

VILNIAUS UNIVERSITETAS

Valdas Jasaitis

SAVAIMINIŲ FRONTŲ OSCILIUOJANČIUOSE NULINIUOSE LAUKUOSE  
KOMPIUTERINIS MODELIAVIMAS

Daktaro disertacijos santrauka  
Fiziniai mokslai, informatika (09 P)

Vilnius, 2012

Disertacija rengta 2006–2011 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas:

Prof. habil. dr. Feliksas Ivanauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, informatika – 09 P).

Konsultantas:

Doc. dr. Ričardas Bakanas (Puslaidininkų fizikos institutas, Fizinių ir technologijos mokslų centras, fiziniai mokslai, fizika – 02P).

### **Disertacija ginama Vilniaus universiteto Informatikos mokslo krypties taryboje:**

Pirmininkas:

Prof. dr. Romas Baronas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, informatika – 09P).

Nariai:

Prof. habil dr. Ramūnas Katilius (Puslaidininkų fizikos institutas, Fizinių ir technologijos mokslų centras, fiziniai mokslai, fizika – 02 P).

Prof. habil dr. Mifodijus Sapagovas (Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas, fiziniai mokslai, informatika – 09 P).

Prof. habil. dr. Rimvydas Simutis (Kauno technologijos universitetas, fiziniai mokslai, informatika – 09 P).

Doc. dr. Rimantas Vaicekuskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, informatika – 09P).

Oponentai:

Prof. dr. Vytautas Kleiza (Kauno technologijos universitetas, fiziniai mokslai, informatika – 09P).

Prof. dr. Artūras Štikonas (Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institutas, fiziniai mokslai, informatika – 09P).

Disertacija bus ginama viešame Informatikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2012 m. sausio mėn. 24 d. 14 val. Vilniaus universiteto Skaitmeninių tyrimų ir skaičiavimų centre.

Adresas: Šaltiniu g. 1A, LT-03214, Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2011 m. gruodžio mėn.  
Disertacija galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

Valdas Jasaitis

COMPUTER MODELING OF SELF-ORDERED FRONTS  
UNDER OSCILLATING ZERO-MEAN FORCES

Summary of doctoral dissertation  
Physical sciences, informatics (09 P)

Vilnius, 2012

The doctoral dissertation was prepared at Vilnius University in 2006 - 2011.

Scientific supervisor:

Prof. habil. dr. Feliksas Ivanauskas (Vilnius University, physical sciences, informatics – 09P).

Consultant:

Doc. dr. Ričardas Bakanas (Semiconductor physics institute, Center for physical sciences and technology, physical sciences, physics – 02P).

**The dissertation is being defended at the Council of Scientific Field of Informatics at Vilnius University:**

Chairman:

Prof. dr. Romas Baronas (Vilnius University, physical sciences, informatics – 09P).

Members:

Prof. habil dr. Ramūnas Katilius (Semiconductor physics institute, Center for physical sciences and technology, physical sciences, physics – 02 P).

Prof. habil dr. Mifodijus Sapagovas (Vilnius University Institute of mathematics and informatics, physical sciences, informatics – 09 P).

Prof. habil. dr. Rimvydas Simutis (Kaunas University of technology, physical sciences, informatics – 09 P).

Doc. dr. Rimantas Vaicekauskas (Vilnius University, physical sciences, informatics – 09P).

Opponents:

Prof. dr. Vytautas Kleiza (Kaunas University of technology, physical sciences, informatics – 09P).

Prof. dr. Artūras Štikonas (Vilnius University Institute of mathematics and informatics, physical sciences, informatics – 09P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the Council of Scientific Field of Informatics in the Vilnius University Digital Science and Computing Center on the 24th of January, 2012, at 2.00 p.m.

Address: Šaltiniu g. 1A, LT-03214, Vilnius, Lithuania.

The summary of the doctoral dissertation was distributed in December, 2012.  
The doctoral dissertation is available at the library of Vilnius University.

# 1. Įvadas

## 1.1 Tyrimu sritis ir problemos aktualumas

Laisvųjų sistemos dalelių ir savaime susidarančių lokalizuotų struktūrų valdymas deterministiškai (reguliariai) arba stochastiškai (atsitiktinai) osciluojančiais laukais, kurių vidutinė vertė yra nulis, yra plačiai paplitęs įvairiose terpėse ir intensyviai tyrinėjamas fizikoje, cheminių reakcijų kinetikoje, biologiniuose objektuose ir pan. “Savaiminė” migracija, dar žinoma kaip “reketo tipo transportas”, suteikia naujas galimybes valdyti daleles (elektronus, atomus, molekules ir pan.) bei savaime susidarančius frontus, veikiant kintamais “nuliniais” laukais. “Savaeigės” mašinos, vadinamos paprastaisiais reketais (angl. Ratchet – reketas, keltuvas, variklis, terkšlė), atlieka darbą jas veikiant deterministiškai arba stochastiškai osciluojančiais nuliniais laukais [1]. Svarbu atskirti, kad savaiminių frontų reketo tipo transportas galimas sistemose su specialia vidine simetrija, kai tuo tarpu dalelių judėjimui paprastuose reketuose yra būtina speciali vidinė sistemos asimetrija. Reketo reiškinys, aprašantis savaime susidarančių frontų kryptingą dreifą, sukeltą osciluojančio nulinio lauko, dažniausiai atsiranda dėl “paslėptos” sistemos asimetrijos arba dėl pažeistos osciluojančio lauko simetrijos [2].

Netiesinių diferencialinių lygčių su dalinėmis išvestinėmis, kurios aprašo savaiminių frontų reketo tipo transportą netiesinėse disipatyviose sistemose, analitiniai sprendimo metodai (pvz. Trikdžių teorija, adiabatini artinys) žinomi tik išskirtiniais atvejais. Be to, tikrai sine-Gordon [3], kubinis [4] ir pseudotiesinis [5] modeliai turi laisvų, nesutrikdytų savaiminių frontų analitinius sprendinius. Todėl bendresnius sutrikdytų frontų matematinis modelius tenka spręsti kompiuteriniais metodais: nagrinėjamos sistemos sudarytas matematinis modelis aproksimuojamas naudojant skaitinius metodus ir sukuriama programinė įranga, leidžianti spręsti skaitinio modelio lygčių sistemą. Taigi skaitinis (kompiuterinis) modeliavimas leidžia modeliuoti ir tirti savaiminių frontų reketo tipo transporto savybes plačiame parametrų reikšmių diapazone.

Disertacijoje tiriami frontai – netiesiniai autodariniai; jie yra veikiami reguliarių arba atsitiktinių trikdžių ir yra difuziškai pasklidę erdvėje. Tyrime apsiribojama vien tik “bistabiliais” frontais, kurių faziniai virsmai sklinda nuo mažiau stabilaus link stabilesnio reakcijos-difuzijos sistemos būvio. Disipacija, fizikinės sistemos energijos mažėjimas, yra būtina savaiminių frontų kryptingo dreifo sąlyga, kuri įtakoja dinaminės lygties laikiną negrįžtamumą – sistemos “atmintis” prarandama kiekviename laiko žingsnyje. Disipatyviose sistemose susidarantys savaiminiai frontai, veikiami deterministiškai (reguliariai) [2, 6-14] ir stochastiškai (atsitiktinai) [15-18] osciluojančiais nuliniais laukais, buvo plačiai tyrinėti.

Disertacijoje siekiama ištirti kryptingo bistabilių frontų dreifo valdymo nuliniais laukais galimybes naudojant kompiuterinį modeliavimą bei analitinius metodus. Išskiriami du skirtingi valdymo mechanizmai: parametrinės prigimties ir “tiesioginio” veikimo. Valdymo mechanizmas vadinamas parametrinės prigimties, kai išorinis nulinis laukas tiesiogiai veikia tam tikrą (kontroliuojamąjį) sistemos parametą, kuris modifikuoja šio lauko oscilacijas taip, kad susidaro pastovi lauko dedamoji, kuri “stumia” netiesinį frontą viena kryptimi [2, 6-11]. Kitaip tariant, reketo tipo transportas atsiranda, kai laiko atžvilgiu simetriškas išorinis laukas, veikiantis sistemą, yra

paverčiamas (transformuojamas) į asimetriškai osciliuojantį lauką, kuris įtakoja savaiminio fronto judėjimą. Tiesioginio (ne parametrines prigimties) valdymo mechanizmas vykdo kryptingą bistabilių frontų dreifą, pridėdamas išorinius stochastiškai bei deterministiškai osciliuojančius nulinius laukus [12-18]. Šis reiškinys šiuo metu dar menkai ištirtas, todėl šioje disertacijoje nagrinėjamas bistabilių frontų dreifo valdymas, naudojant išorinius pridėdamus periodinius, kvaziperiodinius ir apriboto triukšmo laukus, kurių vidutinė vertė yra nulis.

