ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Modesta Lukošiūnienė

Selbergo klasės L funkcijų reikšmių pasiskirstymas

Magistro darbas

Darbo vadovė

doc. dr. Renata Macaitienė

Šiauliai, 2012

Turinys

ĮVADAS

"What is a zeta-function? We know it when we see one."
M. N. Huxley

Visos klasikinės dzeta ir L funkcijos apibrėžiamos Dirichlė (Dirichlet) eilutėmis [11], [13], kurios yra vienas iš svarbiausių objektų, tiriant daugelį analizinės skaičių teorijos problemų. Magistro darbe nagrinėsime 1989 m. A. Selbergo (Atle Selberg) apibrėžtą [21] plačią paprastųjų Dirichlė eilučių

$$L(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}, \ s = \sigma + it,$$

klasę, turinčią Oilerio sandaugą, analizinį pratęsimą, Rymano tipo funkcinę lygtį ir tenkinančią Ramanudžano hipotezę koeficientams a_m. Šią L funkcijų klasę žymėsime $\mathcal{S}$. Minėtame [21] darbe A. Selbergas nagrinėjo L funkcijų tiesinių kombinacijų reikšmių pasiskirstymą, suformulavo tam tikras hipotezes ir teoremas klasės $\mathcal{S}$ funkcijoms. Šiandieninėje matematinių problemų gausybėje L funkcijas plačiai nagrinėja daugybė matematikų: Bombieris (E. Bombieri), Konris (J. B. Conrey), Gošas (A. Gosh), Heihalas (D. A. Hejhal), Perelis (A. Perelli), Štaudingas (J. Steuding) [4]-[6], [9], [10], [15], [17]-[22], minėtuose darbuose daugiausiai dėmesio skiriama Selbergo hipotezių klasei $\mathcal{S}$ sandaros tyrimui, funkcijų reikšmių pasiskirstymui. Kadangi klasė $\mathcal{S}$ yra pakankamai plati ir sudėtinga, dauguma matematikų paraleliai nagrinėja tam tikrus jos poklasius. Keletas Selbergo klasės poklasių pateikti ir tyrinėti [4]-[15], [19], [20] [22], [23].

Magistro darbe nagrinėsime Selbergo klasės poklasį $\widetilde{\mathcal{S}}$, kurį 2002 m. apibrėžė J. Štaudingas [22], [23]. Išsamūs Selbergo klasės ir minėto poklasio apibrėžimai bei funkcijų pavyzdžiai pateikiami 1 skyriuje.

Pradedant Boro (H. Bohr) ir Jeseno (B. Jesen) darbais, [2], [3], funkcijų, apibrėžtų Dirichlė eilutėmis, asimptotinė elgsena nusakoma tikimybinėmis ribinėmis teoremomis (pavyzdžiui [9], [11], [12], [15] darbai). Ribines teoremas tikimybinių matų silpno konvergavimo prasme poklasio $\widetilde{\mathcal{S}}$ funkcijoms analizinių funkcijų erdvėje pateikė J. Štaudingas [23], kompleksinėje plokštumoje – R. Macaitienė [15]. Ribinės teoremos analizinių funkcijų erdvėje yra taikomos Dirichlė eilučių universalumo įrodymuose. Tokios ribinės teoremos klasės $\widetilde{\mathcal{S}}$ funkcijoms pateiktos [23].

Tam, kad galėtume suformuluoti minėtus J. Štaudingo ir R. Macaitienės rezultatus įvesime pažymėjimus.

Tegul G yra kompleksinės plokštumos sritis, $H(G)$ – analizinių srityje G funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija. Pažymėkime $\mathcal{B}(U)$ erdvės U Borelio aibių klasę, γ – vienetinį apskritimą $\{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ kompleksinėje plokštumoje ir

$$\Omega = \prod_{p}^{\infty} \gamma_p,$$

begaliniamatį erdvinį torą, kur $\gamma_p = \gamma$ visiems pirminiams p. Su sandaugos topologija ir pataškine daugyba begaliniamatis toras Ω, pagal Tichonovo teoremą, yra kampaktinė topologinė Abelio grupė. Todėl erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ gali būti apibrėžtas tikimybinis Haro matas m_H. Gauname tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$.

Tegul

$$D_0 = \left\{ s \in \mathbb{C} : \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_L}\right) < \sigma < 1 \right\},$$

kur d_L yra funkcijos $L \in \mathcal{S}$ laipsnis, apibrėžiamas suma

$$d_L = 2\sum_{j=1}^{r} \lambda_j.$$

Žinoma [17], kad $d_L \geq 1$, kai $1 \neq L \in \mathcal{S}$.

Tegul $\omega(p)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ projekcija į koordinačių erdvę γ_p. Pažymėkime

$$L_0(s, \omega) = \prod_{p} \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{c_j(p)\omega(p)}{p^s}\right)^{-1}, \ s \in D_0, \tag{1}$$

$H(D_0)$-reikšmį atsitiktinį elementą, apibrėžtą tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$, o P_{L_0}– atsitiktinio elemento $L_0(s, \omega)$ skirstinį

$$P_{L_0}(A) = m_H(\omega \in \Omega : L_0(s, \omega) \in A), \ A \in \mathcal{B}(H(D_0)).$$

A teorema [22], [23]. *Tegul $L \in \widetilde{\mathcal{S}}$. Tuomet tikimybinis matas*

$$P_T(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0; T] : L(s + i\tau) \in A\}, \ A \in \mathcal{B}(H(D_0)),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P_{L_0}.

Čia $meas\{A\}$ – mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matas.

Analogišką rezultatą R. Macaitienė gavo kompleksinėje plokštumoje.

B teorema [15]. *Tarkime, kad $L(s) \in \tilde{\mathcal{S}}$. Tuomet tikimybinis matas*

$$P_T(A) = \frac{1}{T} meas\{t \in [0;T] : L(\sigma + it) \in A\}, \ A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento $L(\sigma, \omega)$ skirstinį

$$P_L(A) = m_H(\omega \in \Omega : L(\sigma, \omega) \in A), \ A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Šiuo atveju

$$L(\sigma, \omega) = \prod_p \prod_{j=1}^k \Big(1 - \frac{c_j(p)\omega(p)}{p^s}\Big)^{-1}, \qquad \sigma > \max\Big(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_L}\Big).$$

Svarbu paminėti, kad J. Štaudingas nagrinėjo klasės $\tilde{\mathcal{S}}$ funkcijų universalumą, todėl apibrėždamas šią klasę įvedė du reikalavimus. Tačiau tikimybinių ribinių teoremų įrodymui naudojamas tik vienas poklasį $\widetilde{\mathcal{S}}$ apibrėžiantis reikalavimas (poklasio $\widetilde{\mathcal{S}}$ aprašas pateikiamas 1 skyriuje). Tokiu atveju prasminga nagrinėti $\tilde{S}$ plėtinį $\tilde{S}'$, apribotą tik šiuo reikalavimu. Bendru atveju, klasė $\mathcal{S}$ yra mermorfinių funkcijų, turinčių r eilės polių taške $s = 1$, klasė. Todėl, šios klasės L funkcijų asimptotinės savybės geriausiai nusakomos ribinėmis teoremomis meromorfinių funkcijų erdvėje.

Darbo tikslas - įrodyti ribinę teoremą silpno tikimybinių matų konvergavimo prasme poklasio $\widetilde{S}'$ funkcijoms meromorfinių funkcijų erdvėje.

Tegul $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ yra Rymano sfera su metrika d, apibrėžta formulėmis

$$d(s_1, s_2) = \frac{2|s_1 - s_2|}{\sqrt{1 + |s_1|^2}\sqrt{1 + |s_2|^2}}, \ d(s, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |s|^2}}, \ d(\infty, \infty) = 0,$$

kur $s, s_1, s_2 \in \mathbb{C}$. Sričiai G iš $\mathbb{C}$ apibrėžiame meromorfinių srityje G funkcijų $g : G \to (\mathbb{C}_\infty, d)$ erdvę $M(G)$ su tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija. Šioje topologijoje, $\{g_n\} \subset M(G)$ konverguoja į funkciją $g \subset M(G)$, jei kiekvienam kompaktiškam poaibiui K iš G teisinga lygybė

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{s \in K} d(g_n(s), g(s)) = 0.$$

Pastebime, kad erdvė $H(G)$ yra $M(G)$ poerdvis.

Nagrinėkime kompleksinės plokštumos sritį

$$D = \left\{ s \in \mathbb{C} : \sigma > \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_L}\right)\right\}.$$

Tegul $L(s, \omega)$ yra $H(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ (1) formule, $s \in D$. Pažymėkime P_L elemento $L(s, \omega)$ skirstinį.

