

Dažniau naudojamas Young'o modulis  $E$  ir Poisson'o santykis  $\nu$  gali būti išreikšti per Lamé konstantas [73,74]:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (5.14)$$

ir atitinkamai:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.15)$$

Tada standumo ir slankumo komponentės izotropiniam kūnui gali būti išreikštos per Young'o modulį ir Poisson'o santykį:

$$c_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, c_{12} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, c_{44} = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

$$s_{11} = 1/E, s_{12} = -\nu/E, s_{44} = 2(1+\nu)/E. \quad (5.16)$$

Naudojant išraiškas (5.16) galima rasti Young'o modulio ir Poisson'o santykio vertes:

$$E = 1/s_{11} = 280 \text{ GPa}, \nu = -s_{12}E = -s_{12}/s_{11} = 0.258 \Leftrightarrow \frac{c_{12}}{c_{11} + c_{12}} = 0.257 \quad (5.17)$$

Šios vertės yra netoli rezultatų iš [75]. Lygtys (5.17) parodo, kad Young'o modulis ir Poisson'o santykis nėra nepriklausomi, tačiau priklauso nuo elastinių tenzorių koeficientų. Naudojant žinomą priklausomybę nuo temperatūros koeficientams  $c_{ij}$  galima nustatyti, kad temperatūrose nuo 140 iki 298 K Young'o modulis keičiasi apie 7%, o Poisson'o santykis – 2%. Tačiau tolimesniuose skaičiavimuose darysime prielaidą, kad koeficientai yra pastovūs temperatūrų ruože 300K-500K.

### 5.3. Fotoelastinis efektas ir termooptinių koeficientų sąryšiai kubiniams kristalams

Yra gerai žinoma, kad optinių medžiagų lūžio rodiklis keičiasi temperatūrose, kurias pasiekia šios medžiagos optinės sistemos. Lūžio rodiklio temperatūrinė išvestinė ties pastoviu įtempium ( $\partial n / \partial T$ ) $_{\sigma} = \beta_{\sigma}$  yra dažnai vadinama termooptiniu koeficientu ir žymima  $dn/dT$  [76].

Yra įvairūs metodai išmatuoti termooptinį koeficientą lazeriniuose kristaluose [56]. Tačiau visuose juose su termooptiniu koeficientu kartu randamas ir šiluminio plėtimosi koeficientas  $\alpha_T$ . Reiktų pažymėti, kad paprastai medžiagos bandinys yra arba tolydžiai kaitinamas arba jame sukuriamas tiesinis temperatūros gradientas. Kai  $\Delta T$  yra tiesinė funkcija stačiakampėse koordinatėse, tai kiekviename elemente laisvo šiluminio plėtimosi sukeltos deformacijos tenkins sąlygą, kuri duoda nulinius šiluminius įtempius. Taigi, paprastai matuojamas termooptinis koeficientas yra ( $\partial n / \partial T$ ) $_{\sigma=0}$  ir reikia nepaminti su ( $\partial n / \partial T$ ) $_{\varepsilon=0}$ , kuris žymi lūžio rodiklio išvestinę ties nulinėmis deformacijomis.

Temperatūros pokyčiai ar išorinis slėgis sukelia kietajame kūne termooptinį ir piezooptinį efektus. Tam kad apibūdintume šiuos efektus būtų galima išskleisti santykinį dielektrinės skvarbos tenzorių Taylor'o eilute pagal atitinkamą kintamąjį (temperatūra, įtempiai). Tačiau dažniausiai naudojamas yra santykinis dielektrinio nepralaidumo (atvirkštinė dielektrinė skvarba) tenzorius apibrėžtas kaip  $B_{ij} = \varepsilon_0 (\partial E_i / \partial D_j)$ , kur  $E_i$  yra elektrinis laukas, yra  $D_j$  elektrinis poslinkis ir  $\varepsilon_0$  yra

vakuumo skvarba. Kristalo lūžio rodikliai yra apibūdinami elipsoidės vadinamos indikatriše  $B_{ij}x_ix_j=1$  taikant Einšteino sumavimo taisyklę.

Apsiribojant tik tiesiniais nariais Taylor'o eilutė aplink atskaitos temperatūrą  $T_r$  ties nuliniiais įtempiais [73]

$$B_{ij}(T, \sigma_{kl}) = B_{ij}(T_r, 0) + \left(\frac{\partial B_{ij}}{\partial T}\right)_{T_r, \sigma=0} \Delta T + \left(\frac{\partial B_{ij}}{\partial \sigma_{kl}}\right)_{T_r, \sigma=0} \sigma_{kl} + \dots, \quad (5.18)$$

kur  $\Delta T = T - T_r$  ir  $\sigma_{kl}$  yra įtempimų tenzoriaus koeficientai. Taigi, nepralaidumo tenzorius keičiasi dėl tiesinio termooptinio efekto  $\Delta B_{ij}^{(\sigma=0)} = \left(\frac{\partial B_{ij}}{\partial T}\right)_{T_r, \sigma=0} \Delta T$  ir tiesinio piezooptinio efekto  $\Delta B_{ij}^{(\sigma)} = \pi_{ijkl} \sigma_{kl}$  kur  $\pi_{ijkl} = \left(\frac{\partial B_{ij}}{\partial \sigma_{kl}}\right)_{T_r, \sigma=0}$  yra piezooptinio tenzoriaus komponentės. Kristalui, kuris pradžioje yra izotropinis (YAG),  $B_{ij}(T_r, 0) = \delta_{ij} / n_0^2$ . Tokiu atveju lygtis (5.18) gali būti perrašyta:

$$B_{ij}(T, \sigma_{kl}) = [n_0 + \left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_{\sigma=0} \Delta T]^{-2} \delta_{ij} + \pi_{ijkl} \sigma_{kl}. \quad (5.19)$$

Naudojant Duhamel-Neumann lygtį  $\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}^\sigma$  ir lygybę  $p_{ijrs} = \pi_{ijkl} c_{klrs}$  tarp elastooptinių koeficientų  $p_{ijrs}$  ir piezooptinių koeficientų  $\pi_{ijkl}$  lygtis pavirsta į

$$B_{ij}(T, \varepsilon_{rs}^\sigma) = [n_0 + \left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_{\sigma=0} \Delta T]^{-2} \delta_{ij} + p_{ijrs} \varepsilon_{rs}^\sigma, \quad (5.20)$$

kur  $\varepsilon_{ij}^\sigma = s_{ijkl} \sigma_{kl}$  yra įtempimų sukelta deformacijų dalis, o  $\varepsilon_{ij}^T = \alpha_{ij}^T \tilde{T}$  yra šiluminio plėtimosi sukelta deformacijų dalis.

Jeigu norima naudoti pilną deformacijų tenzorių  $\varepsilon_{rs}$  (neapsiribojant elastine dalimi  $\varepsilon_{rs}^\sigma$ ), tada atitinkami reikia naudoti kitokią dielektrinio nepralaidumo tenzoriaus lygtį:

$$B_{ij}(T, \varepsilon_{kl}) = [n_0 + \left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_{\varepsilon=0} \Delta T]^{-2} \delta_{ij} + p_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (5.21)$$

Ši lygtis dažnai vadinama elastooptiniu efektu [73]. Visos galimos lygtys nepralaidumo tenzoriaus pokyčiui aprašyti kartu apjungiamos pavadinimu fotoelastinis efektas [73,74].

Palyginus lygtis fotoelastiniam efektui (5.19-5.21), santykis tarp  $\left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_{\sigma=0}$  ir  $\left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_{\varepsilon=0}$  gali būti randamas mechaniškai izotropiniam kristalui kaip YAG. Vėl panaudojant Voigt'o žymėjimą galime fotoelastinį efektą išreikšti matricine forma:

$$\Delta B_m^{(\sigma)}(T) = \pi_{mn} \sigma_n(T) \quad (m, n = 1, 2, \dots, 6), \quad (5.22a)$$

kur  $\pi_{mn}$  koeficientai yra susieti su  $\pi_{ijkl}$  pagal tokias taisykles:

$$\pi_{mn} = \pi_{ijkl}, \text{ kai } n = 1, 2, \text{ or } 3; \quad (5.22b)$$

$$\pi_{mn} = 2\pi_{ijkl}, \text{ kai } n = 4, 5, \text{ or } 6. \quad (5.22c)$$

Daugyba iš dvejetainio atsiranda dėl šlyties įtempio narių sujungimo į vieną [74]. Jeigu norima dirbti su deformacijomis vietoje įtempimų, tada lygtį (5.22a) galima pakeisti:

$$\Delta B_m^{(\varepsilon)}(T) = p_{mn} \varepsilon_n(T) \quad (m, n=1,2,\dots,6), \quad (5.23)$$

kur  $p_{mn}$  koeficientai yra tiesiog  $p_{mn} = p_{ijrs}$  visiems  $m$  ir  $n$  be jokio papildomo daugiklio [74].

Reikia pažymėti, kad šitoks matricinis aprašymas yra tik izotropinėms ir kubinėms medžiagoms, kadangi bendru atveju elastooptiniai koeficientai nėra simetriški tarp dviejų paskutinių indeksų ( $r$  ir  $s$  arba  $k$  ir  $l$ ) [77].

Laisvo plėtimosi metu kubiniame kristale  $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^T = \alpha_T \delta_{kl} \Delta T$ , kubinė simetrija išlieka, o izotropinio lūžio rodiklio pokytis dėl fotoelastinio efekto [74] išreikštas per nepralaidumo tenzorius vertes:

$$\Delta n^{(\varepsilon)} \equiv \Delta n_1^{(\varepsilon)} = -\frac{n_0^3}{2} \Delta B_{ii}^{(\varepsilon)} = -\frac{n_0^3}{2} p_{1j} \varepsilon_j = -\frac{n_0^3}{2} (p_{11} + 2p_{12}) \alpha_T \Delta T. \quad (5.24)$$

Taigi, bendras lūžio rodiklio pokytis dėl laisvo šiluminio plėtimosi gali būti užrašomas:

$$\Delta n_T^{(\sigma=0)} = \left( \frac{\partial n}{\partial T} \right)_{\sigma=0} \Delta T = \left( \frac{\partial n}{\partial T} \right)_{\varepsilon=0} \Delta T + \Delta n^{(\varepsilon)}. \quad (5.25)$$

Naudojant lygtis (5.24) ir (5.25), ryšys tarp  $(\partial n / \partial T)_{\sigma=0}$  ir  $(\partial n / \partial T)_{\varepsilon=0}$  gali būti randamas:

$$\left( \frac{\partial n}{\partial T} \right)_{\sigma=0} = \left( \frac{\partial n}{\partial T} \right)_{\varepsilon=0} - \frac{\alpha_T n_0^3}{2} (p_{11} + 2p_{12}). \quad (5.26)$$

Lygybė tarp išvestinių  $(\partial n / \partial T)_{\sigma=0}$  ir  $(\partial n / \partial T)_{\varepsilon=0}$  taip pat gali būti randama ir kitu būdu. Šiluminis bandinio plėtimasis dėl tolydaus temperatūros pokyčio gali būti kompensuojamas atitinkamu hidrostatišku slėgiu [78]. Įdomu tai, kad visi kristalai išskyrus tuos, kurie priklauso monoklininėms ir triklininėms sistemoms, nepasizymi principinės ašies sukimusi esant hidrostatiškam slėgiui. Esant hidrostatiškam slėgiui, kubiniai kristalai išlieka kubiniai. Vadinasi galima realizuoti nulines deformacijas  $\varepsilon_{kl} = 0$ . Kaip seka iš lygčių (5.1c) ir (5.12) principiniai įtempiai bus tik tada, kai:

$$\sigma_{ij} = -c_{ijkl} \alpha_{kl}^T \Delta T = \beta_T \delta_{ij} \Delta T, \quad (5.27)$$

kur išraiška šiluminiam slankumo koeficientui yra  $\beta_T = -\alpha_T E / (1 - 2\nu)$ .

Izotropinis lūžio rodiklio pokytis dėl temperatūros pokyčio ties  $\varepsilon_{ij} = 0$  yra aprašomas

$$\Delta n^{(\varepsilon=0)} = \left( \frac{\partial n}{\partial T} \right)_{\varepsilon=0} \Delta T = \left( \frac{\partial n}{\partial T} \right)_{\sigma=0} \Delta T - \frac{n_0^3}{2} \pi_{11kl} \beta_T \delta_{kl} \Delta T \quad (5.28)$$

Taigi, ryšys tarp  $(\partial n / \partial T)_{\varepsilon=0}$  ir  $(\partial n / \partial T)_{\sigma=0}$  gaunamas

$$\left( \frac{\partial n}{\partial T} \right)_{\varepsilon=0} = \left( \frac{\partial n}{\partial T} \right)_{\sigma=0} + \frac{\alpha_T n_0^3 E}{2(1-2\nu)} (\pi_{11} + 2\pi_{12}) \quad (5.29)$$

Eksperimentiškai galima išmatuoti  $\left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_{\sigma=0}$  koeficientą, o  $\left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_{\varepsilon=0}$  koeficientas gali būti apskaičiuojamas. Iš praeito įrodymo matosi, kad ir  $\left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_{\varepsilon=0}$  gali būti išmatuojamas eksperimentiškai, bet tam reikėtų bandinį kaitinti taikant atitinkamą hidrostatinį slėgį. Tam kad parodyti lygčių (5.26) ir (5.29) tapatumą reikia išsireikšti koeficientus  $\pi_{mn}$  per  $p_{mk}$  [74]:  $\pi_{mn} = p_{mk} S_{kl}$ . Atsižvelgiant į mechanines YAG kristalo savybes ir piezooptinio bei elastooptinio komponentių simetriją [74], galima išvesti:

$$\pi_{11} = (p_{11} - 2\nu p_{12}) / E, \quad (5.30a)$$

$$\pi_{12} = [-\nu p_{11} + (1 - \nu) p_{12}] / E, \quad (5.30b)$$

$$\pi_{44} = 2(1 + \nu) p_{44} / E. \quad (5.30c)$$

Įstatant (5.31) į lygybę (5.29), gauname lygtį (5.26), vadinasi (5.29) ir (5.26) yra tapatūs.

Kubiniai seskvioksidiniai kristalai  $\text{Sc}_2\text{O}_3$ ,  $\text{Lu}_2\text{O}_3$  ir  $\text{Y}_2\text{O}_3$ , bei jų keramikos buvo naudojamos praeitą dešimtmetį, kaip kietojo kūno lazerio gardelės. Šios terpės turi palyginamą šiluminio laidumo koeficientą su YAG, tuo tarpu Yb legiruotos terpės turi didelį stiprinimo juostos plotį. Tai leidžia gauti 50 fs trukmės pulsus modų sinchronizacijos režime. Šilumos sukelta depoliarizacija ir termooptinės savybės seskvioksidiniuose kristaluose buvo tiriamos straipsniuose [81,82,83]. Vadinasi, rastos išraiškos turėtų padėti toliau tyrinėti šio tipo kristalus nedarant panašių klaidų.

