VILNIAUS UNIVERSITETAS

EMILIJA BERNACKAITĖ

BANKROTO TIKIMYBĖ NEHOMOGENINIAM RIZIKOS ATSTATYMO MODELIUI

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2016

Disertacija rengta 2012–2016 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas

prof. habil. dr. Jonas Šiaulys (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Mokslinis konsultantas

prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacijos gynimo taryba:

Pirmininkas

prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Nariai:

prof. dr. Yuliya Mishura (Taras Shevchenko National University of Kyiv, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. habil. dr. Vydas Čekanavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. habil. dr. Vigirdas Mackevičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. habil. dr. Jonas Kazys Sunklodas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija bus ginama viešame disertacijos gynimo tarybos posėdyje 2017 m. sausio 9 d. 16 val. VU Matematikos ir informatikos fakultete, 102 a., Naugarduko g. 24.

Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2016 m. gruodžio 9 d.

Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir Vilniaus universiteto internetinėje svetainėje adresu: www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

VILNIUS UNIVERSITY

EMILIJA BERNACKAITĖ

RUIN PROBABILITY FOR INHOMOGENEOUS RENEWAL RISK MODEL

Summary of doctoral dissertation

Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2016

Doctoral dissertation was written in 2012–2016 at Vilnius University

Scientific supervisor

prof. habil. dr. Jonas Šiaulys (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Scientific advisor

prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

The council:

Chairman

prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Members:

prof. dr. Yuliya Mishura (Taras Shevchenko National University of Kyiv, Physical sciences, Mathematics – 01P)

prof. habil. dr. Vydas Čekanavičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

prof. habil. dr. Vigirdas Mackevičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

prof. habil. dr. Jonas Kazys Sunklodas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on January 9, 2017 in Vilnius University, Faculty of Mathematics and informatics, lecture room 102, Naugarduko st. 24 at 16 pm.

Address: Naugarduko st. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania.

The summary of the dissertation was distributed on 9 December, 2016

The dissertation is available at the library of Vilnius University and on the internet website of Vilnius University: www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

1 Disertacijos mokslinė problema ir tyrimo objektas

Disertaciniame darbe nagrinėjamas baigtinio laiko ir begalinio laiko bankroto tikimybių elgesys nehomegeniniame rizikos atstatymo modelyje.

Rizikos teorijoje naudojami matematiniai modeliai, aprašantys draudiko pažeidžiamumą. Pagrindinės tokių modelių kritinės charakteristikos yra bankroto tikimybė, fiksuoto laiko bankroto tikimybė, pajamų dydis prieš įvykstant bankrotui ir deficitas bankroto momentu. Šiame disertaciniame darbe nagrinėjamos bankroto tikimybės ir fiksuoto laiko bankroto tikimybės asimptotinės savybės.

Bankroto teorijos pradininku laikomas švedų aktuaras Filip Lundberg, kurio sukurtas rizikos atstatymo modelis buvo pradėtas nagrinėti 1903 metais (žr. [Lundberg, 1903]). 1930-aisiais šis Lundberg darbas, kartu su komentarais, buvo iš naujo publikuotas Harald Cramér (žr. [Cramér, 1930]).

Lundberg ir Cramer modelyje, kuris įprastai vadinamas klasikiniu, aprašoma draudimo kompanija, kurios kapitalas priklauso nuo turimo pradinio kapitalo ir nuo dviejų priešingo tipo lėšų srautų - įmokų ir išmokų (žalų). Daroma prielaida, kad įmokos iš draudėjų gaunamos pastoviu greičiu $c > 0$, o žalų $Z_1, Z_2, \ldots$ pasirodymą nusako Puasono procesas su intensyvumu ν. Taigi procesas, apibrėžiantis draudiko kapitalą laiko momentu t yra:

$$R(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{\Theta(t)} Z_i, \ t \geqslant 0,$$

čia:

- $x \geqslant 0$ yra pradinis kapitalas;
- žalos $\{Z_1, Z_2, ...\}$ sudaro seką nepriklausomų vienodai pasiskirsčiųsių (n.v.p.) neneigiamų atsitiktinių dydžių (a.d.);
- $c > 0$ yra pastovus įmokų surinkimo greitis;
- $\Theta(t)$ žymi žalų, įvykusių laiko intervale $[0, t]$, skaičių. Tai yra skaičiuojantis atstatymo procesas generuotas a.d. $\{\theta_1, \theta_2, \ldots\}$ (kitaip vadinamų tarplaikiais), kurie klasikinio modelio atveju yra pasiskirstę pagal eksponentinį dėsnį su vidurkiu $1/\nu$;
- a.d. sekos $\{Z_1, Z_2, \ldots\}$ ir $\{\theta_1, \theta_2, \ldots\}$ yra tarpusavyje nepriklausomos.

Pagrindinis uždavinys šiame modelyje yra rasti arba įvertinti tikimybes, kad draudimo kompanijos kapitalas kada nors arba iki tam tikro laiko momento taps neigiamu. Pirmoji iš paminėtų tikimybių vadinama begalinio laiko bankroto tikimybe arba tiesiog bankroto tikimybe, antroji, kai modelio elgesys nagrinėjamas iki tam tikro laiko, vadinama baigtinio laiko bankroto tikimybe.

1957 m. E. Sparre Andersen (žr. [Sparre, 1957]) pasiūlė apibendrinti klasikinį rizikos atstatymo modelį. Jo siūlomame modelyje laikoma, kad laiko tarpai tarp žalų $\{\theta_1, \theta_2, \ldots\}$ yra nepriklausomos neišsigimusio taške 0, neneigiamo a.d. θ kopijos. Tokį E. Sparre Andersen modelį toliau vadinsime homogeniniu rizikos atstatymo modeliu. Taigi, homogeniniame rizikos atstatymo modelyje žalų seka $\{Z_1, Z_2, ...\}$ ir laiko tarpų tarp žalų seka $\{\theta_1, \theta_2, \ldots\}$ yra dvi nepriklausomos nepriklausomų ir vienodai pasiskirsčiusių a.d. sekos.