Pagrindinė teorema. *Tarkime, kad $L \in \widetilde{\mathcal{S}}'$. Tuomet tikimybinis matas*

$$P_{T,L}(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0; T] : L(s + i\tau) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(M(D)),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P_L.

Darbą sudaro 4 skyriai, išvados, santrauka anglų kalba, literatūros sąrašas, žymėjimai.

Pirmąjame darbo skyriuje pateikiame išsamų Selbergo klasės ir nagrinėjamo poklasio aprašą.

Kad darbas būtų lengvai skaitomas, antrąjame skyriuje pateikiamos pagrindinės vartojamos sąvokos ir teoremos.

Kadangi pagrindinės teoremos įrodymas remiasi ribine teorema analizinėje funkcijų erdvėje bei jungtine ribine teorema meromorfinių funkcijų erdvėje, trečiąjame darbo skyriuje įrodomos pagalbinės ribinės teoremos tikimybinių matų silpno konvergavimo prasme, pateikiami reikalingi ergodiškumo aspektai.

Apibrėžimai, teiginiai, teoremos ar lemos, žymimi trimis skaičiais: pirmasis skaičius nurodo skyriaus numerį, antrasis – poskyrio, trečiasis – teiginio numerį poskyryje. Formulės žymimos skliaustuose dviem skaičiais: pirmasis iš jų nurodo skyriaus, antrasis – formulių jame numerius. Teoremų įrodymų pabaiga žymima simboliu ▲.

1 SELBERGO KLASĖS IR NAGRINĖJAMO POKLASIO APRAŠAI

Kaip jau minėjome įvade, A. Selbergas apibrėžė paprastųjų Dirichlė eilučių

$$L(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}, \qquad s = \sigma + it,$$

klasę $\mathcal{S}$, tenkinančią reikalavimus (hipotezes):

• Ramanudžano hipotezė: *kiekvienam* $\epsilon > 0$, $a(m) \ll m^{\epsilon}$.

Jei tenkinama ši hipotezė, Dirichlė eilutė konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > 1$ ir tolygiai kiekviename kompaktiškame poaibyje. Pagal Vejerštraso teoremą, funkcija $L(s)$ yra analizinė pusplokštumėje $\sigma > 1$.

• Analizinis pratęsimas: *egzistuoja sveikasis skaičius* $r \geq 0$, *toks kad* $(s-1)^r L(s)$ *yra sveikoji baigtinės eilės funkcija.*

• Funkcinės lygties egzistavimas: *teigiamiems sveikiesiems skaičiams* Q *ir* λ_j, *bei kompleksiniams skaičiams* μ_j, $\Re\mu_j \geq 0$, *ir* w, $|w| = 1$, $j = 1, ..., l$ *funkcija*

$$\Lambda_L(s) = L(s) Q^s \prod_{j=1}^{l} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j) = L(s) \cdot \gamma(s),$$

tenkina funkcinę lygtį

$$\Lambda_L(s) = w\overline{\Lambda_L(1-\overline{s})}.$$

Pavyzdžiui:

1)$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s)$;

2)$(\frac{\pi}{d})^{-\frac{1-s+\delta}{2}}\Gamma(\frac{1-s+\delta}{2})L(1-s,\overline{\chi}) = \frac{i^{\delta}\sqrt{d}}{\tau(\chi)}\left(\frac{\pi}{d}\right)^{-\frac{s+d}{2}}\Gamma(\frac{s+\delta}{2}) \cdot L(s,\chi)$,

kur $L(s,\chi)-$ Dirichlė L funkcija, kai $\chi(m)-$ primityvus charakteris moduliu d.

• Turi Oilerio (L. Euler) sandaugą: *egzistuoja skaičiai* $b(p^{\alpha})$, *tenkinantys įvertį* $b(p^{\alpha}) \ll p^{\alpha\theta}$, *su tam tikrais* $\theta < \frac{1}{2}$ *tokiais, kad*

$$L(s) = \prod_{p} \exp\Big\{ \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{b(p^{\alpha})}{p^{\alpha s}} \Big\}.$$

Taigi, iš čia akivaizdu, kad joks elementas $L \subset \widetilde{\mathcal{S}}$ nėra lygus nuliui absoliutaus konvergavimo pusplokštumėje $\sigma > 1$.

Nulių pasiskirstymo Selbergo klasėje klausimai yra esminiai. Jei kuris nors iš aptartų apribojimų būtų išmestas, gauta platesnė klasė apimtų Dirichlė eilutes, kurios prieštarauja Rymano hipotezei.

Pateiksime keletą *Selbergo klasės narių* pavyzdžių:

• Rymano dzeta funkcija

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}, \quad \sigma > 1$$

• Dirichlė L funkcijos

$$L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

čia $\chi-$ charakteris iš multiplikatyvios grupės $\mathbb{Z}_q^*$ (tarpusavyje pirminių liekanų klasės moduliu q).

Pastebime, jog $\zeta(s)$ yra specialus atvejas, atitinkantis charakterį moduliu 1.

• Heckės L funkcijos

$$L_K(s, \chi) = \sum_I \frac{\chi(I)}{N(I)}, \ \sigma > 1,$$

susietos su algebrinių skaičių lauku K. Čia I perbėga nenulinius idealus sveikųjų skaičių žiede iš K; $N(I)$ žymi I normą, o $\chi-$ baigtinės ar begalinės eilės Heckės charakterį.

• Su atitinkamais apribojimais ir normavimu, klasei $\mathcal{S}$ priklauso holomorfinių modulinių formų F Heckės L funkcijos

$$L_F(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\alpha(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

kur $c(p) = \alpha(p) + \beta(p)$, $F(z)$ yra holomorfinė modulinė forma, o $c(m)$ – jos Furje koeficientai.

• Artino L funkcijos, priklauso aibei $\mathcal{S}$, jei teisinga Artino hipotezė.

Visi žinomi funkcijų iš Selbergo klasės pavyzdžiai yra automorfinės arba hipotetiškai automorfinės L funkcijos.

Kaip jau minėjome Selbergo klasė yra pakankamai plati ir sudėtinga, todėl dauguma matematikų, kaip Bombieris, Konris, Gošas, Heihalas, Perelis , Štaudingas nagrinėja tam tikrus klasės $\mathcal{S}$ poklasius.

Magistro darbe nagrinėjamas Selbergo klasės poklasis $\widetilde{\mathcal{S}}$, 2002 metais apibrėžtas J. Štaudingo.

Funkcija $L \in \widetilde{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}$, jei papildomai tenkinami reikalavimai (hipotezės):

• Polinominės Oilerio sandaugos egzistavimas: *kiekvienam pirminiam p ir $j = 1, ..., k$ egzistuoja kompleksiniai skaičiai c_j, tenkinantys sąlygą $|c_j(p)| \leq 1$, tokie, kad*

$$L(s) = \prod_p \prod_{j=1}^{k} \Big(1 - \frac{c_j(p)}{p^s}\Big)^{-1}.$$

Ši hipotezė duoda, kad koeficientai a_m yra multiplikatyvūs, ir kad kiekvienas Oilerio faktorius gali būti išreiškiamas Dirichlė eilute. Sąlyga $|c_j(p)| \leq 1$ pakeičia Ramanudžano hipotezę klasėje $\mathcal{S}$.

• Vidurkio kvadrato apibrėžimas: *egzituoja teigiama konstanta κ tokia, kad*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \leq x} |a(p)|^2 = \kappa,$$

kur

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

Ši hipotezė duoda, jog egzistuoja be galo daug pirminių skaičių, kuriems (ne visiems) $c_j(p)$ artėja į nulį.

Akivaizdūs *poklasio $\widetilde{\mathcal{S}}$ elementai* yra šios funkcijos :

• Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$.

• Dirichlė L funkcijos $L(s, \chi)$ su primityviu charakteriu χ.

• Heckės L funkcijos

$$L_K(s, \chi) = \sum_I \frac{\chi(I)}{N(I^s)} = \prod_p \big(1 - \frac{\chi(p)}{N(p)^s}\big)^{-1},$$

čia suma yra imama virš visų nenulinių idealų, o sandauga – virš visų pirminių idealų iš algebrinių skaičių lauko K.

- normuotos L funkcijos susijusios su naujausiomis formomis.
- Dedekindo dzeta funkcija $\zeta_K(s) = \sum\limits_I \frac{1}{N(I)^s}$.
- Rankino- Selbergo L funkcijos.

Darbe nagrinėsime Selbergo klasės funkcijų, tenkinančių tik pirmąjį $-$ polinominės Oilerio sandaugos egzistavimo $-$ reikalavimą, poklasį, t.y. klasės $\widetilde{\mathcal{S}}$ plėtinį $\widetilde{\mathcal{S}}'$.