Reikia pažymėti, kad elastooptinės ir piezooptinės matricos  $m_3$  ir  $23$  klasių kristalams yra nesimetrinės ir turi keturis nepriklausomus koeficientus. Naudojant [20] pasiūlytą metodą ir išraiškas (3), reikalinga lygybė

$$\beta_{\sigma} = \beta_{\varepsilon} - \alpha_T n_0^3 (p_{11} + p_{12} + p_{13}) / 2 \quad (5.31a)$$

yra lengvai randama. Naudojant sąryšį  $p_{mn} = \pi_{mk} c_{kn}$  [74], lygtis (5.44a) gali būti perrašoma

$$\beta_{\sigma} = \beta_{\varepsilon} - (\alpha_T n_0^3 / 2) (\pi_{11} + \pi_{12} + \pi_{13}) (c_{11} + 2c_{12}), \quad (5.31b)$$

kur  $c_{ij}$  yra standumo tenzorius komponentės.

Rezultatas iš [20] seka iš lygčių (5.31), jeigu prilyginame  $p_{13} = p_{12}$  [74]. Taip pat matosi, kad išraiška (5.31) nepriklauso nei nuo  $p_{44}$ , nei nuo  $\pi_{44}$ . Taip yra dėl to, kad tik principiniai įtempiai ir deformacijos atsiranda laisvo šiluminio plėtimosi arba hidrostatinio slėgio atveju kubiniuose kristaluose. Deja, nepavyko rasti jokių duomenų apie elastooptinių ar piezooptinių koeficientų vertes tokiuose kristaluose.

#### 5.4. Plokščiujų įtempių ir plokščiujų deformacijų artiniai

Duhamel-Neumann lygybės izotropiniam atvejui susiprastina į:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \tilde{T} \delta_{ij} \quad (5.32)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \alpha_T \tilde{T} \delta_{ij} \quad (5.33)$$

Ašinės simetrijos atveju poslinkių ir deformacijų komponentės gali būti užrašomos:

$$\mathbf{u}(r, z) = u_r(r, z) \hat{\mathbf{r}} + u_z(r, z) \hat{\mathbf{z}},$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{z\theta} = 0, \quad (5.34)$$

kur  $\hat{\mathbf{r}}$  ir  $\hat{\mathbf{z}}$  yra vienetiniai palei  $r$  ir  $z$  kryptis. Tada įtempius galima išsireikšti per deformacijas:

$$\sigma_{rr} = \tilde{E}[(1-\nu)\varepsilon_{rr} + \nu(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) - (1+\nu)\alpha_T \tilde{T}], \quad (5.35a)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \tilde{E}[(1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta} + \nu(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz}) - (1+\nu)\alpha_T \tilde{T}], \quad (5.35b)$$

$$\sigma_{zz} = \tilde{E}[(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) - (1+\nu)\alpha_T \tilde{T}], \quad (5.35c)$$

$$\sigma_{rz} = 2\mu \varepsilon_{rz}, \quad (5.35d)$$

kur  $\tilde{E} = E[(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}$ . Pusiausvyros lygtys skersine ir išilgine kryptimis atmetus kūno ir inercijos narius:

$$\sigma_{rr,r} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/r + \sigma_{rz,z} = 0, \quad (5.36a)$$

$$\sigma_{zz,z} + \sigma_{rz}/r + \sigma_{rz,z} = 0, \quad (5.36b)$$

kur kablelis parodo diferencijavimą atitinkamo kintamojo atžvilgiu. Naudojant išraiškas (5.35), pusiausvyrinės lygtys (5.36) gali būti perrašytos per poslinkius [78]:

$$2(1-\nu)[u_{r,rr} + u_{r,r}/r - u_r/r^2] + \{(1-2\nu)u_{r,zz} + u_{z,rz}\} = 2(1+\nu)\alpha_T \tilde{T}_{,r}, \quad (5.37a)$$

$$\{u_{r,rz} + u_{r,z}/r + (1-2\nu)[u_{z,rr} + u_{z,r}/r]\} + 2(1-\nu)u_{z,zz} = 2(1+\nu)\alpha_T \tilde{T}_{,z}, \quad (5.37b)$$

Pritaikius plokščiujų deformacijų ir plokščiujų įtempių artinius mes galime išsireikšti įtempius per vietinį temperatūros pokytį  $\tilde{T}(r) = T(r) - T_r$  bei vidutinius temperatūros pokyčius  $r$  ir  $R$  (strypo spindulys) spindulio apskritimuose  $T^{(r)} = \frac{2}{r^2} \int_0^r \tilde{T}(r) r dr$ . Ypač paprastas užrašymas gaunamas įvedus papildomą žymėjimą

$$\hat{T}(r) = T^{(R)} - \tilde{T}(r), \quad \check{T}(r) = T^{(r)} - \tilde{T}(r) = -\frac{1}{r^2} \int_0^r \frac{d\tilde{T}(r)}{dr} r^2 dr. \quad (5.38)$$

Plokščiujų deformacijų atveju įtempius galima išsireikšti kaip:

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \alpha_T E_\nu (\hat{T} - \check{T})/2 \quad (5.39a)$$



$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \alpha_T E_\nu (\widehat{T} + \check{T}) / 2 \quad (5.39b)$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \alpha_T E_\nu \widehat{T} \quad (5.39c)$$

Atitinkamai plokščiųjų įtempių artinyje:

$$\sigma_{rr}^{(2)} = \alpha_T E (\widehat{T} - \check{T}) / 2 \quad (5.40a)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(2)} = \alpha_T E (\widehat{T} + \check{T}) / 2 \quad (5.40b)$$

$$\sigma_{zz}^{(2)} = 0 \quad (5.40c)$$

Atitinkamas išraiškas galima gauti ir deformacijoms priklausomai nuo pasirinkimo. Plokščiųjų įtempių ir plokščiųjų deformacijų artiniuose deformacijų ir įtempių tenzoriai turi tik įstrižainės komponentes [31]. Mes toliau nagrinėsime kristalus išaugintus [111] kryptimi. Tada išraiškos lūžio rodikliui plokščiųjų įtempių ir plokščiųjų deformacijų artiniuose bus formos [31]:

$$n_{r,\theta}^{(j)} = n_0 - A_1^{(\sigma)} T^{(R)} + [\beta_\sigma + A_1^{(\sigma)}] \check{T} \pm A_2^{(\sigma)} \check{T}, \quad (5.41)$$

kur viršutinis ir apatinis  $\pm$  ženklai atitinką radialinę ir tangentinę lūžio rodiklio komponentę, koeficientai  $A_1^{(\sigma)}$ ,  $A_2^{(\sigma)}$  priklauso nuo to, kuris artinys yra pritaikomas. Plokščiųjų deformacijų atveju  $j = 1$  ir koeficientai:

$$A_1^{(\sigma_1)} = \frac{n_0^3 \alpha_T E}{12(1-\nu)} (4\pi_{11} + 8\pi_{12} - \pi_{44}), \quad (5.42a)$$

$$A_2^{(\sigma_1)} = \frac{n_0^3 \alpha_T E}{12(1-\nu)} (\pi_{11} - \pi_{12} + 2\pi_{44}), \quad (5.42b)$$

Tuo tarpu plokščiųjų įtempių artinyje ( $j = 2$ ):

$$A_1^{(\sigma_2)} = \frac{n_0^3 \alpha_T E}{12} (2\pi_{11} + 4\pi_{12} + \pi_{44}), \quad (5.43a)$$

$$A_2^{(\sigma_2)} = \frac{n_0^3 \alpha_T E}{12} (\pi_{11} - \pi_{12} + 2\pi_{44}), \quad (5.43b)$$

Čia  $E$  yra Young'o modulis, o  $\sigma$  prie koeficientų  $A_1^{(\sigma_{1,2})}$  šiame žymėjime reiškia, kad lygybėje buvo naudotas termooptinis koeficientas  $\beta_\sigma$ , tačiau atitinkamai gali būti panaudotas ir koeficientas  $\beta_\varepsilon$  su atitinkamom konstantom  $A_1^{(\varepsilon_{1,2})}$ .

## 5.5. Fotoelastinių koeficientų naudojimas

Pabaigus termooptinio ir fotoelastinio efektų aptarimą, nesunku pamatyti, kad darbuose [79,80] yra neteisingai daroma prielaida, kad bendros deformacijos  $\varepsilon_{kl}$  yra lygios

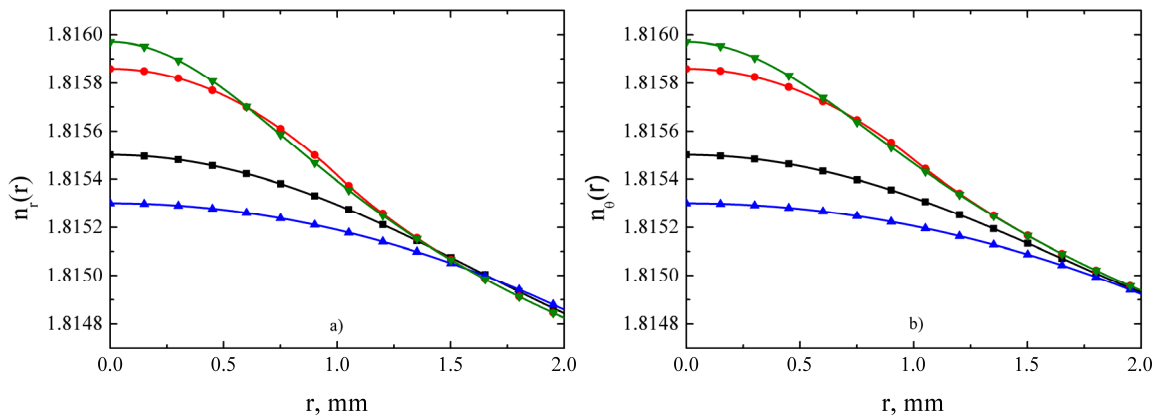
$\varepsilon_{kl} = (\partial u_k / \partial x_l + \partial u_l / \partial x_k) / 2 + \varepsilon_{kl}^T$  (lygtis (2) [79,80]) su nereikalingu laisvo plėtimosi nariu. Vadinasi, išraiškos (3) ir (4) [79,80] yra teisingos, tik jeigu šis narys neįskaičiuojamas. Taip pat keista, kad [45] autoriai, net ir aiškiai parodę skirtumą tarp elastinės  $\varepsilon_{kl}^\sigma$  ir  $\varepsilon_{kl}$  bendros deformacijos, nepastebi, kad išraiškos (1b) bus tapačios, jeigu  $\varepsilon_{kl}^\sigma$  būtų pakeistas į  $\varepsilon_{kl}^\sigma$  [20].

Termooptinis ir šiluminio plėtimosi koeficientai YAG kristale buvo išmatuoti daugybę kartų ir jų vertės yra plačiai išsiskirsčiusios:  $\beta_\sigma = (7.3 \div 12.1) \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  ir  $\alpha_T = (5.8 \div 9.9) \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  ties 300 K. Tuo tarpu [84] yra vienintelis literatūroje [6,8-10,12,13,16-19,30, 32-37] minimas darbas elastooptinių koeficientų vertėms:  $p_{11} = -0.029$ ,  $p_{12} = 0.0091$ ,  $p_{44} = -0.0615$ . Tačiau skirtingos vertės  $p_{11} = 0.060$  ir  $p_{12} = 0.022$  buvo išmatuotos darbe [85]. Kiek mums žinoma, rezultatai iš [85] nebuvo niekur aptarti arba atmesti. Be to, vėliau buvo nustatyta [86], kad “Introduction of the ions  $\text{Er}^{3+}$ ,  $\text{Nd}^{3+}$ ,  $\text{Cr}^{3+}$ ,  $\text{Sc}^{3+}$  into the garnet hosts significantly increases the PE interaction parameter in comparison with the original crystals.” Er:YAG kristalui buvo gautos šios vertės:  $p_{11}^* = -0.081$ ,  $p_{12}^* = -0.035$ ,  $p_{44}^* = -0.082$ . Kitiems kristalams gautos elastooptinių parametrų vertės buvo cituojamos [32], tačiau YAG kristalui buvo naudojami senesni duomenys iš [84]. Matosi, kad elastooptinių koeficientų vertės skirtinguose matavimuose žymiai skiriasi ir gali net keisti ženklą. Iš principo neatrodo, kad legiravimas turėtų smarkiai keisti šių koeficientų vertes, bet jeigu ne, tai būtų labai reikalingi priklausomybės nuo legiravimo matavimai. Neseniai atspausdintame straipsnyje [87], šios vertės buvo gautos polikristaliniam YAG:  $p_{11}^{pc} = -0.0627$ ,  $p_{12}^{pc} = 0.0260$ ,  $p_{44}^{pc} = -0.0444$ . Šios vertės netenkina lygybės  $p_{44} = (p_{11} - p_{12}) / 2$  izotropiniams kūnams [74]. Tokia situacija galima polikristaliniams agregatams, bet nelabai tikėtina polikristalams, kurių grūdėliai yra daug mažesni, nei bangos ilgis, kuriam  $p_{ij}$  yra nustatinėjamas [88].

Taigi, skirtumas  $\beta_\alpha = \beta_\varepsilon - \beta_\sigma = \alpha_T n_0^3 (p_{11} + 2p_{12}) / 2$  keičiasi ne tik verte, bet ir ženklu, kai skirtingos vertės iš [84-86] yra naudojamas Santykio vertės yra lygios 0.04, 0.4 ir 0.6, jeigu duomenys yra paimti iš atitinkamai [84,85,86]. Skaičiavimuose buvo imama didžiausia  $\alpha_T$  ir mažiausia  $\beta_\sigma$  vertė. Tačiau mikroskopinė lygybė pasiūlyta [6] tarp termooptinių koeficientų YAG kristalui duoda labai aukštą  $\beta_\varepsilon = 31.5 \times 10^{-6}$  vertę palyginus su jų naudotu  $\beta_\sigma = 9 \times 10^{-6}$ . Toliau skaičiavimuose naudosime įprastus elastooptinius koeficientus iš [84], bei palyginimui skirtingą rinkinį Er:YAG legiruotam kristalui iš [86], kurį žymėsime žvaigždute.

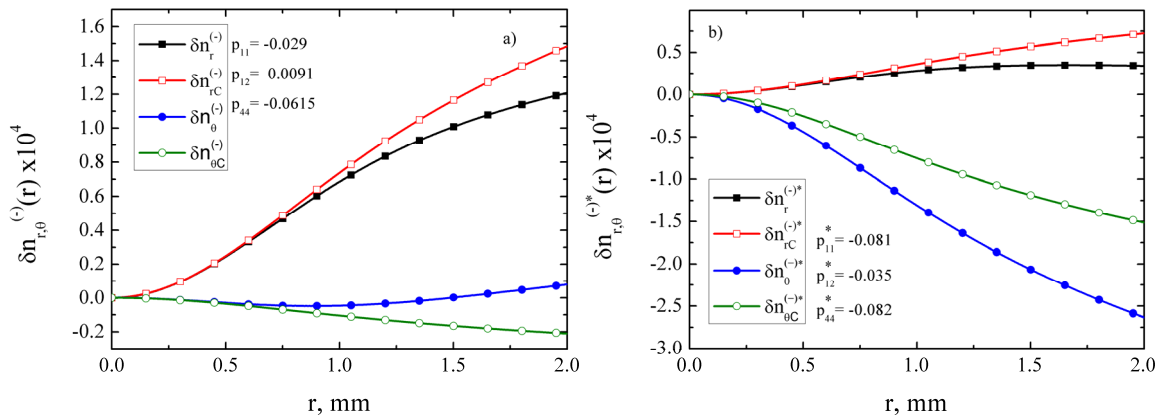
Taigi, žinodami temperatūros pasiskirstymą kristale, bei kristalo mechaninius ir fotoelastinius parametrus, galime apskaičiuoti lūžio rodiklio pokytį plokščiųjų deformacijų arba plokščiųjų įtempių artiniuose. Šilumos problemą galima išspręsti numeriniais metodais, tačiau padarius prielaidą, kad šilumos nuvedimas vyksta tik radialine kryptimi, galima nesunkiai rasti analitinius sprendinius

įvairiems šiluminio apkrovimo pasiskirstymams. 5.1 pav. pavaizduoti šiluminės lygties sprendiniai su ta pačia bendra įvestos šilumos galia  $P_h = 60$  W cilindriniam 10mm ilgio ir 4mm skersmens YAG kristale. Skaičiavimuose buvo naudojami šie YAG medžiagos parametrai: šiluminis laidumas  $k_0 = 0.105$  W/cmK, šilumos nuvedimo per sienelės koeficientas W/cm<sup>2</sup>K. Gausinio ir stačiakampio kaupinimo atveju  $r_p = w_p = 1$  mm. Galima pastebėti, kad temperatūra ties strypo kraštais nepriklauso, nuo šiluminio apkrovimo formos, bet tik nuo bendros jo galios ir šilumos nuvedimo koeficiento  $h$ . Skersiniai temperatūros gradientai yra skirtingi įvairių formų kaupinimams, vadinasi šilumos sukelti įtempiai, deformacijos ir lūžio rodiklio pokyčiai taip pat smarkiai priklausys nuo kaupinimo formos.