Visai neseniai, keli autoriai (žr. [Albrecher and Teugels, 2006] ir [Li et al., 2010]) pradėjo nagrinėti rizikos atstatymo modelius su priklausomais, bet vienodai pasiskirsčiusiais žalomis ir laiko tarpais tarp žalų.

Šiame disertaciniame darbe dėmesį sutelkiame ties nebūtinai vienodai pasiskirsčiusiais žalomis bei žalų įvykimo tarplaikiais. Mūsų nagrinėjamame rizikos atstatymo modelyje tiek žalos $\{Z_1, Z_2, ...\}$, tiek ir laiko tarpai tarp žalų $\{\theta_1, \theta_2, \ldots\}$ yra nepriklausomi, tačiau nebūtinai vienodai pasiskirstę a.d.. Tokį modelį toliau darbe vadinsime nehomogeniniu rizikos atstatymo modeliu. Savo darbe randame įverčius bei asimptotines formules begalinio ir baigtinio laiko bankroto tikymybėms nehomogeniniame rizikos atstatymo modelyje. Keli gauti rezultatai teisingi ir tuo atveju, kai modelį generuojantys a.d. yra ir skirtingai pasiskirstę, ir tam tikru būdu priklausomi.

2 Pagrindiniai uždaviniai

Disertacinio darbo tikslas - rasti tokias sąlygas, kurioms esant patenkintoms, gaunami bankroto tikimybės įverčiai nehomogeniniame rizikos atstatymo modelyje panašūs kaip ir homogeniniame. Buvo iškelti tokie konkretūs uždaviniai:

- Nustatyti minimalius reikalavimus tam, kad galiotų Lundberg pavidalo nelygybė nehomogeniniame rizikos atstatymo modelyje.
- Ištirti atstatymo proceso eksponentinio momento uodegos elgseną nehomogeniniame rizikos atstatymo modelyje.
- Rasti asimptotinę formulę baigtinio laiko bankroto tikimybei nehomogeniniame rizikos atstatymo modelyje.

3 Tyrimų metodika

Šioje disertacijoje naudojami bendri tkimybių teorijos metodai ir principai. Didesnioji dalis disertacijos rezultatų susijusi su tam tikrais įverčiais. Kai kurie iš įverčių gauti taikant įvairias balno taško metodo modifikacijas. Kiti įverčiai, ypač asimptotiniai, gauti taikant sąsūkų savybes skirstiniams priklausantiems tam tikroms sunkiauodegių skirstinių klasėms.

4 Moksliniai rezultatai

4.1 skyrelyje pateikiame pilną homogeninio rizikos atstatymo modelio apibrėžimą ir aprašome su juo susijusias pagrindines charakteristikas. Toliau 4.2 - 4.4 skyreliuose paminime žinomus rezultatus susijusius su disertacijoje nagrinėjamais uždaviniais. 4.5 skyrelyje pateikiame pilną nehomogeninio rizikos modelio apibrėžimą. Pagaliau 4.6 skyrelyje surašome visus pagrindinius disertacinio darbo teiginius.

4.1 Homogeninis rizikos atstatymo modelis

1 Apibrėžimas. Sakome, kad draudiko kapitalas $R(t)$ kinta pagal homogeninį rizikos atstatymo modelį, jei teisinga lygybė:

$$R(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{\Theta(t)} Z_i, \ t \geqslant 0, \tag{1}$$

ir tenkinamos sąlygos:

- $x \geqslant 0$ *yra pradinis draudiko kapitalas;*
- *žalos* $\{Z_1, Z_2, ...\}$ *sudaro seką n.v.p. neneigiamų a.d.;*
- $c > 0$ *yra pastovus įmokų surinkimo greitis;*
- $\Theta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_n \leqslant t\}} = \sup\{n \geqslant 0 : T_n \leqslant t\}$ *yra įvykusių žalų skaičius laiko intervale* $[0, t]$, *čia* $T_0 = 0$, $T_n = \theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n$, $n \geqslant 1$ *ir žalų įvykimo tarplaikiai* $\{\theta_1, \theta_2, \ldots\}$ *yra n.v.p. neneigiami a.d.;*
- *sekos* $\{Z_1, Z_2, \ldots\}$ *ir* $\{\theta_1, \theta_2, \ldots\}$ *yra tarpusavyje nepriklausomos.*

Bankroto laikas ir bankroto tikimybė yra pagrindinės rizikos modelio kritinės charakteristikos. Bankroto įvykį pažymėkime $\mathcal{B}$. Pagal apibrėžimą,

$$\mathcal{B} = \bigcup_{t>0} \{\omega : R(\omega, t) < 0\} = \bigcup_{t>0} \Big\{\omega : x + ct - \sum_{i=1}^{\Theta(t)} Z_i < 0\Big\}.$$

Taigi bankrotas įvyksta, jei kažkokiu laiko momentu $t > 0$ draudiko kapitalas tampa neigiamas, arba kitais žodžiais tariant, draudikas nebegali apmokėti patiriamų žalų. Pirmasis laikas τ, kai draudiko kapitalas tampa neigiamas, vadinamas bankroto laiku, t.y. τ yra praplėstas a.d. aprašomas pavidalu:

$$\tau = \tau(\omega) = \begin{cases} \inf\{t > 0 : R(\omega, t) < 0\}, & \text{jeigu } \omega \in \mathcal{B}, \\ \infty, & \text{jeigu } \omega \notin \mathcal{B}. \end{cases}$$

Begalinio laiko bankroto tikimybė:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \mathbb{P}\Big(\tau < \infty\Big) = \mathbb{P}\Big(\inf_t R(t) < 0\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\inf_{n\in\mathbb{N}} R(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n) < 0\Big) \\ &= \mathbb{P}\Bigg(\inf_{n\in\mathbb{N}} \Big\{x + c(\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n) - \sum_{i=1}^{\Theta(\theta_1+...+\theta_n)} Z_i\Big\} < 0\Bigg) \\ &= \mathbb{P}\Bigg(\sup_{n\in\mathbb{N}} \Big\{\sum_{i=1}^{n}(Z_i - c\theta_i)\Big\} > x\Bigg) \end{aligned}$$

.