2 NAUDOJAMI APIBRĖŽIMAI, SĄVOKOS IR REZULTATAI

Šiame skyriuje pateikiami matematinės analizės, analizinės skaičių teorijos, tikimybių teorijos bei silpno matų konvergavimo teorijos apibrėžimai, terminai ir teoremos, supažindinama su reikalingomis transformacijomis bei ergodinės teorijos elementais.

2.1 KOMPLEKSINIO KINTAMOJO IR DIRICHLĖ EILUČIŲ KONVERGAVIMO TEORIJOS ELEMENTAI

Tarkime, kad srityje G yra apibrėžta funkcija $w = f(z)$.

2.1.1 apibrėžimas. *Funkcija $f(z)$ yra vadinama tolydžia taške $z_0 \in G$, jeigu*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Jeigu funkcija $w = f(z)$ yra tolydi kiekviename srities G taške, tai ji yra vadinama tolydžiąja srityje G.

Pavyzdžiui, funkcija $f(z) = z^2$ yra tolydi visoje kompleksinėje plokštumoje.

Tarkime, jog $\{g_m(z) : m \in \mathbb{N}\}$ yra vienareikšmių kompleksinio kintamojo z funkcijų, apibrėžtų srityje G, seka. Funkcinės eilutės

$$\sum_{m=1}^{\infty} g_m(z) \tag{2.1}$$

konvergavimas apibrėžiamas panašiai kaip ir kompleksinių narių eilutės konvergavimas. Tegul

$$S_n(z) = \sum_{m=1}^{n} g_m(z).$$

Sakome, jog srityje G (2.1) eilutė konverguoja, jeigu egzistuoja riba

$$\lim_{n \to \infty} S_n(z) = S(z) \neq \infty, \ z \in G.$$

Iš šios ribos apibrėžimo turime, jog (2.1) funkcijų eilutė konverguoja srityje G, jei kiekvieną taško $z \in G$ reikšmę ir bet kurį teigiamą skaičių ϵ atitinka toks teigiamas skaičius $N = N(z, \epsilon)$, kad

$$|S_n(z) - S(z)| < \epsilon, \text{ kai } n > N.$$

Šiuo atveju (2.1) eilutės suma $S(z)$ taip pat yra kompleksinio kintamojo funkcija, todėl svarbu žinoti jos funkcines savybes. (2.1) eilutė konverguoja tolygiai srityje G į funkciją $S(z)$, jeigu kiekvieną teigiamą skaičių ϵ atitinka toks sveikasis skaičius $N = N(\epsilon)$, kad visiems $z \in G$

$$|S_n(z) - S(z)| < \epsilon, \text{ kai } n > N.$$

Dažnai naudojamas Koši tolygaus konvergavimo kriterijus. Tam, kad (2.1) eilutė konverguotų tolygiai srityje G, būtina ir pakankama, kad kiekvieną skaičių $\epsilon > 0$ atitiktų toks nepriklausantis nuo z skaičius $N = N(\epsilon)$, kad visiems $n \geq N$, $k \in \mathbb{N}$ ir $z \in G$, būtų tenkinama nelygybė

$$\Big|\sum_{m=n+1}^{n+k} g_m(z)\Big| < \epsilon.$$

Yra žinoma ir pakankamai paprasta tolygaus eilutės konvergavimo pakankama sąlyga (Vejerštraso požymis). Tarkime, jog (2.1) eilutės nariams srityje G teisinga nelygybė

$$|g_m(z)| \leq g_m, \ m \in \mathbb{N},$$

ir skaičių eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} g_m$$

konverguoja. Tuomet (2.1) eilutė srityje G konverguoja tolygiai (ir absoliučiai).

Jeigu (2.1) eilutės nariai yra tolydžios funkcijos srityje G ir toje srityje eilutė konverguoja tolygiai, tai jos suma $S(z)$ yra tolydi srityje G funkcija.

Aibė kompleksinės plokštumos taškų z, kuriems (2.1) eilutė konverguoja, vadinama tos eilutės konvergavimo sritimi.

2.1.2 apibrėžimas. *Sakykime, kad $E \subset \mathbb{C}$ – atviroji aibė, o funkcija $f : E \to \mathbb{C}$. Funkciją f vadinsime diferencijuojama kompleksine prasme taške $z_0 \in E$, jei egzistuoja* *riba*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}, \qquad z \in E.$$

Ši riba žymima $f'(z_0)$ *arba* $\frac{df(z_0)}{dz_0}$ *ir vadinama funkcijos* f *išvestine taške* z_0.

2.1.3 apibrėžimas. *Funkcija* f, *diferencijuojama* $\mathbb{C}$ *prasme visuose aibės* $E \subset \mathbb{C}$ *taškuose, vadinama analizine (reguliariąja, holomorfine) aibėje* E.

2.1.4 apibrėžimas. *Jei funkcija* $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *yra analizinė kompleksinėje plokštumėje, išskyrus galbūt, jos polių taškus, tai ji vadinama meromorfine funkcija.*

2.2 TIKIMYBIŲ TEORIJOS BEI TIKIMYBINIŲ MATŲ SILPNO KONVERGAVIMO PAGRINDAI

2.2.1 apibrėžimas. *Neneigiama funkcija* P, *apibrėžta šeimoje* $\mathcal{F}$ *ir turinti savybes*

a) $P(\Omega) = 1$;

b) $P(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} P(A_m)$ *visoms* $A_m \in \mathcal{F}$ *tokioms, kad* $A_k \cap A_l \neq 0$, *jei* $k \neq l$,
vadinama tikimybiniu matu.

2.2.2 apibrėžimas. *Tarkime, kad* Ω *yra netuščia aibė. Aibės* Ω *poaibių sistema* $\mathcal{F}$ *vadinama Borelio kūnu (*σ*-kūnu), jei:*

a) $\Omega \in \mathcal{F}$;

b) $A^c \in \mathcal{F}$, *kai* $A \in \mathcal{F}$ *(kur* A^c *aibės* A *papildinys);*

c) $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{F}$ *visoms* $A_m \in \mathcal{F}$, $m = 1, 2, \ldots..$

2.2.3 apibrėžimas. *Trejetas* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vadinamas tikimybine erdve.*

2.2.4 apibrėžimas. *Tarkime,* $\mathcal{A}$ *yra aibių sistema. Minimalus Borelio kūnas, talpinantis savyje sistemą* $\mathcal{A}$, *vadinamas Borelio kūnu generuotu sistemos* $\mathcal{A}$.

Tegul T topologinė erdvė, o $\mathcal{B}(T)$ – erdvės T Borelio aibių klasė, t.y. visų atvirų aibių sistemos generuotas erdvės σ-kūnas. Tada kiekvienas matas klasėje $\mathcal{B}(T)$ vadinamas Borelio matu.

Darbe nagrinėsime erdvę $\mathcal{S}$, jos Borelio aibių klasę $\mathcal{B}(S)$ bei naudosime metrinių erdvių matus.

2.2.5 apibrėžimas. *Aibių S klasė $\mathcal{A}$ vadinama determinuojančia klase, jei $P(A) = Q(A)$, visoms $A \in \mathcal{A}$, kur P ir Q – tikimybiniai matai iš $(S, \mathcal{B}(S))$.*

Tikimybinių metodų panaudojimo idėja, tyrinėjant funkcijų, apibrėžtų Dirichlė eilutėmis, reikšmių pasiskirstymą, yra grindžiama silpno tikimybinių matų konvergavimo taikymu. Tai vienas pagrindinių asimptotinių metodų.

Tarkime, kad P_n ir P – tikimybiniai matai erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$.

2.2.6 apibrėžimas. *Sakome, kad P_n silpnai konverguoja į P, kai $n \to \infty$, jei*

$$\int\limits_S f dP_n \to \int\limits_S f dP, \ n \to \infty,$$

kiekvienai realiai, aprėžtai, tolydžiai funkcijai f iš S.

Žymėsime $P_n \Rightarrow P$.

2.2.7 apibrėžimas. *Aibė $A \in \mathcal{B}(S)$ yra mato P tolydumo aibė, jei $P(\partial S) = 0$* (sienos matas lygus 0).

Yra žinoma keletas ekvivalenčių tikimybinių matų silpno konvergavimo išraiškų.

2.2.8 teorema. *Tegu P_n ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$. Tada šie trys tvirtinimai yra ekvivalentūs:*

1. $P_n \Rightarrow P$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(A) = P(A)$ *visoms mato P tolydumo aibėms;*
3. $\varliminf\limits_{n\to\infty} P_n(G) \geq P(G)$ *visoms atviroms aibėms G.*

Teoremos įrodymą galima rasti [1].