5.1 pav. Skersinis lūžio rodiklio pasiskirstymas a) radialinei ir b) tangentinei poliarizacijai.

Lūžio rodiklio pasiskirstymai radialine ir tangentine kryptimis pavaizduoti 5.1 pav. Jie buvo apskaičiuoti naudojant lygtį (5.41), elastooptinius koeficientus iš [84], taip pat  $\beta_\sigma = 8.4$  ppm/K ir  $\alpha_T = 6.4$  ppm/K ties 300K iš [56]. Galima pastebėti, kad ties strypo ašimi  $n_r(0) = n_\theta(0)$ , kaip ir turėtų būti.



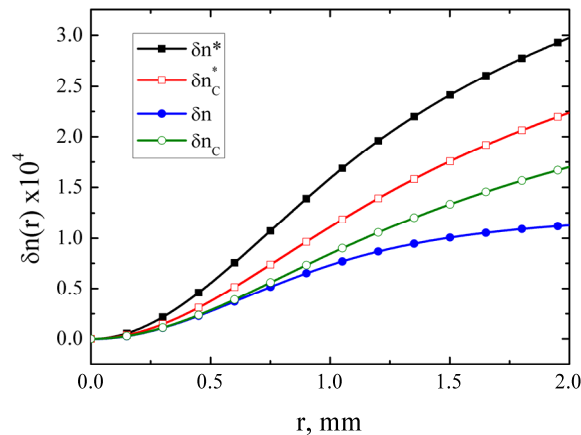
5.2 pav. Fotoelastinė lūžio rodiklio pokyčio dalis suskaičiuota pagal pilną ir supaprastintą išraišką su a) standartiniais ir b) kitais elastooptiniais koeficientais.

Bendru atveju, lūžio rodiklis nėra tiesiogiai proporcingas temperatūros skirstiniui. Tik parabolinio skirstinio atveju galima naudoti supaprastintą išraišką:

$$\delta n_{r,\theta C}^{(1,2)}(r) = (\beta_\sigma + 2n_0^3 \alpha_T C_{r,\theta}^{(\sigma 1,2)}) \delta T(r), \quad (5.44)$$

kur  $\delta T(r) = T(0) - T(r)$  ir  $C_{r,\theta}^{(\sigma 1,2)}$  yra taip vadinami fotoelastiniai koeficientai ir 1 nurodo plokščiųjų deformacijų artinį, o 2 – plokščiųjų įtempių. Atitinkamai  $\sigma$  reiškia, kad formulėje naudojamas  $\beta_\sigma$  koeficientas. Jį pakeitus į  $\beta_\varepsilon$ , lygybė galios, jei atitinkamai  $C_{r,\theta}^{(\sigma 1,2)}$  bus pakeistas į  $C_{r,\theta}^{(\varepsilon 1,2)}$ .

Mūsų atveju termooptinis efektas užgožia fotoelastinį efektą, todėl palyginsime įtempių sukeltą lūžio rodiklio pokyčio dalį pažymėtą minusu  $\delta n_{r,\theta}^{(-)}(r)$ ,  $\delta n_{r,\theta C}^{(-)}(r)$ . 5.2 pav. pavaizduotas palyginimas gausiniam kaupinimui apskaičiuotų pagal formulę (5.41) ir pagal supaprastintą formulę (5.44) pažymėtą papildomu  $C$ :  $\delta n_{r,\theta C}^{(-)}(r)$ . Pastaruoju atveju lūžio rodiklis didėja monotoniškai su radialine koordinate, nes temperatūra taip pat didėja monotoniškai. Naudojant standartinius elastooptinius koeficientus  $C_r^{(\sigma 1)} = 0.0176$ ,  $C_\theta^{(\sigma 1)} = -0.0025$ , o naudojant kitus koeficientus –  $C_r^{(\sigma 1)*} = 0.0086$ ,  $C_\theta^{(\sigma 1)*} = -0.0179$ . Tuo tarpu  $\delta n_\theta^{(-)}(r)$  radialinė priklausomybė nemonotoninė ir netgi keičia ženklą. Taip yra dėl to, kad įtempiai priklauso ne tik nuo vietinės temperatūros, bet ir nario  $\tilde{T}(r)$  priklausančio nuo integruoto temperatūros gradiento.



5.3 pav. Dvejopas lūžimas suskaičiuotas pagal pilną ir supaprastintą išraišką, bei su standartiniais ir kitokiais elastooptiniais koeficientais.

Šis skirtumas tarp skirtingų metodų neturi didelės įtakos šiluminio lęšio skaičiavimui, nes  $\beta_\sigma$  koeficiento dalis žymiai didesnė ir užgožia antrąjį narį lygybėje (5.44). Tačiau dvigubas lūžis priklauso nuo lūžio rodiklių radialinei ir tangentinei komponentėms skirtumo  $\delta n(r) = n_r^{(1)}(r) - n_\theta^{(1)}(r)$  ir  $\beta_\sigma$  narys išsiprastina. 5.3 pav. pavaizduotas dvejopas lūžis skirtingiems skaičiavimo metodams ir skirtingiems elastooptiniams koeficientams. Matosi, kad ties strypo kraštais skirtumas gali būti trys kartai. Vadinasi, svarbu žinoti tiksliai elastooptinių koeficientų vertes.

## 5.6. Apibendrinti termooptiniai koeficientai

Apibendrinti termooptiniai koeficientai buvo pasiūlyti stačiakampiui aktyviojo elemento kaupinimui [43]. Optinio kelio skirtumas (optical path difference):  $OPD = \Delta TL \chi$  kur  $\Delta T$  yra temperatūrų skirtumas tarp centro ir krašto, o termooptinis koeficientas  $\chi$  įtraukia optinio kelio skirtumą atsiradusį dėl lūžio rodiklio pokyčio ir dėl strypo sienelių išgaubimo  $\chi = dn/dT + (n-1)(1+\nu)\alpha_T + n^3\alpha_T C_{r,\theta}$ . Tačiau tokiam pasiūlyme yra keletas trūkumų. Visų pirma, kaip matėme lūžio rodiklis yra nelokaliam proporcingas temperatūros pokyčiui ir toks koeficientas yra tinkamas nebent paraboliniam temperatūros skirstiniui. Reikėtų nurodyti koks  $dn/dT$  yra naudojamas, nes nuo to priklauso, kaip skačiuoti  $C_{r,\theta}$  koeficientus. Be to išsipūtimo narys yra gautas iš plokščiųjų įtempių artinio, kuris taikytinas ploniems diskams. Dalis trūkumų buvo vėliau panaikinta, įvedus papildytą išraišką [6]  $\chi_{r,\theta}^{(1,2)} = \beta_\sigma + C_{bg}\chi_{bg}^{(1,2)} + \chi_{pe}^{(1,2)}$ . Išsipūtimo koeficiento  $C_{bg}$  vertė priklauso nuo naudojamo artinio.  $C_{bg} = C^{(1)} = 0$  plokščiųjų deformacijų atveju ir  $C_{bg} = C^{(2)} = 1.0$  plokščiųjų įtempių atveju;  $C_{bg} = C^{(P)} = 1/(1+\nu)$ , jeigu leidžiamas laisvas viso strypo plėtimasis [12]; Koechner'is siūlė vartoti sąryšį  $C_{bg} = C^{(K)} = 2R/[L(1+\nu)]$  nustatytą pagal eksperimentinius rezultatus [10];  $C_{bg} = C^{(H)} = 1/(1-\nu)$ , jeigu atmetamas  $\nabla \times \nabla \times \vec{u}$  narys pusiausvyros lygtyje [89].

Taigi, išraiška  $OPD_{r,\theta}(r) = \chi_{r,\theta}^{(C)} L \delta T(r)$ , kur  $\chi_{r,\theta}^{(C)} = \beta_\varepsilon + \chi_{bg}^{(2)} + 2n_0^3 \alpha_T C'_{r,\theta}$ , buvo pasiūlyta Chénais et al. atvejui su galiniu kaupinimu, nepaisant kristalo ilgio ([6], p.119). Turint omeny sąryšį tarp  $\beta_\sigma$  ir  $\beta_\varepsilon$ , lygybė  $\chi_{r,\theta}^{(C)} \equiv \chi_{r,\theta}^{(2)} = \beta_\sigma + \chi_{bg}^{(2)} + \chi_{pe}^{(2\sigma)}$  seka iš šio pasiūlymo, kur  $\chi_{pe}^{(2\sigma)} = 2n_0^3 \alpha_T C_{r,\theta}^{(\sigma 2)}$  yra fotoelastinė dalis. Taigi, optinio kelio skirtumai plokščiųjų deformacijų (1) ir plokščiųjų įtempių (2) artiniuose duoti

$$OPD_{r,\theta}^{(1,2)}(r) = \chi_{r,\theta}^{(1,2)} L \delta T(r), \quad (5.45)$$

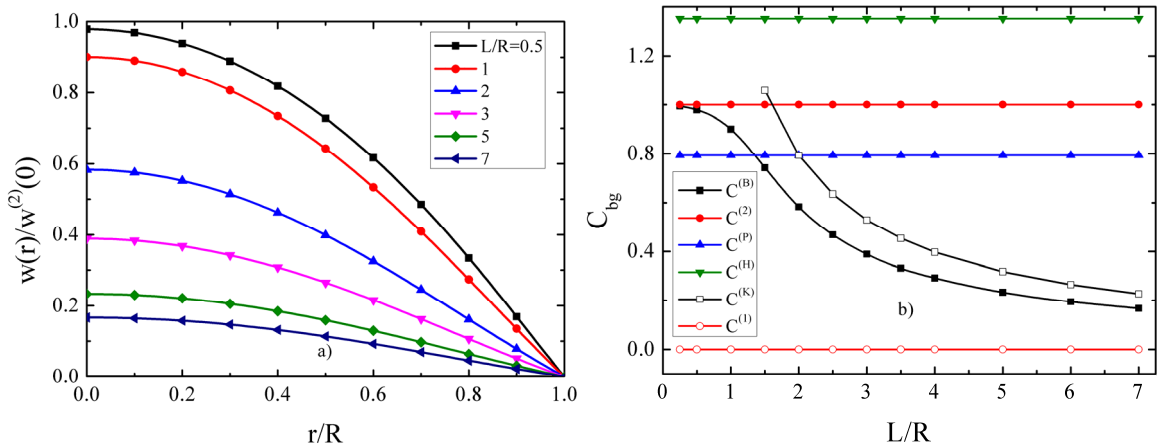
kur įvedami apibendrinti termooptiniai koeficientai  $\chi_{r,\theta}^{(1,2)} = \beta_\sigma + C_{bg}\chi_{bg}^{(1,2)} + \chi_{pe}^{(1,2)}$ . Naudojant sąryšį (5.31) ir apibrėžimą  $C'_{r,\theta} = C_{r,\theta}^{(\varepsilon 2)}$ , galima gauti naujas išraiškas

$$C_r^{(\sigma 2)} = \frac{p_{11}(1-3\nu) + p_{12}(3-5\nu)}{16}, \quad (5.46a)$$

$$C_\theta^{(\sigma 2)} = \frac{(5-7\nu)p_{11} + (7-17\nu)p_{12} + 8(1+\nu)p_{44}}{48}. \quad (5.46b)$$

Tada, naudojant du skirtingus fotoelastinių koeficientų rinkinius [84,86], buvo gautos šios fotoelastinių koeficientų vertės:  $C_r^{(\sigma 2)} = 0.0033$ ,  $C_\theta^{(\sigma 2)} = -0.0116$  ir  $C_r^{(\sigma 2)*} = 0.0329$ ,  $C_\theta^{(\sigma 2)*} = 0.0133$ . Nesunku parodyti, kad  $C_B^{(2)} = (C_\theta^{(\sigma,\varepsilon 2)} - C_r^{(\sigma,\varepsilon 2)})/2 = (1-\nu)C_B^{(1)}$ , tai yra dvejojo lūžio

parametras plokščiųjų įtempių artinyje yra 26% mažesnis, nei plokščiųjų deformacijų artinyje. Taip pat seka, kad kitam elastooptinių koeficientų rinkiniui sukeltas dvejetainis lūžis yra 30% didesnis ( $C_B^{(1,2)*} / C_B^{(1,2)} = 1.32$ ), jeigu kiti parametrai laikomi pastovūs.



**5.4 pav. Normalizuotas išsipūtimas įvairių ilgių strypams ir išsipūtimo priklausomybė nuo ilgio pagal įvairius artinius.**

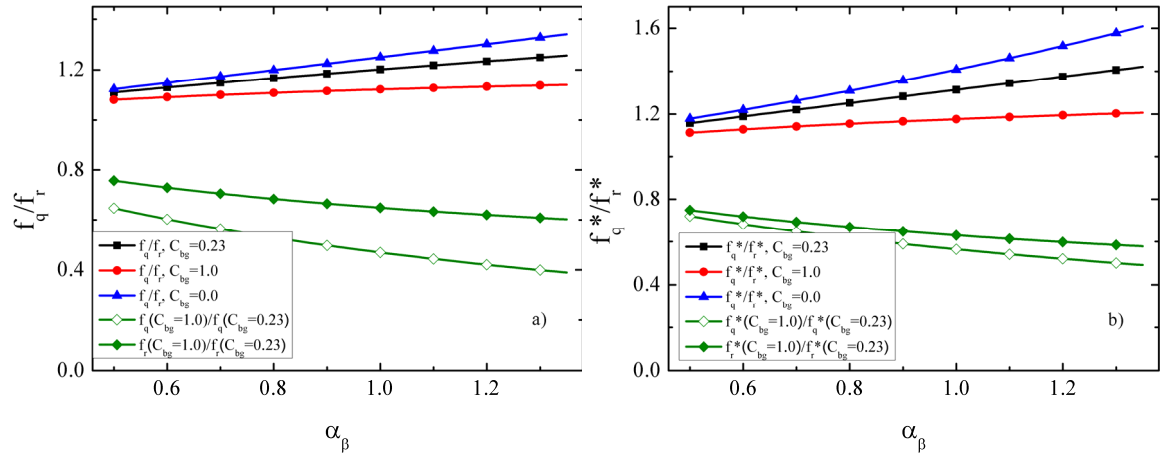
Tam kad būtų galima įvertinti išsipūtimo nario koeficientą numeriniai skaičiavimai buvo atlikti su COMSOL Multiphysics programa paraboliniam temperatūros pasiskirstymui ir įvairiems strypo ilgiams su spinduliu  $R=2\text{mm}$  (5.4 pav.). Sienelių išsipūtimas  $w(r)$  buvo normalizuotas į maksimalų poslinkį  $w^{(2)}(0) = (1+\nu)\alpha_T |T_2|/2$  pagal plokščiųjų įtempių artinį. Paveikslėlyje matosi, kad išsipūtimas yra netoli plokščiųjų įtempių artinio verčių, kai  $L/R < 0.5$  ir įsotina, kai  $L > 2R$ . Vadinasi santykis  $C^{(B)} = w(0)/w^{(2)}(0)$  yra arti vieno tik ploniems diskams. Didėjant strypo ilgiui koeficientas mažėja greičiau, nei pagal Koechner'io pasiūlytą taisyklę. Tuo tarpu siūlymas  $C_{bg} = C^{(H)}$  iš viso toli nuo skaitinių rezultatų.