Aišku, kad bankroto tikimybė priklauso nuo visų modelio komponentų. Tačiau istoriškai taip susiklostė, kad pagrindiniu kintamuoju laikomas pradinis draudiko kapitalas x. Baigtinio laiko bankroto tikimybė yra dviejų kintamųjų funkcija apibrėžiama pagal formulę:

$$\psi(x,t) = \mathbb{P}\Big(\tau \leqslant t\Big) = \mathbb{P}\Big(\inf_{0<s\leqslant t} R(s) < 0\Big) = \mathbb{P}\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant\Theta(t)} \sum_{i=1}^{k}(Z_i - c\,\theta_i) > x\Big). \qquad (2)$$

Baigtinio laiko bankroto tikimybė taip pat priklauso nuo visų modelio komponentų. Pagrindiniais iš jų laikomi pradinis draudiko kapitalas x ir laikas t, iki kurio stebimas proceso R vystymasis.

4.2 Lundberg nelygybė homogeniniame rizikos atstatymo modelyje

Žemiau pateikiame gerai žinomą bankroto tikimybės $\psi(x)$ exponentinį įvertį iš viršaus homogeniniame rizikos atstatymo modelyje. (žr. "Lundberg Inequality for Ruin Probability", "Collective Risk Theory", "Adjustment Coefficient" arba "Cramer-Lundberg Asymptotics" iš enciklopedijos [Teugels and Sundt, 2004]).

4.2.1 Teorema. *Sakykime, kad homogeniniame rizikos atstatymo modelyje yra patenkinta grynojo pelno sąlyga* $\mathbb{E}Z_1 - c\mathbb{E}\theta_1 < 0$ *ir* $\mathbb{E}e^{hZ_1} < \infty$ *su kokiu nors* $h > 0$. *Tada egzistuoja* *teigiamas skaičius H toks, kad*

$$\psi(x) \leqslant e^{-Hx} \tag{3}$$

su visais $x \geqslant 0$. Jei lygybė $\mathbb{E}e^{R(Z_1 - c\theta_1)} = 1$ galioja su kokiu nors teigiamu R, tai (3) nelygybėje galime parinkti $H = R$.

Egzistuoja daug skirtingų šios teoremos įrodymų. Pagrindinius būdus, taikytus įrodant Lundberg nelygybę, galima rasti darbuose [Teugels and Sundt, 2004], [Asmussen and Albrecher, 2010], [Embrechts et al., 1997a], [Embrechts and Veraverbeke, 1982a], [Gerber, 1973], [Mikosch, 2009].

4.3 Atstatymo proceso savybės

Nagrinėjant baigtinio laiko bankroto tikimybės asimptotines savybes (žr. pvz. [Klüpellberg and Mikosch, 1997], [Tang et al., 2001]), įprastai laikoma, kad procesai, aprašantys žalų srautą, tenkina tokias dvi sąlygas:

$$\begin{aligned} &(\mathcal{A}1): \quad \frac{\Theta(t)}{\mathbb{E}\Theta(t)} \underset{t\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 1, \\ &(\mathcal{A}2): \quad \sum_{k > (1+\delta)\,\mathbb{E}\Theta(t)} \mathbb{P}(\Theta(t) \geqslant k)(1+\varepsilon)^k \underset{t\to\infty}{\to} 0 \\ &\text{su bet kokiu } \ \delta > 0 \text{ ir kokiu nors nedideliu } \ \varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0. \end{aligned}$$

Nėra sunku rasti atstatymo procesų pavyzdžių, kurie tenkintų ($\mathcal{A}1$) sąlygą. Pavyzdžiui, šią sąlygą tenkiną bet kuris Puasono procesas su neaprėžtai didėjančia kaupiamojo intensyvumo funkcija ir bet kuris atstatymo procesas generuotas a.d. θ su baigtiniu vidurkiu $\mathbb{E}\theta$. Tuo tarpu ($\mathcal{A}2$) sąlyga yra sudėtingesnė. Tačiau [Klüpellberg and Mikosch, 1997] (žr. 2.1 Lemą) ir [Yang et al., 2013] (žr. 1 Lemą) parodė, jog šią sąlygą tenkina bet kuris Puasono procesas su neaprėžtai didėjančia funkcija $\mathbb{E}\Theta(t)$.

Q. Tang savo darbe [Tang et al., 2001], nagrinėdamas sudėtinio atstatymo proceso didžiuosius nuokrypius, vietoje ($\mathcal{A}1$) ir ($\mathcal{A}2$) prielaidų, nagrinėjo procesą $\Theta(t)$, kuris tenkina prielaidą:

$$\begin{aligned} &(\mathcal{A}3): \quad \sum_{k > (1+\delta)\,\mathbb{E}\Theta(t)} k^{\beta}\, \mathbb{P}(\Theta(t) = k) = O(\mathbb{E}\Theta(t)) \\ &\text{su bet kokiu } \ \delta > 0 \text{ ir kokiu nors nedideliu } \ \varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0, \end{aligned}$$

čia $\beta > 1$ yra tam tikra konstanta.