Darbe naudosime kitą, paprastesnį silpno konvergavimo kriterijų ([1], 2.1.3 teorema).

2.2.9 apibrėžimas. *$P_n \Rightarrow P$ tada ir tik tada, jei iš kiekvieno posekio $\{P_n'\}$ galima išskirti kitą posekį $\{P_n''\}$ taip, kad $P_n'' \Rightarrow P$.*

2.2.10 apibrėžimas. *Aibė $A \subset S$ vadinama kompaktiška, jei kiekvienas jos atviras denginys turi baigtinį denginį.*

2.2.11 apibrėžimas. *Apibrėžtų erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra reliatyviai kompaktiška, jei kiekvienas elementų iš $\{P\}$ posekis turi silpnai konverguojantį posekį.*

2.2.12 apibrėžimas. *Šeima P yra suspausta (tiršta), jei $\forall \varepsilon > 0$ egzistuoja kompaktiška aibė $K \subset S$ tokia, kad $P(K) > 1 - \varepsilon$, visiems P iš $\{P\}$.*

Taip pat pateiksime Prochorovo teoremas, kurios atlieka pagrindinį vaidmenį tikimybinių matų silpno konvergavimo teorijoje. Šios teoremos susieja reliatyvaus kompaktiškumo sąvoką ir suspaustumo (tirštumo) sąvokas bei labai dažnai naudojamos taikymuose.

2.2.13 teorema. *Jei tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra tiršta, tai ji yra ir reliatyviai kompaktiška.*

2.2.14 teorema. *Tegul S – pilna separabili metrinė erdvė. Jei apibrėžtų erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra reliatyviai kompaktiška, tai ji yra ir suspausta (tiršta).*

2.2.13, 2.2.14 teoremų įrodymai yra pateikti [1].

Tegul S_1 ir S_2 metrinės erdvės, o $\mathcal{B}(S_1)$, $\mathcal{B}(S_2)$– jų Borelio aibių klasės. Tegul $h : S_1 \to S_2$ yra išmatuojamas atvaizdis, o P tikimybinis matas erdvėje $(S_1, \mathcal{B}(S_1))$. Tuomet šis matas indukuoja erdvėje $(S_2, \mathcal{B}(S_2))$ vienintelį tikimybinį matą Ph^{-1}, apibrėžiamą lygybe

$$Ph^{-1}(A) = P(h^{-1}A), \ A \in \mathcal{B}(S_2)$$

2.2.15 apibrėžimas. *Funkcija $h : S_1 \to S_2$ yra mati, jei $h^{-1}\mathcal{B}(S_2) \subset \mathcal{B}(S_1)$, tai yra, $h^{-1}A \in \mathcal{B}(S_1)$ visoms $A \in \mathcal{B}(S_2)$.*

2.2.16 apibrėžimas. *Funkcija* $h : S_1 \to S_2$ *yra tolydi, jei aibė* $h^{-1}G_2$ *yra atvira separabilioje metrinėje erdvėje* S_1 *kiekvienai atvirai aibei* $G_2 \in S_2$.

2.1.17 teorema. *Tegu* $h : S_1 \to S_2$ *tolydi funkcija. Tada iš* $P_n \Rightarrow P$, *kai* $n \to \infty$, *išplaukia, kad* $P_n h^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$.

Ši teorema yra atskiras 5.1 teoremos iš [1] atvejis.

Tegul h ir h_n- mačios funkcijos iš S_1 į S_2 ir

$$E = \{x \in S_1 : \ h_n(x_n) \nrightarrow h(x) \text{ visiems } x_n \to \infty, \text{ kai } n \to \infty\}.$$

2.2.18 teorema. *Tarkime,* $P_n \Rightarrow P$ *ir* $P(E) = 0$. *Tada* $P_n h_n^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$.

Teoremos įrodymą galima rasti [1], 5.5 teorema.

Darbe nagrinėsime tikimybinių matų silpną konvergavimą $P_T \Rightarrow P$, kai $T \to \infty$, kur T yra tolydus parametras. Svarbu paminėti tai, jog $P_T \Rightarrow P$, kai $T \to \infty$, tada ir tik tada, jei $P_{T_n} \Rightarrow P$, kai $n \to \infty$ kiekvienai sekai T_n: $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \infty$.

Tais atvejais, kai $S = \mathbb{R}$ arba $S = \mathbb{R}^k$ kur kas patogiau naudoti pasiskirstymo funkcijų nei atsitiktinių dydžių skirstinių sąvokas.

2.2.19 apibrėžimas. *Pasiskirstymo funkcijų seka* $\{F_n(x)\}$ *silpnai konverguoja į pasiskirstymo funkciją* $F(x)$, *kai* $n \to \infty$, *jei* $F_n(x) \to F(x)$, *kiekviename funkcijos* $F(x)$ *tolydumo taške* x. *Žymėsime* $F_n(x) \Rightarrow F(x)$.

Žinome, jog kiekvienam tikimybiniam matui P iš erdvės $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ galima apibrėžti pasiskirstymo funkciją

$$F(x) = P\{y : y < x\}.$$

Vadinasi, jei P_n ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, turintys pasiskirstymo funkcijas $F_n(x)$ ir $F(x)$, tai sąryšiai $P_n \Rightarrow P$ ir $F_n(x) \Rightarrow F(x)$ yra ekvivalentūs.

2.3 ATSITIKTINIAI ELEMENTAI

Tegul $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tikimybinė erdvė ir $(S, \mathcal{B}(S))$ yra metrinė erdvė su Borelio aibių klase.

2.3.1 apibrėžimas. *Tegul* $X : \Omega \to S$. *Jei* $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$ *kiekvienai* $A \in \mathcal{B}(S)$, *tuomet* X *vadinams* S*-reikšmiu atsitiktiniu elementu, apibrėžtu aibėje* Ω.

Jei $S = \mathbb{R}$ sakome, kad X yra atsitiktinis dydis.

2.3.2 apibrėžimas. S*-reikšmio atsitiktinio elemento* X *skirstiniu vadinamas tikimybinis matas* P*, apibrėžtas erdvėje* $(S, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$ *toks, kad*

$$P(A) = \mathbb{P}(X^{-1}A) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\},$$

visoms $A \in \mathcal{B}(S)$.

2.3.3 apibrėžimas. *Atsitiktinių elementų seka* $\{X_n\}$ *konverguoja pagal skirstinį (pasiskirstymą) į atsitiktinį elementą* X*, kai* $n \to \infty$*, jei elementų* X_n *skirstiniai silpnai konvrguoja į elemento* X *skirstinį. Žymėsime* $(X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X)$.

Dabar suformuluosime analogiškus teiginius 2.12 ir 2.21 teoremoms konvergavimo pagal pasiskirstymą terminais.

Tegul S – separabili metrinė erdvė su metrika ρ, o $Y_n, Y_{n1}, Y_{n2}, ...$ S-reikšmiai atsitiktiniai elementai, apibrėžti erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

2.3.4 teorema. *Tarkime, kad* $X_{kn} \xrightarrow{\mathcal{D}} X_k$*, kai* $n \to \infty$*, kiekvienam* k*, bei* $X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} X$*, kai* $k \to \infty$*. Jei kiekvienam* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathbb{P}\{\rho(X_{kn}, Y_n) \geq \varepsilon\} = 0,$$

tai $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$*, kai* $n \to \infty$.

Įrodymą galima rasti [1], 4.2 teorema.

2.3.5 teorema. *Tarkime, kad* S*-reikšmiai atsitiktiniai elementai* X_n*,* Y_n *yra apibrėžti erdvėje* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, o* S *– separabili metrinė erdvė. Jei* $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$*, kai* $n \to \infty$*, ir kiekvienam teigiamam* ε

$$\mathbb{P}(\rho(X_n, Y_n) \geq \varepsilon) \to 0,\ n \to \infty,$$

tuomet $X_n \to X,\ n \to \infty$.

Įrodymą galima rasti [1], 4.1 teorema.

2.3.6 teorema. *Atsitiktinio elemento* X *vidurkis* EX *apibrėžiamas formule*

$$EX = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P},$$

jei integralas egzistuoja Bochnerio prasme.

2.3.7 teorema. *Tarkime, kad atsitiktiniai kintamieji* $X_1, X_2, \ldots$ *yra ortogonalūs ir*

$$\sum_{m=1}^{\infty} E|X_m^2| ln^2 m < \infty.$$

Tuomet eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m$$

konverguoja beveik visur.

Įrodymą galima rasti [14].