Reketo reiškinio bistabiliams frontams tyrinėjimas svarbus ne tik teorine prasme, bet gali turėti pritaikymų ir praktikoje. Keli nauji eksperimentai buvo pasiūlyti ir atlikti remiantis Josephson efektu: įtampos rektifikacija, naudojant superlaidų kvantinę interferencijos įtaiso reketą (angl. sutrumpinimas SQUID) [19]; atskiri solitonai, atitinkantys judančius sūkurius (angl. vortex, magnetic flux quantum) ilguose Josephson jungtyse [20-22]; sūkurių judėjimo kontroliavimas Josephson jungčių masyvuose [23-25]. Josephson jungtimis paremtų reketų privalumas yra pakankamai paprastas eksperimentų realizavimas bei galimybė labai greitai raktifikuoti triukšmą plačiame dažnių ruože. Taip pat, naudojant suporuotus elektroninius elementus (netiesinius rezonatorius), buvo eksperimentiškai parodytas triukšmo sukeltas bistabilių frontų sklidimas [26, 27].

## 1.2 Tyrimo objektas

Šios disertacijos tyrimų objektas yra matematiniai ir kompiuteriniai modeliai, aprašantys savaiminius bistabilius frontus stochastiškai bei deterministiškai osciliuojančiuose nuliniuose laukuose. Disertacijoje nagrinėjami modeliai aprašomi netiesinėmis parabolinėmis diferencialinėmis lygtimis su dalinėmis išvestinėmis ir sprendžiami skaitiškai, naudojant sukurtą programinę įrangą.

## 1.3 Darbo tikslas ir uždaviniai

Šio darbo tikslas yra ištirti kryptingo bistabilių frontų dreifo valdymo nulinais laukais galimybes, taikant kompiuterinį modeliavimą. Tikslui pasiekti buvo sprendžiami šie uždaviniai:

1. Parinkti bei pritaikyti matematinį ir skaitinį modelius bistabiliams frontams, kurie veikiami stochastiškai arba reguliariai osciliuojančiais nulinais laukais. Sukurti lanksčią programinę įrangą, leidžiančią tyrinėti sutrikdytus bistabilius frontus.
2. Ištirti delsos (vėlavimo) reiškinį įtaką bistabilaus fronto dreifui periodiniuose laukuose. Rezultatus, gautus kompiuterinio modeliavimo metu, palyginti naudojant adiabatinių (kvazi-statinį) artinį bei trikdžių teoriją.
3. Taikant kompiuterinį modeliavimą, ištirti savaiminių bistabilių frontų valdymo galimybes, naudojant periodinius ir kvaziperiodinius nulinius laukus, kurie aproksimuojami biharmoninėmis funkcijomis.
4. Taikant kompiuterinį modeliavimą, ištirti nereguliarių lauko svyravimų įtaką dinaminėms frontų savybėms, keičiant lauko spektrines charakteristikas. Veikiantis laukas aproksimuojamas daugiaharmonine funkcija.
5. Pasiūlyti stochastinę nulinę lauko funkciją, kuri turi apriboto triukšmo charakteristikas. Pasitelkiant kompiuterinį modeliavimą, ištirti dinamines

bistabilių frontų savybes stochastiniuose laukuose, keičiant lauko spektrines charakteristikas.

## 1.4 Tyrimų metodika

Disertacijoje nagrinėjami savame susidarantys frontai disipatyviose sistemose, kurios aprašomos netiesinėmis parabolinėmis diferencialinėmis lygtimis su dalinėmis išvestinėmis. Suformuoti matematiniai modeliai buvo aproksimuoti, taikant baigtinių skirtumų metodą. Disertacijoje pateikti reketo efekto tyrimai bistabiliems frontams buvo atliekami pasitelkiant kompiuterinį modeliavimą.

## 1.5 Darbo rezultatai ir naujumas

1. Sudaryti matematinis ir skaitinis modeliai bistabiliems frontams. Sukurta programinė įranga, leidžianti tirti dinamines bistabilių frontų charakteristikas, taikant skirtingas osciliuojančias jėgos funkcijas.
2. Taikant kompiuterinį modeliavimą ir trikdžių teoriją, ištirta delsos (vėlavimo) reiškinų įtaka reketo efektui. Ištirtas spartos funkcijos simetrijos savybių vaidmuo fronto atsakui.
3. Taikant kompiuterinį modeliavimą, ištirta nereguliariai osciliuojančių nulinių laukų įtaka reketo efektui. Taip pat tirtas frontų apgrąžos reiškinys, kai frontai pakeičia judėjimo kryptį.
4. Ištirtos reketo efekto charakteristikos stochastinių nulinių laukų atvejais, kurie aprašomi daugiaharmonine ir apriboto triukšmo funkcijomis. Kompiuterinio modeliavimo būdu nustatyta, kad plataus dažnių spektro funkcijos turi mažai įtakos bistabilaus fronto dreifui.

## 1.6 Ginami teiginiai

1. Delsos (vėlavimo) reiškiniai, pasireiškiantys įtakojančio lauko aukštų dažnių srityje, silpnina BF reketo efektą. Frontų valdymas nuliniiais osciliuojančiais laukais yra efektyvesnis žemų dažnių srityje.
2. Sistemos charakteristinis relaksacijos laikas, aprašomas trikdžių teorija, gerai tinka ir stiprių laukų atveju, kurie apskaičiuojami skaitiškai.
3. Nereguliarūs nuliniai laukai silpnina BF reketo efektą – frontų valdymo galimybės blogesnės lyginant su reguliariai osciliuojančiais nuliniiais laukais.
4. BF dreifas veikiamas nereguliarių laukų, aprašomų daugiaharmonine arba apriboto triukšmo funkcijomis, yra jautrus spektrinėms laukų charakteristikoms. Plečiant osciliuojančių laukų dažnių spektrą, reketo efektas silpnėja.

## 1.7 Darbo rezultatų aprobavimas

Straipsniai periodiniuose recenzuojamuose leidiniuose:

- V. Jasaitis, F. Ivanauskas, R. Bakanas. Front Dynamics with Delays in a Spatially Extended Bistable System: Computer Simulation, *Nonlinear Analysis: Modeling and Control*, **13**(4), pp. 433–438, 2008.

- R. Bakanas, V. Jasaitis and F. Ivanauskas, Front dynamics with time delays in a bistable system of the reaction-diffusion type: role of the symmetry of the rate function, *Acta Physica Polonica A*, 119(3), pp. 282–293, 2010.
- R. Bakanas, V. Jasaitis and F. Ivanauskas, Self-ordered Front under Temporally Irregular Forcing: Ratchet-like Transport of the Quasi-periodically Forced Front, *Acta Physica Polonica A*, 119(6), pp. 731–739, 2011.

Pranešimai mokslinėse konferencijose:

- Tarptautinėje konferencijoje “2nd Chaotic Modeling and Simulation International Conference, CHAOS 2009” vykusioje 2009 m. Chania, (Graikija), perskaitytas pranešimas “Front dynamics with delays in a bistable system of the reaction-diffusion type”.
- Lietuvos Matematikų Draugijos XLIX konferencijoje, vykusioje 2008 m. Kaune, perskaitytas pranešimas “Modeling front dynamics in a bistable system of the reaction-diffusion type”.

## 1.8 Disertacijos struktūra

**Pirmajame skyriuje** apibrėžiama tyrimų sritis, tyrimo objektas, nustatomi darbo tikslai. Glaustai pateikiami pagrindiniai rezultatai ir jų naujumas. Suformuluojami ginami teiginiai. Pateikiamas publikacijų bei darbo rezultatų pristatymo sąrašas, glausta disertacijos struktūra.

**Antrajame skyriuje** apžvelgiamas dalelių valdymas išoriniais nuliniiais laukais. Pateikiamas reketo, kaip teorinio įrenginio, veikimo principas ir aprašomas Brauno motoro mechanizmas. Apžvelgiami nesutrikdyti savaiminiai frontų dariniai, jų tipai, stabilumo analizė, greičio išraiška. Kartu pateikiamas disertacijoje naudojamas pseudotiesinis bistabilios terpės modelis bei jo fronto sprendinio analitinė išraiška.

**Trečiajame skyriuje** aprašomas kryptingas bistabilių frontų dreifo valdymas išoriniais nuliniiais laukais. Pateikiamos skirtingos nulinių laukų funkcijos, skirtos reketo efektui tyrinėti. Pristatomi galimi analitiniai metodai, sutrikdytų bistabilių frontų sprendimams gauti. Toliau aprašomas kompiuterinis modeliavimas – pateikiamas bazinės lygties, aprašančios frontų evoliuciją, matematinis modelis, pasirinktas skaitinis metodas, kompiuterio algoritmas ir jo įgyvendinimas.