Paraboliniui temperatūros pasiskirstymui  $\tilde{T}(r) = T_0 + T_2(r/R)^2$  optinio kelio pasiskirstymas taip pat parabolinis  $OPD_{r,\theta}^{(1,2)}(r) = r^2/2f_{r,\theta}^{(1,2)}$ , kur  $f_{r,\theta}^{(1,2)}$  yra židinio nuotoliai radialinės ir tangentinės poliarizacijos spinduliams. Optinė galia yra išreiškiamą kaip atvirkštinis židinio nuotolis  $D_{r,\theta}^{(1,2)} = 1/f_{r,\theta}^{(1,2)} = (-2LT_2/R^2)\chi_{r,\theta}^{(1,2)}$  ir yra proporcinga apibendrintam termooptiniam koeficientui. Vadinasi, skirtingų poliarizacijų židinių nuotolių santykis gali būti išreikštas kaip:

$$\frac{f_{\theta}^{(1,2)}}{f_r^{(1,2)}} = \frac{1 + \alpha_{\beta}(n_0 - 1)(1 + \nu)C_{bg} + \alpha_{\beta}2n_0^3C_r^{(\sigma 1,2)}}{1 + \alpha_{\beta}(n_0 - 1)(1 + \nu)C_{bg} + \alpha_{\beta}2n_0^3C_{\theta}^{(\sigma 1,2)}}, \quad (5.47)$$

kur  $\alpha_{\beta} = \alpha_T / \beta_{\sigma}$  vertės gali būti tarp 0.48 iki 1.36 pagal duomenis iš įvairių šaltinių. Iš (5.47) matosi, kad šis santykis pasiekia maksimalią vertę plokščiųjų deformacijų artinio atveju, kai strypo sieneles laikomos plokščios ir minimalią vertę plokščiųjų įtempių atveju, kai  $C_{bg} = 1$ . Aišku strypo formos

kristalui reikėtų naudoti  $C_{r,\theta}^{(\sigma^1)}$  koeficientus. Židinių santykiai strypams su  $R=2$  ir  $L=10$  mm (su atitinkamu  $C_{bg}=0.23$ ) yra pavaizduoti 5.5a ir 5.5b pav., kai elastooptiniai koeficientai atitinkamai iš [84] ir [86] buvo panaudoti. Matosi, kad šis santykis neviršija 1.34 visoms galimoms  $\alpha_\beta = \alpha_T / \beta_\sigma$  vertėms.



5.5 pav. Radialinės ir tangentinės poliarizacijos židinių ilgių santykis įvairiems artiniams priklausomai nuo šiluminio plėtimosi koeficiento santykio su termooptiniu koeficientu su a) standartiniais ir b) kitais elastooptiniais koeficientais.

**5 skyriaus išvados.** Nuoseklus fotoelastinio efekto ir plokščiųjų įtempių arba plokščiųjų deformacijų pritaikymas šiluminio lūžio rodiklio pokyčio aprašymui buvo detalai išanalizuotas atvejui su ašinės simetrijos šilumos apkrovimu. Analitinės išraiškos tarp termooptinių koeficientų ties nuliniiais įtempiais ir ties nulinėmis deformacijomis yra surasti visų klasių kubiniams kristalams. Šie rezultatai gali būti įdomūs tyrinėjantiems šiluminius efektus daug žadančiuose seskvioksidiniuose m3 klasės kristaluose. Parodyta, kad santykinis skirtumas tarp termooptinių koeficientų ties nuliniiais įtempiais ir ties nulinėmis deformacijomis yra žymiai didesnis jeigu naudojamas skirtingas elastooptinių koeficientų rinkinys, negu įprastas, vienintelis literatūroje cituojamas, koeficientų rinkinys.

Analitinės išraiškos šiluminiam lūžio rodiklio pokyčiui [111] augimo kristale su bendru ašinės simetrijos kaupinimu yra detalai išanalizuotos. Nesusipratimai susiję su taip vadinamais fotoelastiniais koeficientais buvo išaiškinti. Parodyta, kad naudojant šiuos koeficientus įvairiems kaupinimo pasiskirstymams gali įnešti žymius netikslumus šilumos sukeltam dvejetainiam lūžiui palyginus su nuosekliai pritaikomu plokščiųjų įtempių arba plokščiųjų deformacijų artiniu.

Išsipūtimo nario indėlis į apibendrintą koeficientą yra skaitiškai išnagrinėtas. Pastebėta, kad fotoelastinio ir apibendrinto termooptinio koeficientų naudojimas nėra tiek naudingas, kiek manyta. Taip pat parodyta, kad įprastas apibendrinto termooptinių koeficientų naudojimas pervertina šiluminio lūžio optinę galia, kai yra taikomas plokščiųjų įtempių artinys strypams su ilgiu didesniu, nei jų diametras.

## 6. APIE GALIMYBĘ PANAİKINTI ŠL SFERINĘ ABERACIJĄ

### 6.1. Šiluminio laidumo koeficiento įnešta aberacija

Iš gautų sprendinių (4.2 pav.) matosi, kad skersinis temperatūros pasiskirstymas turės ketvirto laipsnio narius ( $T_4(b_2 = 0) \neq 0$ ) net tolydžiam kaupinimo šaltiniui, jeigu temperatūrinė šiluminio laidumo koeficiento priklausomybė yra įskaityta. Taigi net lūžio rodiklis priklausytų tiesiškai nuo temperatūros ( $dn/dT \equiv (\partial n / \partial T)_{\sigma=0} \equiv \beta(T)$ , nuliniai įtempiai) [20] įgaunamas neparabolinis optinio kelio skirtumo (OKS) pasiskirstymas, kai zonduojantis pluoštas sklinda aktyviuoju elementu

$$\delta\Lambda(r) = \Lambda(0) - \Lambda(r) \approx L\beta\delta T(r). \quad (6.1)$$

Čia  $\Lambda(r) = n(T(r))L$  yra optinio kelio ilgis ties radialine koordinate  $r$ ,  $L$  yra strypo ilgis, o lūžio rodiklio priklausomybę nuo temperatūros imame kaip  $n(T(r)) = n(T_r) + \beta[T(r) - T_r]$ .  $\delta$  žymi skirtumą, nuo centro  $\delta T(r) = T(0) - T(r)$ , netaisyti su pokyčiu nuo pradinės temperatūros ar pradinio lūžio rodiklio. Tada išskleidžiant OKS per Teiloro eilutę gauname

$$\delta\Lambda(r) = \frac{r^2}{2f_T} + C_4 r^4 + \dots, \quad (6.2)$$

kur

$$1/f_T = -2L\beta T_2 / R^2, \quad C_4 = -L\beta T_4 / R^4. \quad (6.3)$$

Taigi, sąlyga

$$T_4 = T_2 b_2 / 4 + \eta^2 \xi T_c / 2 = 0 \quad (6.4)$$

turi būti patenkinta, kad būtų eliminuota sferinė aberacija ( $C_4 = 0$ ). Nuo temperatūros nepriklausančiam šiluminio laidumo koeficientui ( $\xi = 0$ ) sąlyga (6.4) yra patenkinama, tik kai šiluminis apkrovimas turi  $b_2 = 0$ . Toliau analizuosime atvejį, kai  $\xi = 1.0$ , nes bendram  $\xi \neq 0, \xi \neq 1$  lygybės (6.4) sprendinys bus daug sudėtingesnis, o  $\xi = 1.0$  geriausiai aprašo šiluminio laidumo koeficiento kitimą mus dominančiame temperatūrų intervale. Iš (4.21) gauname, kad (6.4) sprendimas yra  $b_2 = 2\eta$ . Ši lygybė turi dvi šaknis, tačiau tik viena iš jų

$$b_2^* = \sqrt{P_h / (k_0 T_r \pi L) + 1} - 1 \quad (6.5)$$

yra fiziškai reali, (turint omeny, kad šilumos kaupinimas negali būti neigiamas) ir panaikina sferines aberacijas [14,21]. Reikia pažymėti, kad ši vertė nepriklauso nuo koeficiento  $h$  vertės. Nagrinėjamam YAG strypui su  $P_h = 60$  kaupinimo šiluminiu apkrovimu parabolės koeficientas  $b_2^* = 0.33$  yra reikalingas sferinės aberacijos panaikinimui.



## 6.2. Šiluminio lęšio židinio apibrėžimas

Reikia pažymėti, kad originalaus darbo [21] autoriai apibrėžia laužiamąją gebą  $D$  iš pradžių “by extending the relationship between quadratic temperature profiles and the refractive power

$$D = -L \frac{dn}{dT} \frac{d^2T}{dr^2} \quad (6.6/9)$$

to arbitrary temperature profiles. In general,  $D$  is a function of the radius which means that the phase shift exhibits higher order radial terms than quadratic ones. Having calculated  $D(r)$  with equation (20a/9) the phase shift  $\Phi$  per transit is then determined by

$$\Phi(r) = \kappa \frac{D(r)r^2}{2} \quad (6.7/10)$$

with  $\kappa$ : wave number.” Už brūkšnelių duotas numeravimas cituojamame darbe. Paaiškinimas šio apibrėžimo buvo duotas monografijoje [14, p.392]: “For a non-parabolic temperature profile, the refractive power is a function of the radius. This means that an incident ray parallel to the optical axis at a distance  $r$  will intersect the optical axis at a distance  $1/D(r)$  from the principal axis of the thermal lens.” Šiuose apibrėžimuose yra keletas netikslumų. Nesunku pastebėti, kad net temperatūriškai nepriklausančiam šiluminio laidumo koeficientui apibrėžimas (4.7/10) duoda

$$\delta\Lambda^*(r) = \frac{\lambda\Phi(r)}{2\pi} = -L\beta \left[ \frac{T_2}{R^2} + 6\frac{T_4}{R^4}r^2 \right] r^2 \quad (6.8)$$

ir nesutampa su (4.2-3). Tačiau šiuo atveju sferinės aberacijos panaikinimui reikalavimas išlieka tas pats  $T_4 = 0$ . Taigi ir rezultatas gaunamas tas pats (6.5). Bet kai įskaičiuojame temperatūrinę termooptinio koeficiento  $\beta(T)$  priklausomybę rezultatas jau bus skirtingas, kaip kad bus vėliau parodyta. Be to, galima parodyti, kad geometrinis spindulys, krentantis lygiagrečiai optinei ašiai, kirs optinę ašį ties [5,47]:

$$z_f(r_0) \cong r_0 \left( \frac{\partial\delta\Lambda(r)}{\partial r} \right)_{r_0}^{-1}, \quad (6.9)$$

kas nesutampa su  $1/D(r)$  iš duotojo apibrėžimo. Iš (6.2) seka

$$f_T = \left( \frac{\partial^2 OPD}{\partial r^2} \right)_{r=0}^{-1} = -\frac{R^2}{LT_2(dn/dT)}. \quad (6.10)$$

Reikia pastebėti, kad taip įvesti židinio nuotolis skiriasi nuo židinio nuotolio gauto iš matricinės optikos storiems lęšiams [7]. Tačiau pakankamai trumpiems AE šis skirtumas nėra reikšmingas. Trumpiems AE, šiluminio lęšio židinio nuotolis  $f_T$  yra paprastai suprantamas kaip nuotolis tarp kristalo išėjimo galo ir paraksialinių spindulių susikirtimo taško. Šio apibrėžimo apibendrinimui neašiniams spinduliams yra įvairių apibendrinimų. Kai kurie seka tiesiogiai iš (6.2)

$$\frac{1}{f_T(r)} = \frac{2OPD(r)}{r^2}. \quad (6.11)$$

Paprastai manoma, kad (6.11) nustato atstumą tarp kristalo galinės sienelės ir neašinių spindulių susikirtimo taško su optine ašimi.

Kartais, aberuoto šiluminio lęšio židinio atstumas yra apibrėžiamas naudojant laužiamosios gebos apibrėžimą

$$\frac{1}{f_T^*(r)} = D_T^*(r) = -L \frac{dn}{dT} \frac{d^2T(r)}{dr^2} = L \frac{dn}{dT} \frac{d^2\delta T(r)}{dr^2} \quad (6.12)$$

ties temperatūriškai nepriklausančiam [14,21] ties temperatūriškai priklausančiam termooptiniam koeficientui [15]. Galima matyti, kad apibrėžimai (6.11) ir (6.12) duos žymiai skirtingas vertes

$$D_T(r) = \frac{1}{f_T(r)} = \frac{1}{f_T} + 2C_4 r^2, \quad (6.13a)$$

$$D_T^*(r) = \frac{1}{f_T^*(r)} = \frac{1}{f_T} + 12C_4 r^2. \quad (6.13b)$$

Naudojant tą patį  $OPD$  apibrėžimą pagal (6.1). Vėliau bus matyti, kad skirtumas yra dar ryškesnis, kai  $dn/dT$  priklauso nuo temperatūros. Bet nė vienas iš šių apibrėžimų nėra tikslus.

Šiluminio lęšio židinio nuotolis gali būti išvestas pagal paprastus geometrinius pamąstymus. Tegu  $OPD$  paviršius būna apibūdinamas lygtimi

$$S(r, z) = OPD(r) - z = 0. \quad (6.14a)$$

Tada lygtis statmeniui šiam paviršiui taške  $P_0 = (r_0, z_0)$

$$\frac{r - r_0}{(\partial S / \partial r)_{P_0}} = \frac{z - z_0}{(\partial S / \partial z)_{P_0}} \text{ arba } z - z_0 = - \left( \frac{\partial OPD}{\partial r} \right)_{(r_0, z_0)}^{-1} (r - r_0). \quad (6.14b)$$

Taigi, susikirtimo taškas  $P(r_f = 0, z_f)$  šio statmens su  $z$  ašimi yra išreiškiamas [46,47]

$$z_f(r_0) \cong r_0 \left( \frac{\partial OPD}{\partial r} \right)_{(r_0, z_0)}^{-1}. \quad (6.14c)$$

Šiluminiam lęšiui su sferinėmis aberacijomis (15) židinio nuotolis gaunasi

$$\frac{1}{\tilde{f}_T(r)} = \frac{1}{r} \frac{d(OPD(r))}{dr} = \frac{1}{f_T} + 4C_4 r^2. \quad (6.15)$$

Vadinasi, teisinga židinio nuotolio neašiniams spinduliams lygtis (6.15) skiriasi žymiai nuo dažnai naudojamų (6.13a) ir (6.13b). Reiktų pažymėti, kad paprastas apmąstymas naudojant trikampio lygtį [98] palaiko išraišką (6.11) židinio nuotoliui. Kaip gaunama teisinga išraiška (6.15) buvo rasta (žr. nuoroda 19 [5]) lieka neaišku.

