VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS METODIKOS KATEDRA

Rafael Sarchošian

SVĖRIMAI IR INTERPRETACIJOS

Magistro baigiamasis darbas

Vadovas
Doc. dr. R. Kašuba

Leidžiu ginti: ____________________

(Vadovo parašas)

VILNIUS 2009

TURINYS

ĮVADAS

Šiandien kiekvienam iš mūsų tenka susidurti su kasdieniais sunkumais. Ir kiekvienas jas sprendžia individualiai, vieni bando „tiesiogiai prasimušti“ pro sunkumus, o kiti ieško kitokių aplinkinių, pasisekus ir gerokai lengvesnių kelių įvairioms problemoms spręsti.

Panašia samprata remiasi ir interpretacijos metodas matematikoje ir kitose mokslo bei žmogiškosios veiklos srityse. Jeigu sprendžiant kažkokias problemas įprastiniais būdais, susiduriama su tam tikrais sunkumais, tai duotąją problemą galima pamėginti interpretuoti ir „išversti“ į kitą, pasisekus, daug lengvesnį uždavinį (iš galimai kitos srities).

Interpretacijos metodas paryškina matematinio mąstymo ir suvokimo lankstumą ir vientisumą bei atskleidžia tamprų ryšį tarp gana skirtingų jos šakų. Todėl būtų gerai pamėginti su šiuo metodu supažindinti ir smalsesnius mokinius, kurie jau yra įsisavinę kažkiek medžiagos iš kitų sričių.

Dar vienas interpretacijos metodo privalumas galėtų būti toks, kad per matematikos pamokas mokiniai dažniausiai susiduria su abstrakčiais dalykais bei dar painesniais ryšiais tarp jų. Taigi jei tuos dalykus aiškintume galimai paprastesniais būdais, tai mokiniams (ypač jaunesniems) gal būtų nors truputį lengviau suprasti aiškinamą temą. Mokiniams būtų lengviau įsisavinti daugiau informacijos, taip pat interpretacijos metodas palengvina patį mokymosi procesą, nes padeda geriau suprasti ir patį sprendimą (vien pavaizdavimas jau leidžia ir padeda geriau įsiminti nagrinėtą medžiagą).

Šio metodo pagalba neretai pavyksta pasiekti daug geresnių rezultatų, negu taikant tradicines mokymosi priemones.

Pagrindiniai tikslai būtų tokie:

- Mėginimas kuo išsamiau paaiškinti patį interpretacijos metodą.
- Kaip iš pažiūros painoką uždavinį galima būtų paprasčiau spręsti taikant interpretacijos metodą, t.y. pamėginti suvokti, kokios interpretacijos reikėtų ieškoti.
- Interpretacijos metodo pagalba pagilinti temos supratimą bei patikrinti suvoktas žinias.
- Patrauklesniais pavyzdžiais nejučia skatinti pačius mokinius domėtis interpretacijos metodu, natūraliai siejančiu matematikos ir kitų mokslų žinias.
- Interpretacinių momentų paryškinimas svėrimo uždaviniuose palengvindamas patį uždavinio esmės suvokimą tuo pačiu skatina mokinių loginį mąstymą, jų

savarankiškumą, gebėjimą kontroliuoti padėtį tuo pačiu padėdami tinkamai orientuotis praktiniame gyvenime (sintetinti turimą informaciją).

Uždaviniai:

- Apžvelgti interpretacijos metodą, pamėginti geriau paaiškinti jo naudą, atskleisti jo galimybes, paryškinti jo svarbą švietimo procese ir pamėginti praplėsti jo naudojimo galimybes
- Paanalizuoti interpretacijos metodo vaidmenį mokykliniame matematikos kurse.
- Paanalizuoti iš įvairių šaltinių apie interpretacijos metodą ir jo galimybes.
- Pamėginti pateikti ir kitokių interpretacijos metodo pavyzdžių, o taip pat pamėginti paaiškinti paprastus dalykus dar paprasčiau.
- Paaiškinti įvairius svėrimo uždavinius interpretacijos metodu.

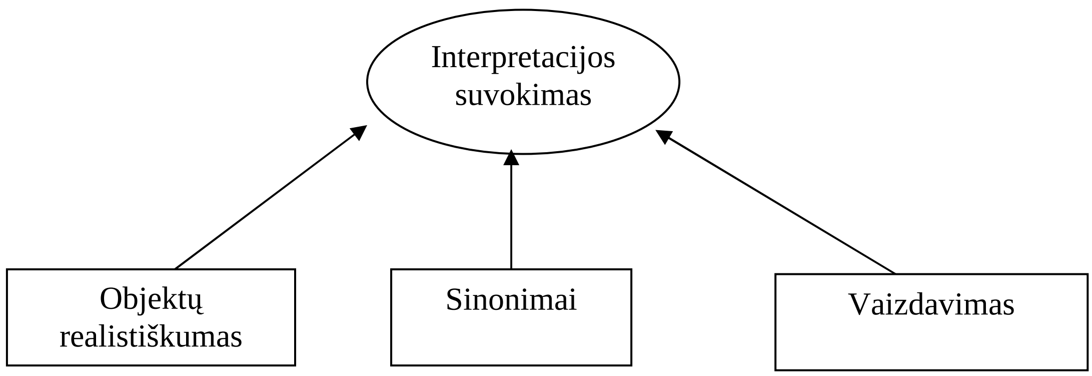
Pati interpretacija paprastai pirmiau kažką paaiškina, tuo padarydama nagrinėjamą visumą labiau suvokiama, „skaidresne“, o tada neretai ir be vargo įsimenama.

Taigi rekomenduočiau šį metodą, kaip santykinai naują gal kiek primirštą aiškinimo ir žinių suvokimo būdą. Interpretacijos metodas būtų tiek mokinių, tiek ir mokytojų pagalbininkas.

1. Interpretacija

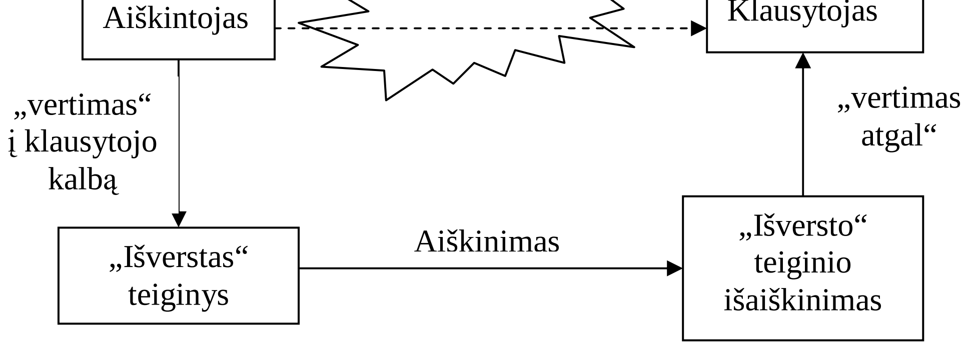
1.1 Interpretacijos samprata

Tiesioginės interpretacijos termino esmė yra paaiškinti tam tikrą prasmę apie objektą. Jis remiasi tuo, kad aiškinamos idėjos būtų kuo suprantamesnės. Kadangi kiekviena mokslinės teorijos dalis yra realios tikrovės aprašas ar atspindys, tai ta tikrovė jau kartu yra pirmapradė pilnoji bet kurios teorijos interpretacija. Tačiau toks interpretacijos būdas nėra vienintelis klasikinėje fizikoje ar matematikoje, pavyzdžiui, geometrijoje, diferencialinėse lygtyse arba mechanikoje. Įvairios lygtys, nelygybės, brėžiniai gali būti interpretuojami įvairiai ir skirtingais būdais. Daugiausiai ir turbūt labiausiai tai taikoma abstrakčiose dedukcinėse matematikos ir fizikos srityse. Abstrakčios dedukcinės teorijos gali apsieiti be „vertimo“ savo sąvokų į „fizinę kalbą“, t.y. būti vaizdžiai parodytos arba kitaip lengviau prieinamais būdais, pavyzdžiui, eksperimento pagalba. Interpretacijos suvokimą galima pabandyti paaiškinti schematiškai.



1 pav.

Tarkime turime porą: aiškintojas ir klausytojas, jų pagalba parodysime interpretacijos metodo suvokimą

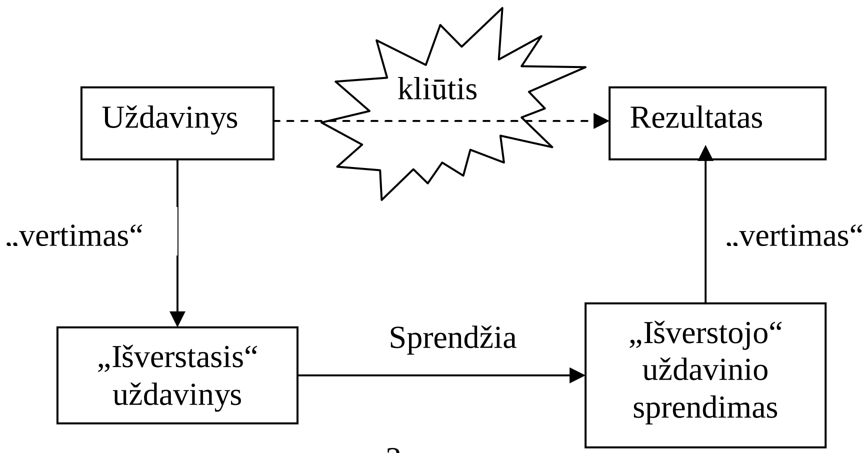


2 pav.

Taigi naudodami interpretaciją, matome, kad aiškintojas daug lengviau gali perduoti norimą informaciją klausytojui. Klausytojui lengviau suprasti ir įsivaizduoti tą dalyką, apie kurį aiškintojas kalba.