**Ketvirtame skyriuje** pateikiami reketo efekto tyrimų rezultatai, gauti naudojant skaitinį modeliavimą bei analitinius metodus. Rezultatai pateikiami pagal skirtingus tyrimus, kurie atlikti naudojant deterministinius ir stochastinius išorinius nulinius laukus. Kiekviename poskyryje pateikiamos tyrimų išvados.

**Penktame skyriuje** pateikiamos svarbiausios darbo išvados.

**Šeštame skyriuje** pateikiamas cituojamos literatūros sąrašas.

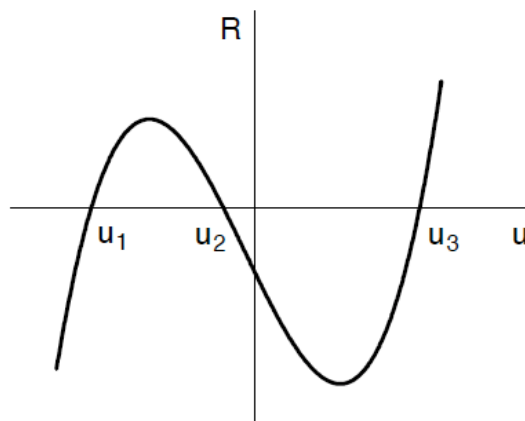


## 2. Savaiminiai frontai

Disertacijoje tyrinėjami bėgantys savaimė susidarantys frontai (savaiminės bangos) reakcijos-difuzijos tipo disipatyviose sistemose yra parabolinio tipo netiesinių diferencialinių lygčių su dalinėmis išvestinėmis sprendiniai. Bėgantys savaiminiai frontai išlaiko savo formą judėdami pastoviu greičiu viena kryptimi. Tokios savaimė susidarantys struktūros atsiranda dėl netiesiškumo bei difuzijos, toli nuo termodinaminės pusiausvyros nutolusiose sistemose ir yra naudojamos modeliuojant cheminius, biologinius, fizikinius procesus. Skaliarinė reakcijos-difuzijos tipo lygtis vienmatėje erdvėje yra

$$u_t - u_{xx} + R(u) = 0, \quad (1)$$

kur lygties narys  $u_t$  žymi laiko išvestinę, kai  $t \in \mathbb{R}$ , o narys  $u_{xx}$  žymi antro laipsnio erdvės išvestinę, kai  $x \in \mathbb{R}$ , ir aprašo difuziją. Funkcija  $u = u(x,t)$  aprašo savaiminio fronto sprendinį (medžiagos koncentracijos, tvarkos parametro, elektrinio lauko ir pan. pasiskirstymą sistemoje). Netiesinė spartos funkcija  $R(u)$  nusako “generacinių-rekombinacinių” procesų spartą sistemoje. Nagrinėjant savaiminių frontų reketo efektą funkcija  $R(u)$  apibrėžiama N-tipo  $R - u$  charakteristika, pasižyminčia trimis nulio taškais  $u = u_1, u_2, u_3$  (1 pav.). Tokio tipo funkcija gali turėti tiek simetrišką, tiek asimetrišką formą.



1 pav. Netiesinė N-tipo reakcijos funkcija  $R(u)$  su trimis nulio taškais:  $u_1, u_2$  ir  $u_3$ .

Bėgančio fronto sprendinį galima pakeisti į specifinę formą  $u(z, t) = u(x - ct, t)$ , kur dydis  $z = x - ct$  žymi bėgančia koordinatę. Disertacijoje parodoma, kad savaiminiai frontai sklinda pastoviu greičiu  $c$  ir turi pastovų profilį  $u(z)$ . Įstatant naujas  $(z, t)$  koordinates į lygtį (1) gauname sekančią antro laipsnio diferencialinę lygtį:

$$u_t - u_{zz} - c u_z + R(u) = 0, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Ši lygtis atspindi laisvą (nesutrikdytą) bėgančio fronto rėmą – koordinatės juda kartu su fronto sprendiniu, todėl tyrinėjamas stacionarus fronto sprendinys.

1937 metais Kolmogorov, Petrovsky ir Piskounov (KPP) [28] bei Fisher [29] buvo pirmieji, kurie analizavo netiesinę reakcijos-difuzijos tipo lygties formą modeliuojant biologinių populiacijų pasiskirstymą:

$$R(u) = u(1 - u). \quad (3)$$

Ši kinetinė funkcija yra kvadratinis polinomas, o funkcijos du nulio taškai atitinka pastovius būvius veikiančioje terpėje, kur vienas yra stabilus, o kitas nestabilus. Kinetinę

funkciją (3) įstačius į lygtį (1) gaunamas atskiro bėgančio fronto sprendinys, kuris vadinamas monostabiliu arba Fisher frontu. Tokio tipo lygtys nagrinėjamos cheminėje kinetikoje (pvz. autokatalizės reakcijose).

Metais vėliau, 1938, Zeldovich ir Frank-Kamenetsky pasiūlė kubinį bistablios terpės modelį [30]:

$$R(u) = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3), \quad u_1 < u_2 < u_3. \quad (4)$$

Jie tyrinėjo liepsnos sklidimą (degimo teorija) naudojant bėgančius savaiminius frontus aprašomus lygtimi (1) su kinetine funkcija (4), kuri atitinka antro laipsnio autokatalizę. Be to, atskiras lygties (1) atvejis  $R(u) = u^2(1 - u)$  yra vadinamas Zeldovich lygtimi [31]. Kubinė spartos funkcija (4) turi tris nulio taškus ir yra naudojama aprašant bistablias terpes su dviem stabiliais būviais ir vienu nestabiliu per vidurį, kuris veikia kaip sužadinimo slenkstis. Kubinis bistablios terpės modelis yra plačiai naudojamas įvairiuose fizikinėse sistemose: nervo pulso transmisija aprašoma suporuotomis FitzHugh–Nagumo tipo sistemomis [32, 33], nervo pulso modeliavimas išilgai bistabilioms transmisijų linijoms [34], Gunn bangos, aprašančios elektrinio lauko pernešimą puslaidininkiuose [35], paprastos cheminės reakcijos-difuzijos sistemos [36] ir pan.

Tiktai sine-Gordon [3], kubinis [4] ir pseudotiesinis [5] modeliai, aprašomi N-tipo spartos funkcija  $R(u)$ , turi laisvų, nesutrikdytų savaiminių frontų analitinius sprendinius. Pseudotiesinis modelis, kurio spartos funkcija yra tiesinė kubinės funkcijos (4) aproksimacija, yra naudojamas šiame tyrime. Sine-Gordon modelis yra naudojamas aprašyti ne tik reakcijos-difuzijos tipo disipacines sistemas, bet ir energiją konservuojančias (nedisipacines) sistemas, kurios išreiškiamos hiperbolinio tipo diferencialinėmis lygtimis su Hamiltonine struktūra:

$$u_{xx} - u_u + \sin(u) = 0 \quad (5)$$

Sine-Gordon lygties (5) sprendiniai yra vadinami topologiniais solitonais. Vis dėlto reketo tipo transportui yra būtina disipacija, todėl parabolinio tipo diferencialinė lygtis (2) tyrinėjama šioje disertacijoje.