### 6.3. Termooptinio ir šiluminio plėtimosi koeficientų temperatūrinės priklausomybės įtaka

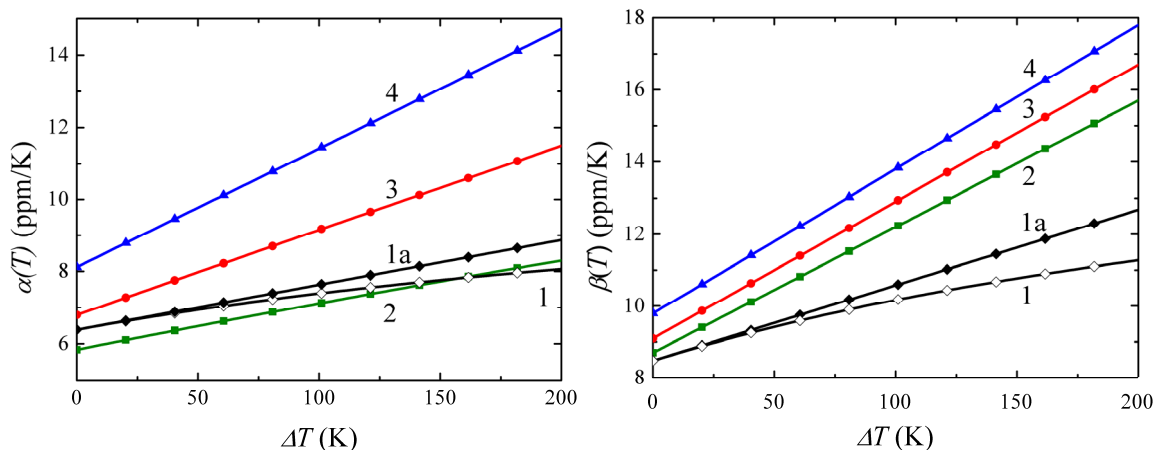
Akivaizdu, kad temperatūrinė termooptinio koeficiento priklausomybė turės didelę įtaką lūžio rodiklio pokyčiui ir ypač sferinei aberacijai. Taip pat galime įskaičiuoti įtempių sukeltą lūžio rodiklio pokytį [20] naudojant išraišką (5.41), kuris taip pat turi papildomą temperatūrinę priklausomybę su šiluminio plėtimosi koeficientu  $\alpha(T)$ . Publikuotų termooptinio koeficiento ir šiluminio plėtimosi koeficiento verčių apžvalga buvo duota [68,99]. Mes pasirinkome naudoti vertes iš neseniai atliktų matavimų [56], nes jie buvo atlikti temperatūrų intervale 300-600K. Trumpesniame intervale užtektų naudoti ir tiesinę aproksimaciją

$$\alpha(T) = \alpha_1 + \alpha_2 \tilde{T}, \quad \alpha_1 = \alpha(T_r), \quad \alpha_2 = (d\alpha/dT)_{T=T_r}, \quad (6.16a)$$

$$\beta(T) = \beta_1 + \beta_2 \tilde{T}, \quad \beta_1 = \beta(T_r), \quad \beta_2 = (d\beta/dT)_{T=T_r}, \quad (6.16b)$$

kur  $\tilde{T} = T - T_r$ ,  $T_r = 300$  K.

Duomenys iš [56] ir iš praeitų darbų [15,46,47] yra pavaizduoti 6.1. pav. Matosi, kad šių koeficientų vertės žymiai skiriasi. Tiesinė aproksimacija  $\alpha(T) = \alpha^* + \alpha_2 T$  su  $\alpha^* = -1.78$  ir  $\alpha_2 = 0.033$  ppm/K buvo kritikuojama [100] dėl neigiamų verčių ties  $T = 0$  nors ir geriau atitinka išmatuotas vertes netoli kambario temperatūros. Dėl to [100] autorius pasirinko kitą aproksimaciją, kuri duoda ganėtinai mažesnes YAG kristalo šiluminio plėtimosi koeficiento vertes ties kambario temperatūra, tačiau tenkina teorinę sąlygą, kad  $\alpha \rightarrow 0$ , kai  $T \rightarrow 0$ . Dėl to gaunasi, kad mūsų naudojami artiniai pagrįsti duomenimis iš [56] turi žemiausias  $\alpha_{1,2}$  ir  $\beta_{1,2}$  vertes palyginus su kitais darbais.



6.1. pav. Temperatūrinės šiluminio plėtimosi ir termooptinio koeficientų priklausomybės.

YAG kristalas yra kubinis ir beveik izotropinis [20]. Vadinasi, tereikia žinoti Young'o modulį  $E$  ir Poisson'o santykį  $\nu$ . Buvo išmatuota [101], kad šie koeficientai keičiasi ne daugiau nei atitinkamai 7% ir 2% kriogeninėse temperatūrose 140-298K. Dėl to galima manyti, kad kitimas bus nežymus ir mus dominančiame temperatūrų intervale ir imti vertes  $E = 280$  GP ir  $\nu = 0.26$  [20].

Įtempių sukeliama lūžio rodiklio pokyčio indėliui suskaičiuoti reikalingi elastooptiniai koeficientai  $p_{ij}$  taip pat iš principo gali priklausyti nuo temperatūros [102]. Tačiau, duomenys iš [84] turi vieninteleles žinomas  $p_{ij}$  vertes ir temperatūrinė priklausomybė vis dar nėra išnagrinėta.

Norint apibendrinti išraišką lūžio rodiklio pokyčiui plokščiųjų įtempių ar plokščiųjų deformacijų artiniuose (5.41) temperatūriškai priklausantiems parametrams galime imti adiabatinių perėjimą nuo mažų iki baigtinių temperatūros pokyčių. Mažam temperatūros pokyčiui  $\tilde{T} = d\tilde{T}(r)$  lūžio rodiklio pokytis lygus

$$dn_{r,\theta}(\tilde{T}(r)) = -a_1\alpha(\tilde{T})dT^{(R)} + [\beta(\tilde{T}) + a_1\alpha(\tilde{T})]d\tilde{T}(r) \pm a_2[\alpha(\tilde{T})dT^{(r)} - \alpha(\tilde{T})d\tilde{T}(r)]. \quad (6.17)$$

Baigtiniam temperatūros pokyčiui  $\tilde{T}(r)$  bendras lūžio rodiklio pokytis randama tiesiog integruojant išraišką (4.11)

$$n_{r,\theta}(r) = n_0 - a_1\alpha_\Sigma^{(R)} + \beta_\Sigma + a_1\alpha_\Sigma \pm a_2[\alpha_\Sigma^{(r)} - \alpha_\Sigma], \quad (6.18)$$

kur

$$\alpha_\Sigma = \int_0^{\tilde{T}} \alpha(T)dT, \quad \beta_\Sigma = \int_0^{\tilde{T}} \beta(T)dT, \quad \alpha_\Sigma^{(r)} = (2/r^2) \int_0^r \alpha_\Sigma r dr. \quad (6.19)$$

Naudojant tiesinę aproksimaciją (6.16) parametrams  $\alpha(T)$  ir  $\beta(T)$ , bei prieš tai naudotą Teiloro skleidimą temperatūros pasiskirstymui (4.19b) galima išvesti

$$\alpha_\Sigma \approx \alpha_1\tilde{T} + \alpha_2\tilde{T}^2/2 \approx \alpha_1[T_0 + T_2(r/R)^2 + T_4(r/R)^4] + (\alpha_2/2)[T_0^2 + 2T_0T_2(r/R)^2 + (2T_0T_4 + T_2^2)(r/R)^4], \quad (6.20a)$$

$$\beta_\Sigma \approx \beta_1\tilde{T} + \beta_2\tilde{T}^2/2 \approx \beta_1T_0 + \beta_2T_0^2/2 + [\beta_1T_2 + \beta_2T_0T_2](r/R)^2 + [\beta_1T_4 + \beta_2T_0T_4 + \beta_2T_2^2/2](r/R)^4, \quad (6.20b)$$

kur  $T_0 = T_c - T_r$  ir įsistačius (6.20a) į (6.19) gauname

$$\alpha_\Sigma^{(r)} \approx \alpha_1T_0 + \alpha_2T_0^2/2 + [\alpha_1T_2/2 + \alpha_2T_0T_2/2](r/R_f)^2 + [\alpha_1T_4/3 + \alpha_2T_0T_4/3 + \alpha_2T_2^2/6](r/R_f)^4. \quad (6.20c)$$

Toliau mes galime išskleisti lūžio rodiklį per Teiloro eilutę

$$n_{r,\theta}(r) = N_{r,\theta}^{(0)} + N_{r,\theta}^{(2)}(r/R)^2 + N_{r,\theta}^{(4)}(r/R)^4, \quad (6.21)$$

ir tada koeficientus galima išsireikšti

$$N_{r,\theta}^{(0)} = n(T_r) + [\beta_1T_0 + \beta_2T_0^2/2 + a_1(\alpha_1T_0 + \alpha_2T_0^2/2)], \quad (6.22a)$$

$$N_{r,\theta}^{(2)} = (\beta_1 + \beta_2T_0)T_2 + a_1(\alpha_1 + \alpha_2T_0)T_2 \mp a_2(\alpha_1 + \alpha_2T_0)T_2/2, \quad (6.22b)$$

$$N_{r,\theta}^{(4)} = \beta_1T_4 + \beta_2T_0T_4 + \beta_2T_2^2/2 + a_1[\alpha_1T_4 + \alpha_2T_0T_4 + \alpha_2T_2^2/2] \mp a_2[2\alpha_1T_4 + 2\alpha_2T_0T_4 + \alpha_2T_2^2]/3. \quad (6.22c)$$

Tam kad įskaityti strypo galų išsipūtimą yra  $a_1$  pakeisti į  $a_1^* = a_1 + (1 + \nu)(n_0 - 1)C_{bg}$  kur koeficientas  $C_{bg}$  ( $0 \leq C_{bg} \leq 1$ ) apibūdina strypo išsipūtimą [46,103]. Svarbu pažymėti, kad strypo formos aktyviajam elementui galinių sienelių išsipūtimo indėlis optinio kelio skirtumui yra kelis kartus mažesnis palyginus su lūžio rodiklio pokyčio indėliu.

Jeigu lūžio rodiklio pokytis priklauso nuo išilginės koordinatės  $z$ , tai bendras optinio kelio skirtumas duotam  $r$  gali būti rastas integruojant išraišką palei  $z$ . Reiktų pažymėti, kad apibendrintų teermooptinių koeficientų (nepriklausančių nuo temperatūros) duodamas optinio kelio skirtumas

$$\delta\Lambda_{r,\theta}(r) = \int_0^L \chi_{r,\theta} \delta T(r,z) dz. \quad (6.23)$$

Bet (6.17) apibendrinimas temperatūrinių priklausomybių įskaitymui naudotas [46, lygtis (43)]

$$\delta\Lambda(r) = \int_0^L \chi(T) T(r,z) dz, \quad (6.24)$$

kur

$$\chi(T) = \beta(T) + C_\alpha (n_0 - 1)(1 + \nu) \alpha(T), \quad 0 < C_\alpha < 1 \quad (6.25)$$

Yra neteisingas, kaip galima matyti iš (6.21) išvedimo. Be to, reikia nepamiršti, kad reikia naudoti temperatūrų skirtumą  $\delta T(r,z)$ , o ne pilną temperatūrą  $T(r,z)$ .

Šiluminio plėtimosi koeficiento įtaka nebuvo įvertinta darbuose [14,15,21,46]. Tam kad galėtume sulyginti su žinomomis išraiškoms galima imti (6.21) su  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Šiuo atveju lūžio rodiklio pokytis yra vienodas skirtingoms poliarizacijoms, o sferinės aberacijos koeficientas

$$N^{(4)}(b_2) = \beta_1 T_4 + \beta_2 T_0 T_4 + \beta_2 T_2^2 / 2. \quad (6.26)$$

Tuo tarpu [47] pradėta nuo išraiškos (B.12), kurią galima perrašyti kaip

$$\Delta n_T(r) = \beta(T_c)(T(r) - T_c) + \frac{\beta_2}{2}(T(r) - T_c)^2. \quad (6.27)$$

Turint omeny, kad  $\beta(T_c) = \beta_1 + \beta_2(T_c - T_r)$ , ta pačia išraišką (6.26) galima gauti iš (6.27).

Jeigu optinė galia pagal apibrėžimą iš [14,15,21] yra naudojama sferinės aberacijos panaikinimo skaičiavimams, tai išraiška (6.6), kuri gali būti užrašyta kaip

$$D(r) = -L \frac{dn}{dT} \frac{d^2 T(r)}{dr^2} = D_0 \left[ 1 - \gamma \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (6.28)$$

kur

$$\gamma = -\frac{3}{2} b_2 + 3\eta + \frac{\eta \beta_2 T_c}{(dn/dT)_{T_c}}, \quad (6.29)$$

sutampa su lygtimi (13.52) iš [15]. (6.29) gali būti užrašyta kaip

$$\gamma = -\frac{6N_2^{(4-)}(b_2)}{(\beta_1 + \beta_2 T_0)T_2}, \quad (6.30)$$

kur

$$N^{(4-)}(b_2) = \beta_1 T_4 + \beta_2 T_0 T_4 + \beta_2 T_2^2 / 6. \quad (6.31)$$

Taigi sąlyga  $\gamma = 0$  sferinių aberacijų eliminavimui pasiūlyta [15] atitinka  $N_2^{(4-)}(b_2) = 0$ . Jeigu optinio kelio skirtumo apibrėžimas iš [46] būtų naudojamas, tada koeficientas

$$N^{(4+)}(b_2) = \beta_1 T_4 + 2\beta_2 T_0 T_4 + \beta_2 T_2^2 \quad (6.32)$$

būtų lygus nuliui, kai nėra sferinių aberacijų. Taigi matome, kad lygtys (6.30-31) skiriasi tik paskutiniu nariu, tuo tarpu (6.32) dar skiriasi ir antras narys daugikliu 2. Toliau galima naudoti įvairias aproksimacijas (4.20-22) koeficientams  $T_{0,2,4}$  ir pritaikant lygtis (6.30-32) sferinės aberacijos panaikinimo reikalavimas gali būti apskaičiuotas.