[Leipus and Šiaulys, 2009] nagrinėjo baigtinio laiko bankroto tikimybės asimptotinę elgseną rizikos atstatymo modelyje

$$x + ct - \sum_{i=1}^{\Theta(t)} Z_i \,, \; t \geqslant 0,$$

čia $x \geqslant 0$, $c > 0$, $Z_1, Z_2, \ldots$ yra n.v.p. a.d. su stipriai subeksponentine pasiskirstymo funkcija, o $\Theta(t)$ yra atstatymo procesas (žr. 1 Apibrėžimą), kur $\theta_1, \theta_2, \ldots$ yra nepriklausomos neneigiamo, neišsigimusio taške 0 a.d. θ kopijos. Šio darbo autoriai darė prielaidą, kad atstatymo procesas $\Theta(t)$ taip pat tenkina sąlygą $(\mathcal{A}2)$, nes sąlyga $(\mathcal{A}3)$ nėra pakankama, norint gauti reikiamas asimptotines formules žalų $Z_1, Z_2, \ldots$, kurios yra pasiskirsčiusios pagal stipriai subeksponentinį dėsnį, atveju. Pratęsiant šiuos rezultatus [Kočetova et al., 2009] rado, kad kiekvienas atstatymo procesas tenkina sąlygą $(\mathcal{A}2)$, kai šį procesą generuojantis a.d. θ turi baigtinį teigiamą vidurkį. Būtent, įrodytas toks teiginys:

4.3.1 Teorema. *Sakykime, $\Theta(t)$ yra atstatymo procesas (žr. 1 Apibrėžimą) generuotas n.v.p. a.d. $\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots$. Jei $\mathbb{E}\theta = 1/\lambda \in (0, \infty)$, tada kiekvienam realiuojam skaičiui $a > \lambda$ egzistuoja toks skaičius $b > 1$, kad*

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{k>at} \mathbb{P}(\Theta(t) \geqslant k)\, b^k = 0. \tag{4}$$

[Chen and Yuen, 2012] ir [Lu, 2011] naudojo šią teoremą didelių nuokrypių uždaviniui spręsti. Tuo tarpu [Chen et al., 2010], [Bi and Zhang, 2013], ir [Wang et al., 2012] gavo analogiškus rezultatus, kai procesą generuojantys a.d. $\theta_1, \theta_2, \ldots$ yra vienodai pasiskirstę, tačiau tam tikru būdu priklausomi.

4.4 Asimptotinės formulės baigtinio laiko bankroto tikimybei homogeniniame rizikos atstatymo modelyje

Homogeninis rizikos atstatymo modelis, apibrėžtas 4.1 skyrelyje buvo intensyviai nagrinėjamas mokslo darbuose nuo tada, kai prieš pusė šimto metų buvo pasiūlytas E. Sparre Andersen. Papildomai laikome, kad šiame rizikos modelyje, žalos $Z_1, Z_2, ...$ sudaro seką n.v.p. neneigiamų a.d. su pasiskirstymo funkcija $F(u) = P(Z_1 \leqslant u)$ ir baigtiniu vidurkiu $\beta = \mathbb{E}Z_1$, o žalų įvykimo tarplaikiai $\theta_1, \theta_2, \ldots$ yra n.v.p. neneigiami a.d. su baigtiniu teigiamu vidurkiu $\mathbb{E}\theta_1 = 1/\lambda$. Tokiu atveju modelyje įvykusių žalų skaičius laiko intervale [0, t] aprašomas atstatymo procesu

$$\Theta(t) = \sup\{n \geqslant 1 : \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n \leqslant t\},$$

kurio vidurkio funkcija $\lambda(t) = \mathbb{E}\Theta(t)$ turi savybę $\lambda(t) \sim \lambda t$ kai $t \to \infty$.

Baigtinio laiko bankroto tikimybė yra dviejų kintamųjų funkcija, apibrėžiama lygybe (2).

Jeigu patenkinta grynojo pelno sąlyga $\mu = c\mathbb{E}\theta_1 - \mathbb{E}Z_1 = c/\lambda - \beta > 0$ ir integruota žalos Z_1 pasiskirstymo funkcija

$$F_e(x) = \frac{1}{\beta} \int_0^x \overline{F}(u)\,\mathrm{d}u$$

yra subeksponentinė, [Veraverbeke, 1977] ir [Embrechts and Veraverbeke, 1982b] įrodė asimptotinį saryšį begalinio laiko bankroto tikimybei:

$$\psi(x, \infty) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{\mu} \int_x^\infty \overline{F}(u)\,\mathrm{d}u, . \tag{5}$$

2 Apibrėžimas. Pasiskirstymo funkcija F, apibrėžta intervale $[0, \infty)$, yra subeksponentinė (F priklauso klasei $\mathcal{S}$) jei

$$\overline{F^{*2}}(x) \underset{x\to\infty}{\sim} 2\overline{F}(x),$$

čia F^{*2} yra funkcijos F sąsūka su savimi.

[Tang, 2004] parodė, kad panašus sąryšis galioja ir baigtinio laiko bankroto tikimybei, būtent, buvo įrodytas toks teiginys.

4.4.1 Teorema. *Jeigu pasiskirstymo funkcija F_Z turi suderintai kintančią uodegą ir $\mathbb{E}\,\theta_1^p < \infty$ kokiam nors $p > 1 + \mathbb{J}^+_{F_Z}$, su*

$$\mathbb{J}^+_{F_Z} = -\lim_{y\to\infty} \frac{1}{\log y} \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F_Z}(xy)}{\overline{F_Z}(x)},$$

tai

$$\psi(x, t) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{\mu} \int_x^{x+\mu\lambda(t)} \overline{F_Z}(u)\,du, \tag{6}$$

tolygiai visiems t, tokiems, kad $t \in \Lambda = \{t : \lambda(t) > 0\}$.

3 Apibrėžimas. Sakome, kad pasiskirstymo funkcija F, koncentruota intervale $[0, \infty)$ (arba $\mathbb{R}$), turi suderintai kintančią uodegą (F priklauso klasei $\mathcal{C}$) jei

$$\lim_{y\uparrow 1} \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1.$$

Jeigu pasiskirstymo funkcija $F \in \mathcal{C}$ turi baigtinį vidurkį m, integruota pasiskirstymo funkcija F_e yra subeksponentinė (žr. pvz. 1.4.4 Teiginį [Embrechts et al., 1997b] darbe).