## 2.1 Fazinis portretas

Bėgančių frontų egzistavimas ir jų savybių analizė tiriama naudojant fazinės plokštumos metodą, skirtą netiesinėms antro laipsnio diferencialinėms lygtims nagrinėti. Jeigu lygties (2) stacionarus sprendinys  $u(z) = u(z, t)$  egzistuoja, tai jis turi tenkinti sekančia antro laipsnio paprastąją diferencialinę lygtį (PDL):

$$u_{zz} + c u_z - R(u) = 0 \quad (6)$$

Lygtis (6) gali būti perrašyta į pirmo laipsnio PDL sistemą

$$\begin{cases} \frac{du}{dz} = v \\ \frac{dv}{dz} = -cv + R(u) \end{cases} \quad (7)$$

Ieškodami sistemos fiksuotų (pusiausvyros) taškų fazinėje plokštumoje, turime išvestines priskirti nuliui,  $\frac{du}{dz} = \frac{dv}{dz} = 0$ . Kadangi spartos funkcija yra N-tipo, tai gauname tris fiksuotus sistemos taškus:

$$\begin{cases} u_n = u_1, u_2, u_3 \\ v_n = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Linerizuojant lygtį (6) kiekviename fiksuotame taške  $(u_n, v_n)$ , gauname sekančią matematinę išraišką:

$$\begin{cases} \frac{du}{dz} \approx j_{11}u + j_{12}v = 0u + 1v \\ \frac{dv}{dz} \approx j_{21}u + j_{22}v = R'(u_f)u - cv \end{cases} \quad (9)$$

Fiksuotų taškų klasifikacija priklauso nuo charakteringojo parametro

$$\sigma \equiv \frac{j_{11} + j_{22}}{2} = -\frac{c}{2} \quad (10)$$

ir matricos  $J$  determinanto

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ R'(u_n) & -c \end{vmatrix} = -R'(u_n). \quad (11)$$

Matricos  $J$  tikrinės reikšmės,  $\lambda_1$  ir  $\lambda_2$ , taip pat gali būti naudojamos fiksuotų taškų klasifikacijai:

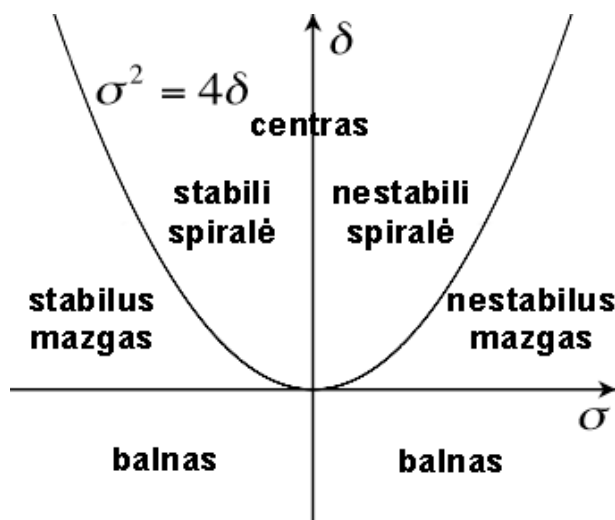
$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - R'(u_n)}. \quad (12)$$

Fiksuotų taškų klasifikacijos schema fazių plokštumoje pavaizduota 2 paveiksle. Parametrų  $\sigma$ ,  $\delta$  reikšmės ir parabolė  $\sigma^2 - 4\delta$  apibrėžia 6 galimus fiksuotų taškų tipus ir stabilumą fazinėje plokštumoje (2 pav.): balno taškas, jei  $\delta < 0$ ; stabilus mazgas, jei  $\delta > 0$ ,  $\sigma < 0$ ,  $\sigma^2 - 4\delta \geq 0$ ; nestabilus mazgas, jei  $\delta > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\sigma^2 - 4\delta \geq 0$ ; centras, jei  $\delta > 0$ ,  $\sigma = 0$ ; stabili spiralė, jei  $\sigma < 0$ ,  $\sigma^2 - 4\delta < 0$ ; nestabili spiralė, jei  $\sigma > 0$ ,  $\sigma^2 - 4\delta < 0$ .

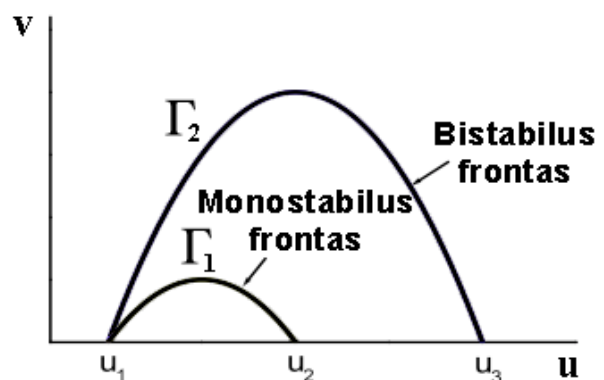
Linerizuojant fiksuoto taško  $(u_1, 0)$  aplinkoje galime matyti, kad tai yra balno taškas. Panašiai linerizuojant fiksuoto taško  $(u_3, 0)$  aplinkoje matome, kad taškas yra visada balno tipo. Fiksuotas taškas  $(u_2, 0)$  yra nestabilus ir priklausomai nuo bėgančio fronto greičio  $c$  gali būti mazgas arba spiralė:

$$u_2 = \begin{cases} \text{Mazgas} & |c| < |c^*| \\ \text{Spiralė} & |c| > |c^*| \end{cases}, \quad (13)$$

kur  $|c^*| \equiv -2\sqrt{R'(u_2)}$ . Galima pastebėti, kad nestabilus taškas  $(u_2, 0)$  yra centras jei  $c = 0$ , bet tada savaiminis frontas yra statiškas, nejuda.



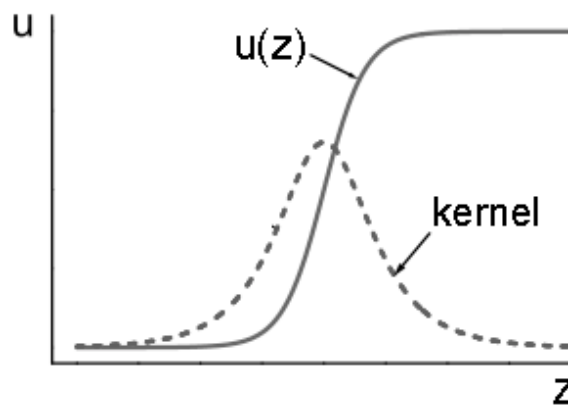
2 pav. Fazinės plokštumos fiksuotų taškų klasifikacijos schema.



3 pav. Fazinės plokštumos  $u-v$  trajektorijos:  $\Gamma_1$  jungia balno tašką  $u_1$  su nestabiliu mazgu  $u_2$ ,  $\Gamma_2$  jungia du balno tašką  $u_1$  ir  $u_3$ .

Savaiminių frontų klasifikacija atliekama naudojantis faziniu portretu (3). Trajektorija  $\Gamma_1$  jungia du pastovius sistemos būvius, balną ir mazgą. Toks savaiminis frontas yra vadinamas monostabiliu, nes parėjimas vyksta tarp stabilaus  $u_1$  ir nestabilaus  $u_2$  sistemos būvių (stabilus būvis “užkariauja” nestabilųjį). Monostabilūs frontai kartais vadinami Fisher frontai, nes spartos funkcija aprašoma Fisher lygtimi (3).

Kitas savaiminės fronto struktūros tipas yra bistabilus frontas (BF), kuris atitinka fazinės plokštumos trajektoriją  $\Gamma_2$  (3 pav.) jungiančią du balno taškus. Tokioje sistemoje perėjimas vyksta tarp dviejų stabilių būvių (stabilus būvis  $u_1$  “užkariauja” metastabilių būvį  $u_3$ ). Parenkant bistabilaus fronto greitį  $c$  galima aprodyti, kad fazinėje plokštumoje  $u-v$  egzistuoja unikali jungianti trajektorija  $\Gamma_2$  tik vienai greičio  $c$  reikšmei [37]. Savaiminiai frontai juda pastoviu greičiu  $c$  su nekintančiu profiliu, pavaizduotu 4 paveiksle. Bistabilaus fronto sprendinio reikšmės artėja į  $u(z \rightarrow -\infty) \rightarrow u_1$  ir  $u(z \rightarrow +\infty) \rightarrow u_3$ . BF sprendinys yra gaunamas įstačius N-tipo netiesinės spartos funkciją su trimis nulio taškais į lygtį (4). N-tipo spartos funkcija gali būti aprašyta kaip kubine funkcija, sinuso funkcija arba pseudotiesinė funkcija. Šioje disertacijoje tyrinėjamos bistabilių frontų valdymo galimybės išoriniais nuliniais laukais naudojant pseudotiesinę spartos funkciją.



4 pav. Bėgančio fronto sprendinys  $u(z)$ , kuris jungia du pusiausvyros sistemos taškus

Fazinėje plokštumoje egzistuoja dar viena trajektorija, jungianti balno tašką  $u_1$  su pačiu savimi. Toks sprendinys atitinka bėgantį pulsą, kuris nėra stabilus išoriniams trikdžiams.

Antifronto sprendinys, bėgantis priešinga kryptimi, yra gaunamas atlikus pakeitimą  $u(z) = u(z, t)$ ,  $z = x + ct$ , kur  $c > 0$ . Jeigu  $u(z, c)$  yra sprendinys, tai  $u(-z, -c)$  irgi yra sprendinys. Žinoma, kraštinės sąlygos taip at turi būti pakeistos:  $u(z \rightarrow -\infty) \rightarrow u_3$  ir  $u(z \rightarrow +\infty) \rightarrow u_1$ . Panašiai, kaip ir bėgančio bistabilaus fronto atveju (3), unikali trajektorija jungia balno tašką  $(u_1, 0)$  su balno tašku  $(u_3, 0)$  ketvirtame fazinės plokštumos  $u-v$  kvadrante ir atitinka bėgantį antifronto sprendinį.