#### 6.4. Bendros sferinės aberacijos panaikinimo galimybė

Iš pradžių panagrinėsime atvejį, kai neįskaičiuojama temperatūrinė šiluminio laidumo koeficiento priklausomybė, bet įskaičiuojama termooptinio koeficiento priklausomybė  $\beta_2 \neq 0$ , taip galėsime paskui įvertinti, kokio dydžio yra kurios priklausomybės įtaka. Reikia pažymėti, kad koeficientų  $T_{0,2,4}$  vertės smarkiai priklauso nuo to kokį pasirinksime šilumos nunešimo per strypo paviršių koeficientą  $h$  arba nuo jo tiesiogiai priklausančią bedimensinį parametą  $a_h = k_0 / (2hR)$ . Mes galime užfiksuoti šilumos apkrovimo tankį ties strypo ašimi  $Q_{p0}$ , tada parametras  $\eta$  nepriklauso nuo  $b_2$  ir koeficientai  $T_0 = T_h + (1 + b_2/4)\eta T_r$ ,  $T_h = 4a_h(1 + b_2/2)\eta T_r$ ,  $T_2 = -\eta T_r$  ir  $T_4 = -\eta b_2 T_r / 4$  tiesiškai priklauso nuo  $b_2$ . Vadinasi sąlyga  $N^{(4)}(b_2) = 0$  gali būti perrašyta

$$Ab_2^2 + Bb_2 + C = A(b_2 + B/2A)^2 + C - B^2/4A = 0, \quad (6.33a)$$

kur

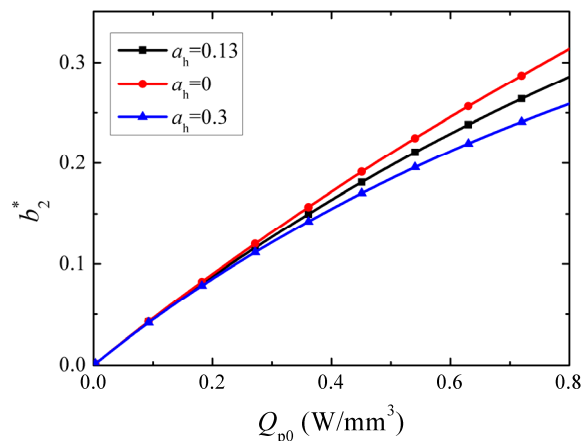
$$A = -(a_h + 1/8)C, \quad B = \beta_1 T_2 / 4 - 2(a_h + 1/4)C, \quad C = \beta_2 T_2^2 / 2. \quad (6.33b)$$

Turint omeny, kad  $a_h > 0$  ir  $T_2 < 0$ , vadinasi  $A < 0$ ,  $B < 0$ ,  $C > 0$ ,  $C - B^2 / 4A > 0$ . Dėl to lygtis (6.33) turi dvi skirtingas šaknis

$$b_2^{(1,2)} = [-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}] / 2A. \quad (6.34)$$

Norimas sprendinys turi tenkinti sąlygas:  $Q(r) \geq 0$  ir  $\tilde{T}(r) \geq 0$ . Naudojant parametų vertes  $\beta_1 = 8.48 \times 10^6 \text{ K}^{-1}$  ir  $\beta_2 = 0.02 \times 10^6 \text{ K}^{-2}$  pagal duomenis iš [56], fiksuotam  $Q_{p0} = 0.6 \text{ W/mm}^3$  tik viena

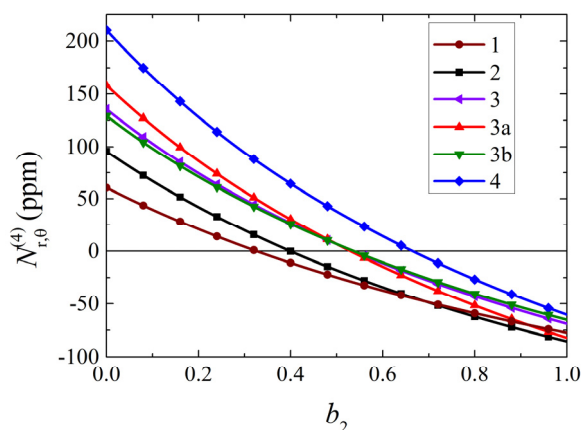
iš šaknų  $b_2^{(2)} \equiv b_2^* \approx C/|B|=0.23$  tenkina sąlygą  $Q(r) \geq 0$ . Šis rezultatas buvo gautas, kai parametras  $a_h = 0.13$  (pav. 4.3). Matosi, kad  $b_2^*$  vertės priklauso nuo  $a_h$ . Atvejis, kai  $a_h = 0$  atitinka pirmo tipo kraštinę sąlygą, kai temperatūra strypo kraštuose lygi aplinkos temperatūrai  $T_r$ . Mažinant šilumos nunešimo koeficientą  $h$  koeficiento  $b_2^*$  vertė taip pat mažėja (6.2 pav.). Gauti rezultatai fiksuotam šiluminio apkrovimo tankiui, iš kurio galima paskaičiuoti ir sugertą šiluminę galią. Pavyzdžiui šaknis  $b_2^* = 0.23$  duoda  $P_h(b_2^*) = \pi R^2 L Q_{p0} (1 + b_2^*/2) \approx 66.6$ , bet jeigu galia yra  $P_h = 60$  W, tai atitinkantis sprendimas duos  $b_2^* = 0.21$ . Fiksuotas šiluminio apkrovimo tankis centre yra naudingas tada, kai norima panaikinti sferinę aberaciją nesumažinant užpildos apgražos ties optine ašimi ir tuo būdu išlaikant stiprinimo dydį. Matome, kad mūsų atveju šiluminio laidumo koeficiento temperatūrinė priklausomybė turi stipresnę įtaką ( $b_2^* = 0.33$ ) nei termooptinio koeficiento ( $b_2^* = 0.21$ ).



**6.2 pav. Sferinės aberacijos panaikinimui reikalingo paraboliskumo koeficiento vertės nuo kaupinimo ties įvairiomis koeficiento  $a_h$  vertėmis**

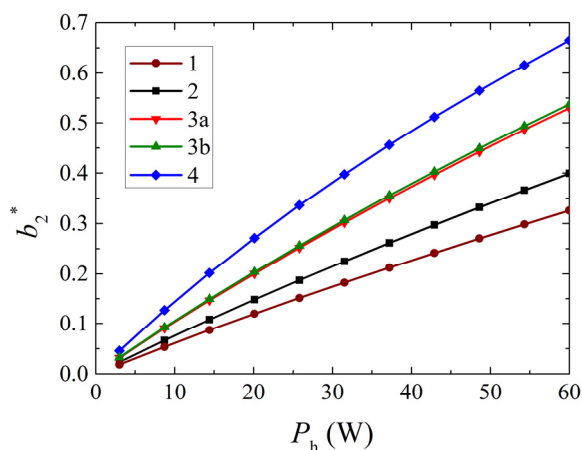
Bendresniu atveju kvadratinė lygtis (6.33) pavirsta į daug sudėtingesnę lygtį, dėl to paprasčiau spręsti skaitiniais metodais. Sferinės aberacijos koeficientai atvaizduoti grafiškai (6.3 pav.) su  $\xi = 1.0$ ,  $C_{bg} = 0$ ,  $P_h = 60$  W ir įvairioms parametru  $\alpha_j, \beta_j$  vertėms. Kai imamos nenulinės vertės, vertės imamos pagal duomenis iš [56]:  $\alpha_1 = 6.39$ ,  $\alpha_2 = 0.0124$ ,  $\beta_1 = 8.48$ ,  $\beta_2 = 0.021$  vienetais milijone ( $1\text{ppm} = 10^{-6}$ ). Šių kreivių susikirtimas su x ašimi duoda  $b_2^*$  sprendinius. Pirma kreivė atitinka atvejį, kai  $\beta_1 \neq 0$ ,  $\beta_2 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$  ir seka iš visų sferinės aberacijos koeficiento išraiškų. Gaunamas  $b_2^* \approx 0.33$  sutampa su analitiniu sprendiniu. Antra kreivė buvo paskaičiuota naudojant lygybę (6.31) ir  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Taigi įskaičiavus termooptinio koeficiento temperatūrinį kitimą ( $\beta_2$ ) sprendinys  $b_2^* \approx 0.40$  nežymiai išauga pagal sąlygą iš [15]. Kreivė 3 vaizduoja rezultatus pagal mūsų manymu teisingą išraišką (6.26), bet neįskaitant įtempių indėlio:  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Tada reikalingas parabolės koeficientas tampa  $b_2^* \approx 0.535$  ir yra žymiai didesnis nei praeita vertė. Įskaičiavus

fotoelastinį efektą ( $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$ ) atsiranda papildomai dar du sprendiniai radialinei (kreivė 3a) ir tangentinei (kreivė 3b) poliarizacijoms. Tačiau gaunami sprendiniai  $b_{2r}^* \approx 0.530$  ir  $b_{2\theta}^* \approx 0.537$  nėra toli nuo praeito, vadinasi fotoelastinio efekto įtaka palyginus nedidelė. Reikia pažymėti, kad tai visai nereiškia kad fotoelastinio efekto įtaka lūžio rodiklio pokyčiui ir šiluminio lęšio dydžiui yra maža, tačiau sferinių aberacijų panaikinimo taškas yra arti ir tai leidžia vienu metu pasiekti sferinę aberaciją arti nulio abejoms poliarizacijoms. Kreivė 4 parodo rezultatus gaunamus naudojant neteisingą optinio kelio apibrėžimą (6.32) ir duoda smarkiai pervertintą rezultatą  $b_2^* \approx 0.665$ , net ir neįskaičiuojant fotoelastinio efekto įtakos ( $\beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ ).



6.3 pav. Lūžio rodiklio pasiskirstymo ketvirto laipsnio nario priklausomybė nuo paraboliskumo koeficiento  $b_2$ .

Tuo būdu buvo paskaičiuoti paraboliskumo koeficientai sferinių aberacijų panaikinimui įvairioms kaupinimo galioms pavaizduoti 6.4 pav., kur kreivių numeracija atitinka atvejus 6.3 pav. Galima pastebėti, kad didėjanti galia reikalauja vis labiau įgaubto kaupinimo pluošto.



6.4 pav. Sferinės aberacijos panaikinimui reikalingo paraboliskumo koeficiento vertės kitimas nuo kaupinimo galios.



## 6.5. Sferinės aberacijos įtaka pluošto kokybei

Naudojant banginės difrakcijos optiką, galima įvesti žinomą difrakcinį aberuoto pluošto židinį [90,91]. Ekvivalentaus židinio ilgio apibrėžimas kaip atstumas nuo plokštumos su maksimaliu normuotu intensyvumu arba Strehl santykiu yra kartais naudojamas integralinėms šiluminio lęšio charakterizacijoms [92]. Tačiau Strehl santykis gali keistis pluoštui sklindant per optinius elementus. Vadinas, geriau naudoti pluošto sklidimo koeficientą arba tiesiog pluošto kokybės faktorių  $M^2$  (žr. [93,95]). Sferinių aberacijų įtaką gausiniam ir supergausiniam pluoštui pirmą kartą analizavo A.Siegman (žr. Ref. 21 [5] ir Ref. 28 [46]). Buvo parodyta, kad galutinė pluošto kokybė su ketvirto laipsnio aberacija (6.2) gali būti užrašyta kaip

$$M_f^2 = \sqrt{(M_i^2)^2 + (M_q^2)^2}, \quad M_q^2 = \frac{8\pi\chi_r}{\lambda} C_4 \bar{r}^4, \quad \chi_r = \sqrt{\bar{r}^2 \bar{r}^6 / \bar{r}^4 - 1}, \quad (6.35)$$

kur  $M_i^2$  yra pluošto kokybės koeficientas pradinio neaberuoto pluošto,  $M_q^2$  yra ketvirto laipsnio aberacijos įneštas pluošto kokybės pablogėjimas, o  $\bar{r}^2$ ,  $\bar{r}^4$ , ir pan. yra skersinio intensyvumo profilio atitinkamo laipsnio momentai. Siegman publikavo tiksliai apytiksles koeficiento  $\chi_r$  vertes įvairiems pluošto intensyvumo profiliams. Šios analizės rezultatai buvo pritaikyti, [5,46] kad būtų nustatyta sferinės aberacijos įtaka gausinio pluošto kokybei. Svarbu pažymėti, kad Siegman'o apibrėžtas gausinio pluošto intensyvumo profilis buvo  $\exp(-r^2)$ , tuo tarpu [5,46] buvo  $\exp(-2r^2)$ . Galima parodyti (žr. žemiau) kad koeficiento  $\chi_r$  vertė yra  $(1/\sqrt{2})$  abiem variantams. Tačiau  $\bar{r}^4 = w_L^4/2$  intensyvumo profiliui  $I(r) = I_0 \exp[-2(r/w_L)^2]$  naudotam [5,46,96]. Vadinas,  $M_q^2 = \frac{4\pi C_4 w_L^4}{\lambda\sqrt{2}}$ , yra du kartus mažesnis [46] nei duotas [5]. Išraiška nariui  $M_q^2$  iš [5] buvo pakartota apžvalgoje [6] ir įvairiuose kituose darbuose. Įdomu tai, kad darbe [97] abu straipsniai [5,46] yra cituojami, tačiau išraiška su dvigubai didesniu  $M_q^2$  iš [5] naudota skaičiavimuose. Bet, kaip bus vėliau parodyta, neteisinga vertė sferinės aberacijos koeficientui  $C_4$  seka iš [46] naudoto neteisingo optinio kelio skirtumo apibrėžimo nuo temperatūros priklausantiems termooptiniui ir plėtimosi koeficientams.

Galima tiesiogiai parodyti, kad supergausiniams pluoštams su intensyvumo profiliu  $I(r) = I_0 \exp[-2(r/w_L)^n]$  intensyvumo momentai  $\bar{r}^s$  ir koeficientas  $\chi_r$  ketvirto laipsnio aberacijoms (21) gali būti išreikštas kaip

$$\bar{r}^s = w_L^s \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{s}{n}} \Gamma\left(\frac{s+2}{n}\right) / \Gamma\left(\frac{2}{n}\right), \quad s = 2, 4, 6, \quad \chi_r = \sqrt{\Gamma(4/n)\Gamma(8/n)/\Gamma^2(6/n) - 1}, \quad (6.36)$$

kur  $\Gamma(z)$  yra gama funkcija.

Pluošto kokybės koeficientas  $M^2$  buvo seniau gautas sferinės aberacijoms pirma [91] ir vėliau [93] bendresnei polinominei fazės aberacijai  $\Phi_L(r) = \kappa_m (r/w_L)^m$ . Užrašant senesne forma (6.35) su

$$M_i^2 = \frac{n}{2} \sqrt{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right) / \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}, \quad M_q^2 = \kappa_m m \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{n}} \sqrt{\Gamma\left(\frac{2m}{n}\right) \Gamma\left(\frac{4}{n}\right) - \Gamma^2\left(\frac{m+2}{n}\right) / \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}. \quad (6.37)$$

Nesunku patikrinti, kad Gauso pluoštui ( $n=2$ ) ir sferinėms aberacijoms  $\kappa_4 = 2\pi C_4 w_L^4 / \lambda$  paskutinė išraiška sutampa su praeita, jeigu naudojamas teisingas momento apibrėžimas  $\overline{r^4} = w_L^4 / 2$ . Taigi, naudojant formules (6.37), pluošto kokybės koeficientas gali būti suskaičiuotas ne tik Gauso pluoštui su ketvirto laipsnio sferine fazės aberacija, bet ir supergausiniams pluoštams su aukštesnio laipsnio sferinėmis aberacijomis.

Bedimensinis aberacijos koeficientas  $\kappa_m$  priklauso stipriai nuo signalinio pluošto storio  $w_L$ . Taip pat iš (6,37) seka, kad pluošto kokybės koeficientas  $M^2$  didėja staigiai su aukštesnio laipsnio  $m$  aberacijomis tai pačiai  $\kappa_m$  vertei. Dėl to reikia atkreipti dėmesį, kad mažinant sferines aberacijas bedimensinio koeficiento  $\kappa_m$  vertės aukštesnio laipsnio aberacijoms turėtų būti žymiai mažesnės.