2.4 HARO (HARR) MATAS

2.4.1 apibrėžimas. *Tegul aibėje* G *apibrėžta grupės bei topologinė struktūra. Jei funkcija* $h : G \times G \to G$*, apibrėžiama lygybe* $h(x, y) = xy^{-1}$*, yra tolydi, tuomet aibė* G *vadinama topologine grupe.*

2.4.2 apibrėžimas. *Topologinė grupė vadinama kompaktiška, jei jos topologija yra kompaktiška.*

2.4.3 apibrėžimas. *Borelio matas* P*, apibrėžtas kompaktiškoje topologinėje grupėje* G*, vadinamas invariantiniu, jei* $P(A) = P(xA) = P(Ax)$ *visoms* $A \in \mathcal{B}(G)$ *ir* $x \in G$*. Čia* xA *ir* Ax *yra atitinkamai aibės* $\{xy :\ y \in A\}$ *ir* $\{xy :\ x \in A\}$.

2.4.4 apibrėžimas. *Invariantinis Borelio matas, apibrėžtas kompaktiškoje topologinėje grupėje, vadinamas Haro matu.*

Sekanti teorema pateikia teigiamą atsakymą į klausimą apie Haro mato egzistavimą.

2.4.5 teorema. *Kiekvienoje kompaktiškoje topologinėje grupėje egzistuoja vienintelis tikimybinis Haro matas.*

Įrodymą galima rasti [8].

2.5 KAI KURIOS TRANSFORMACIJOS

2.5.1 teorema. *Tikimybinio mato Q Furje transformacija $g(k_1, ..., k_m)$ apibrėžiama lygybe*

$$g(k_1, ..., k_m) = \int\limits_{\gamma_m} x_1^{k_1} ... x_m^{k_m} dQ,$$

kur $k_j \in \mathbf{Z}$, $x_j \in \gamma$, $j = 1, ..., m$.

2.5.2 teorema. *Tegul $\{Q_n\}$ tikimybinių matų, apibrėžtų erdvėje $(\gamma^m, \mathcal{B}(\gamma^m))$ seka, o $\{g_n(k_1, ..., k_m)\}-$ atitinkamų Furje transformacijų seka. Tarkime, kad kiekvienai sveikųjų skaičių aibei $g(k_1, ..., k_m)$ egzistuoja riba*

$$g(k_1, ..., k_m) = \lim_{n\to\infty} g_n(k_1, ..., k_m),$$

tuomet erdvėje $(\gamma^m, \mathcal{B}(\gamma^m))$ egzistuoja tikimybinis matas Q toks, kad $Q_n \Rightarrow Q$. Be to $g(k_1, ..., k_m)$ yra mato Q Furje transformacija.

Dabar pažymėkime

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

kur $\gamma_p = \gamma$ kiekvienam pirminiam skaičiui p. Yra įrodyta [7], jog su sandaugos topologija ir pataškine daugyba Q yra kompaktiška Abelio topologinė grupė.

2.5.3 apibrėžimas. *Tikimybino mato Q, apibrėžto erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ Furje transformacija $g(\underline{k})$ apibrėžiama formule*

$$g(\underline{k}) = \int\limits_{\Omega} \prod_p x_p^{k_p} dQ.$$

Čia $\underline{k} = (k_2, k_3, ...)$, kur tik baigtinis sveikųjų skaičių k_p skaičius nelygus nuliui ir $x_p \in \gamma, p \in \mathcal{P}$.

2.5.4 teorema. *Tegul $\{Q_n\}$ yra tikimybinių matų erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ seka, o $\{g_n(k)\}$ atitinkamų tikimybinių matų Furje transformacijų seka. Tarkime, kad kiekvienam vektoriui $\underline{k}$ egzistuoja riba $g(\underline{k}) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(k)$. Tuomet erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja tikimybinis matas Q toks, kad $Q_n \Rightarrow Q$. Be to, $g(\underline{k})$ yra Q Furje transformacija.*

Įrodymas. 2.5.2 ir 2.5.4 teoremos yra atskiras tolydumo teoremos tikimybiniams matams kampaktinėje Abelio grupėje atvejis [8].

2.6 ERGODINĖS TEORIJOS ELEMENTAI

2.6.1 apibrėžimas. *Tarkime, kad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *yra tikimybinė erdvė, o* T *yra parametrų aibė. Realioji baigtinė funkcija* $X(\tau, \omega)$, $\tau \in \Omega$, *vadinama atsitiktiniu procesu, jei kiekvienam fiksuotam* $\tau \in T$, $X(\tau, \cdot)$ *yra atsitiktinis dydis. Kai* $\omega \in \Omega$ *yra fiksuotas, tai funkcija* $X(\cdot, \omega)$ *vadinama atsitiktinio preoceso trajektorija.*

Tarkime, Y yra visų baigtinių realiųjų funkcijų $y(\tau)$, $\tau \in T$, erdvė. Yra žinoma, kad kiekvieno atsitiktinio proceso baigtiniamačiai skirstiniai erdvėje $(Y, \mathcal{B}(Y))$ apibrėžia tikimybinį matą Q. Tuomet tikimybinėje erdvėje $(Y, \mathcal{B}(Y), \Omega)$ postūmis g_u gali būti apibrėžiamas funkcija, kuri perveda $y(\tau) \in Y$ į $y(\tau + u)$. Postūmiai g_u, $u \in \mathbb{R}$, sudaro grupę. **2.6.2 apibrėžimas.** *Atsitiktinis procesas* $X(\tau, \omega)$ *vadinamas aprėžtai stacionariu, jei visi jo baigtiniamačiai skirstiniai yra invariantiški postūmio dydžio* u *atžvilgiu.*

Yra žinoma, kad jei atsitiktinis procesas $X(\tau, \omega)$ yra stipriai stacionarus, tai postūmis g_u yra išsaugantis matą, t. y. kiekvienai aibei $A \in \mathcal{B}(Y)$ ir visiems $u \in \mathbb{R}$ yra teisinga lygybė $Q(A) = Q(A_u)$, kur $A_u = g_u(A)$.

2.6.3 apibrėžimas. *Aibė* $A \in \mathcal{B}(Y)$ *vadinama proceso* $X(\tau, \omega)$ *invariantine aibe, jei kiekvienam* u *aibės* A *ir* A_u *skiriasi viena nuo kitos nulinio* Q*-mato aibe. Kitaip sakant,* $Q(A \triangle A_u) = 0$.

2.6.4 apibrėžimas. *Griežtai stacionarus procesas* $X(\tau, \omega)$ *yra ergodiškas, jei jo invariantinių aibių* σ*-kūną sudaro aibės, kurių matas* Q *lygus* 0 arba 1.

Ergodiniam procesui yra teisinga klasikinė Birkhofo-Kinčino (Birkhoff-Kintchin) teorema.

2.6.5 teorema *Tarkime, procesas* $X(\tau, \omega)$ *yra ergodiškas,* $E|X(\tau, \omega)| < \infty$ *ir tegul trajektorijos yra integruojamos Rymano prasme kiekviename baigtiniame intervale. Tuomet* *beveik visur galioja ši lygybė*

$$\lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T X(\tau,\omega)d\tau = EX(0,\omega).$$

Teoremos įrodymas pateiktas [7].

3 PAGALBINIAI REZULTATAI

Šiame skyriuje pateikiami žinomi ir įrodomi nauji rezultatai, reikalingi pagrindinės teoremos įrodymui. Tam pirmiausiai įrodoma ribinė teorema absoliučiai konverguojančioms eilutėms, pateikiamas aproksimavimas vidurkiu, bei įrodoma ribinė teorema erdvėje $H(D)$ ir dvimatė ribinė teorema erdvėje $H^2(D)$.

Pažymėkime

$$\nu_T(...) = \frac{1}{T}\text{meas}\{\tau \in [0;\text{T}] : ...\},\ \text{T} > 0,$$

kur vietoje taškų yra rašoma sąlyga, kurią tenkina τ, o meas{A}− mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matas.

3.1 RIBINĖ TEOREMA ANALIZINIŲ FUNKCIJŲ ERDVĖJE

Nagrinėsime funkciją

$$L_1(s) = (1 - 2^{1-s})^r L(s), \quad \sigma > 1.$$

Kadangi taškas $s = 1$ yra funkcijos $L(s)$ eilės r polius, funkcija $L_1(s)$ yra sveikoji. Be to, kai $\sigma > 1$, funkcija $L_1(s)$ gali būti užrašoma lygybe

$$(1 - 2^{1-s})^r \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s} = \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,j} \frac{1}{m^s} \frac{1}{2^{js}},$$

su tam tikrais koeficientais $a_{m,j} \ll |a_m|$, $m \in \mathbb{N}$ ir $j = 0, 1, ..., r$.