Bistabilaus fronto stabilumas mažiems trikdžiams yra parodomas disertacijoje naudojantis trikdžių teorija.

## 2.2 Bistabilaus fronto greitis

Laisvo, nesutrikdyto bistabilaus fronto greitis  $c$  randamas lygtį (6) pakeičianti į

$$v \frac{dv}{du} + c v - R(u) = 0, \quad (14)$$

kur  $v = \frac{du}{dz}$ . Tada lygtį (14) padauginame iš  $du$ :

$$v dv + c_0 v(u) du - R(u) du = 0. \quad (15)$$

Pirmas narys pašalinamas integruojant abi lygties (15) puses išilgai trajektorijos  $\Gamma_2$  fazinėje plokštumoje  $u-v$  (3):

$$\int_{\Gamma} v dv = 0. \quad (16)$$

Tokiu būdu gauname greičio išraišką

$$c_0 = \frac{-\Delta W}{\Delta J_v}, \quad (17)$$

kur

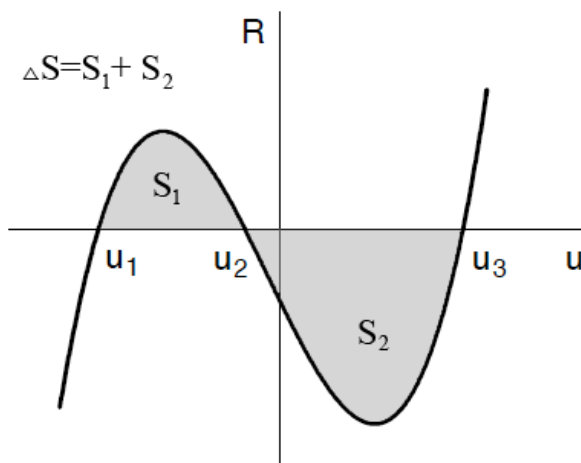
$$\Delta J_v = \int_{u_3}^{u_1} v(u) du. \quad (18)$$

Narys  $\Delta J_v$  aprašo trajektorijos  $\Gamma$  ribojamą plotą fazinėje plokštumoje  $u-v$ , o potencialas  $W(u)$  priklauso nuo spartos funkcijos  $R(u)$ :

$$R(u) = -\frac{dW}{du}. \quad (19)$$

BF greitis yra susijęs su Maxwell'o svertų taisykle, žinoma fazinių virsmų teorijoje, kuri aprašo nesutrikdyto BF judėjimo kryptį priklausomai nuo N-tipo spartos funkcijos formos (5 pav.). Maxwell'o konstrukcija yra patenkinta, *subalansuota* (subalansuota spartos funkcija  $R(u)$ ), kai plotas apibrėžtas funkcija  $R(u)$  yra lygus nuliui:

$$\Delta S = \int_{u_3}^{u_1} R(u) du = 0. \quad (20)$$



5 pav. Maxwell'o svertų taisyklės iliustracija. Parametras  $\Delta S$  žymi kreivės apribotą plotą. Bistabilus frontas juda atgal, jeigu plotas  $S_2$  yra didesnis  $S_1$ .

Laisvas, nesutrikdytas BF yra statiškas, jeigu Maxwell'o konstrukcija yra *subalansuota*, patenkinta ( $\Delta S=0$ ). Bistabilaus fronto kryptis priklauso nuo dominuojančio ploto  $S_1$  arba  $S_2$ : BF juda atgal,  $c < 0$ , jeigu plotas  $S_2$ , sujungtas su  $u_3$ , yra didesnis už plotą  $S_1$  ir patenkinta sąlyga,  $\Delta J_v > 0$  (5). Bendru atveju, jeigu plotas apribotas trajektorijos  $\Gamma$  fazinėje plokštumoje  $u-v$  yra  $\Delta J_v > 0$ , tada Maxwell'o svertų

taisykle galima išreikšti sekančiai:

$$c \begin{cases} > 0, \Delta S > 0 \\ = 0, \Delta S = 0. \\ < 0, \Delta S < 0 \end{cases} \quad (21)$$

### 2.3 Spartos funkcijos simetrijos savybės

Bistabilaus fronto reketo tipo transportas labai priklauso nuo spartos funkcijos pavidalo, nuo  $R-u$  charakteristikos “paslėptos” simetrijos [15]. Šiuo požiūriu yra svarbios dvi spartos funkcijų klasės: simetriškų ir asimetriškų. Spartos funkcijų klasės aprašomos sekančia išraiška:

$$R(u; C) = R_0(u) + C, \quad (22)$$

kur  $C$  yra laisvai parenkama konstanta. Išraiškoje (22) konstanta  $C$  parinkta taip, kad galiojūt Maxwell'o svertų taisyklė (funkcija  $R(u; C)$  yra subalansuota). N-tipo funkcija  $R(u; C)$  priklauso simetriškų spartos funkcijų klasei, jeigu galioja sąryšis

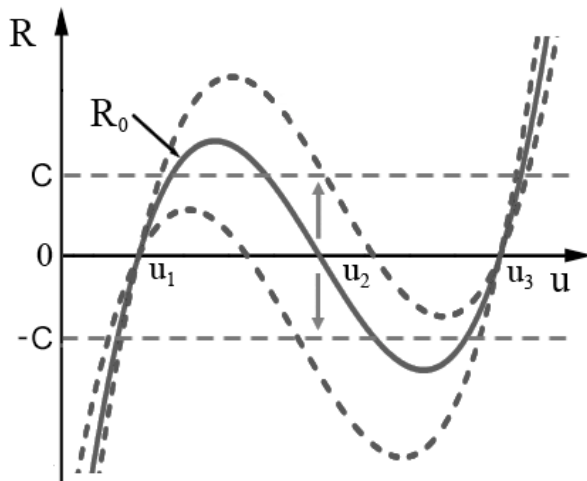
$$R(u - u_2) = -R(u + u_2). \quad (23)$$

Parenkant atskiras konstantos  $C$  reikšmes, galima gauti funkcijas, kurios priklauso simetrinių funkcijų klasei (6 pav.).

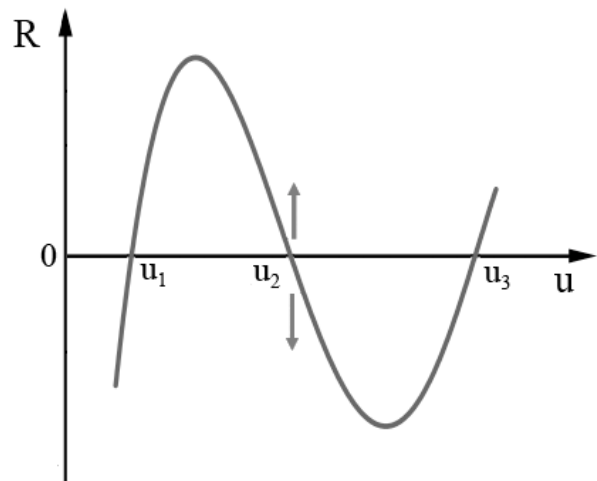
Spartos funkcija  $R(u; C)$  yra asimetriška, jeigu galioja nelygybė

$$R_0(u - u_2) \neq -R_0(u + u_2). \quad (24)$$

Asimetriškų spartos funkcijų klasė gaunama parenkant atskiras konstantos  $C$  reikšmes (7 pav.).



6 pav. Simetriškų spartos funkcijų klasės iliustracija. Skirtingos funkcijos, priklausančios simetriškų funkcijų klasei, yra gaunamos keičiant konstantos  $C$  reikšmes.

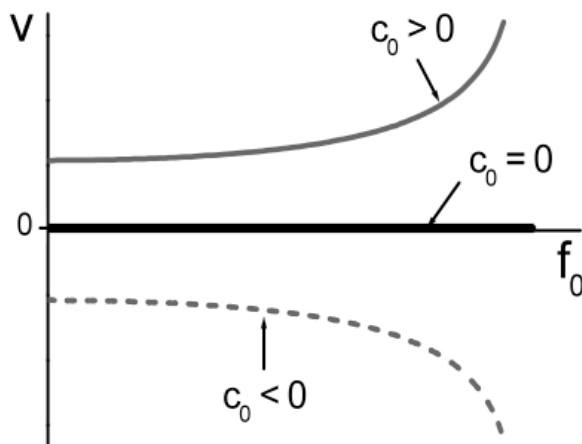


7 pav. Tas pats kaip ir 6 pav., bet asimetriškų funkcijų klasės iliustracija. Maxwell'o konstrukcija yra subalansuota, bet spartos funkcija gali būti asimetriška.