Reikia prisiminti, kad plokščiųjų įtempių ir deformacijų artiniai, kurie buvo naudoti, turi prielaidą, kad kaupinimas yra tolydus z kryptimi, kas būtų sunku įgyvendinti praktikoje galais kaupinamam strypui. Tačiau atmetus fotoelastinę dalį, išilginę kaupinimo priklausomybę nesunku įskaičiuoti ir jeigu strypas pakankamai trumpas, galime tiesiog išilgai suintegruoti optinio kelio skirtumą, tam kad gautume bendrą fazės pokytį įneštą šiluminio lęšio. 6.1 lentelėje pavaizduoti šiluminio lęšio židinio nuotoliai gaunami įskaitant arba neįskaitant visas šiluminės YAG kristalo priklausomybes radialinės ir tangentinės poliarizacijos spinduliams. Fotoelastinio efekto įtaką apibūdina skirtumas tarp radialinės ir tangentinės poliarizacijos, nes visi kiti efektai veikia abi poliarizacijas vienodai. Matosi, kad nors ir fotoelastinis efektas gali keisti židinio atstumą ~20%, šiluminių priklausomybių įskaitymas, bei kaupinimo forma yra dominuojantys veiksniai.  $M^2$  ir židinio nuotolio matavimai atlikti [7,22,27] pakankamai gerai atitinka teorinius modeliavimus.

**6.1 lentelė. Židinio nuotolių įskaičiuojant ir neįskaičiuojant temperatūrinės priklausomybes santykiai.**

Kaupinimas:	Tolydus	Parabolinis	Stačiakampis	Gauso
$f_r(T_r) / f_r(T)$ , mm	448/301	224/132	106/48	59/28
$f_\theta(T_r) / f_\theta(T)$ , mm	531/355	265/155	127/57	70/33

**6 skyriaus išvados.** Analitinės išraiškos skersiniam optinio kelio skirtumo pasiskirstymui yra randamos naudojant atitinkamus artinius naujai išmatuotų šilumos plėtimosi ir temooptinio koeficientų vertėms aukštose temperatūrose. Aptarti netikslumai seniau naudotuose optinio kelio skirtumo apibrėžimuose atvejui su temperatūriškai priklausančiu termooptiniu koeficientu. Parodyta, kad neteisingų apibrėžimų naudojimas žymiai keičia paraboliskumo koeficiento vertes, ties kuriomis panaikinama sferinė aberacija. Pastebėta, kad šiluminio laidumo ir termooptinio koeficientų YAG kristale vertės naudotos senesniuose darbuose yra didesnės, nei naujai išmatuotos. Vadinasi, termooptinio koeficiento temperatūrinės priklausomybės įtaka nėra tokia didelė, kaip buvo teigta seniau. Tiek šiluminio laidumo, tiek termooptinio koeficiento priklausomybės yra panašaus svarbumo sferinių aberacijų susidarymui. Parodyta, kad naudojant teisingą optinio kelio skirtumo apibrėžimą su temperatūriškai priklausančiais parametrais gaunamos didesnės paraboliskumo parametro, reikalingo sferinių aberacijų panaikinimui, vertės, nei seka iš neteisingų optinės galios apibrėžimų [3], bet mažesnės, jeigu apibrėžimas iš [9] būtų pritaikytas. Parodyta, kad sferinės aberacijos panaikinimas radialinei poliarizacijai beveik atitinką aberacijos panaikinimą ir tangentinei poliarizacijai ir atv. Taigi šiluminių sferinių aberacijų panaikinimas yra iš principo įmanomas, tačiau sunkiau atliekamas dėl didesnių reikalingo paraboliskumo koeficiento verčių.

## 7. IŠVADOS

1. Cilindro formos YAG aktyviam elementui su nepriklausomu nuo išilginės koordinatės ašinės simetrijos kaupinimu rastas stacionarios šilumos pernešimo lygties su nuo temperatūros  $T$  priklausančiu šiluminio laidumo koeficientu  $k(T) = k_0(T_0/T)^\xi$  temperatūros pasiskirstymas integralo pagal radiusą pavidalu, patogiu skaitiniam integravimui.
2. Paraboliniam kaupinimui ir šilumos laidumo koeficiento parametrai  $\xi \geq 0$  anksčiau naudotos polinominės temperatūros aproksimacijos buvo netikslios, vietoj jų pasiūlytos tikslesnės aproksimacijos, leidžiančios gauti paprastas analitines įtempių, deformacijų ir indukuoto lūžio rodiklio išraiškas.
3. Bendrojo elastinio ir optinio astigmatizmo kubiniams kristalams, kaip pavyzdžiui seskvioksidiniams tipo  $\text{Yb:A}_2\text{O}_3$  kubiniams kristalams ( $A=Y, \text{Ln} \dots$ ), kurie yra perspektyvūs kaip lazerinė terpė su plačia stiprinimo juosta, išvestas termooptinių koeficientų, atitinkančių nulinio įtempio arba nulinės deformacijos atvejams, sąryšis.
4. Veikimo metu aktyvioji terpės temperatūra pasiekia aukštas vertes, todėl buvo apibendrintas optinio kelio skirtumo apibrėžimas atvejui kai termooptinis ir tiesinio plėtimosi koeficientai priklauso nuo temperatūros ir parodyta, kad tikslių išraiškų panaudojimas optinio kelio apibrėžimui ženkliai keičia reikalingas sferinės aberacijos panaikinimui kaupinimo paraboliskumo koeficiento vertes, palyginus su vertėmis, gautomis ankstesniuose darbuose.
5. Fotoelastinio efekto indėlis į bendrąjį lūžio rodiklio pokytį YAG kristale yra mažesnis palyginus su termooptinio efekto indėliu, todėl šiluminio lęšio aprašymas, įskaitantis tik termooptinį efektą, neblogai dera su atliktais eksperimentais, naudojant ilgus Nd:YAG elementus.

## 8. NUORODOS

- [1] G. Huber, C. Kränkel, and K. Petermann, Solid-state lasers: status and future [Invited], *J. Opt. Soc. Am. B*, **27**(10), B93-B105 (2010).
- [2] *Landolt-Börnstein - Group VIII Advanced Materials and Technologies, V. 1, Laser Physics and Applications*, Subvolumes A, B, C (Springer, New York, 2004-2008).
- [3] *Advances in solid-state lasers: Development and applications*, Ed. M.Grishin (Intech, Croatia, 2010).
- [4] *High-Power Laser Handbook*, Eds. H. Injeyan, G.D. Goodno (McGrawHill, New York, 2011).
- [5] W.A. Clarkson, Thermal effects and their mitigation in end-pumped solid-state lasers, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **34**(), 2381-2395 (2001).
- [6] S. Chénais, F. Druon, S. Forget, F. Balembois, P. Georges, On thermal effects in solid-state lasers: The case of ytterbium-doped materials, *Prog. Quant. Electr.* **30**(4), 89-153 (2006).
- [7] A.M. Rodin, A. Michailovas, A.S. Dement'jev, A. Aleknavicius, Beam quality investigation in Nd:YAG crystal fiber amplifier pumped at > 110 W, *Proc. SPIE* **9342**, Solid State Lasers XXIV: Technology and devices, 934207 (February 20, 2015).
- [8] B.R. Belostotskii, A.S. Rubanov, *Thermal Regime of Solid-State Optical Quantum Generators* (Energija, Moscow, 1973, in Russian).
- [9] A.V. Mezenov, L.N. Soms, and A.I. Stepanov, Thermooptics of Solid-State Lasers, *Journal of Russian Laser Research*, **8**(5), 427-549 (1987) - Translated from *Termooptika Tverdotel'nykh Lazerov* (Mashinostroenie Press, Leningrad, 1986).
- [10] W. Koechner, *Solid-State Laser Engineering* . (Springer, Berlin, 1976); Sixth Revised and Updated Ed. (Springer, Berlin, 2006).f
- [11] G.M. Zverev, Yu.G. Golyaev , E.A. Shalaev, A.A. Shokin, *Lasers on Nd:YAG* (Radio i Svyaz, Moscow, 1985, in Russian).
- [12] A. Penzkofer, Solid state lasers, *Prog. Quant. Electr.* **12**(4), 291-427 (1988).
- [13] G.M. Zverev, Yu.G. Golyaev, *Lasers on Crystals and Their Application* (Radio i Svyaz, Moscow, 1994, in Russian).
- [14] N. Hodgson, H. Weber, *Laser Resonators and Beam propagation: Fundamentals, Advanced Concepts and Applications* (Springer, Berlin, 1997).
- [15] N. Hodgson, H. Weber, *Laser Resonators and Beam propagation: Fundamentals, Advanced Concepts and Applications*, Second Edition (Springer, Berlin, 2005).
- [16] Y. Kalisky, *The Physics and Engineering of Solid State Lasers* (SPIE Press, Bellingham, Washington USA, 2005).
- [17] Y. Kalisky, *Solid State Lasers: Tunable Sources and passive Q-Switching Elements* (SPIE Press, Bellingham, Washington USA, 2014).
- [18] W. Koechner, M. Bass, *Solid-State Lasers: A Graduate Text* (Springer, New York, 2003).
- [19] E. Gaižauskas, V. Sirutkaitis, *Kietojo kūno lazeriai* (Vilnius University, Vilnius, 2008).
- [20] A.S.Dement'ev, Relationships between different expressions of thermo-optic and photoelastic coefficients of YAG crystal, *Laser Phys.* **25**(9), 095004 (2015).
- [21] N. Hodgson and H. Weber, Influence of spherical aberration of the active medium on the performance of Nd:YAG lasers, *IEEE J. Quant. Electron.*, **29**(3), 2497-2507 (1993).
- [22] Domimykas Bričkus, Kasparas Sasnauskas, Aleksej Rodin, Alexander Dement'ev, Thermal distortion in Nd:YAG crystal fiber amplifier seeded by picosecond pulses, Open Readings 2014, 57th Scientific Conference for Students of Physics and Natural Sciences, March 19-21, 2014, Vilnius, Lithuania, Programme and Abstracts, p. 16.

- [23] A.Rodin, A.Dement'ev, D.Brickus, K.Sasnauskas, A.Michailovas, A.Aleknavicius, J.Didierjean, Investigation of Beam Quality in Nd:YAG Crystal Fiber Amplifier, 16th International Conference „Laser Optics 2014“, St.Petersburg, Russia, June 30 – July 04, 2014, p.18.
- [24] Dominykas Bričkus, Alexander S. Dement'ev, A possibility to reduce spherical thermal aberrations in diode pumped solid-state lasers, Open readings 2015, 58<sup>th</sup> Scientific Conference for Students of Physics and Natural Sciences, March 24-27, 2015, Vilnius, Lithuania, Programme and Abstracts, p. 32.
- [25] Dominykas Bričkus, Martynas Gabalis, Aleksandr Dementjev, Šiluminių efektų kietojo kūno lazerių baigtinio cilindro formos aktyviuose elementuose ypatumai esant ašinės simetrijos lazerinių diodų kaupinimui, 41-oji nacionalinė fizikos konferencija, 2015 m. birželio 17-19 d., Vilnius, Programa ir pranešimų tezės, p. 185.
- [26] Dominykas Bričkus, Alexander S. Dement'ev, Thermal lensing in YAG rod with temperature dependent parameters and different profiles of pump beam, Open readings 2016, 59<sup>th</sup> Scientific Conference for Students of Physics and Natural Sciences, March 15-18, 2016, Vilnius, Lithuania, Programme and Abstracts, p. 32. Poster session P2-52, p.205.
- [27] Aleksej Rodin, Kasparas Sasnauskas, Aleksandr Dementjev, Dominykas Bričkus, Valdas Girdauskas, Lukas Trisauskas, Investigation of thermal effects in Nd:YAG crystal fiber under laser diode pumping, 5<sup>th</sup> International Conference „Radiation Interaction with Materials: Fundamentals and Applications 2014“, Kaunas, Lithuania May 12-15, 2014, Program and materials, p. 93-96 (Technologija, Kaunas – 2014).
- [28] D. Bričkus, A.S. Dement'ev, On the use of photoelastic effect and plane strain or plane stress approximations for the description of thermal lensing, *Lith. J. Phys.*, **56**(1), 9-20 (2016).
- [29] D. Bričkus, A.S. Dement'ev, On the possibility to reduce spherical thermal aberrations in transversally pumped YAG rods, *Lith. J. Phys.*, **56**(2), to be published (2016).
- [30] H.-F. Hoffmann, Glasses, in: *Landolt-Börnstein - Group VIII Advanced Materials and Technologies, Vol. 1, Laser Physics and Applications*, Subvolume B, Laser Systems, Part 2 (Springer, New York, 2008). p. 97-124.
- [31] S. Timoshenko, J.N. Goodier, *Theory of Elasticity* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1951).
- [32] R. Iffländer, Solid-state laser systems, in: *Landolt-Börnstein - Group VIII Advanced Materials and Technologies, V. 1, Laser Physics and Applications*, Subvolume B, Laser Systems, Part 2 (Springer, New York, 2008). p. 3-96.
- [33] J. Yao, Y. Wang, *Nonlinear Optics and Solid-State Lasers* (Springer, Berlin, 2012).
- [34] G. Shayeganrad, Optimum design of end-pumped solid-state lasers, in: *Solid State Laser*, ed. A.H. Al-Khursan (Intech, Rijeka, 2012), pp. 3-26.
- [35] A.A. Kaminskii, *Laser crystals: Their Physics and Properties*, Second Ed. (Springer, Berlin, 1981).
- [36] J.D. Foster and L.M. Osterink, Thermal effects in a Nd:YAG laser, *J. Appl. Phys.* **41**(9),3656-3663 (1970).
- [37] G.I. Zheltov, A.S. Rubanov, A.V. Chaley, Stresses state and thermal deformation of active elements of optical quantum generators, in: *Quantum Electronics and Laser Spectroscopy* (Institute of Physics, Minsk, 1971, in Russian), pp. 445-478.
- [38] M. Sparks, Optical distortion by heated windows in high-power laser systems, *J. Appl. Phys.* **42**(12), 5029-5046 (1971).