Apibrėžkime funkciją

$$L_1(s, \omega) = \left(1 - \frac{2\omega(2)}{2^s}\right)^r \prod_p \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{c_j(p)\omega(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad s \in D.$$

Tuomet $L_1(s, \omega)$ yra $H(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje

$(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Be to, standartiniu būdu [11], galima įrodyti, jog visiems $s \in D$ ir beveik visiems $\omega \in \Omega$

$$L_1(s, \omega) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,j} \frac{\omega(m)}{m^s} \frac{\omega(2^j)}{2^{js}}.$$

Tegul P_{L_1} yra atsitiktinio elemento $L_1(s,\omega)$ skirstinys. Apibrėžiame tikimybinį matą

$$P_{T,L_1}(A) = \nu_T(L_1(s+i\tau) \in A), \ \ A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

3.1.1 teorema. *Tikimybinis matas P_{T,L_1}, kai $T \to \infty$ silpnai konverguoja į matą P_{L_1}.*

Teoremos įrodymą pateiksime skyriaus pabaigoje, o dabar įrodysime pagalbinius rezultatus.

Ribinė teorema absoliučiai konverguojančiai eilutei

Tegul $\sigma_1 > \max\left(\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{d_L}\right)$ fiksuotas skaičius ir

$$v_n(m) = \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1}\right\}, \quad m,n \in \mathbb{N}.$$

Pažymėkime

$$l_{n,j}(s) = \frac{s}{\sigma_1}\Gamma\left(\frac{s}{\sigma_1}\right)n^s 2^{js}, \quad n \in \mathbb{N},$$

ir apibrėžkime

$$L_{1,n}(s) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} L_1(s+z)l_{n,j}(z)\frac{x^z}{z}dz, \quad \text{kai}\sigma > \frac{1}{2}. \tag{3.1}$$

Paėmę

$$k_{n,j}(m) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \frac{l_{n,j}(z)dz}{zm^z 2^{jz}},$$

turime įvertį

$$k_{n,j}(m) \ll m^{-\sigma_1}2^{-j\sigma_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|l_n(\sigma_1+it)|dt \ll_n m^{-\sigma_1}2^{-j\sigma_1}.$$

Todėl eilutė

$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_{m,j}k_{n,j}(m)}{m^s 2^{js}}, \quad \sigma > \frac{1}{2}$$

konverguoja absoliučiai. Tuomet iš išraiškos

$$L_1(s+z) = \sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,j}\frac{1}{m^{s+z}}\frac{1}{2^{j(s+z)}}$$

bei sumavimo ir integravimo tvarkos pakeitimo (3.1) lygybėje turime, jog

$$\begin{aligned} L_{1,n}(s) &= \sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,j}\frac{1}{m^s}\frac{1}{2^{js}}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} l_{n,j}(z)\frac{\mathrm{d}z}{zm^z2^{jz}}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,j}k_{n,j}(m)\frac{1}{m^s2^{js}}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Be to, pasinaudoję Melino (Mellin) formule

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(z)b^{-z}\mathrm{d}z = e^{-b},\ b, c > 0,$$

gauname lygybę

$$k_{n,j}(m) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\frac{z}{\sigma_1}\Gamma\left(\frac{z}{\sigma_1}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{-z}\frac{\mathrm{d}}{z}z = v_n(m),$$

kuri kartu su (3.2) duoda, jog eilutė

$$L_{1,n}(s) = \sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,j}\frac{v_n(m)}{m^s2^{js}},$$

konverguoja absoliučiai, kai $\sigma > \frac{1}{2}$.

Dabar apibrėžkime atsitiktinį elementą

$$L_{1,n}(s,\widehat{\omega}) = \sum_{j=0}^{r}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,j}\frac{v_n(m)\widehat{\omega}(m)\widehat{\omega}(2^j)}{m^s2^{js}}, \qquad \widehat{\omega}\in\Omega,$$

ir nagrinėkime tikimybinių matų

$$P_{T,n,L_1}(A) = \nu_T(L_{1,n}(s+i\tau)\in A),\ A\in\mathcal{B}(H(D)),$$

ir

$$\widehat{P}_{T,n,L_1}(A) = \nu_T(L_{1,n}(s+i\tau,\widehat{\omega})\in A),\ A\in\mathcal{B}(H(D))$$

silpną konvergavimą.

3.1.2 teorema. *Tikimybiniai matai P_{T,n,L_1} ir $\widehat{P}_{T,n,L_1}$, kai $T\to\infty$, silpnai konverguoja į tą patį tikimybinį matą erdvėje $(H(D),\mathcal{B}(H(D)))$.*

Erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ apibrėžkime tikimybinį matą

$$Q_T(A) = \nu_T((p^{-i\tau} : p \text{ yra pirminis}) \in A).$$

3.2 teoremos įrodymui naudosimės sekančiu tvirtinimu.

3.1.3 lema. *Tikimybinis matas Q_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į Haro matą m_H.*

Įrodymas. Toro Ω dualioji grupė yra izomorfinė į

$$\bigoplus \mathbb{Z}_p,$$

kur $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}$ kiekvienam pirminiam skaičiui p ($\mathbb{Z}-$ sveikųjų skaičių aibė). Tuomet elementui $\underline{k} = (k_2, k_3, ...) \in \bigoplus \mathbb{Z}_p$, kurio tik baigtinis sveikųjų skaičių k_p skaičius yra nelygus nuliui, galioja tvirtinimas

$$\omega \to \omega^{\underline{k}} = \prod_p \omega^{k_p}(p).$$

Iš čia, mato Q_T Furje transformacija $g_T(\underline{k})$ yra užrašoma tokia forma

$$g_T(\underline{k}) = \int\limits_{\Omega} \prod_p \omega^{k_p}(p) \mathrm{d}Q_T = \frac{1}{T} \int\limits_0^T \prod_p p^{-i\tau k_p} \mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int\limits_0^T \exp\left\{ -i\tau \sum_p k_p \log p \right\} \mathrm{d}\tau,$$

kur tik baigtinis sveikųjų skaičių k_p skaičius yra nelygus nuliui. Kadangi sistema $\{\log p : p \text{ yra pirminis}\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno gauname, kad

$$g_T(\underline{k}) = \begin{cases} 1, & \text{jei } \underline{k} = \underline{0}, \\ \frac{\exp\{-iT \sum\limits_p k_p \log p\} - 1}{-iT \sum\limits_p k_p \log p}, & \text{jei } \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases}$$

Todėl

$$\lim_{T \to \infty} g_T = \begin{cases} 1, & \text{jei } \underline{k} = \underline{0}, \\ 0, & \text{jei } \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases}$$

Iš čia ir 1.42 [8] teoremos seka lemos įrodymas.

3.1.2 teoremos įrodymas. Funkciją $h_n : \Omega \to H(D)$ apibrėžkime formule

$$h_n(\omega) = \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,j} \frac{v_n(m)\omega(m)\omega(2^j)}{m^s 2^{js}}.$$

Funkcija h_n yra tolydi, be to,

$$h_n\big((p^{-i\tau} : p \text{ yra pirminis skaičius})\big) = L_{1,n}(s+i\tau).$$

Todėl $P_{T,n,L_1} = Q_T h_n^{-1}$, ir iš 5.1 [1] teoremos bei 3.1.3 lemos gauname, kad matas P_{T,n,L_1}, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $m_H h_n^{-1}$.

Norėdami įrodyti analogišką tvirtinimą matui $\widehat{P}_{T,n,L_1}$, apibrėžkime funkciją $h : \Omega \to \Omega$ šitaip

$$h(\omega) = \omega\widehat{\omega}^{-1}.$$

Tuomet

$$h_n\Big(h\big((p^{-i\tau} : p \text{ yra pirminis})\big)\Big) = L_{1,n}(s+i\tau, \widehat{\omega}).$$

Atlikę analogiškus veiksmus ir atsižvelgę į Haro mato m_H invariantiškumą, gauname, kad matas $\widehat{P}_{T,n,L_1}$ silpnai konverguoja į matą $m_H(h_n h)^{-1} = (m_H h^{-1})h_n^{-1} = m_H h_n^{-1}$. ▲

Aproksimavimas vidurkiu

Funkciją $L_1(s)$ aproksimuosime funcijomis $L_{1,n}(s)$. Prieš tai, apibrėškime metriką erdvėje $H(D)$. Pagal 1.7.1 lemą [11], egzistuoja kompaktiškų poaibių seka $\{K_l\} \subset D$, tokia kad

$$D = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l,$$

$K_l \subset K_{l+1}$, ir jei $K-$ kompaktiškas D poaibis, tai $K \subseteq K_l$ tam tikriems l. Parinkime $f, g \in H(D)$ tokias, kad

$$\varrho(f,g) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\sup\limits_{s\in K_l} |f(s)-g(s)|}{1+\sup\limits_{s\in K_l} |f(s)-g(s)|}.$$

Tada ϱ yra metrika erdvėje $H(D)$, su indukuota tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija.