1.2 Interpretacijos metodo aprašymas matematikoje

Interpretacijos metodas – tai bendras būdas uždavinių sprendimams, kuris pagrįstas bendrais pamąstymais: „jeigu tiesiame kelyje atsiranda kliūtis , tai ją galima pamėginti apeiti kitu keliu“. Taigi interpretacijos metodo esmė tokia: jeigu turimą uždavinį sunku arba neįmanoma išspręsti duotosios matematinės srities pagalba, tada visi duotojo uždavinio dydžiai ir ryšiai tarp dydžių „išverčiami“ (interpretuojami) į kitą matematikos sritį arba į kitą mokslo šaką ir sprendžiamas naujas uždavinys, po to rezultatas „išverčiamas“ atgal į pirmykštę sritį. [1] Sunkiausias dalykas taikant interpretacijos metodą – tai rasti „naudingą“ interpretaciją duotajam uždaviniui. Interpretacija vadinama sėkminga, jeigu gauto uždavinio sprendimas neužima daugiau laiko ir nereikalauja didesnių pastangų, bet pasidaro nors kiek lengvesnis, aiškesnis ar kaip nors kitaip prieinamesnis. Trečiame paveikslėlyje schematiškai parodyta sprendimo eiga, sprendžiant tam tikrą uždavinį.



3 pav.

Taigi uždavinių sprendimuose interpretacijos pagalba, reikia vadovautis duotu planu:

1. Pakeičiame duotojo uždavinio objektus ir sąryšius tarp jų kitais objektais ir kitokiais atitinkamais ryšiais. Svarbu įsitikinti, kad tokia interpretacija yra įmanoma (korektiška).
2. Sprendžiame pakeistą uždavinį.
3. Su gautuoju sprendimu „grįžtama atgal“, be to visą laiką reikia sekti ar toks „atkeitimas“ yra teisingas.

Interpretacijos metodas plačiai taikomas matematikoje ir natūraliai parodo jos vientisumą – viena matematikos sritys, įrodinėdamas atskirus faktus ir spręsdama uždavinius, naudoja kitos srities rezultatus. Klasikinis pavyzdys tam būtų analizinė geometrija: geometrinių objektų savybės (tiesės, paviršiai ir t.t.) tiriamos algebros metodais.

Interpretacijos metodas taikomas ne tik vienoje mokslo srityje (pavyzdžiui matematikoje), bet ir tarp skirtingų mokslo sričių (pavyzdžiui tarp fizikos ir matematikos).

1.3 Interpretacijos metodo vaidmuo mokykliniame kurse

Mūsų laikais keičiasi visuomenės požiūris į mokymosi veiklą. Atsiranda nauji švietimo principai. Nebetenka turėtos prasmės ir reikšmės iš anksto kai kurie parengti ir jau turimi informacijos pateikimo būdai, nes būtina mokytis naudotis ta informacija, bei atrinkti naudingiausią, be to susirasti tą informaciją ir pritaikyti praktiniame gyvenime. Taip pat turi būti sąveika tarp skirtingų mokymosi dalykų. Keletas galimų svarbiausių švietimo tikslų būtų tokie:

- Kritinio ir kūrybinio mąstymo gebėjimų ugdymas,
- gebėjimas apibendrinti,
- gebėjimas rekonstruoti savo veiklą, siekiant ją tobulinti,
- mokėjimas atlikti lyginamąją analizę,
- gebėjimas pasirinkti mokymosi metodus bei priemones, reiškinio supratimas taikant aktyvaus mokymosi ir tradicinius mokymosi metodus,
- gebėjimas savarankiškai mokytis pagal konkrečias užduotis.

Prie šių užduočių sprendimo ženkliai galėtų prisidėti interpretacijos metodas.

Kaip jau minėjome svarbiausia šio metodo esmė yra tokia: jeigu turimą uždavinį sunku arba beveik neįmanoma paprastai išspręsti duotosios srities metodais, tai šį uždavinį mėginame pakeisti kitu – interpretuotu uždaviniu. Matome, kad interpretacijos esmė, siejasi su pagrindiniais svarbiausiais švietimo tikslais, nes skatina gebėjimą dirbti su informacija (analizuoti), gebėjimą naudotis turima informacija ir pritaikyti ją praktiniame gyvenime (sintetinti). Interpretacijos metodas didina integraciją tarp skirtingų mokykloje dėstomų dalykų.

Svarbiausias etapas taikant interpretacijos metodą yra įsitikinti, ar interpretacija atlikta korektiškai. Ar sutampa duotojo ir interpretuotojo uždavinio apibrėžimo sritys. Taigi šis etapas padeda rekonstruoti savo veiklą bei skatina tobulėti. Jis ugdo ir gebėjimą kritiškai ir kūrybingai mąstyti.

Išnagrinėjus interpretacijos metodą paaiškėja, kad tai yra puiki galimybė siekti gerų rezultatų mokant mokinius, pritraukiant juos naujomis mokymosi idėjomis, kiek kitaip nei įprastai pateikiant mokymosi medžiagą.

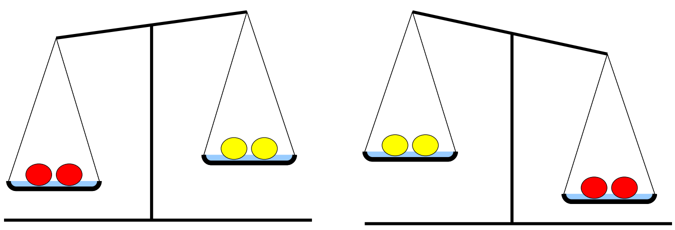
Todėl interpretacijos metodo mokymasis turi užimti svarbų vaidmenį matematikos švietimo programoje. Kaip ir kiekvienas teorinis metodas, taip ir šis mūsų nagrinėjamas klausimo kėlimas neturėtų susivesti vien į teorinius samprotavimus, todėl visur stengsimės pateikinėti konkrečių pavyzdžių.

Taigi išspręskime vieną paprastą svėrimo uždavinį, taikydami interpretacijos metodą. Uždavinio sąlyga skambėtų taip: yra 100 obuolių, joks obuolys nėra daugiau kaip dvigubai sunkesnis už kitą.

Reikia įrodyti, kad tuos obuolius galima sudėlioti į besvorius paketus po du taip, kad joks paketas nėra daugiau kaip 1,5 karto sunkesnis už (bet kurį) kitą paketą.

Spręsdami šį uždavinį nerašykime jokių nelygybių ir neatlikinėsim jokių aritmetinių veiksmų. Bandysime taip formuluoti ir aiškinti tą uždavinį, kad jis atrodytų ne kaip matematinis uždavinys, o kaip sveiko proto ar sumanumo ir kad kiekvienam moksleiviui būtų aišku tai, ką jis turėtų atlikti ir net kaip būtų galima pradėti tai daryti.

Sunumeruokime tos obuolius ir sudėkime juos didėjimo tvarka $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq ... \leq a_{100}$, bei sugrupuokime juos taip: pirmą obuolį su šimtuoju obuoliu , antrą su 99-tų obuoliu ir t.t. Bet kokiems dviems paketams gauname, kad pirmame pakete obuolių svoriai yra *m* ir *n*, o kitame – *k* ir *l*. Aišku, kad $m \leq k \leq l \leq n$. Toliau vaizduosime grafiškai naudodamiesi tik šiais keturiais obuoliais.



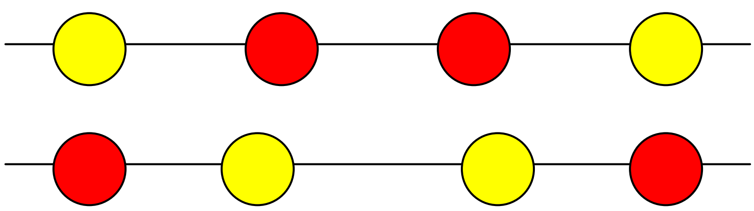
Galimi tokie atvejai:

1 atvejis. Pakelis, kuriame yra k ir l obuoliai yra sunkesnis už m ir n

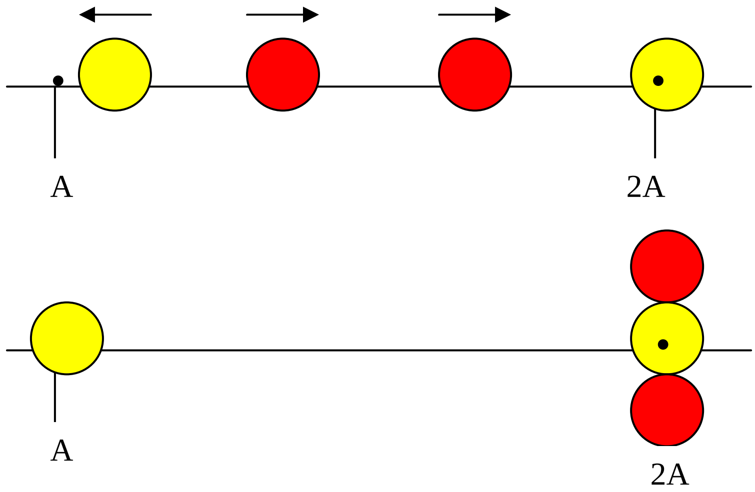
2 atvejis. Pakelis, kuriame yra m ir n obuoliai yra sunkesnis už k ir l

Pora raudonų obuolių yra sunkesnė už porą geltonų obuolių.

Toliau vadovausimės tokiu principu, iš lengvesnių atiminėsim, o sunkesniems pridėsime.

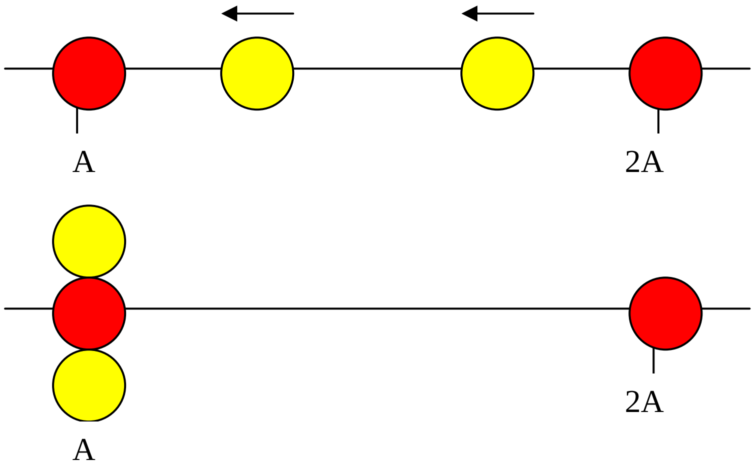


Paveikslėlyje parodyta, kaip tai daroma.