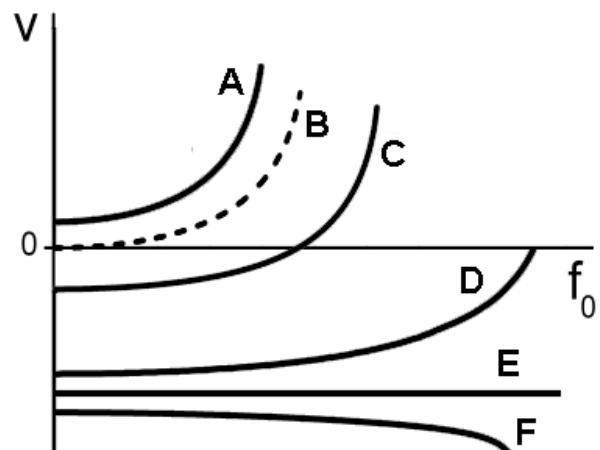
Pagrindinė BF reketo tipo transporto charakteristika yra nusakoma  $v-f_0$  priklausomybe, aprašančia BF vidutinio greičio  $v = \langle c \rangle$  pokyčius esant skirtingiems osciljuojančio nulinio lauko stipriams, skirtingoms jų amplitudėms  $f_0$ . Šių charakteristikų pobūdis, kaip minėta, labai priklauso nuo spartos funkcijos simetrijos savybių [15]. Simetriškų spartos funkcijų  $R(u; C)$  atveju, bistabilaus fronto atsakas į simetriškai osciljuojantį lauką,  $f(t + T/2) = -f(t)$ , kur  $T$  - periodas, pavaizduotas 8

paveiksle. Paveikslas iliustruoja bendro pobūdžio išvadą, kad naudojant simetriškas spartos funkcijas yra galimas tik “progresuojantis” bėgančių BF dreifas. Frontas, kurio pradinis greitis  $c_0$  buvo baigtinis ( $c_0 \neq 0$ ), visuomet bus tik pagreitintas, jį paveikus nuline jėga: vidutinis BF greitis  $v$  monotoniškai auga/mažėja didinant/mažinant lauko amplitudę. Statiškojo BF atveju ( $c_0 = 0$ ), kai Maxwell’o konstrukcija yra tiksliai subalansuota, reketo efektas nepasireiškia (8 pav.) [2].

BF reketo tipo transporto charakteristikos, gautos asimetriškų spartos funkcijų atveju, naudojant tą pačią simetriškai osciliuojantį lauką, yra pavaizduotos 9 paveiksle. Kreivės (A, E, F), kaip ir simetriškų spartos funkcijų atveju, aprašo progresuojančio reketo tipo transporto atvejį. Kitos dvi charakteristikos (B) ir (D), atitinka dvi kraštutines situacijas, susijusias su statiškuoju BF. Kreivė (B) aprašo progresyvų statiškojo ( $c_0 = 0$ ) BF dreifą, o D kreivė atitinka bėgančio fronto ( $c_0 \neq 0$ ) visiško sustabdymo reiškinį: frontas, kuris pradžioje sklido baigtiniu greičiu  $c_0 \neq 0$ , visiškai sustoja ( $v_{Max} = 0$ ), kai nulinio lauko amplitudė pasiekia maksimalią reikšmę (detali analizė [15, 38]). Keltuvo charakteristika (C), vaizduoja fronto apgrąžos reiškinį: keičiant nulinės jėgos amplitudę, fronto sklidimo kryptis pasikeičia, virsta priešinga, t.y. galioja nelygybės  $c_0 > 0$  ir  $v_{Max} < 0$ . Apgrąžos reiškinys nėra trivialus fazinių virsmų kinetikos požiūriu: panaudojus nulinį lauką, galima apgręžti natūralią fazinio virsmo eigos kryptį, priverčiant BF sklirti nuo metastabilaus (mažiau stabilaus) sistemos būvio link stabiliojo.



8 pav. Vidutinio BF greičio priklausomybės nuo simetriškai harmoninio nulinio lauko amplitudės. Kreivės vaizduoja  $v - f_0$  priklausomybės, gautas naudojant skirtingus pradinis nesutrikdyto BF greičius.



9 pav. Tas pats kaip ir 8 pav., bet asimetriškų funkcijų klasės atveju. Kreivės A, E, F demonstruoja panašius efektus, kaip ir 8 paveiksle. Kreivė B atvaizduoja statiško fronto pagreitėjimą, kreivė C demonstruoja apgrąžos reiškinį, kreivė D parodo visišką BF sustabdymo reiškinį.

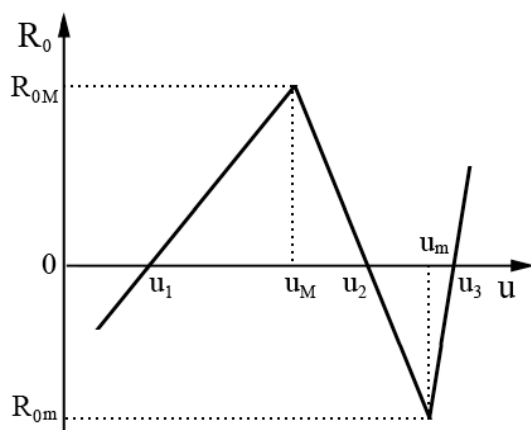
Suprantama, sine-Gordon [3] ir kubinis [4] modeliai yra specifiniai, nes sinuso ir kubinė spartos funkcijos pasižymi “paslėpta” simetrija – neįmanoma sukonstruoti asimetrinių funkcijų klasės. Siekiant išsamiai ištirti BF reketo efektą, šioje disertacijoje naudojamas “pseudotiesinis” bistabilios terpės modelis, kuris aprašomas N-tipo spartos funkcija su “lanksčia” simetrija (sukonstruojamos simetrinės ir asimetrinės subalansuotos funkcijos). Be to, pseudotiesinis bistabilios terpės modelis yra analitiškai išsprendžiamas [5].

## 2.4 Pseudotiesinė spartos funkcija

Kubinės spartos funkcijos (4) aproksimaciją tiesėmis galima išreikšti sekančia funkcija:

$$R(u) = \begin{cases} \alpha_1(u - u_1), & u < u_M \\ -\alpha_2(u - u_2), & u_M < u < u_m \\ \alpha_3(u - u_3), & u > u_m \end{cases} \quad (25)$$

Netiesinė spartos funkcija pasižymi trimis nulio taškais,  $u = u_1, u_2, u_3$ , ir atitinkamais sąryšiais:  $R'(u_{1,3}) > 0$  ir  $R'(u_2) < 0$ , kur apostrofas žymi išvestinę (10 pav.). Laisvi parametrai  $\alpha_i$  ir  $u_i$  tenkina nelygybes:  $u_1 < u_M < u_2 < u_m < u_3$  ir  $\alpha_i > 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ), kur  $\alpha_i$  yra spartos funkcijos polinkio koeficientai.



10 pav. N-tipo pseudotiesinė spartos funkcija su trimis nulio taškais. Dydziai  $u_M$  ir  $u_m$  žymi spartos funkcijos ekstremumo taškus.

Pseudotiesinis modelis (a) turi analitinius sprendinius; analitiniai laisvų BF sprendiniai, gaunami naudojant lygtį (2), ir sutrikdytų BF sprendiniai, išvedami naudojant adiabatinį artinį, yra žinomi [5, 15], (b) yra “lanksčios”  $R(u)$  simetrijos; jei lygybė  $\alpha_1 = \alpha_3$  patenkinta, tai gauname simetrinių spartos funkcijų klasę, o jei  $\alpha_1 \neq \alpha_3$ , tai asimetrinių funkcijų klasę, (c) duoda kokybiškai geras charakteristines bistabilios sistemos savybes; BF greičio funkcija  $c(t)$  ir vidutinės BF dreifo charakteristikos, gaunamos naudojant kubinę funkciją (4) ir jos tiesinę aproksimaciją (25) su vienoda  $R(u)$  simetrija, gerai sutampa [17, 38]. Iš to seka, kad pseudotiesinis modelis yra pakankamai geras įrankis reketo tipo transportui tyrinėti.