3.1.4 lema. *Tegul K yra pusplokštumės D kompaktiškas poaibis. Tada*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s\in K} |L_1(s+i\tau) - L_{1,n}(s+i\tau)| d\tau = 0.$$

Įrodymas. J. Štaudingas [22] įrodė, jog kai $\sigma > \max\left(\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{d_L}\right)$, funkcija $L(s)$ yra baigtinės eilės ir

$$\int_0^T |L(\sigma+it)|^2 \mathrm{d}t \ll T.$$

Iš čia seka, kad toje pačioje srityje funkcija $L_1(s)$ taip pat yra baigtinės eilės ir

$$\int_0^T |L_1(\sigma+it)|^2 \mathrm{d}t \ll T.$$

Įrodymą galima užbaigti, pasinaudojus standartiniu kontūrinio integravimo pritaikymu (žiūrėti 5.4.2 teoremą [11], kurioje nagrinėtas Rymano dzeta funkcijos atvejis). ▲

Panašus tvirtinimas yra teisingas ir funkcijoms $L_1(s,\omega)$, $L_{1,n}(s,\omega)$.

3.1.5 lema. *Tegul K yra kompaktiškas pusplokštumės D poaibis. Tuomet beveik visiems $\omega \in \Omega$*

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \sup_{s\in K}|L_1(s+i\tau,\omega)-L_{1,n}(s+i\tau,\omega)|d\tau = 0.$$

Įrodymas. Naudosime įvertį

$$\int_0^T |L_1(\sigma+it,\omega)|^2 \mathrm{d}t \ll T,$$

kuris teisingas srityje $\sigma > \max\left(\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{d_L}\right)$ beveik visiems $\omega \in \Omega$, ir seka iš funkcijos $L(s,\omega)$ vidurkio įverčio [22].

Tolimesnis įrodymas analogiškas 3.1.4 lemos įrodymui. ▲

3.1.1 teoremos įrodymas. Analizinių funkcijų erdvėje apibrėžkime dar vieną tikimybinį matą

$$\widehat{P}_{T,L_1}(A) = \nu_T(L_1(s+i\tau,\omega)\in A).$$

Pirmiausiai įrodysime, kad matai P_{T,L_1} ir $\widehat{P}_{T,L_1}$, kai $T\to\infty$, silpnai konverguoja į tą patį matą erdvėje $(H(D),\mathcal{B}(H(D)))$.

Remiantis 3.1.4 teorema, turime, kad matai P_{T,n,L_1}, $\widehat{P}_{T,n,L_1}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į tą patį matą P_{n,L_1}. Dabar $X_{n,L_1}(s)$ pažymėkime $H(D)$-reikšmį atsitiktinį elementą su pasiskirstymu P_{n,L_1} ir apibrėžkime

$$X_{T,n,L_1}(s) = L_{1,n}(s + i\theta T),$$

kur θ yra atsitiktinė reikšmė, apibrėžta tam tikroje tikimybinėje erdvėje $(\widehat{\Omega}, \mathcal{B}(\widehat{\Omega}), \mathbb{P})$ ir tolygiai pasiskirsčiusi intervale [0,1]. Pasinaudoję konvergavimo pagal skirstinį apibrėžimu ir pažymėjimu $\xrightarrow{\mathcal{D}}$, turime, kad

$$X_{T,n,L_1}(s) \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} X_{n,L_1}(s). \tag{3.3}$$

Be to, nesunku pastebėti, kad tikimybinių matų šeima $\{P_{n,L_1}\}$ yra suspausta, o taip pat ir reliatyviai kompaktiška. Tuomet egzistuoja posekis $\{P_{n_1,L_1}\} \subset \{P_{n,L_1}\}$, toks, kad matas P_{n_1}, kai $n_1 \to \infty$, siplnai konverguoja į tam tikrą matą P erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$, kai $n_1 \to \infty$. Tai ekvivalentu tam, jog

$$X_{n_1,L_1} \xrightarrow[n_1\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{3.4}$$

Pažymėkime

$$X_{T,L_1}(s) = L_1(s + i\theta T).$$

Pasinaudoję 3.1.4 lema gauname, kad kiekvienam $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \nu_T(\varrho(X_{T,L_1}(s), X_{T,n,L_1}(s) \geq \epsilon)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \tfrac{1}{T} \int_0^T \varrho(L_1(s + i\tau), L_{1,n}(s + i\tau))\mathrm{d}\tau = 0.$$

Iš čia (3.3), (3.4) ir 4.2 teoremos [1] turime, kad

$$X_{T,L_1}(s) \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} P \tag{3.5}$$

tai yra, matas P_{T,L_1} silpnai konverguoja į matą P, kai $T \to \infty$. Be to, iš (3.5) seka, jog matas P nepriklauso nuo posekio $\{P_{n_1,L_1}\}$ parinkimo. Todėl

$$X_{n,L_1} \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{3.6}$$

Dabar apibrėžkime

$$\widehat{X}_{T,n,L_1}(s) = L_{1,n}(s + i\theta T, \omega)$$

ir

$$\widehat{X}_{T,L_1}(s) = L_1(s + i\theta T, \omega)$$

Pasinaudoję (3.6) formule, 3.1.5 lema ir kartodami ankstesnius samprotavimus atsitiktiniams elementams $\widehat{X}_{T,n,L_1}$ ir $\widehat{X}_{T,L_1}$ ganame, kad matas $\widehat{P}_{T,L_1}$, kai $T \to \infty$, taip pat silpnai konverguoja į P.

Lieka įrodyti, kad P sutampa su P_{L_1}.

Tarkime $a_\tau = \{p^{-i\tau} : p \text{ yra pirminis skaičius}\}$, $\tau \in \mathbb{R}$. Apibrėžkime vienparamterinę transformacijų aibėje Ω šeimą $\varphi_\tau(\omega) = a_\tau \omega, \quad \omega \in \Omega$. Tada $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ yra mati išsauganti transformaciją tore Ω vienparametrinė grupė. Be to, pagal 5.3.6 teoremą [11], grupė $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ yra ergodinė.

Dabar tegul A yra mato P, apibrėžto 3.1.1 teoremos įrodyme, tolydumo aibė. Tuomet iš šios ir 2.1 [1] teoremų turime sąryšį

$$\lim_{T\to\infty} \nu_T(L_1(s + i\tau, \omega) \in A) = P(A). \tag{3.7}$$

Apibrėžkime atsitiktinį dydį ξ erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{jei } L_1(s,\omega) \in A, \\ 0, & \text{jei } L_1(s,\omega) \notin A. \end{cases}$$

Kadangi grupė $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ yra ergodinė, procesas $\varphi_\tau(\xi(\omega))$ taip pat yra ergodiškas. Pažymėję $\mathbb{E}X$ atsitiktinio elemento X vidurkį ir pasinaudoję Birhofo-Kinčino teorema [7] turime, jog

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \xi(\varphi_\tau(\omega))\mathrm{d}\tau = \mathbb{E}\xi. \tag{3.8}$$

Tačiau, pagal ξ ir φ_τ apibrėžimus

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_\Omega \xi(\omega)\mathrm{d}m_H = m_H(\omega \in \Omega : L_1(s,\omega) \in A) = P_{L_1}(A)$$

ir

$$\frac{1}{T}\int_0^T \xi(\varphi_\tau(\omega))\mathrm{d}\tau = \nu_T(L_1(s+i\tau,\omega)\in A).$$

Todėl, remiantis (3.8),

$$\lim_{T\to\infty}\nu_T(L_1(s+i\tau,\omega)\in A) = P_{L_1}(A)$$

ir, atsižvelgus į (3.7), gauname, kad $P(A) = P_{L_1}(A)$ visoms mato P tolydumo aibėms A. Kadangi tolydžios aibės sudaro determinuojančią klasę, tai $P(A) = P_{L_1}(A)$ visoms $A \in \mathcal{B}(H(D))$. ▲

3.2 DVIMATĖ RIBINĖ TEOREMA

Pažymėkime $H^2(D) = H(D)\times H(D)$ ir tegul

$$g_r(s) = (1-2^{1-s})^r.$$

Kadangi $g_r(s)$ yra Dirichlė polinomas, ir remiantis 3.1.2 teoremos įrodymu tikimybinis matas

$$\nu_T(g_r(s+i\tau)\in A),\quad A\in\mathcal{B}(H(D)), \tag{3.9}$$

kai $T\to\infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento

$$g_r(s,\omega) = \left(1-\frac{2\omega(2)}{2^s}\right)^r$$

skirstinį.