Tarkime, obuoliai yra tarp svorių A ir 2A. Lengviausią obuolį artinsime prie A, o sunkiausius raudonus prie 2A.

Tada lengviausių obuolių svoriai sumoje bus 3A, o sunkiausių – 4A. Matome, kad santykis tarp sunkiausių ir lengviausių yra $4/3$.



Kitas atvejis, kai lengviausi obuoliai yra k ir l. Juos artinsime prie A, t.y. atiminėsime svorius, o sunkiausius obuolius paliksime jų pačių vietoje taip, kad jų bendras svoris būtų 3A. Netgi ir dabar bendras lengviausių obuolių svoris yra 2A, o sunkiausių – 3A. O jų santykis yra $3/2$.

Taigi taikydami interpretacijos metodą, mes išsprendėme paprastą svėrimo uždavinį nenaudodami jokių formulių, bei neatlikinėdami jokių aritmetinių veiksmų. Šitas uždavinys tereikalauja „lašo“ sumanumo ir vaizduotės.

1.4 Interpretacijos metodo pavyzdžiai mokykliniame matematikos kurse

Pradinėse klasėse mokiniai netiesiogiai susiduria su interpretacijos metodo elementais, pavyzdžiui, su tekstiniu uždaviniu iliustracijomis arba grafišku pavaizdavimu.

Jau nuo mažiausių klasių matematikos pamokose pageidautina mokinius supažindinti su interpretacijos metodais, taikyti juos ir atkreipti dėmesį, kad šį metodą galima naudoti ne tik matematikoje, bet ir kituose dalykuose.

Mokykliniame matematikos kurse pasitaiko tokie interpretacijos pavyzdžiai:

- ✓ Sandaugų formules galima vaizduoti kaip stačiakampių plotus,
- ✓ Grafinis sprendimo būdas nelygybėms ir lygtims spręsti
- ✓ Grafų taikymas
- ✓ Vienetinio apskritimo naudojimas trigonometrijoje

Vis didesnis šių žinių plėtojimas skirtingose mokslo srityse padeda bei didina prieinamumą prie kitų dar sudėtingesnių uždavinių. Be to, sprendžiant įvairius matematinius uždavinius labai patogu taikyti interpretacijos metodą, nes šio metodo taikymas labai palengvina uždavinių sprendimą ir jų suvokimą.[2]

1.4.1 Interpretacijos pavyzdžiai

Lentelėje parodyti interpretacijos tipai, kurie pasitaiko įvairiuose uždaviniuose. [3]

Algebra → Geometrija	▪ Nelygybių įrodymas, remiantis trikampio nelygybe ▪ Nelygybių ir tapatybės įrodymas, plotų palyginimų pagalba ▪ Grafinis sprendimo būdas nelygybėms ir lygtims spręsti ▪ Nelygybių ir tapatybės įrodymas, kombinatorinės geometrijos pagalba
Geometrija → Algebra	▪ Analizinė geometrija ▪ Nenutrūkstamų funkcijų savybių naudojimas
Algebra → Tikimybių teorija	▪ Nelygybių įrodymas tikimybių teorijos pagalba
Algebra → Trigonometrija	▪ Duotųjų kintamųjų interpretacija kito argumento trigonometrinėmis funkcijomis
Geometrija → Trigonometrija	▪ Atkarpų ilgių interpretacija trigonometrijos kampų funkcijomis (dažniausiai vienetiniame apskritime)
Trigonometrija → Geometrija	▪ Trigonometrinių funkcijų reikšmių interpretacija atkarpų ilgiais vietiniame apskritime
Geometrija → Fizika	▪ Centro jėgos savybių taikymas ▪ Potencialios energijos minimumo principas ▪ Energijos tvermės dėsnis
Interpretacija vektorių pagalba	▪ Tiesės atkarpų interpretacija vektoriais ▪ Skaliarinės vektorinės sandaugos savybių taikymas
Interpretacija grafų pagalba	▪ Kombinatorinių sistemų interpretacija grafų pagalba

Lentelė Nr. 1

1.4.2 Nelygybės uždavinys sprendžiant interpretacijos metodu

Tegu $x_1, \mathrm{y}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n}, \mathrm{y}_\mathrm{n}$ – teigiami realieji skaičiai. Ar nelygybė $\frac{x_1 + ... + x_n}{\mathrm{y}_1 + ... + \mathrm{y}_\mathrm{n}} > \frac{x_i}{y_i}$ gali vienu metu būti teisinga su visais $i = 1; 2; ...; \mathrm{n}$? [1]

Atsakymas: Ne, negali.

Pateiksime keturis skirtingus šio uždavinio sprendimus, kartu su dviem skirtingais interpretacijos variantais.

1. Prieštaros būdas.

Tegu $\frac{x_1 + ... + x_n}{\mathrm{y}_1 + ... + \mathrm{y}_\mathrm{n}} > \frac{x_i}{y_i}$ su visais $i = 1; 2; ...; \mathrm{n}$. Kaip jau žinome iš sąlygos, visi kintamieji yra teigiami, todėl gauname:

$$y_i (x_1 + x_2 + ... + x_n) > x_i (y_1 + y_2 + ... + y_n)$$

Sudėjus visas šias nelygybes gauname:

$$(\mathrm{y}_1 + ... + \mathrm{y}_\mathrm{n})(x_1 + ... + x_n) > (x_1 + ... + x_n)(\mathrm{y}_1 + ... + \mathrm{y}_\mathrm{n})$$ – prieštara.

2. Sprendimas matematinės indukcijos pagalba

Įrodysime, kad

$$\frac{x_1 + ... + x_k}{y_1 + ... + y_k} \le \max\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, ..., \frac{x_k}{y_k}\right).$$

Kai k=1, tai akivaizdu.

Dabar tarkime, kad nelygybė įrodyta, kai *k<n, 2≤n*. Tada

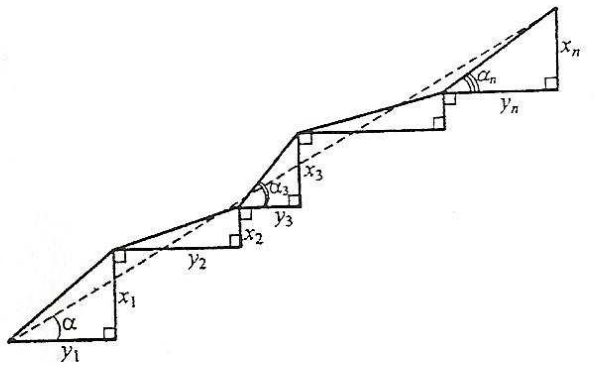
$$\frac{x_1 + ... + x_n + x_{n+1}}{y_1 + ... + y_n + y_{n+1}} = \frac{(x_1 + ... + x_n) + x_{n+1}}{(y_1 + ... + y_n) + y_{n+1}} \le \max\left(\frac{x_1 + ... + x_n}{y_1 + ... + y_n}, \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right) \le$$

$$\le \max\left(\max\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, ..., \frac{x_n}{y_n}\right), \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right) = \max\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, ..., \frac{x_n}{y_n}, \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\right),$$

ką ir reikėjo įrodyti.

3. Sprendimas geometrijos interpretacijos pagalba.

Išnagrinėkime tokią konfigūraciją iš n stačiųjų trikampių su smailiais kampais $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ (žr. pav. 4).



Pav.4

Be abejo egzistuoja tokia i reikšmė, su kuria $\alpha_i \geq \alpha$, bet tada ir $tg\alpha_i \geq tg\alpha$, iš kur gauname, kad: $\frac{x_i}{y_i} \geq \frac{x_1 + ... + x_n}{\mathrm{y}_1 + ... + \mathrm{y}_\mathrm{n}}$

4. Sprendimas fizikos (chemijos) interpretacijos pagalba

Tarkime, kad mes turime y_1 litrų tirpalo, kuriame yra $x_1$vienetų alkoholio; y_2 litrų kito tirpalo, kuriame yra x_2 vienetų alkoholio ir t.t. ($x_1, x_2,...$vienetų, nebūtinai litrais, nes galimas atvejis, kad $x_i > y_i$ su kokia nors i reikšme). Tada $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, ..., \frac{x_n}{y_n}$ yra alkoholio koncentracijos įvairiuose tirpaluose.

Tarkime, kad visus tirpalus sumaišėme viename inde. Tada $\frac{x_1 + ... + x_n}{\mathrm{y}_1 + ... + \mathrm{y}_\mathrm{n}}$ reiškia mišinio koncentraciją. Aišku, kad gauto mišinio koncentracija negali viršyti koncentracijos kiekviename tirpale atskirai, ką ir reikėjo įrodyti.

1.4.3 Trigonometrinė interpretacija

Dažniausiai įrodant įvairias trigonometrines formules, naudojamos interpretacijos su vienetiniu apskritimu. Kai kuriuose uždaviniuose naudinga naudoti atvirkštinę interpretaciją, t.y. geometrinį uždavinį vienetiniame apskritime pakeisti trigonometriniu uždaviniu. Kartais trigonometrinių funkcijų taikymas palengvina algebros įrodymus susijusius su tapatybėmis arba nelygybėmis. [3]

Uždavinys. Duota $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = e^2 + f^2 = g^2 + h^2 = 1$, $ac + bd = 0$, $eg + fh = 0$.

Reikia įrodyti, kad $|ce + df| = |ag + bh|$.

Sprendimas. Pažymėkime $a=\cos\alpha$, $b=\sin\alpha$, $c=\cos\beta$, $d=\sin\beta$, $e=\cos\gamma$, $f=\sin\gamma$, $g=\cos\varphi$, $h=\sin\varphi$. Ši interpretacija korektiška, nes

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\cos^2\beta+\sin^2\beta=\cos^2\gamma+\sin^2\gamma=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$$

su visais α,β,γ ir φ reikšmėmis.

Pagal sąlygą $ac+bd=0 \Leftrightarrow \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=0 \Rightarrow \cos(\alpha-\beta)=0$ seka, kad $\alpha-\beta=90^0+360^0\cdot n$ arba $\alpha-\beta=-90^0+360^0\cdot n$ (n – sveikasis skaičius) $\Rightarrow$ $\alpha=\beta+90^0+360^0\cdot n$ arba $\beta=\alpha+90^0+360^0\cdot n$.