Aišku, kad viršutinysis Matuszevska indeksas $\mathbb{J}_F^+$ yra baigtinis kiekvienai $F \in \mathcal{C}$ (žr. pvz. 2.1 Skyrių [Bingham et al., 1987] darbe).

Darbuose [Leipus and Šiaulys, 2009] ir [Kočetova et al., 2009] buvo įrodyta, kad (6) asimptotinė formulė galioja tolygiai intervale $t \in [a(x), \infty)$ su bet kokia neaprėžtai augančia funkcija $a(x)$, jei pasiskirstymo funkcija $F \in \mathcal{S}_*$.

4 Apibrėžimas. Sakome, kad pasiskirstymo funkcija F priklauso klasei $\mathcal{S}_*$ (F yra stipriai subeksponentinė pagal [Korshunov, 2002]) jei

$$\int\limits_0^\infty \overline{F}(u)\, du < \infty \qquad \textit{ir} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F_v^{*2}}(x)}{\overline{F_v}(x)} = 2$$

tolygiai intervale $v \in [1, \infty)$. Čia

$$\overline{F_v}(x) = \begin{cases} \min\left\{1, \int\limits_x^{x+v} \overline{F}(u)\, du\right\}, & \textit{jeigu} \;\; x \geqslant 0, \\ 1, \;\; \textit{jeigu} \;\; x < 0. \end{cases}$$

Iš darbo [Korshunov, 2002] 4 Lemos išplaukia, kad kiekviena pasiskirstymo funkcija $F \in \mathcal{C}$ su baigtiniu vidurkiu yra stipriai subeksponentinė.

[Wang et al., 2012] (žr. taip pat [Yang et al., 2011] ir [Wang et al., 2013]) abibendrino ankstesniuosius rezultatus. Buvo parodyta, kad (6) asimptotinė formulė išlieka tokia pati, kai žalų įvykimo tarplaikiai $\theta_1, \theta_2, \ldots$ yra susiję tam tikra tarpusavo priklausomybe.

4.5 Nehomogeninis rizikos atstatymo modelis

Šiame disertaciniame darbe darome prielaidą, kad žalų įvykimo tarplaikiai ir žalos yra neneigiami a.d., kurie yra nebūtinai vienodai pasiskirstę. Tokį rizikos atstatymo modelį vadiname nehomogeniniu, žemiau yra pateikiamas tikslus tokio modelio apibrėžimas.

5 Apibrėžimas. Sakome, kad draudiko kapitalas $R(t)$ kinta pagal nehomogeninį rizikos atstatymo modelį, jei

$$R(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{\Theta(t)} Z_i \tag{7}$$

visiems laiko momentams $t \geqslant 0$. Čia:

- *$x \geqslant 0$ yra pradinis kapitalas;*
- *žalos $\{Z_1, Z_2, ...\}$ sudaro seką nepriklausomų (nebūtinai vienodai pasiskirsčiųsių), neneigiamų a.d.;*

- $c > 0$ *yra pastovus įmokų surinkimo greitis;*

- $\Theta(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1_{\{T_n \leqslant t\}} = \sup\{n \geqslant 0 : T_n \leqslant t\}$ *yra įvykusių žalų skaičius intervale* $[0, t]$, *čia* $T_0 = 0$, $T_n = \theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n$, $n \geqslant 1$, *o žalų įvykimo tarplaikiai* $\{\theta_1, \theta_2, \ldots\}$ *yra nepriklausomi (nebūtinai vienodai pasiskirstę), neneigiami ir neišsigimę taške 0 a.d..* $\Theta(t)$ *vadinamas nehomogeniniu atstatymo procesu;*

- *sekos* $\{Z_1, Z_2, \ldots\}$ *ir* $\{\theta_1, \theta_2, \ldots\}$ *yra tarpusavyje nepriklausomos.*

Akivaizdu, kad nehomogeninis rizikos atstatymo modelis tiksliau atspindi draudimo veiklą negu klasikinis ar homogeninis rizikos atstatymo modeliai.

Nehomogeninis rizikos atstatymo modelis skiriasi nuo homogeninio tuo, kad atsitiktinių dydžių $\{Z_1, Z_2, ...\}$ ir/arba $\{\theta_1, \theta_2, ...\}$ vienodas pasiskirstymas nėra būtinas. Bendru atveju nehomogeniškumas gali būti suprantamas įvairiai. 5 Apibrėžime mes pasirinkome vieną iš dviejų galimų krypčių, kurių laikomasi įvairiuose moksliniuose straipsniuose, nagrinėjančiuose nehomogeninius rizikos atstatymo modelius. Iš tiesų nehomogeniškais modeliais gali būti vadinami modeliai su nevienodai pasiskirsčiusiais a.d., tiek ir modeliai, kuriuose žalos ir/arba laiko tarpai tarp žalų yra priklausomi tam tikru būdu.

4.6 Pagrindinės disertacinio darbo teoremos

Šiame skyrelyje pateiksime pagrindinius disertacinio darbo teiginius:

Pirmoji teorema leidžia taikyti Lundberg pavidalo nelygybę nehomogeniniam rizikos atstatymo modeliui.

4.6.1 Teorema. *Sakykime, kad žalos* $\{Z_1, Z_2, ...\}$ *ir žalų įvykimo tarplaikiai* $\{\theta_1, \theta_2, ...\}$ *sudaro nehomogeninį rizikos atstatymo modelį, aprašytą 5 Apibrėžime. Jeigu, be to, tenkinamos sąlygos:*

$$(\mathcal{B}1)\ \sup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E}e^{\gamma Z_i} < \infty \quad \textit{su kažkokiu} \quad \gamma > 0,$$

$$(\mathcal{B}2)\ \lim_{u \to \infty} \sup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(\theta_i 1_{\{\theta_i > u\}}) = 0,$$

$$(\mathcal{B}3)\ \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{E}Z_i - c\mathbb{E}\theta_i) < 0,$$

tai egzistuoja konstantos $c_1 > 0$ *ir* $c_2 \geqslant 0$, *su kuriomis* $\psi(x) \leqslant e^{-c_1 x}$, *kai* $x \geqslant c_2$.