Naudinga apsibrėžti spartos funkcijos  $R(u)$  balanso parametrus. Spartos funkcijos (25) maksimumas  $R_M \equiv R(u_M)$  ir minimumas  $R_m \equiv R(u_m)$  gali būti išreikšti sekančiai:

$$R_M = \alpha_2(u_2 - u_M) \text{ ir } R_m = \alpha_2(u_2 - u_m). \quad (26)$$

Spartos funkcijos balanso parametras  $h_R$  yra apibrėžiamas:

$$h_R = -\frac{R_M}{R_m}. \quad (27)$$

Skirtingus nesutrikdyto BF pradinius greičius galima gauti parenkant atitinkamą balanso parametą  $h_R$ . Jeigu Maxwell'o konstrukcija yra subalansuota, tai laisvas BF yra statiškas ( $c_0 = 0$ ) ir galioja lygybė  $h_R = h_0$ , kur

$$h_0 = \sqrt{\frac{(1 + r_3^{-1})}{(1 + r_1^{-1})}}. \quad (28)$$



Spartos funkcijos polinkio parametrai apskaičiuojami:  $r_{1,3} = \alpha_{1,3}/\alpha_2$ . Jeigu spartos funkcija yra nesubalansuota ( $h_R \neq h_0$ ), tai frontas bėga pastoviu greičiu ( $c_0 \neq 0$ ). Nesubalansuotai spartos funkcijai yra patogų naudoti parametras  $g_H$  sekančioje išraiškoje:  $h_R = g_H h_0$ . Kai  $h_R \rightarrow \infty$ , tai  $c_0 \rightarrow c_M$ , kur  $c_M = 2\sqrt{\alpha_2}$  yra ribinis BF greitis [15].

Normuotos greičio funkcijos  $s(t)$ , aprašomos sąryšiu  $s(t) = c(t)/c_M$ , yra priimtinesnės nei paprastos (nenormuotos) funkcijos. Normuota greičio funkcija  $s(t)$  tenkina sąlyga  $s(t) \in (-1, 1)$ , nepaisant naudojamo balanso parametro  $h_R$  reikšmės [17, 38]. Disertacijoje naudojamos normuotos greičio funkcijos yra apskaičiuojamos skaitiniais metodais.

Bistabilių frontų valdymas simetriškais ir asimetriškais spartos funkcijomis, aprašomomis tiesinėmis dalimis (10), buvo nagrinėtos naudojant analitinius bei skaitinius metodus [15, 16, 39, 40].

### 3. Bistabilaus fronto valdymas nuliniiais laukais

Disertacijoje tyrinėjami savaiminių BF valdymo galimybės osciliuojančiais nuliniiais laukais. Taigi „tiesioginis“ (ne parametrinės prigimties) reketo mechanizmas, kuris vykdo kryptingą bistabilių frontų dreifą stochastiškai bei deterministiškai osciliuojančiuose nuliniuose laukuose, yra nagrinėjamas šiame skyriuje. Bazinė lygtis – apibendrintas modelis, aprašantis kryptingą BF dreifą nuliniuose laukuose, yra netiesinė parabolinio tipo diferencialinė lygtis,

$$u_t - u_{zz} - c(t)u_z + R(u) = f(t). \quad (29)$$

Čia stochastinė arba reguliari jėgos funkcija  $f(t)$  aprašo išorinių laukų poveikį BF. Svarbu pabrėžti, nulinio lauko atveju galioja sąlyga,

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad (30)$$

kur skliaustai  $\langle \rangle$  žymi vidurkinimą pagal funkcijos periodą (deterministinis reketas) arba pagal stochastiškai osciliuojančio lauko realizacijas (stochastinis reketas). Greičio transformacijos mechanizmas, kuris aprašo osciliuojančios jėgos  $f(t)$  pakeitimą į BF momentinį greitį  $c(t)$ , yra aptartas darbe [17]. Tai yra netiesinis transformacijos procesas, kurio metu osciliuojanti “įvedimo” funkcija  $f(t)$  yra pakeičiama į “išvedimo” (atsakymo) funkciją  $c(t)$ . Bistabilaus fronto dreifas priklauso nuo veikiančio sistemą lauko simetrijos savybių [17, 39, 41]. Darbuose [15, 16, 18] buvo parodyta, kad rezultatai, gaunami naudojant laukus su skirtinga “simetrija”, stipriai skiriasi. Taigi reketo efekto veikimas paremtas pažeistos asimetrijos principu, kai netiesinė sistemos charakteristika pasižymi “paslėpta” asimetrija arba nulinio lauko svyravimai yra asimetriški.

BF dreifas, sukeltas nereguliariai osciliuojančių nulinių laukų, išlieka menkai ištirtas. Dauguma reketo efekto tyrimu atlikta naudojantis trikdžių teorija su silpnais stochastiniais laukais [10, 12, 13]. Reketo tipo transportas, nagrinėtas naudojant kubinį (4) ir sine-Gordon (5) modelius, parodė, kad BF dreifas yra jautrus spektrinėms silpnų, mažo intensyvumo triukšmų charakteristikoms. Svarbu pabrėžti, kad baltas Gauso triukšmas negali sužadinti kryptingo BF dreifo [12]. Silpno triukšmo sužadintas BF dreifas išnyksta, jei atsitiktinis laukas yra Guasiškas ir delta koreliuotas [10, 11, 13]. Čia ir atsiranda kompiuterinio modeliavimo poreikis, nes nėra ištirtas stiprių, didelio intensyvumo nulinių laukų poveikis BF reketo tipo transportui.

### 3.1 Išorinių laukų funkcijos

Kaip minėta, BF reketo tipo transportas priklauso nuo osciliuojančio lauko funkcijos  $f(t)$  savybių. Nulinis laukas  $f(t)$  atitinka periodinę laiko funkciją:  $f(t+T) = f(t)$ , kur dydis  $T$  reiškia lauko periodą. Simetrinio nulinio lauko atveju galioja lygybė  $f(t+T/2) = -f(t)$ . Nulinio lauko osciliacijos yra asimetriškos, jeigu galioja nelygybė  $f(t+T/2) = -f(t)$ . Toliau pateikiami darbe naudojami osciliuojantys nuliniai laukai.

#### 3.1.1 Periodinio lauko funkcija

Simetriška harmoninio lauko funkcija yra naudojama nagrinėjant  $R-u$  simetrijos savybes, kai spartos funkcija  $R(u)$  yra asimetrinė. Taip pat tiriama vėlavimų įtaka BF kryptingam dreifui, sukkelto osciliuojančio nulinio lauko, kuris apibūrinamas periodine funkcija,

$$f(t) = f_0 \sin(\omega t). \quad (31)$$

#### 3.1.2 Biharmoninio lauko funkcija

Siekiant ištirti nereguliariai osciliuojančio (fluktuojančio) lauko įtaką BF dreifui, naudojama biharmoninio lauko funkcija, išreiškiama superpozicija (ansambliu) dviejų harmonikų (Fourier eilučių) su skirtingais dažniais,

$$f(t) = f_0(1 + b_F)^{-1} [\sin(\omega t) + b_F \sin(\mu \omega t + \Delta\varphi)] \quad (32)$$

Čia dydžiai  $b_F$ ,  $\mu$ ,  $\Delta\varphi$  ir  $f_0$  yra laisvai parenkami parametrai. Norint gauti periodinę arba kvaziperiodinę (nereguliarią) jėgos funkciją, parametras  $\mu$  atitinkamai turi būti racionalusis arba iracionalusis skaičius. Skaičiavimai atlikti parenkant parametro  $\mu$  reikšmes 2 ir  $\sqrt{3}$ , kurios atitinka periodinę ir kvaziperiodinę jėgos funkcijas. Papildomi parametrai:  $b_F = 1$  ir  $\Delta\varphi = \pi$ . Be to, kvaziperiodinės (neregulios) jėgos funkcijos, kurias sudaro du iracionalūs dažniai (biharmoninės funkcijos), buvo naudojamos nagrinėjant kryptingą dalelių dreifą [42, 43].