Analogiškai iš $eg+fh=0$ gauname $\cos\gamma\cos\varphi+\sin\gamma\sin\varphi=0 \Rightarrow \cos(\gamma-\varphi)=0$ iš kurio seka, kad $\gamma-\varphi=90^0+360^0\cdot k$ arba $\gamma-\varphi=-90^0+360^0\cdot k$ (k – sveikasis skaičius) $\Rightarrow$ $\gamma=\varphi+90^0+360^0\cdot k$ arba $\varphi=\gamma+90^0+360^0\cdot k$.

Tada $|ce+df|=|\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma|=$

$$=|\cos(\alpha+90^0+360^0\cdot n)\cos(\varphi+90^0+360^0\cdot k)+$$

$$+\sin(\alpha+90^0+360^0\cdot n)\sin(\varphi+90^0+360^0\cdot k|=$$

$$=|\sin\alpha\sin\varphi+\cos\alpha\cos\varphi|=|bh+ag|=|ab+bh|,$$

ką ir reikėjo įrodyti.

1.4.4 Interpretacija vektorių pagalba

Uždavinys tas pats, duota:

$a^2+b^2=c^2+d^2=e^2+f^2=g^2+h^2=1$, $ac+bd=0$, $eg+fh=0$.

Reikia įrodyti, kad $|ce+df|=|ag+bh|$ [3]

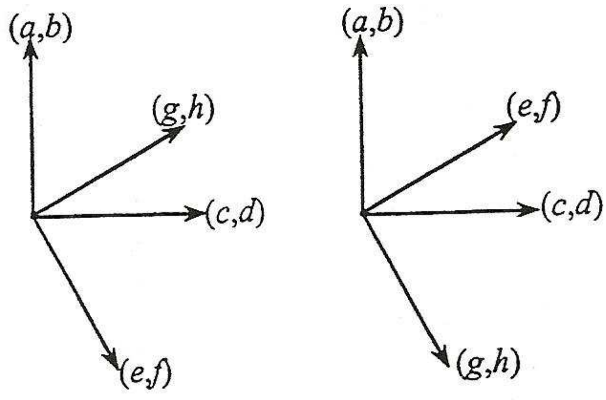
Šį uždavinį spręsime vektorių pagalba ir remsimės tik vektorių skaliarinės daugybos savybėmis.

Sprendimas. Plokštumoje nagrinėkime vienetinius vektorius $\vec{x}=(a,b)$, $\vec{y}=(c,d)$, $\vec{u}=(e,f)$, $\vec{z}=(g,h)$. Teisinga, nes

$$|\vec{x}|=|\vec{y}|=|\vec{u}|=|\vec{z}|=1 \text{ ir}$$

$$a^2+b^2=|\vec{x}|=c^2+d^2=|\vec{y}|=e^2+f^2=|\vec{u}|=g^2+h^2=|\vec{z}|=1$$

atitinka uždavinio sąlygą, todėl interpretacija įvesta korektiškai.



Pav.5

Vektorių $\vec{x}$ ir $\vec{y}$, o taip pat $\vec{u}$ ir $\vec{z}$ skaliarinė sandauga yra lygi nuliui, reiškia, vektoriai $\vec{x}$ ir $\vec{y}$,bei $\vec{u}$ ir $\vec{z}$ yra statmeni. Todėl kampas tarp vektorių $\vec{x}$ ir $\vec{z}$ yra lygus kampui tarp vektorių $\vec{y}$ ir $\vec{u}$ arba jų suma yra lygi 180^0.

Abiem atvejais nagrinėjami abiejų kampų kosinusai pagal modulį yra lygūs, todėl $|\vec{x} \cdot \vec{z}|$ = $= |\vec{y} \cdot \vec{u}|$ arba $|ag + bh| = |ce + df|$, ką ir reikėjo įrodyti.

1.4.5 Interpretacija grafų pagalba

Dažniausiai paplitusi interpretacijos rūšis, kuri yra prieinama pagal galimybes ir jaunesnių klasių mokiniams – tai interpretacija grafų pagalba. Pradinėse klasėse grafai gali būti įvedami kaip taškų konfigūracija, primenant, kad kai kurie taškai sujungti atkarpomis.

Grafai rodo ryšį tarp dviejų (ir daugiau) bet kokių viršūnių (ar jie būtų gretutiniai, ar ne gretutiniai) ir juos galima laisvai pavaizduoti įvairiais brėžiniais. Vaizdavimas grafais yra viena iš svarbiausių tokios interpretacijos dalių.[4]

Labiausiai paplitę grafų uždaviniai, kurie yra sprendžiami interpretacijos metodu yra tokie:

- ✓ Uždaviniai apie grupę žmonių ir ryšius tarp jų.
- ✓ Uždaviniai, susiję su varžybomis, ar turnyrais.
- ✓ Uždaviniai apie kelių tinklą tarp miestų.

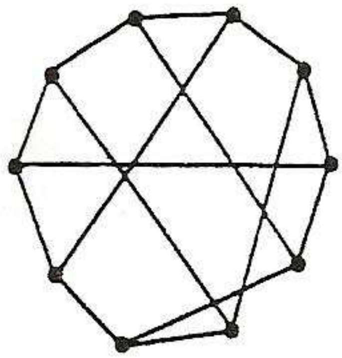
Uždavinys galėtų skambėtų taip: kažkokioje šalyje yra keli miestai. Tarp kai kurių miestų yra abipusis oro susisiekimas (jeigu yra skrydis iš miesto A į miestą B, tai reiškia, kad iš miesto B irgi yra skrydis į miestą A). Be to:

1) iš kiekvieno miesto be persėdimo galima nuskristi ne daugiau kaip iki trijų kitų miestų;

2) iš kiekvieno miesto į kiekvieną kitą miestą galima nuskristi arba be persėdimo, arba su vienu persėdimu.

Kiek daugiausiai miestų gali būti šioje šalyje? [4]

Pažymėkime miestus taškais, o atkarpomis pažymėkime susisiekimą tarp tų miestų (t.y. tarp taškų). Išnagrinėkime vieną tašką (miestą) A, jis sujungtas daugiausiai trimis atkarpomis su kitais trims taškais (miestais), iš kiekvieno to taško (miesto) išeina dar po dvi atkarpos. Reiškia taškų (miestų) toje šalyje negali būti daugiau negu $1+3+3\cdot 2=10$. Šeštame paveikslėlyje schematiškai parodyta 10 miestų ir skrydžiai tarp jų.



Pav.6

2. Svėrimo uždaviniai interpretacijos metodo pagalba.

Uždaviniai vadinami standartiniais, jeigu jiems išspręsti taikomi žinomi būdai, moksliškai dar vadinami algoritmais arba juos galima išspręsti pagal tam tikrą žinomą pavyzdį.

Uždaviniai galėtų būti vadinami nestandartiniais, jei sprendžiant ne iš karto pavyksta arba sunku pasakyti, kokią teorinę medžiagą reikia naudoti arba nežinoma, kokiu būdu jis sprendžiamas. Tokių uždavinių sprendimo eigoje būtina iš pradžių rasti sprendimo planą , nustatyti teorinę medžiagą, kuri duos raktą tokiems uždaviniams spręsti.

Nestandartinio uždavinio sąvoka yra labai sąlyginė. Kas vienam yra neįprasta, kitam gali būti savaime aišku ir gerai žinoma. Tas pats pasakytina ir apie sprendimo būdą, t. y. apie tai, kaip reikėtų elgtis ir ką daryti. Vieni iš tokių nestandartinių uždavinių yra vadinami įvairūs svėrimo uždaviniai.

Šiame pasaulyje kone viskas yra interpretacija arba nuo jos nors kiek priklauso. Monetų svėrimas yra vienas iš išsišakojančių galimybių uždavinių.

Sprendžiant visus pateiktus svėrimo uždavinius, užteks bazinių žinių, nereikės jokių gilesnių žinių bet kurioje konkrečioje matematikos srityje. Svarbiausia tik mokėjimas pastebėti kitokį, daug paprastesnį sprendimo atvejį. Tai parodo pagrindinį interpretacijos metodo tikslą, t.y. lavinti įgūdžius ir mokėti analizuoti informaciją ir sintezuoti duotas žinias. Susidarius bendrą veiksmų (svėrimų) planą ir sunkesnis uždavinys kartais pasidaro visai ne toks sunkus. Todėl svėrimų uždavinių interpretacijos metodą pageidautina išsamiai nagrinėti įvairiuose matematinėse būreliuose.

Gali kilti klausimas, kur gi slypi interpretacija svėrimo uždaviniuose? O gi tame, kad pats svėrimas jau yra interpretacija, svarstyklių būsena: ar nusveria dešinė, ar kairė arba svarstyklės atsidūrusios pusiausvyroje, jau galima interpretuoti mums reikiama linkme. Svėrimo eiliškumas, t.y. tam tikras ryšys tarp pasirinkto svėrimo bei prieš tai buvusio svėrimo. Taip pat monetų numeracija, juk tai irgi yra tam tikra interpretacija, o būtent monetų priskyrimas skaičiams. Grafinis svarstyklių vaizdavimas, kai nusveria viena iš svarstyklių pusių.

Darbe bandomi nagrinėti ir sunkesni uždaviniai, prie kurių žymia dalimi priklauso ir painesni monetų svėrimo uždaviniai.

Kitame poskyryje bus nagrinėjami įvairūs svėrimo uždaviniai. Beveik visuose nagrinėtuose uždaviniuose, kad būtų aiškiau ir vaizdžiau, buvo naudojami paveiksliukai, kurie gal neatrodo tokie svarbūs, bet yra gana naudingi.

2.1 Svėrimo uždaviniai

Labai dažnai svėrimo uždaviniai susiję su ne tikros monetos ieškojimu. Tarkime, turime krūvą visiškai vienodų monetų, taip pat žinoma, kad viena iš šių monetų yra netikra. Ji yra lengvesnė už visas kitas monetas. Reikia svirtinių svarstyklių pagalba (be svarsčių) surasti netikrą monetą, be to svėrimų skaičius turi būti minimalus. Labai svarbu ir tai, kad tokiuose uždaviniuose yra tam tikra priklausomybė tarp pasirinktų monetų eiliniam svėrimui prieš tai esančio svėrimo.