Ši teorema suformuluota 12 disertacijos puslapyje, o įrodymas pateiktas 3 skyriuje. Kitose trijose teoremose yra pateikiami 4.3.1 teoremos apibendrinimai. 4.6.2 ir 4.6.4 teoremose yra nagrinėjamas nehomogeninis rizikos atstatymo modelis, kuriame atstatymo procesas yra generuotas a.d. susietų apatine išplėsta neigiama priklausomybe LEND (angl. lower extended negatively dependent). 4.6.3 teoremoje a.d. gali būti tiek priklausomi, tiek nepriklausomi.

6 Apibrėžimas. Sakoma, kad a.d. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ yra susieti apatine išplėsta neigiama priklausomybe LEND (angl. lower extended negatively dependent), jeigu egzistuoja tokia dominuojanti konstanta β_ξ, kad

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{\xi_k \leqslant x_k\}\right) \leqslant \beta_\xi \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\xi_k \leqslant x_k)$$

su visais $n \in \mathbb{N}$ ir visais $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Pirmoji teorema apibūdina atstatymo proceso eksponentinio momento uodegos asimptotinį elgesį, kai žalų įvykimo tarplaikiai yra tolygiai integruojami.

4.6.2 Teorema. *Sakykime, kad $\Theta(t)$ yra nehomogeninis atstatymo procesas (žr. 5 Apibrėžimo 4-ą dalį), generuotas neneigiamų a.d. $\theta_1, \theta_2, \ldots,$ susietų apatine išplėsta neigiama priklausomybe LEND. Tarkime, kad šie a.d. yra tolygiai integruojami, t.y.*

$$\lim_{u\to\infty} \sup_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(\theta_i \mathbb{1}_{\{\theta_i \geqslant u\}}\right) = 0, \tag{8}$$

ir su kokiu nors $\lambda \in (0, \infty)$,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,\theta_i \geqslant \frac{1}{\lambda}. \tag{9}$$

Tada kiekvienam $a > \lambda$, egzistuoja toks $b > 1$, kad

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{k>at} \mathbb{P}(\Theta(t) \geqslant k)\, b^k = 0. \tag{10}$$

Kita teorema parodo, kad tolygus integruojamumas nebėra reikalingas, jeigu visi žalų įvykimo tarplaikiai yra aprėžti iš apačios.

4.6.3 Teorema. *Sakykime, kad $\Theta(t)$ yra nehomogeninis atstatymo procesas (žr. 5 Apibrėžimą), generuotas neneigiamų a.d. $\theta_1, \theta_2, \ldots,$ kurie gali būti tiek priklausomi, tiek nepriklausomi. Taip pat tarkime, kad egzistuoja teigiama konstanta c, su kuria $\theta_n \geqslant c$ visiems $n \in \mathbb{N}$. Tada kiekvienam $a > 1/c$, egzistuoja toks $b > 1$, kad galioja* (10) sąlyga.

Trečioji teorema parodo, kad yra atvejų, kai (10) išraiška galioja su visais teigiamais a.

4.6.4 Teorema. *Sakykime, kad $\Theta(t)$ yra nehomogeninis atstatymo procesas, generuotas neneigiamų a.d. $\theta_1, \theta_2, \ldots$, susietų apatine išplėsta neigiama priklausomybe LEND ir tenkinančių sąlygą*

$$\lim_{u\to\infty,\, n\to\infty} u\left(\mathbb{E}e^{-\theta_n/u} - 1\right) = -\infty. \tag{11}$$

Tada su kiekvienu $a > 0$, egzistuoja toks $b > 1$, kad galioja (10) lygybė.

4.6.2, 4.6.3 ir 4.6.4 teoremų formuluotės pateiktos 13-14 disertacijos puslapiuose, o jų įrodymus galima rasti 4 disertacijos skyriuje.

Galiausiai savo disertaciniame darbe parodome, kad baigtinio laiko bankroto tikimybės (6) asimptotinė formulė nehomogeniniame rizikos atstatymo modelyje išlieka tokio paties pavidalo, jeigu tik žalų įvykimo tarplaikiai $\theta_1, \theta_2, \ldots$ tenkina papildomus reikalavimus. Laikome, kad žalų įvykimo tarplaikiai $\theta_1, \theta_2, \ldots$ yra nepriklausomi, tačiau nebūtinai vienodai pasiskirstę. Nagrinėjame nehomogeninį rizikos atstatymo modelį tenkinantį tokias tris sąlygas:

***Prielaida* $\mathcal{C}_1$.** Žalų dydžiai $\{Z_1, Z_2, \ldots\}$ yra n.v.p. neneigiami a.d. su pasiskirstymo funkcija F ir baigtiniu teigiamu vidurkiu β.

***Prielaida* $\mathcal{C}_2$.** Laiko tarpai tarp žalų $\{\theta_1, \theta_2, \ldots\}$ yra nepriklausomi neneigiami a.d., tokie, kad:

$$(\mathcal{C}_{21}) \qquad \lim_{u\to\infty} \sup_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(\theta_i 1_{\{\theta_i \geqslant u\}}\right) = 0\ ,$$

$$(\mathcal{C}_{22}) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbb{D}\theta_i}{i^2} < \infty,$$

$$(\mathcal{C}_{23}) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\theta_i = \frac{1}{\lambda},$$

su kokiu nors baigtiniu teigiamu λ.

***Prielaida* $\mathcal{C}_3$.** A.d. sekos $\{Z_1, Z_2, \ldots\}$ ir $\{\theta_1, \theta_2, \ldots\}$ yra tarpusavyje nepriklausomos.