- [39] J.R. Jasperse, P.D. Gianino, Thermal lensing in infrared window materials, *J. Appl. Phys.* **43**(4), 1686-1693 (1972).
- [40] T.F. Deutch, Laser window materials - An overview, *J. Electron. Mater.* **4**(4), 663-719 (1975).
- [41] C.A. Klein, Concept of an effective optical distortion parameter: application to KCl laser windows, *Infrared Phys.* **17**(5), 343-357 (1977).
- [42] C.A. Klein, Optical distortion coefficients of high power laser windows, *Opt. Eng.* **29**(4), 343-350 (1990).
- [43] S.C. Tidwell, J.F. Seamans, M.S. Bower, and A.K. Cousins, Scaling CW diode-end-pumped Nd:YAG lasers to high average powers, *IEEE J. Quantum Electron.*, **28**(4), 997-1009 (1992).
- [44] A.K. Cousins, Temperature and thermal stress scaling in finite-length end-pumped laser rods, *IEEE J. Quantum Electron.*, **28**(4), 1057-1069 (1992).
- [45] M.J. Davis, J.S. Hayden, Thermal lensing of laser materials, *Proc. SPIE*, **9237**, 923710 (2014).
- [46] S. Bjurshagen and R. Koch, Modeling of energy-transfer upconversion and thermal effects in end-pumped quasi-three-level lasers, *Appl. Opt.*, **43**(24), 4753-4767 (2004).
- [47] A.M. Bonnefois, M. Gilbert, P.Y. Thro, and J.M. Weulersse, Thermal lensing and spherical aberration in high-power transversally pumped laser rods, *Opt. Commun.* **259**(1), 223-235 (2006).
- [48] X. Song, B. Li, Z. Guo, S. Wang, D. Cai, J. Wen, Influences of pump beam distribution on thermal lensing spherical aberration in an LD end-pumped Nd:YAG laser, *Opt. Commun.*, **282**(24), 4779-4783 (2009).
- [49] A.G. Rozanov, Nonlinear model of thermal effects in YAG:Nd laser crystals, *Sov. J. Quantum Electron.*, **21**(10), 1074-1075 (1992).
- [50] A.S. Dement'ev, A. Jovaiša, K. Račkaitis, F. Ivanauskas, J. Dabulytė-Bagdonavičienė, Numerical treatment of the temperature distribution in end-pumped composite laser rods, *Lith. J. Phys.*, **47**(3), 279-288 (2007).
- [51] G.L. Bourdet and H. Yu, Longitudinal temperature distribution in an end-pumped solid-state amplifier medium: application to a high average power diode pumped Yb:YAG thin disk amplifier, *Appl. Opt.*, **46**(23), 6033-6041 (2007).
- [52] G.L. Bourdet and C. Gouédard, Simple analytical derivations of thermal lensing in longitudinally Q-CW pumped Yb:YAG, *Appl. Opt.*, **49**(22), 4160-4167 (2010).
- [53] M.M. Tilleman, Analysis of temperature and thermo-optical properties in optical materials. 1: Cylindrical geometry, *Opt. Materials*, **33**(1), 48-57 (2010).
- [54] M.H.M. Dindarlu, A. Maleki, H. Saghafifar, M.K. Tehrani, and S. Baghali, Analytical model for temperature, stress and strain distribution inside a side-pumped Nd:YAG laser rod having a Gaussian pump profile, *Laser Phys.*, **25**(4), 045001 (2015).
- [55] M.H.M. Dindarlu, M.K. Tehrani, H. Saghafifar, A. Maleki, Analytical model for thermal lensing and spherical aberration in diode side-pumped Nd:YAG laser rod having Gaussian pump profile, *Chin. Phys. B* **24**(12), 124205 (2015).
- [56] H. Furuse, R. Yasuhara, and K. Hiraga, Thermo-optic properties of ceramic YAG at high temperatures, *Opt. Mater. Express*, **4**(9), 1794-1799 (2014).
- [57] H.S. Carslaw, J.C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*, Sec. Ed. (Clarendon press, Oxford, 1959).

- [58] M.N. Ozisik, *Heat conduction*, Sec. Ed. (John Wiley&Sons, New York, 1993).
- [59] M.H.M.Dindarlu, M.K.Tehrani, H. Saghafifar, A.Maleki, Analytical model for temperature distribution of an end diode-pumped laser slab with Robin boundary conditions by Green's function method, *Laser Physics* **26**(5), 055001 (2016).
- [60] E. Bressert, *SciPy and NumPy* (O'Reilly, Sebastopol, 2013)
- [61] B.A.Stickler, E.Schachinger, *Basic Concepts in Computational Physics* (Springer, Cham, 2014)
- [62] R.H.Landau, M.J.Páez, C.C.Bordeianu, *Computational Physics, Problem Solving with Computers*, 2<sup>nd</sup> edition (WILEY-VCH Verlag GmbH & Co KGaA, Weinheim, 2007)
- [63] R.H.Landau, M.J.Páez, C.C.Bordeianu, *A Survey of Computational Physics* (Princeton University Press, Princeton, 2008)
- [64] H.P. Langtangen, *Python Scripting for Computational Science*, 3<sup>rd</sup> edition (Springer-Verlag, Berlin, 2008)
- [65] Numpy and Scipy Documentation, <http://docs.scipy.org/doc/> (2016, May 18)
- [66] B.S. Wang, H.H. Jiang, and S.T. Yin, Thermal conductivity of synthetic garnet laser crystals, *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* **39**(), 23-26 (2007).
- [67] Y. Sato, J. Akiyama, T. Taira, Effects of rare-earth doping on thermal conductivity in Y<sub>3</sub>Al<sub>5</sub>O<sub>12</sub> crystals, *Opt. Materials*, **31**(), 720-724 (2009).
- [68] M. Polnau, P.J. Hardman, M.A. Kern, W.A.Clarkson, and D.C. Hanna, Upconversion-induced heat generation and thermal lensing in Nd:YLF and Nd:YAG, *Phys. Rev. B*, **58**(24), 16076-16092 (1998).
- [69] Schmidt, M., Graf, Th., and Weber, H.P., Analytical model of the temperature distribution and the thermally induced birefringence in laser rods with cylindrically symmetric heating, *J. Opt. Soc. Am. B*, **17**(), 1398-1404 (2000).
- [70] L.C. Andrews, R.L. Phillips, *Mathematical Techniques for Engineer and Scientists*, (SPIE Press monograph PM **118**, 2003).
- [71] H. Nadgaran and P. Elahi, The analytical investigation of the super-Gaussian pump source on the thermal, stress and thermo-optics properties of double-clad Yb:glass fiber lasers, *Pramana – J. Phys.*, **65**(1), 95-105 (2005).
- [72] M.P. Nemeth, *An In-Depth Tutorial on Constitutive Equations for Elastic Anisotropic Materials* (NASA/TM-2011-217314, 2011).
- [73] R.F. Tinder, *Tensor Properties of Solids: Phenomenological Development of the Tensor Properties of Crystals* (Morgan&Clayton Publishers, San Rafael, CA, 2008).
- [74] J.F. Nye, *Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices* (Oxford University Press, Oxford, 1985).
- [75] L. Liu, X. Wang, S.Guo, X.Xu, Q.Lu, Review of the formula of thermal focal length in side-pumped laser rods, *Opt. Commun.* **284**(5), 1274-1277 (2011).
- [76] G. Ghosh, *Handbook of Thermo-Optic Coefficients of Optical Materials with Applications* (Academic Press, New York, 1998).
- [77] T.S. Narasimhamurty, *Photoelastic and Electro-Optic Properties of Crystals* (Plenum Press, New York, 1981).
- [78] R. B. Hetnarski, M.R. Eslami, *Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications* (Springer, New York, 2009).



- [79] T. Graupeter, C. Pflaum, Simulation of birefringence in laser crystals, Proc. SPIE, **8959**, 89591S (2014).
- [80] T. Graupeter, R. Hartmann, and C. Pflaum, Calculations of eigenpolarization in Nd:YAG laser rods due to thermally induced birefringence, IEEE J. Quantum Electron., **50**(12), 1035-1043 (2014).
- [81] A.G. Vyatkin and E.A. Khazanov, Thermally induced depolarization in sesquioxide class m3 single crystals, J. Opt. Soc. Am. B, **28**(4), 805-811 (2011).
- [82] P.A. Loiko, K.V. Yumashev, R. Schödel, M. Peltz, C. Liebald, X. Mateos, B. Deppe, C. Kränkel, Thermo-optic properties of Yb:Lu<sub>2</sub>O<sub>3</sub> single crystals, Appl. Phys. B. **120**(4), 601-607 (2015).
- [83] I.L. Snetkov, D.E. Silin, O.V. Palshov, E.A. Khazanov, H. Yagi, T. Yanagitani, H. Yoneda, A. Shirikawa, K. Ueda, and A.A. Kaminski, Thermo-optic constants of sesquioxide laser ceramics Yb<sup>3+</sup>:Ln<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (Ln=Y, Lu, Sc), Phys. Stat. Sol., **C10**(6), 907-913 (2013).
- [84] R.W. Dixon, Photoelastic properties of selected materials and their relevance for applications to acoustic light modulators and scanners, J. Appl. Phys. **38**(13), 5149-5153 (1967).
- [85] V.R. Johnson, F.A. Olson, Photoelastic properties of YAG, Proc. IEEE, **55**(5), 709-710 (1967).
- [86] V.F. Kitaeva, E.V. Zharikov, and I.L. Chisty, The properties of crystals with garnet structure, Phys. Stat. Sol. (a), **92**(2), 475-488 (1985).
- [87] C.C.C. Willis, J.D. Bradford, J. Haussermann, E. McKee, E. Maddox, L. Shah, R. Gaume, and M. Richardson, Rapid thermo-optic quality assessment of laser gain media, Opt. Mat. Express, **5**(6), 1389-1398 (2015).
- [88] M. Flannery and J. Marburger, Theory of elasto-optic coefficients in polycrystalline materials, Appl. Phys. Lett., **28**(10), 600-601 (1976).
- [89] Y.-S. Huang, H.-L. Tsai, F.-L. Chang, Thermo-optic effects affecting the high pump power end pumped solid state lasers: Modeling and analysis, Opt. Commun. **273**(2), 515-525 (2007).
- [90] V.N. Mahajan, *Optical imaging and aberrations*, Part I: *Ray geometrical optics* (SPIE Press 1998) (a); Part II: *Wave diffraction optics*, second Ed. (SPIE Press, 2011) (b); Part III: *Wavefront analysis* ((SPIE Press, 2013) (c).
- [91] A. Dement'ev and V. Lasys, Strehl factors for super-Gaussian laser beams with axial symmetric aberrations, Lith. J. Phys., **39** (2), 129-138 (1999).
- [92] S. Fan, X. Zhang, Q. Wang, S. Li, S. Ding, F. Su, More precise determination of thermal focal length for end-pumped solid-state lasers, Opt. Commun., **266**(), 620-626 (2006).
- [93] R. Buzelis, A. Dement'ev, J. Kosenko, E. Murauskas, R. Vaicekauskas, and F. Ivanauskas, Amplification efficiency and quality alteration of short pulses amplified in the saturation mode, Lith. Phys. J., **38**(4), 289-301 (1998).
- [95] A.S. Dement'ev, A. Jovaiša, G. Šilko, R. Čiegis, On alternative methods for measuring the radius and propagation ratio of axially symmetric laser beams, Quantum Electronics, **35**(11), 1045-1052 (2005).
- [96] J. George, R. Seihgal, S.M. Oak, and S.C. Mehendale, Beam quality degradation of a higher transverse mode beam due to spherical aberration of a lens, Appl. Opt., **48**(32), 6202-6206 (2009).

- [97] S. Liu, F. Song, H. Cai, T. Li, B. Tian, Z. Wu and J. Tian, Effect of thermal lens on beam quality and mode matching in LD pumped Er-Yb-codoped phosphate glass microchip laser, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **41**, 035104 (2008).
- [98] X. Song, B. Li, Z. Guo, S. Wang, D. Cai, J. Wen, Influences of pump beam distribution on thermal lensing spherical aberration in an LD end-pumped Nd:YAG laser, *Opt. Commun.*, **282**(24), 4779-4783 (2009).
- [99] R.L. Aggarwal, D.J. Ripin, J.R. Ochoa, and T.Y. Fan, Measurement of thermo-optical properties of  $Y_3Al_5O_{12}$ ,  $Lu_3Al_5O_{12}$ ,  $YAlO_3$ ,  $LiYF_4$ ,  $LiLuF_4$ ,  $BaY_2F_8$ ,  $KGd(WO_4)_2$ , and  $KY(WO_4)_2$  laser crystals in the 80-300 K temperature range, *J. Appl. Phys.* **98**, 103514 (2005).
- [100] D.C. Brown, Nonlinear thermal and stress effects and scaling behaviour of YAG slab amplifiers, *IEEE J. Quant. Electron.* **34**(12), 2393-2402 (1998).
- [101] D.C. Brown, Ultrahigh-average-power diode-pumped Nd:YAG and Yb:YAG lasers, *IEEE J. Quant. Electron.* **33**(5), 861-873 (1997).
- [102] B.A. Reznikov, Yu.I. Sirotin, and N.E. Voropaeva, Determination of the temperature dependence of the piezo-optical and elasto-optical coefficients of crystals, *Phys.Stat. Sol.*, **33**(), 633-640 (1969).
- [103] A.S. Dement'ev, A. Jovaiša, E. Stupak, and R. Kačianauskas, Thermal stresses and end-bulging in cylindrical laser rods under longitudinal diode laser pumping, *J. Thermal Stresses*, **37**(1), 73-92 (2014).

## 9. PADĖKA

Norėčiau padėkoti darbo vadovui prof. habil. dr. Aleksandr Dementjev už paramą, bei suteiktas žinias, taip pat dėkoju FTMC lazerinės technologijos skyriaus vedėjui Dr. G. Račiukaičiui ir kietojo kūno lazerio laboratorijos Dr. M. Rodinui už suteiktą galimybę atlikti šį darbą.

## 10. SANTRAUKA

Dominykas Bričkus

### **Thermal Lens in a Cylindrical Rod with Temperature Dependent YAG Crystal Parameters**

Thermooptic and photoelastic effects were thoroughly described taking into account temperature dependence of thermal conductivity, thermooptic and thermal expansion coefficients of YAG crystal and their influence on optic power and spherical aberration of the thermal lens induced by non uniform pumping. Heat transfer equation was solved for temperature dependent heat conductivity coefficient. Taylor series was used to derive approximations for radially quadratic and fourth order terms in temperature distribution. Analytic expressions for relation between thermooptic coefficient at zero stresses and zero strains were derived for cubic class crystals. It was shown that photoelastic coefficients when used improperly can give significant errors for the photoelastic part of refractive index change. Inconsistencies in previously used definitions for optic path difference were discussed, and it was shown how correct definition changes the parabola coefficient required for the elimination of the spherical aberration. It can be seen that the thermal dependencies of both thermal conductivity coefficient and thermooptic coefficient are equally important. Additionally, the cancellation of spherical aberration for both radial and tangential polarizations occurs at a very close point, so in theory both aberrations could be fixed simultaneously, however a strongly concave parabolic pumping is needed.

## **11. BIBLIOGRAFINIS APRAŠAS**

Dominykas Bričkus, Šiluminis lęšis cilindriniam strype su temperatūriškai priklausančiais yag kristalo parametrais, Lazerinės fizikos ir optinių technologijų magistrantūros baigiamasis darbas. Vad. Aleksandr Dement'ev. Vilnius: Vilniaus universitetas Fizikos fakultetas, 2016, 52p.

## **12. ANOTACIJA**

Šio darbe buvo nuosekliai teoriškai aprašyti termooptinis ir fotoelastinis efektai kubiniuose kristaluose įskaitant YAG kristalo šilumos laidumo, termooptinio ir šiluminio plėtimosi koeficientų temperatūrinės priklausomybės įtaką šiluminio lęšio optiniai galiai ir sferinei aberacijai nevienalyčiai kaupiname YAG aktyviajame elemente. Šiluminio pernešimo lygtis buvo išspręsta šilumos laidumo koeficientui su temperatūrine priklausomybe. Buvo išvestos analitinės išraiškos termooptinių koeficientų ties nuliniiais įtempiais ir nulinėmis deformacijomis sąryšiui kubiniuose kristaluose. Buvo apskaičiuotas šiluminio lęšio įneštas optinio kelio skirtumas įskaičiuojant temperatūrines termooptinio ir šiluminio plėtimosi koeficientų priklausomybes.