Jeigu uždavinys ganėtinai sunkus, tai reikia rasti ir išspręsti kokį nors lengvesnį interpretuotą ir panašų uždavinį. Toks metodas dažniausiai duoda raktą sprendžiant mums duotą uždavinį. Taikant interpretacijos metodą taip pat padeda tokie pamąstymai:

- ✓ Išnagrinėkime atskirą (žymiai paprastesnį) atvejį, o vėliau apibendrinkime turimą idėją ir pritaikykime duotajam uždaviniui;
- ✓ Išskaidykime uždavinį į smulkesnius uždavinukus (pavyzdžiui pakankamumas ir būtinumas);
- ✓ Apibendrinkime uždavinį (pavyzdžiui, pakeiskime konkretų skaičių kintamuoju).

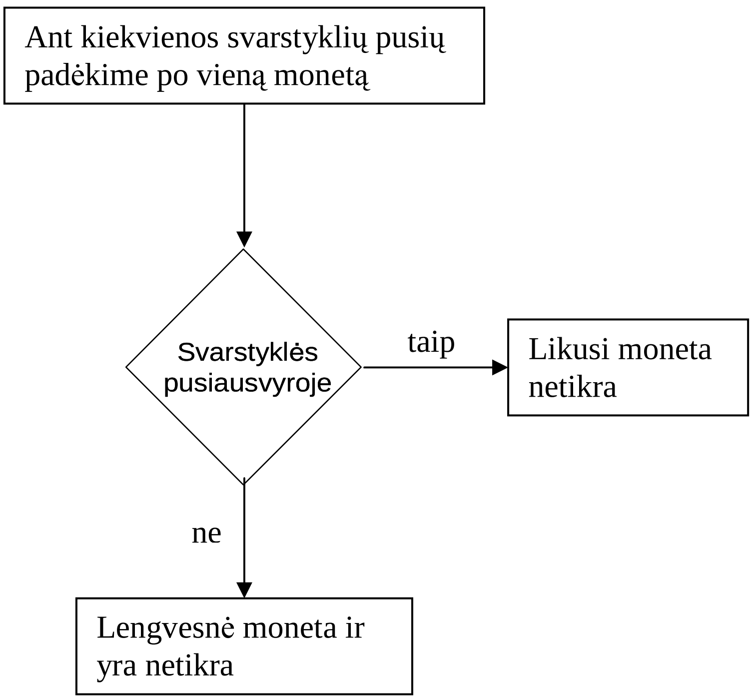
Tarkime turime 3^n monetų tarp jų 3^{n-1} monetos tikros ir vieną netikrą (netikra moneta paprastai yra lengvesnė). Kiek prireiks svėrimų, kad galima būtų nustatyti, kuri moneta netikra.

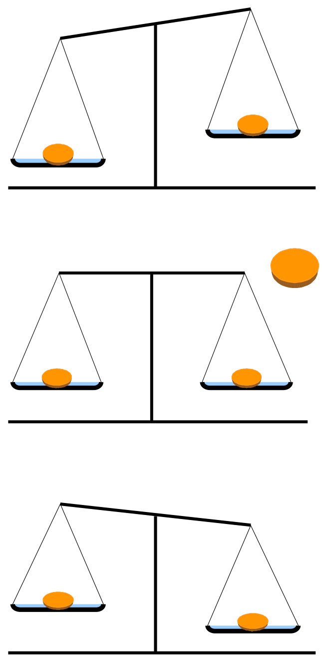
Panagrinėkime atskirus atvejus, o vėliau apibendrinkime. Tarkime, kad tarp 3 monetų – 2 tikros ir 1 netikra. Svėrimas mums gali duoti tris baigtis:

- ✓ Gali nusverti dešinė svarstyklių pusė, iš to galėtume padaryti išvadą, kad kairėje pusėje netikra moneta:
- ✓ Arba nusverti kairė svarstyklių pusė, o tai reiškia, kad dešinėje pusėje netikra moneta;
- ✓ Galimas toks atvejis, kai svarstyklės atsiduria pusiausvyroje, reiškia šios dvi monetos yra vienodo svorio ir abi tikros, o netikra moneta yra tą, kurios mes nedėjome ant svarstyklių.

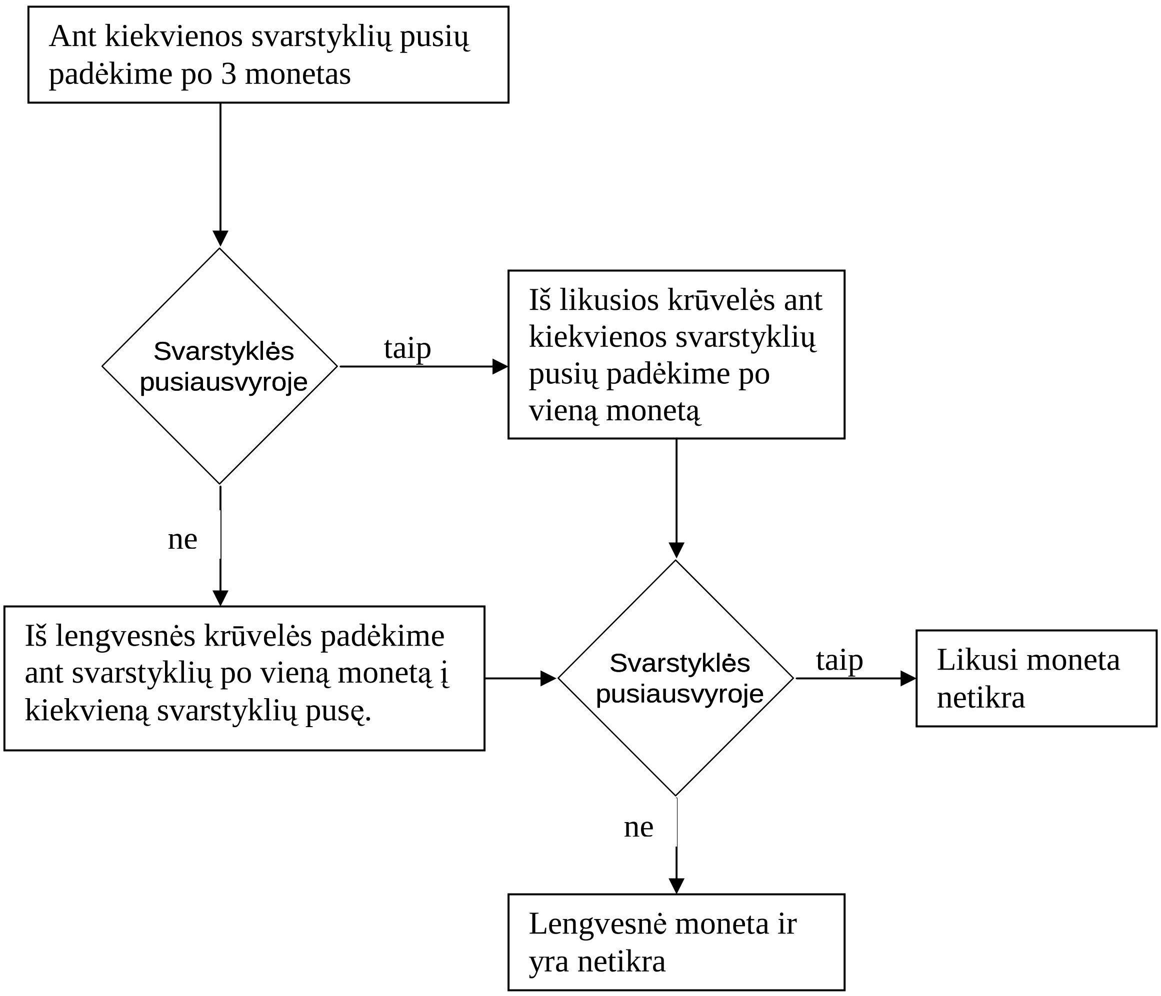
Matome, kad vieno svėrimo pilnai užtenka.

Pavaizduokime svėrimo procesą schemoje, kad būtų visiškai aišku.