Nehomogeniniame modelyje, analogiškai kaip ir Sparre Andersen modelyje, baigtinio laiko bankroto tikimybė $\psi(x,t)$ išreiškiama (2) formule, o nehomogeninio atstatymo proceso $\Theta(t)$ vidurkio funkciją apibrėžiame taip pat įprastai $\lambda(t) = \mathbb{E}\Theta(t)$, visiems $t \geqslant 0$.

4.6.5 Teorema. *Jeigu patenkintos $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ ir $\mathcal{C}_3$ prielaidos, $\mu := c/\lambda - \beta > 0$ ir pasiskirstymo funkcija $F_Z \in \mathcal{S}_*$, tada*

$$\psi(x,t) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{\mu} \int\limits_{x}^{x+\mu\lambda(t)} \overline{F_Z}(u)\, du$$

tolygiai intervale $t \in [T, \infty)$, su bet kuriuo $T \in \Lambda := \{t > 0 : \lambda(t) > 0\}$.

Šios paskutinės teoremos formuluotė pateikta 15 disertacijos puslapyje, o įrodymą galima rasti 5 disertacijos skyriuje.

5 Išvados

- Įrodėme teoremą apie galimybę taikyti Lundberg pavidalo nelygybę nehomogeniniam rizikos atstatymo modeliui. Teoremoje nagrinėjamas modelis su nepriklausomais, bet nebūtinai vienodai pasiskirsčiusiais žalų įvykimo tarplaikiais ir žalomis.

- Gavome, kad nehomogeninio atstatymo proceso eksponentinio momento uodega nyksta laikui artėjant į begalybę. Tokia savybė galioja, kai žalų įvykimo tarplaikiai yra skirtingai pasiskirstę ir yra tarpusavyje susiję tam tikromis priklausomybės struktūromis.

- Radome kitokį, skirtingą nuo klasikinio, būdą įrodyti elementariąją atstatymo teoremą nehomogeniniam atstatymo procesui.

- Radome asimptotinę formulę baigtinio laiko bankroto tikimybei nehomogeniniame rizikos atstatymo modelyje. Parodėme, kad šios formulės pavidalas nepriklauso nuo žalų įvykimo tarplaikių homogeniškumo.

- Tikėtina, kad baigtinio laiko bankroto tikimybės asimptotinė formulė galioja su visais $t \in \Lambda$, ne tik su $t \in [T, \infty)$, čia $T \in \Lambda$. Šiuo metu mes nežinome kaip praplėsti tolygumo ribas be papildomų reikalavimų.

6 Naujumas

Mes parodėme, kad gerai žinomų įverčių bei asimptotinių išraiškų, naudojamų homogeniniame modelyje, taikymas gali būti praplėstas iki bendresnio atvejo, kai žalos ir žalų įvykimo tarplaikiai yra nehomogeniniai. Teoremose panaudotos prielaidos yra naujos ir padeda pritaikyti rezultatus labiau realiose draudimo situacijose. Mūsų suformuluoti teiginiai praplečia ir apibendrina kitų autorių rezultatus (pvz. [Andrulytė et al., 2015], [Kočetova et al., 2009], [Tang, 2004]).

7 Publikacijos

Pristatomos disertacijos rezultatai publikuoti šiuose moksliniuose straipsniuose:

1. Bernackaitė, E. and Šiaulys, J. (2015), The exponential moment tail of inhomogeneous renewal process, Statistics and Probability Letters, 97:9-15

2. Andrulytė, I. M., Bernackaitė, E., Kievinaitė, D., Šiaulys, J. (2015), A Lundberg-type inequality for an inhomogeneous renewal risk model, Modern Stochastics: Theory and Applications, 2:173-184

3. Bernackaitė, E. and Šiaulys, J. (2017), The finite-time ruin probability for an inhomogeneous renewal risk model, Journal of Industrial and Management Optimization, page 13:207-222

8 Rezultatų sklaida

Disertacijoje gauti rezultatai buvo pristatyti šiose mokslinėse konferencijose:

1. *Lietuvos matematikų draugijos 56-oji konferencija*, Kaunas, Lietuva, 2015 m. birželio 16–17 d.

2. *19th International Congress on Insurance: Mathematics and Economics (IME)*, Liverpulio universitetas, Liverpulis, Didžioji Britanija, 2015 m. birželio 24–26 d.

3. *Lietuvos matematikų draugijos 57-oji konferencija*, Vilnius, Lietuva, 2016 m. birželio 20–21 d.

9 Summary

In the thesis, the inhomogeneous renewal risk model is investigated. This model describes an insurance company, which experiences two opposing cash flows: incoming cash premiums and outgoing claims and also depends on initial surplus. The main risk measure of the model, ruin probability, is considered and asymptotic formulas for evaluation are provided. We prove that well-known estimates and asymptotic expressions for the homogeneous renewal risk model can be extended to a much more general case of inhomogeneous claims and inter-arrival times. The assumptions of the theorems are new and they help to apply the results in more realistic cases of insurance. They extend, generalize and supplement the results on finding ruin probability obtained by other authors.

Chapter 1 contains the outlines of classical risk theory. In this chapter we overview the homogeneous renewal risk model, present all the necessary definitions and the main critical characteristics.

In Chapter 2 we describe an inhomogeneous renewal risk model and present the differences from the homogeneous renewal risk model. In this chapter there are also provided the formulations of the main theorems for inhomogeneous renewal risk model. In Theorem 4.6.1 we present the conditions for Lundberg-type inequality. Theorems 4.6.2, 4.6.3 and 4.6.4 consider an inhomogeneous renewal counting process generated by inter-arrival times, which may be dependent in some way. Finally, in Theorem 4.6.5 we provide a formula to estimate the finite-time ruin probability.

In the last three sections the proofs of Theorems 4.6.1, 4.6.2, 4.6.3 4.6.4 and 4.6.5 are provided.

The thesis also contains introduction, conclusions, appendix and bibliography. Additionally to the thesis, an extensive summary in Lithuanian is provided.