Erdvėje $(H^2(D),\mathcal{B}(H^2(D)))$ apibrėžkime tikimybinį matą

$$P_T^{(2)} = \nu_T((g_r(s+i\tau), L_1(s+i\tau))\in A),$$

ir pažymėkime

$$F(s,\omega) = (g_r(s,\omega), L_1(s,\omega)).$$

Pasinaudoję (3.9) mato silpnu konvergavimu, 3.1.1 teorema ir modifikuotu Kramerio-Valdo (Cramer- Wald) kriterijumi [8] gauname sekantį tvirtinimą.

3.2.1 teorema. *Tikimybinis matas $P_T^{(2)}$, kai $T\to\infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento $F(s,\omega)$ skirstinį.*

4 PAGRINDINĖS TEOREMOS ĮRODYMAS

Apibrėžkime funkciją $u : H^2(D) \to M(D)$ formule

$$d(g_1, g_2) = \frac{g_2}{g_1}, \quad (g_1, g_2) \in H^2(D).$$

Ši funkcija yra tolydi, kadangi metrika d (pagal erdvės $M(D)$ apibrėžimą) tenkina lygybę

$$d(g_1, g_2) = d\left(\frac{1}{g_1}, \frac{1}{g_2}\right), \quad g_1, g_2 \in H(D).$$

Be to, $P_{T,L} = P_T^{(2)} u^{-1}$. Iš čia, 3.2.1 teoremos bei 5.1 teoremos [1] turime, kad matas $P_{T,L}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento

$$\frac{L_1(s, \omega)}{g_r(s, \omega)} = L(s, \omega)$$

skirstinį. ▲

IŠVADOS

Darbe nagrinėjama paprastųjų Dirichlė eilučių

$$L(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}, \qquad s = \sigma + it,$$

turinčių Oilerio sandaugą, analizinį pratęsimą, Rymano tipo funkcinę lygtį bei tenkinančių Ramanudžano hipotezę koeficientams a_m, klasė.

Kadangi šios klasės funkcijų asimptotinį elgesį žinomais tikimybiniais metodais nusakyti sudėtinga, apsiribota jos poklasiu, tenkinančiu papildomą reikalavimą – funkcijos turi turėti polinominę Oilerio sandaugą.

Tokių funkcijų klasei įrodyta ribinė teorema tikimybinių matų silpno konvergavimo prasme meromorfinių funkcijų erdvėje. Pateiktas išreikštinis ribinio mato pavidalas.

Gauta teorema gali būti pritaikyta kitų panašias savybes turinčių funkcijų analizei bei jų universalumui tirti.

SUMARRY

In 1989 A. Selberg introduced [26] a class $\mathcal{S}$ of L-functions

$$L(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}, \qquad s = \sigma + it,$$

which became an object of numerous investingations, see a survey paper [10]. Roughly speaking, the functions of the class $\mathcal{S}$ satisfy 4 axioms: Ramanujan conjecture on the coefficients a_m, axioms of analitic continuation, functional equation and Euler product. We consider a subclass $\widetilde{\mathcal{S}'} \subset \mathcal{S}$ of L functions, which satisfied the following hypothesis:

For each prime p and $j = 1, ...k$, there exist complex numbers $c_j(p)$, $|c_j(p)| \leq 1$, such that

$$L(s) = \prod_p \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{c_j(p)}{p^s}\right).$$

The aim of this work is to prove a limit theorem in the sense of weak convergence of probability measures in the space of meomorphic functions for L function from the class $\widetilde{\mathcal{S}'}$.

Let

$$D = \left\{ s \in \mathbb{C} : \sigma > \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_L}\right) \right\},$$

where d_L is the degree of the function $L(s)$. Denote by $M(D)$ be the space of meomorphic on D functions equipped with the topology of uniform convergence on compacta and by $\mathcal{B}(M(D))$ $-$ the class of Borel sets of the space $M(D)$. Let $meas\{A\}$ be the Lebesque measure of a measurable set $A \subset \mathbb{R}$. We consider the probability measure

$$\frac{1}{T}\text{meas}\{\tau \in [0; T] : L(s + it) \in A\}, \qquad A \in \mathcal{B}(M(D)),$$

and prove that it converges weakly to the distribution of some explicity given random element, as $T \to \infty$.

LITERATŪRA

[1] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures.* Wiley, New York, 1968.

[2] H. Bohr, B. Jessen. Über die Werverteilung der Riemannschen Zeta-funktion, Erste Mitteilung. *Acta Math.,* **54** (1930), 1-35.

[3] H. Bohr, B. Jessen. Über die Werverteilung der Riemannschen Zeta-funktion, Zweite Mitteilung. *Acta Math.,* **58** (1932), 1-35.

[4] E. Bombieri, D. A. Hejhal. On the distribution of zeros of linear combinations of Euler products. *Duke Math. J.,* **80** (1995), 821-862.

[5] E. Bombieri, A. Perelli. Distinct zeros of L-functions. *Acta Arith.,* **83** (1998), 271-281.

[6] J. B. Conrey, A. Ghosh. On the Selberg class of Dirichlet series: small degrees. *Duke Math. J.,* **72** (1993), 673-693.

[7] H. Cramer, M. R. Leadbetter. *Stationary and related Stochastic Process.* Wiley, New York, 1967.

[8] H. Heyer. *Probability measures on Locally Compact Groups.* Springer-Verlag, 1977.

[9] D. Joyner. *Distribution Theorems of L-functions.* Longman Scietific, Harlow, 1986.

[10] J. Kazorowski, A. Perelli. The Selberg class: a survey. *Number Theory in Progress. Proc. of the Intern. Conf. in honor of the 60th birthday of A Schinzel (Zakopane, 1997). Vol. 2: Elemantary and Analytic Number Theory,* De Gruyter, Berlin (1999), 953-992.

[11] A. Laurinčikas. *Limit theorems for the Riemman zeta-function.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1996.

[12] A. Laurinčikas, R. Garunkštis. *The Lerch Zeta-Function.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2002.

[13] A. Laurinčikas, R. Macaitienė. *Įvadas į Dirichlė eilučių teoriją.* ŠU, 2008.

[14] M. Loeve. *Probability Theory.* Von Wostrand, Toronto, New York, 1995.

[15] R. Macaitienė. On the value distribution of L-functions of the Selberg class (in Russian). *Fundam. Prikl. Mat.,* **16(5),** (2011), 103-116.

[16] H. L. Montgomery. *Topics in multiplicative number theory.* Springer, Berlin, 1971.

[17] G. Molteni. A note on result of Bochner and Conrey-Gosh about the Selberg class. *Arch. Mth.,* **72,** 219-222.

[18] M. R. Murty, V. K. Murty. *Non-vanishing of L-functions and applications.* Birhäuser, 1997.

[19] A. Perelli. General L-functions. *Ann. Mat. Pura Appl.,* **130** (1982), 287-306.

[20] A. Perelli. A Survey of the Selberg class of L-functions. *I. Milan J. Math.,* **73** (2005), 19-52.

[21] A. Selberg. *Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series, in: Proceedings of the Amalfi conference on Analitic Number Theory.* Mayori, 1989, E. Bombieri etal. (eds), 1992, 367-385.

[22] J. Steuding. On the universality for functions in the Selberg class. *Proc. of the Sesion in Analytic number theory and Diophantine equations* (Bonn, 2002), D. R. Health-Brown et al (Eds), Bonner Math Schriften, **360** (2003), 22-29.

[23] J. Steuding. *Value distribution of L-functions and allied zeta- functions with an emphasis on aspects of universality*, Frankfurt, 2003.

ŽYMĖJIMAI

$s = \sigma + it-$ kompleksinis skaičius.

$\mathbb{C}-$ kompleksinių skaičių aibė.

$\mathbb{C}_\infty-$ Rymano sfera.

$\mathbb{R}-$ realiųjų skaičių aibė.

$\mathbb{Z}-$ sveikųjų skaičių aibė.

$H(D)-$ analizinių srityje D funkcijų erdvė, $D \subset \mathbb{C}$.

$M(G)-$ meromorfinių srityje G funkcijų erdvė, $G \subset \mathbb{C}$.

$\mathcal{B}(S)-$ erdvės S Borelio aibių klasė.

$\xrightarrow{\mathcal{D}}$ $-$ konvergavimas pagal skirstinį.

$m, k, n, j-$ natūralieji skaičiai.