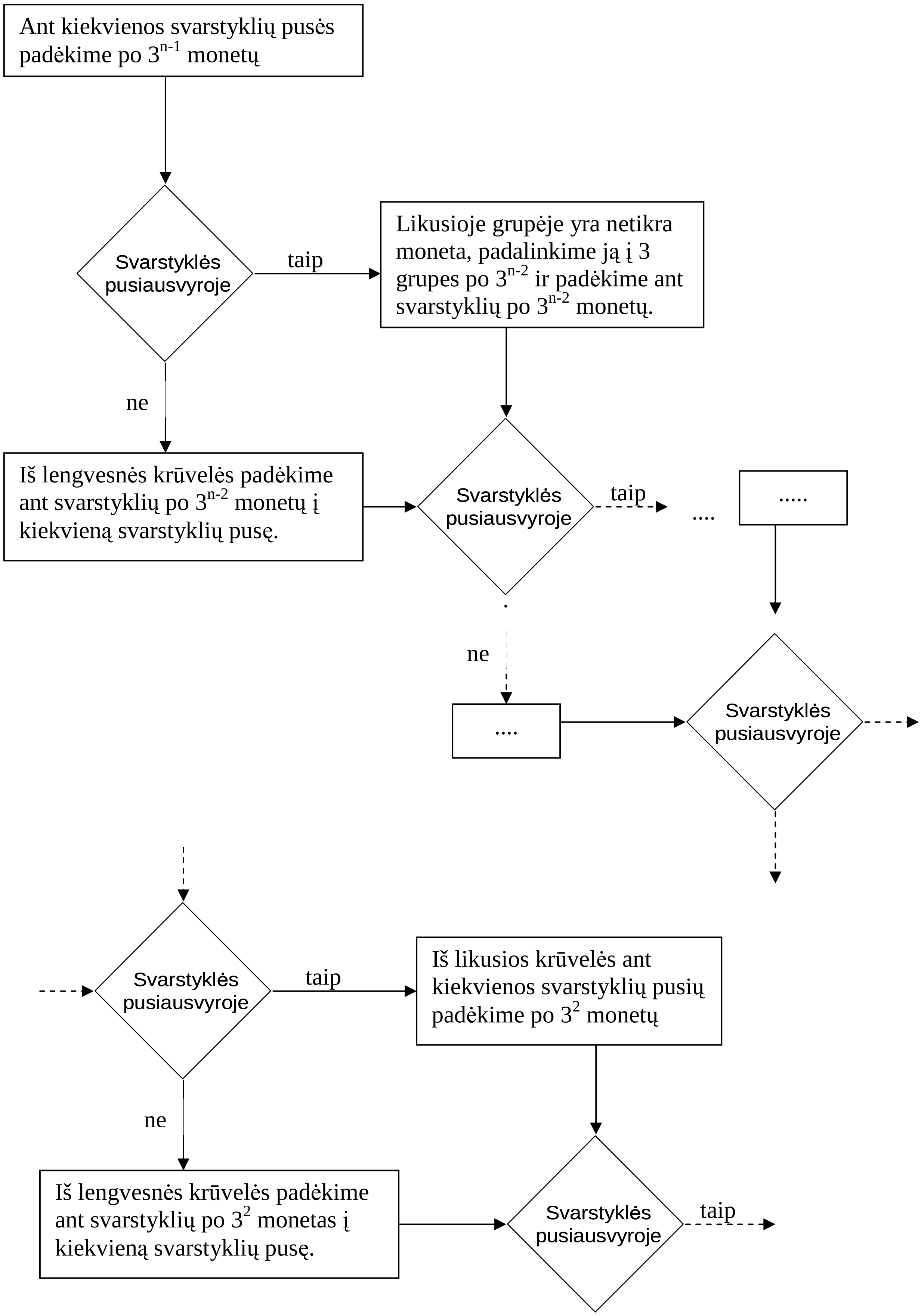


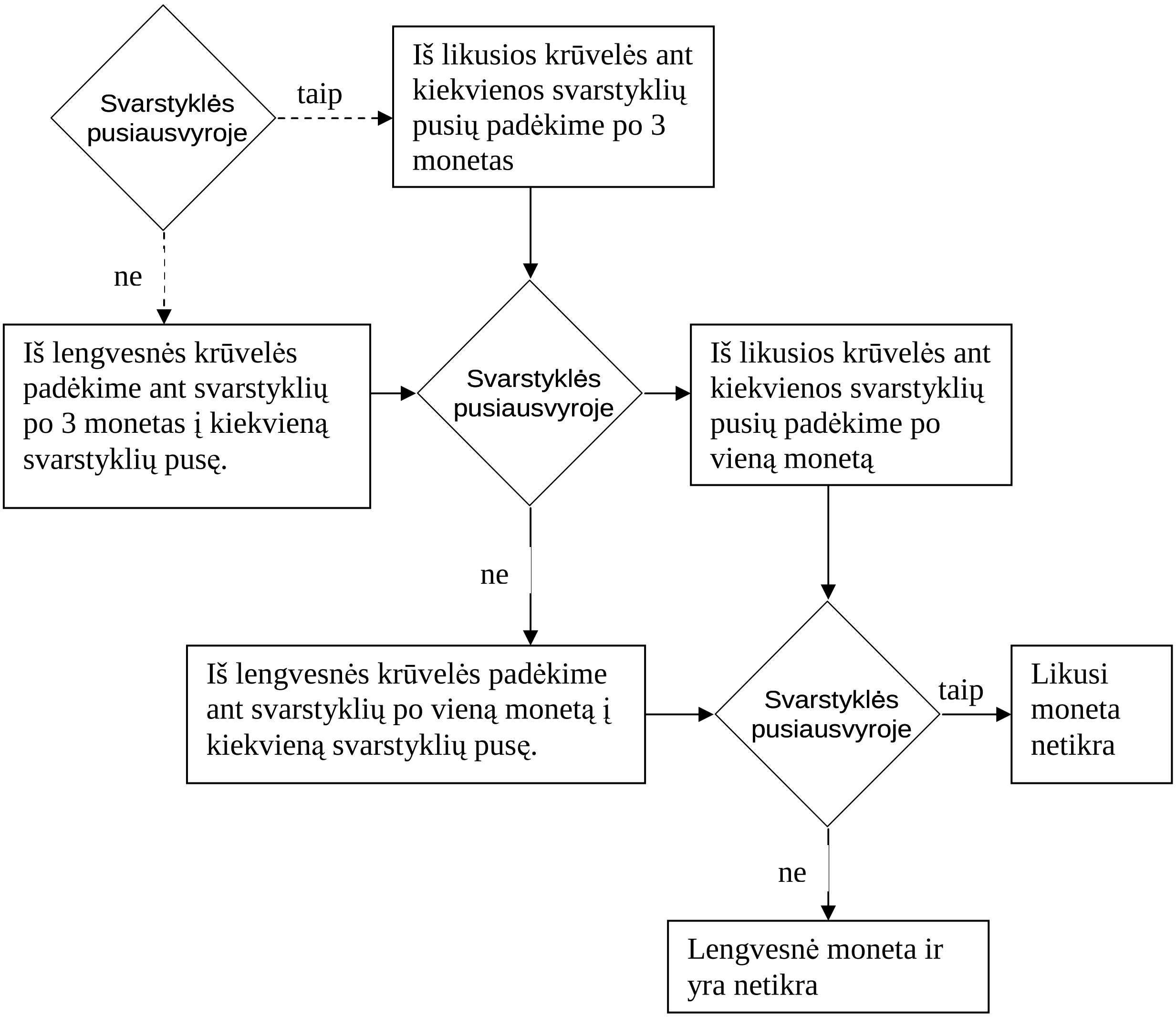
Tokios schemos pagalba pabandykime rasti netikrą monetą tarp 9 monetų.



Pabandykime apibendrinti. Tarkime, kad turime 3^n monetų tarp jų 3^{n-1} monetos yra tikros ir viena netikra (netikra lengvesnė). Nubraižykime bendrą schemą netikrai monetai rasti.

Daliname turimas monetas lygiai į tris grupes taip, kad kiekvienoje grupėje būtų 3^{n-1} monetų.





2.2 Užduotis apie 12 tikrų ir 2 netikras monetas

Turime 12 monetų – 10 tikros, 2 netikros. Visos tikros monetos sveria vienodai ir netikros sveria vienodai, tik nežinoma ar jos sunkesnės ar lengvesnės už tikras monetas. Reikia padalinti turimas monetas į dvi vienodo svorio krūveles. Naudosimės svirtinėmis svarstyklėmis, sverti galima ne daugiau kaip tris kartus.

Šis uždavinys reikalauja didesnio pamąstymo, nei prieš tai buvusiuose uždaviniuose. Pagrindinis tikslas gi, rasti tas dvi netikras monetas ir išskirstyti į dvi grupes, o jau likusias 10 monetų lengvai padalinsime po penkias monetas ir pridėsime prie netikrų monetų. Reikia paminėti ir tai, jog mūsų neprašo nustatyti ar jos lengvesnės, ar sunkesnės. Būtina monetų numeracija, nes netikrų monetų yra dvi ir kad nesusimaišyti, kai dalinsime į dvi lygias dalis. Taigi sunumeruokime jas nuo 1 iki 12.

Dabar reikia nuspręsti, po kiek monetų sversime. Jeigu dalinsime po 2 monetas, grupių bus 6, tai akivaizdu, kad trijų svėrimų mums neužteks. Jei dalinsime po 3 monetas (grupių bus 4), tai trijų svėrimų irgi pritruks. Liko du variantai arba po 4 monetas (3 grupės) arba po 6 (2 grupės).

Išnagrinėkime atvejį, kai turime 3 grupes. Jei imtume ir dėtume ant kiekvienos svarstyklių pusių, tai galimi tokie variantai:

- ✓ Nusveria kairė
- ✓ Nusveria dešinė
- ✓ Pusiausvyra

1. Jei nusveria kairė, tai arba kairėj dvi sunkios, arba dešinėj dvi lengvos. Taip pat galimas toks variantas, kad dešinėj arba kairėj viena lengvesnė (arba sunkesnė), o likusi lengvesnė (arba sunkesnė) yra tarp likusių keturių monetų, kurių mes nedėjome ant svarstyklių.
2. Analogiškai, kaip 1 variante, jei nusveria dešinė.
3. Jeigu sveriam po 4 monetas ir svarstyklės atsiduria pusiausvyroje, tai arba tarp likusių 4 monetų yra dvi netikros, arba pirmoj ir antroj grupėj yra po vieną netikrą monetą.

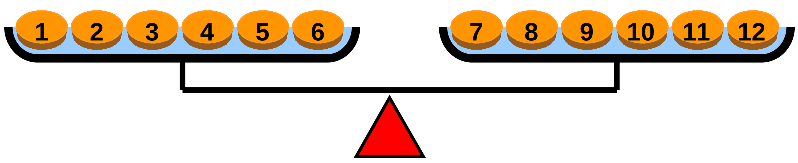
Jeigu pasitaikytų 3 atvejis, tai mes galėtume padalinti turimas monetas į dvi grupes, bet jeigu 1 ir 2, tai likusiais dviem svėrimais, mes negalėtume rasti tų monetų ir padalinti į dvi vienodo svorio krūveles.

Taigi likęs vienintelis variantas, kai turimas monetas reikia padalinti po 6 monetas į dvi grupes.

Kaip jau minėjome, svarbi numeracija, taigi sunumeruokime jas nuo 1 iki 12. Dabar padalinkime mūsų turimas monetas į dvi grupes po 6 monetas.

Pasverkime 

ir 



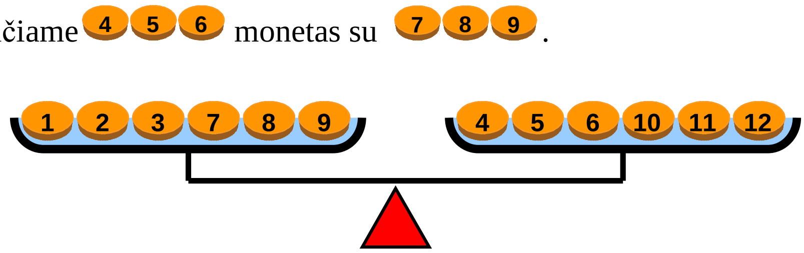
I svėrimas:

- ✓ Jeigu pusiausvyra, tai mums pasisekė ir toliau sverti nereikia, nes kiekvienoje iš svarstyklių pusių yra po vieną netikrą monetą.
- ✓ Jei persvėrė kairė pusė, tai joje arba 2 sunkios, arba dešinėje pusėje 2 lengvos monetos.