10 Trumpos žinios apie autorių

Išsilavimas

2001 Alytaus Šaltinių vidurinė mokykla (su pagyrimu)

2009 Vilniaus universiteto statistikos magistras

Pedagoginio darbo patirtis

2015 – Matematikos ir informatikos fakulteto asistentė

Darbo patirtis

2009- ERGO Insurance SE Lietuvos filialas, specialistė

Literatūra

[Albrecher and Teugels, 2006] Albrecher, H. and Teugels, J. (2006). Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory. *Journal of Applied Probability*, 43(1):257–273.

[Andrulytė et al., 2015] Andrulytė, I., Bernackaitė, E., Kievinaitė, D., and Šiaulys, J. (2015). A lundberg-type inequality for an inhomogeneous renewal risk model. *Modern Stochastics: Theory and Applications*, 2:173–184.

[Asmussen and Albrecher, 2010] Asmussen, S. and Albrecher, H. (2010). *Ruin Probabilities*. World Scientific Publishing.

[Bi and Zhang, 2013] Bi, X. and Zhang, S. (2013). Precise large deviations of aggregate claims in a risk model with regression-type size dependence. *Statistics and Probability Letters*, 83:2248–2255.

[Bingham et al., 1987] Bingham, N. H., Goldie, C. M., and Teugels, J. L. (1987). *Regular Variation*. Cambridge University Press, Cambridge.

[Chen et al., 2010] Chen, Y., Chen, A., and Ng, K. (2010). The strong law of large numbers for extended negatively dependent random variables. *Journal of Applied Probability*, 47:908–922.

[Chen and Yuen, 2012] Chen, Y. and Yuen, K. (2012). Precise large deviations of aggregate claims in a size-dependent renewalrisk model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 51:457–461.

[Cramér, 1930] Cramér, H. (1930). On the mathematical theory of risk. In *Skandia Jubilee Volume*. Stockholm.

[Embrechts et al., 1997a] Embrechts, P., Klüppelberg, C., and Mikosch, T. (1997a). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, New York.

[Embrechts et al., 1997b] Embrechts, P., Klüppelberg, C., and Mikosch, T. (1997b). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, New York.

[Embrechts and Veraverbeke, 1982a] Embrechts, P. and Veraverbeke, N. (1982a). Estimates for probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1(1):55–72.

[Embrechts and Veraverbeke, 1982b] Embrechts, P. and Veraverbeke, N. (1982b). Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1:55–72.

[Gerber, 1973] Gerber, H. (1973). Martingales in risk theory. *Mitteilungen. Schweizeriche Vereinigung der Versicherungsmathematiker*, 73:205–216.

[Klüpellberg and Mikosch, 1997] Klüpellberg, C. and Mikosch, T. (1997). Large deviations of heavy-tailed random sums with applications in insurance and finance. *Journal of Applied Probability*, 34:293–308.

[Korshunov, 2002] Korshunov, D. (2002). Large-deviation probabilities for maxima of sums of independent random variables with negative mean and subexponential distribution. *Theory of Probability and its Applications*, 46:355–366.

[Kočetova et al., 2009] Kočetova, J., Leipus, R., and Šiaulys, J. (2009). A property of the renewal counting process with application to the finite-time ruin probability. *Lithuanian Mathematical Journal*, 49:55–61.

[Leipus and Šiaulys, 2009] Leipus, R. and Šiaulys, J. (2009). Asymptotic behaviour of the finite-time ruin probability in renewal risk models. *Applied Stochastic Models in Bussines and Industry*, 25:309–321.

[Li et al., 2010] Li, J., Tang, Q., and Wu, R. (2010). Subexponential tails of discounted aggregate claims in a time-dependent renewal risk model. *Advances in Applied Probability*, 42(4):1126–1146.

[Lu, 2011] Lu, D. (2011). Lower and upper bounds of large deviation for some subexponential claims in a multi-risk model. *Statistics and Probability Letters*, 81:1911–1919.

[Lundberg, 1903] Lundberg, F. (1903). *Approximerad framställning av sannolikhetsfunktionen.* Återförsäkring av kollektivrisker. *Acad. Afhaddling. Almqvist. och Wiksell*, Uppsala.

[Mikosch, 2009] Mikosch, T. (2009). *Non-Life Insurance Mathematics.* Springer.

[Sparre, 1957] Sparre, E. A. (1957). On the collective theory of risk in the case of contagion between the claims. *Transactions XVth International Congress of Actuaries*, 2(6):219–229.

[Tang, 2004] Tang, Q. (2004). Asymptotics for the finite time ruin probability in the renewal model with consistent variation. *Stochastic Models*, 20:281–297.

[Tang et al., 2001] Tang, Q., Su, C., Jiang, T., and Zhang, J. (2001). Large deviations for heavy-tailed random sums in compound renewal model. *Statistics and Probability Letters*, 52:91–100.

[Teugels and Sundt, 2004] Teugels, J. and Sundt, B. (2004). *Encyclopedia of Actuarial Science*. Wiley.

[Veraverbeke, 1977] Veraverbeke, N. (1977). Asymptotic behavior of Wiener-Hopf factors of a random walk. *Stochastic Processes and their Applications*, 5:27–37.

[Wang et al., 2013] Wang, K., Wang, Y., and Gao, Q. (2013). Uniform asymptotics for the finite-time ruin probability of a dependent risk model with a constant interest rate. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 15:109–124.

[Wang et al., 2012] Wang, Y., Cui, Z., Wang, K., and Ma, X. (2012). Uniform asymptotics of the finite-time ruin probability for all times. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 390:208–223.

[Yang et al., 2013] Yang, Y., Leipus, R., and Šiaulys, J. (2013). Precise large deviations for actual aggregate lose process in a dependent compound customer-arrival-based insurance risk model. *Lithuanian Mathematical Journal*, 53:448–470.

[Yang et al., 2011] Yang, Y., Leipus, R., Šiaulys, J., and Cang, Y. (2011). Uniform estimates for the finite-time ruin probability in the dependent renewal risk model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 383:215–225.