✓ Jei persvėrė dešinė pusė, tai joje arba 2 sunkios, arba kairėje pusėje 2 lengvos monetos

Toliau nagrinėsime tik atvejį, kai nusveria kairė pusė ir su išsišakojančiais variantais, nes principas yra analogiškas, jei nusveria dešinė pusė.

II svėrimas: sukeičiame 4 5 6 monetas su 7 8 9.



✓ Jeigu pusiausvyra, tai toliau sverti nereikia, nes jau turime dvi grupes, kurių svoriai yra vienodi.

✓ Jei nusvėrė kairė pusė, tai arba tarp 1 2 3 dvi sunkios, arba tarp 10 11 12 dvi lengvos monetos.

✓ Jei nusvėrė dešinė pusė tai arba tarp 7 8 9 dvi sunkios, arba tarp 4 5 6 dvi lengvos monetos.

III svėrimas:

- Jeigu nusvėrė kairė pusė, tai tada sveriame bet kokią monetą iš 1 2 3 su bet kokia iš 10 11 12
- Analogiškai kaip ir kairėje pusėje, tik jei nusvertų dešinė pusė, tai reikėtų sverti bet kokią monetą iš 7 8 9 su bet kuria monetą iš 4 5 6

Nagrinėsime atveji, kai nusvėrė kairė pusė.

1. Pusiausvyra: jos abi tikros. Tada grupės turi būti sudarytos taip: 1 ir 11 monetą vienoje grupėje, o 3 ir 12 kitoje grupėje.
2. Jei viena iš pusių persvėrė, tada arba 3 ir 10 vienoje grupėje, o 1 2 11 12 kitoje, nes viena iš jų tikra, o kita netikra.

Taigi galutinai grupės bus sudarytos taip: pirmuoju atveju 1 11 2 4 5 6 ir 3 12 7 8 9 10. O antruoju atveju 3 10 4 5 6 7 ir 1 2 11 12 8 9

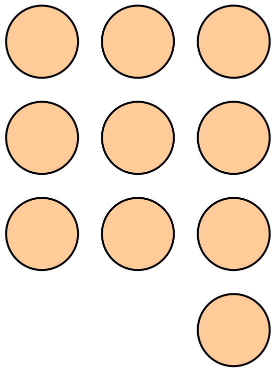
2.3 Užduotis apie 8 tikras ir 2 netikras monetas

Turime prietaisą, kuris tikrina monetas (tai tam tikras) „svarstyklių apibendrinimas“.

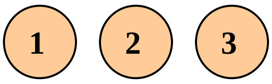
Įdedame 3 monetas ir jis nurodo vieną iš jų. Jis negali rodyti „geros“, jei ten yra netikrų. Turime 10 monetų, iš jų 2 netikros.

Reikia 6 „patikromis“ surasti („demaskuoti“) abi netikras monetas.

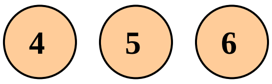
Padalinkime turimas monetas, taip kaip nurodyta paveikslėlyje, t.y. į tris grupes po 3 monetas ir viena grupę – 1 monetą. Taip pat kol kas ne numeruokime jų.



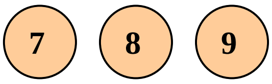
Pirmu „svėrimu“ paimkime pirmą grupę iš trijų monetų ir sunumeruokime jas.



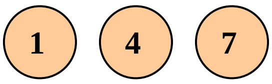
Antram svėrimui antrą grupę (irgi sunumeruokime).



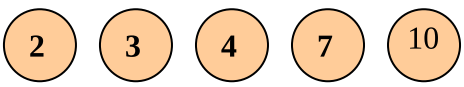
Trečiam svėrimui trečią grupę(irgi sunumeruokime).



Kai atlikome pirmus tris „svėrimus“, prietaisas mums parodė į bet kurias tris monetas. Mažiausiai viena netikra moneta yra tarp tų devynių monetų (aišku, gali būti, kad ir dvi netikros yra tarp tų devynių monetų). Taigi jeigu prietaisas nurodė į pirmą, ketvirtą, septintą monetas, tai kitu svėrimu reikia tikrinti jas ir nustatysime 1-ą netikrą monetą.



Jeigu prietaisas nurodė į pirmą monetą, tai ta moneta ir yra netikra. Likusią antrą netikrą monetą mums reikės ieškoti tarp antros ir trečios monetos (iš pirmos grupės, nes prietaisas negali rodyti dvi netikras monetas iš karto) arba tarp ketvirtos ir septintos (nes IV svėrimu, tarp pirmos, ketvirtos ir septintuos monetos mes aptikome tik vieną monetą, o jų galėjo būti dvi) arba likusi dešimta moneta, kurios mes išvis nedėjome ant svarstyklių. Taigi lieka įtartinos šios penkios monetos:

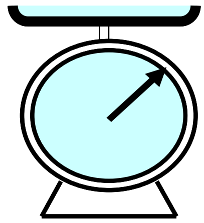


Penktu svėrimu tikrinsime antrą, trečią ir ketvirtą monetas. Jeigu prietaisas nurodys į antrą monetą, tai paskutiniu šeštu patikrinimu reikia tikrinti antrą, septintą ir dešimtą monetas. Taigi į kurią monetą nurodys prietaisas, ta moneta ir yra netikra.

Matome, kad 6-mis patikromis, radome 2 netikras monetas, tarp 10-ties.

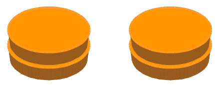
2.4 Užduotis apie keletą krūvelių su viena netikrų monetų krūvele

Tarkime, kad turime *n* krūvelių ir kiekvienoje toje krūvelėje yra *n* monetų (monetų turi būti ne mažiau krūvelių skaičiaus). Viena krūvelė visa sudaryta iš netikrų monetų, bet kuri būtent, yra nežinoma. Žinoma, kad visos tikros monetos sveria po 10 g, o visos netikros sveria 1 g mažiau. Reikia vienu svėrimu įprastinėmis svarstyklėmis sužinoti, kuri?



Kad būtų lengviau, pabandykime interpretuoti šį uždavinį. Palengvinkime sąlygą, tarkim, kad tų krūvelių tik 10 ir jose yra tik po 10 monetų. Toks uždavinys ir vėl gali sukelti sunkumų, todėl pradėkime nuo visiškai paprasto atvejo.

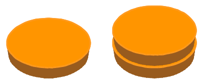
Tarkime, kad palikome tik dvi krūveles ir dvi monetas, vienoje iš krūvelių yra netikros monetos. Kaip dabar reikia sverti?



Aiškūs svėrimo reikalavimai būtų tokie:

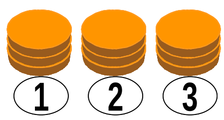
1. Visų monetų imti negalima, nes mes nieko nesužinosime.
2. Būtina ką nors paimti iš kiekvienos krūvelės.
3. Reikėtų imti skirtingą monetų skaičių iš kiekvienos krūvelės.

Ima atrodyti, kad vienintelis galimas ėmimas, tenkinantis tas sąlygas būtų toks: reikia imti vieną monetą iš vienos kurios nors ir dvi (t.y. visas!)

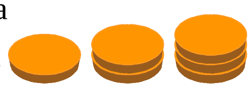


monetas iš kitos krūvelės, bet atvejis, kai yra dvi krūveles po dvi monetas, išsiskiria tuo, kad jis yra išimtis, nes jis gali netenkinti antro reikalavimo. Mes galime paimti tik iš vienos krūvelės, o iš kitos nieko neimti, pavyzdžiui, paėmę iš bet kurios krūvelės vieną (arba dvi monetas) ir pasvėrę ją (jas) mes nesunkiai nustatysime ar ji yra netikra, ar tikra.

Aišku, galima daryti įprastai, kaip aprašyta reikalavimuose, t.y. pasverkime tas tris paimtas monetas, mes galime gauti tokius svorius: 29 g arba 28 g. Jeigu visos monetos būtų tikros, tai jų svoris būtų lygus 30 g, bet mūsų atveju, vienoje iš krūvelių tikrai yra netikros monetos. Todėl atėmę iš 30 g tą sumą, kurią gavome sumuodami tikras ir netikras (arba 29 g arba 28 g), mes sužinosime krūvelę, kurioje yra netikros monetos. Jeigu bus taip: 30–29=1 tai toje krūvelėje, iš kurios paėmėm vieną monetą, ir yra netikros, o jeigu 30–28=2 tai reiškia, kad antroj krūvelėj yra netikros monetos.



Išnagrinėkime dar tokį atvejį, kai tų krūvelių yra trys ir jose po tris monetas. Šiuo atveju visi mūsų išvardinti reikalavimai yra būtini. Palengvinimui galime sunumeruoti turimas krūveles ir paimkime iš pirmos krūvelės 1 monetą, iš antros 2, o iš trečios 3 monetas, toks ėmimas yra vienintelis galimas, nes jis tenkina visus išvardintus reikalavimus. Pasverkime



jas, gautas svoris būtų mažesnis negu 60 g, nes vienoje krūvelėje yra netikros monetos. Todėl atimkime iš 60 g tą sumą, kurią gavome pasvėrę tikras ir netikras, gausime krūvelės numerį, kurioje yra netikros monetos.

Išanalizavę pirmus visiškai lengvus atvejus, mes jau matome, kad „jokie skaičiai nebegąsdina“.

Dabar pabandykime pakomentuoti tuos reikalavimus, kurie būtini svėrimams.

1. Jeigu mes pasversime viską, tai nieko nenustatysime, nes tą svorį mes ir be svėrimo jau žinome.
2. Jei kurių nors krūvelių nepaliesime, tai nieko nenustatysime, nes gali atsitikti taip, kad ten ir gali būti netikros monetos.
3. Iš skirtingų krūvelių reikėtų imti skirtingai monetų, nes imdami vienodą skaičių, mes nieko nesužinosime.

Galimas ir kitas sprendimo būdas, ieškant krūvelės su netikrom monetom, bet jis labai panašus į jau apžvelgtą atvejį. Esminiai skirtumai būtų tokie:

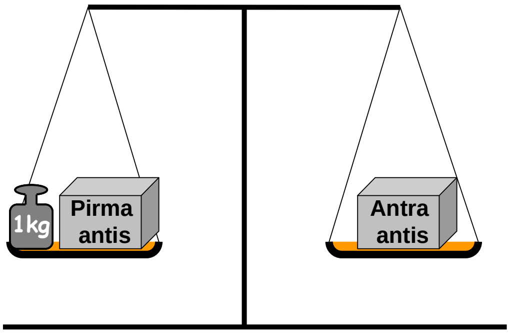
- Iš vienos krūvelės išvis neimam, o su kitomis elgsimės taip pat, kaip prieš tai išnagrinėtu atveju, t.y. iš pirmos krūvelės 1 monetą, iš antros – 2 monetas ir taip toliau.
- Monetų gali būti mažiau negu krūvelių, bet tik po vieną mažiau negu krūvelių.

2.5 Užduotis apie 15 ančių

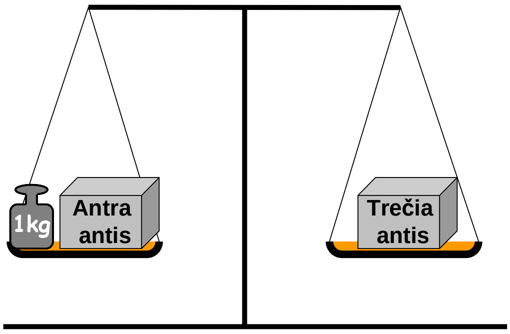
Baronas Miunchauzenas medžioklėje užmušė 15 ančių, kurių svoriai yra tokie: 50, 51, 52, ..., 64 kg. Jam yra žinomi kiekvienos anties svoriai. Svirtinių svarstyklių pagalba baronas ruošiasi įrodyti žiūrovams, kad pirma antis sveria 50 kg, antra – 51 kg, trečia – 52 kg ir t.t. (pradžioje žiūrovai nieko nežino apie ančių svorius). Kiek mažiausiai svarsčių prireiks Miunchauzenui, jeigu svarsčius ir antis galima dėti ant kiekvienos svarstyklių pusių, be to, svėrimų skaičius nėra ribojamas? (Svarsčių svoris yra žinomas tiek Miunchauzenui, tiek žiūrovams. Galima naudoti neribotą kiekį svarsčių, kurių svoriai yra nuo 1 kg iki 1000 kg).

Įrodysime, kad vieno svarsčio pakanka. Taigi vieno svarsčio reikia, bei vieno svarsčio ir pakaks tai bus – 1 kg svarstis.

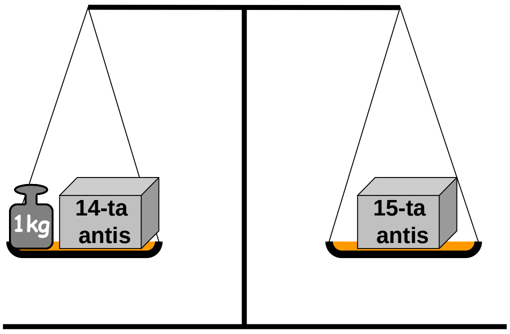
Pirmas veiksmas: įrodysime, kad „gretimos antys skiriasi per 1 kg“. Tarkime, kad lengviausia (pirma) antis sveria n, tada kitos antys sveria $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, ..., $n+13$ ir $n+14$. Pademonstruosime tai 7 pav., 8 pav. ir 9 pav.



7 pav.

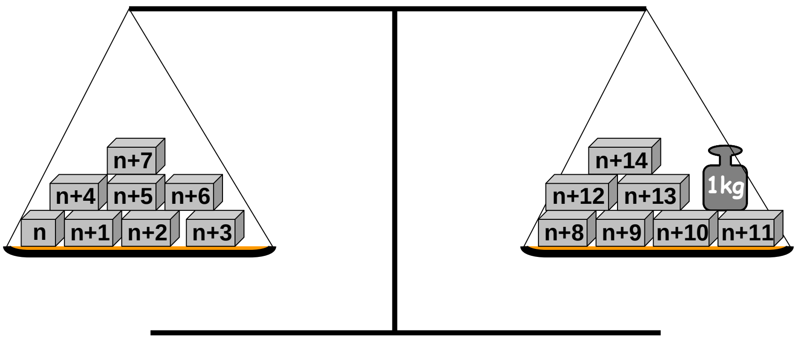


8 pav.



9 pav.

Taigi pirmu veiksmu mes parodėme, kad gretimos antys skiriasi per vieną kilogramą. Kitu žingsniu rasime kam lygus n. Suskirstykime turimas antis taip: į vieną svarstyklių pusę padėkime $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$, $n+6$, $n+7$, o į kitą svarstyklių pusę likusias antis t.y. $n+8$, $n+9$, $n+10$, $n+11$, $n+12$, $n+13$ ir $n+14$ ir vieno kilogramo svarstį.



10 pav.

Dabar galime sudaryti tokią lygtį:

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)+(n+5)+(n+6)+(n+7)=$$

$$=(n+8)+(n+9)+(n+10)+(n+11)+(n+12)+(n+13)+(n+14)+1$$

$$8n+28=7n+78$$

$$n=50$$

Gavome $n=50$, o tai reiškia, kad lengviausia antis sveria 50 kg, o visos kitos antys sveria vienu kilogramu daugiau, t.y. 51 kg, 52 kg, ..., 64 kg.

2.6 Sunkumai, su kuriais susiduriama taikant interpretacijos metodą

Sprendžiant tam tikrą problemą mūsų tikslas – rasti patį „lengviausią“ sprendimą, tokį, kad sąnaudos, darbas, laikas ir kiti resursai būtų patys mažiausi. Dažniausiai neegzistuoja vienintelio ir lengviausio sprendimo pagal visus kriterijus, todėl reikia laviruoti ir vertinti, kas yra naudinga kiekviename atskirame atvejyje.

Šį teiginį galima pritaikyti ir sprendžiant uždavinius matematikoje. Jeigu uždavinio sprendimas remiasi tik aksiomomis iš duotosios srities, bei daug darbo ir laiko reikalaujantis, tai atitinkamos interpretacijos paieška gali užimti daug laiko. Be to, kai atitinkama interpretacija rasta, reikia įsitikinti, kad pakeitimas yra padarytas teisingas, tarp duotojo ir interpretuotojo uždavinių.

Būtent naudingiausios atitinkamos interpretacijos paieška ir yra sunkiausiu etapu sprendžiant uždavinius interpretacijos metodu. Kad sėkmingai taikyti šį metodą, reikia turėti geras žinias skirtingose srityse ir taip pat gerą analizinį mąstymą, bei sintezuoti prieinamą informaciją. Dėl šių priežasčių interpretacijos metodas užima svarbų vaidmenį matematikos uždaviniuose. [3]

IŠVADOS

Apžvelgus interpretacinį metodą, matome, kad šis metodas yra labai svarbus kaip švietimo priemonė, kuri padeda lengviau ir geriau išaiškinti kilusius neaiškumus. Be to, interpretacijos metodo taikymas sprendžiant įvairius uždavinius, padeda geriau įsisavinti teorinę medžiagą bei prisideda prie skirtingų dalykų mokymosi vienu metu.

Aišku, kad ne visada lengva rasti korektišką ir teisingą interpretaciją, tai yra sunkiausia šio metodo dalis. Bet jeigu mums pavyksta atrasti ją, tai duoda geras žinias skirtingose srityse, bei sukuria gebėjimus analizuoti ir sintezuoti informaciją.

Olimpiadiniuose ir įvairiuose konkursiniuose uždaviniuose (kuriems iš dalies priklauso ir svėrimo uždaviniai dėl jų logiškumo ir galimybės pavaizduoti „išsišakojančią“ veiksmų seką) dažnai pasitaiko uždaviniai, kurių sprendimuose labai patogu taikyti interpretacijos metodą, nes tai padeda pasiekti gerų rezultatų.

Interpretacijos metodas padeda moksleiviams integruoti naują informaciją į jau esamą žinių sandarą. Jo pagalba galime parodyti reikšmingus ryšius tarp skirtingų matematikos sričių (arba kitų mokslo sričių).

Summary

Rafael Sarchošian

Weighing and interpretation

The interpretation method essence is that: if the task is difficult or impossible to solve by the given mathematical field assistance, then all of a given task and the relations between the value "translated" (interpreted) to another area of mathematics or in other branches of knowledge (science), and solving new task, then the result "translate" back into the original area. Besides the interpretation method shows the unity between various branches of science, special in mathematics.

Method of interpretation is the general method of solving different problems (such as geometric, arithmetic, weighing problems) when the proposition is replaced by the similar problem which is more easy solving than original task.

That’s why it is important introduce method of interpretation to the pupils, because it developed pupils ability to analyze and synthesize knowledge’s.

LITERATŪROS SĄRAŠAS

1) R. Sarchošian. Bakalaurinis darbas. *Svėrimo uždaviniai*. VU MIF, 2007.
2) А. Леман. *Сборник задач московских математических олимпиад*. Просвещение, Москва 1965.
3) А. Храбров. *Петербургские олимпиады школьников по математике 2003*-2005. Невский Диалект, Санкт-Петербург 2006.
4) Г. Шестопал. *Как обнаружить фальшивую монету*. Квант, Nr. 10, 1979.
5) И. М. Яглом, А. М. Яглом. *Вероятность и информация*. Наука, Москва 1973.

[1] Д. Бонка. *Метод интерпретации в процессе обучения предметов естествознания*. – In: Selected papers of the international scientific conference the Development and Perspectives of General and Higher Education. SU, Šiauliai, 2004.

[2] Д. Бонка. *Роль метода интерпретаций в школьном курсе математики*. – 5th International Conference Teaching Mathematics. LPA, Liepaja, 2004.

[3] Д. Бонка. *Метод интерпретаций при решении задач Латвийских олимпиад по математике*. – In: Matematika ir matematikos dėstymas. KTU, Kaunas, 2005.

[4] Д. Бонка. *Интерпретации с помощью графов в конкурсных задачах для учеников основной школы*. – In: Teaching Mathematics. Proceedings of the 6th International Conference. VU, Vilnius, 2005.