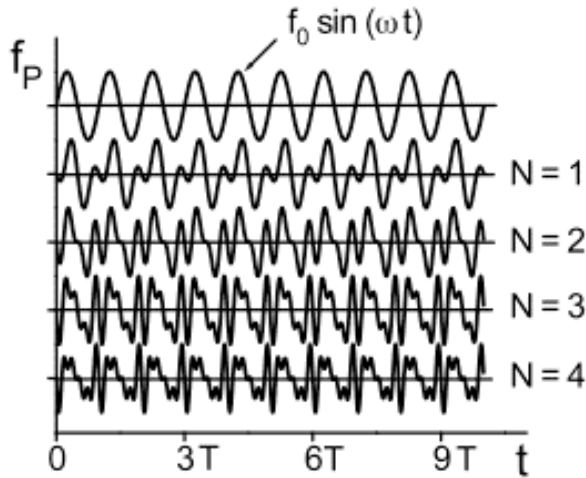
#### 3.1.3 Daugiaharmoninio lauko funkcija

Išorinio osciliuojančio lauko efektyvumas, valdant BF dreifo greitį, toliau nagrinėjamas naudojant daugiaharmoninę jėgos funkciją, kuri yra tiesinė suma atskirų harmonikų su skirtingais dažniais. Tokia daugiaharmoninė jėgos funkcija su besikeičiančiais iracionaliais dažniais yra nereguliari ir gali būti naudojama kaip deterministinis atitikmuo stochastinėms jėgoms [44, 45]. Tikslas yra ištirti BF dreifo, veikiamo nereguliariais laukais, priklausomybę nuo laukų spektrinių charakteristikų. Palaipsniui plečiant nereguliariai osciliuojančių laukų dažnių spektrą, stebima ar nereguliariai osciliuojantis laukas, aprašomas daugiaharmonine funkcija, turi įtakos BF dreifui. Daugiaharmoninė funkcija gali būti išreikšta sekančiai:

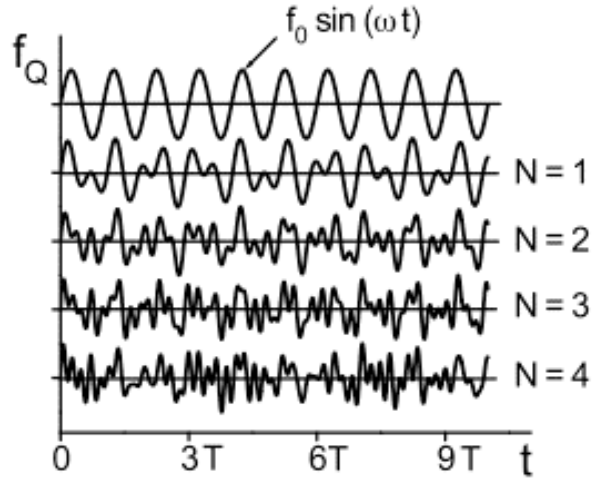
$$f(t) = f_a A_F \left[ \sin(\omega t) + \sum_{j=1}^N b_j \sin(\mu_j \omega t + \Delta\varphi_j) \right], \quad (33)$$

kur dydžiai  $f_a$ ,  $b_j$ ,  $\mu_j$  ir  $\Delta\varphi_j$  yra laisvai parenkami parametrai. Dydis  $\omega$  apibrėžia pagrindinės modos dažnį, o dydis  $N$  – sveikas skaičius. Bi-, tri-, tetra- ir pentaharmoninio lauko funkcijos, gaunamos palaipsniui didinant  $N$  ( $N = 1, 2, 3, 4$ )

reikšmę lygtyje (33), yra naudojamos šiame darbe. Norint gauti periodinę arba kvaziperiodinę (nereguliarią) jėgos funkciją, parametras  $\mu$  atitinkamai turi būti racionalusis arba iracionalusis skaičius. Periodinės lauko funkcijos pavaizduotos 11 paveiksle, o kvaziperiodinės – 12 paveiksle.



11. Periodinės lauko funkcijos: bi- ( $N = 1$ ), tri- ( $N = 2$ ), tetra- ( $N = 3$ ) ir pentaharmoninė ( $N = 4$ ) funkcijos. Pagrindinės modos periodas:  $T = 10$ .



12 pav. Tas pats kaip ir 11 pav., bet kvaziperiodinių funkcijų atveju, kurios pasižymi nereguliarium elgesiu.

### 3.1.4 Apriboto triukšmo funkcija

BF dreifo priklausomybė nuo skirtingų stochastinio lauko spektrinių charakteristikų yra tyrinėjama pasitelkiant apriboto triukšmo funkcija. Anksčiau aprašyta daugiaharmoninė funkcija (33) pasižymi nereguliarium elgesiu, bet tai nėra triukšmas. Apribotas triukšmas yra aprašomas daugiaharmonine funkcija su atsitiktiniais dažniais ir fazėmis. Taigi apriboto triukšmo funkcija gali būti sudaryta iš didelio skaičiaus  $N$  Fourier eilučių:

$$f(t) = f_0 \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sin(\omega_n t + \varphi_n) \Theta(\omega_M - \omega_n), \quad (34)$$

kur dažnis  $\omega_n$  ir fazė  $\varphi_n$  yra atsitiktiniai kintamieji, kurie tolygiai pasiskirstę atitinkamuose intervaluose:  $\omega_n \in [\omega_m, \omega_M]$  ir  $\varphi_n \in [0, 2\pi]$ . Čia  $m$  reiškia minimalią reikšmę, o  $M$  – maksimalią. Teta funkcija  $\Theta$  yra naudojama lauko spektrinių charakteristikų apribojimui. Stochastinės funkcijos (34) intensyvumas apibrėžiamas standartiniu nuokrypiu  $\sigma$ :

$$\sigma^2 \equiv \langle f^2(t) \rangle = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_0^{\Delta T} dt f^2(t), \quad (35)$$

Narys  $\Delta T$  žymi lauko veikimo trukmę. Veikiančio lauko vidurkis turi būti nulis,  $\langle f(t) \rangle = 0$ , todėl lauko veikimo trukmė turi būti pakankamai ilga:

$$\Delta T \gg \frac{2\pi}{\omega_m}. \quad (36)$$

Čia  $\omega_m$  žymi veikiančio lauko (34) lėčiausios modos periodą.

## 3.2 Kompiuterinis modeliavimas

Kaip minėta, analitinis bistabilaus fronto bazinės evoliucijos lygties (29) sprendimas yra problematiškas. Trikdžių teorija aprašo tik silpnai sutrikdytas sistemas, todėl netinka bendru atveju. Siekiant surasti sutrikdyto BF sprendinį ir jo greičio funkciją yra sudaromas matematinis sistemos modelis, kuris sprendžiamas skaitiniais metodais, pasitelkiant baigtinių skirtumų metodą. Baigtinių skirtumų metodo esmė yra išspręsti diferencialines lygtis, jas aproksimuojant baigtinio kintamųjų kiekio lygčių sistema [46]. Sudaryta baigtinio kintamųjų kiekio lygčių sistema gali būti išspręžiama naudojant įvairius matematinius paketus [47-49], bet dėl bėgančios koordinatės specifikos buvo sukurta atskira programinė įranga, naudojant Java programavimo kalbą [50-52].

### 3.2.1 Matematinis modelis

Pirmiausia reikia rasti pradinės ir kraštinės bazinės lygties (29) sąlygas tam, kad gautumėme sutrikdyto BF sprendinį  $u(z, t)$  ir greičio funkciją  $c(t)$ . Todėl matematinis modelis susideda iš dviejų dalių: (a) homogeninės lygties (2) sprendimas, kai randamas laisvas, nesutrikdytas fronto sprendinys ir (b) nehomogeninės lygties (29) sprendimas, kai sutrikdyto fronto greitis yra randamas. Taigi pirmajame žingsnyje sprendžiame lygtį (2) su pseudotiesine spartos funkcija (25), kai BF neveikia išorinis laukas ( $f(t) = 0$ ). Cauchy uždavinio netiesinei parabolinio tipo diferencialinei lygčiai (2) pradinės sąlygos yra aprašomos sekančia lygtimi:

$$u(z, t = 0) = a \tanh(qz) + b, \quad -\infty < z < +\infty, \quad (37)$$

kur  $a$ ,  $q$  ir  $b$  žymi parametrus, kurie susiję tokiomis priklausomybėmis:

$$a = q = \frac{(u_3 - u_1)}{2} \quad \text{ir} \quad b = \frac{(u_3 + u_1)}{2}. \quad (38)$$

Pasirinkta apytikrė funkcija (37), aprašanti frontą, yra naudojama pradinėms bazinės lygties (29) sąlygoms gauti. Kraštinės lygties (2) sąlygos apskaičiuojamos iš lygties

$$\{u_i\} + R(u) = 0 \rightarrow R(u) = 0. \quad (39)$$

Ši lygtis turi tris sprendinius,  $u = u_1, u_2, u_3$ , bet kaip parodė fazinio portreto analizė, laisvas, nesutrikdytas BF sprendinys  $u_0(z, t)$  jungia kraštinius spartos funkcijos nulio taškus,  $u_1$  ir  $u_3$ , aprašančius stabilius sistemos būvius. Todėl homogeninės lygties kraštinės sąlygos yra

$$u(t; z \rightarrow -\infty) = u_1 \quad \text{ir} \quad u(t; z \rightarrow +\infty) = u_3, \quad t > 0. \quad (40)$$

Išsprendus aprašytą Cauchy uždavinį skaitiniais metodais yra randamas nesutrikdyto BF sprendinys  $u_0(z, t)$ , judantis pastoviu fiksuotu greičiu  $c_0$ .

Antrame žingsnyje sprendžiama nehomogeninė lygtis (29) su pseudotiesine spartos funkcija (25). Stacionarus homogeninės lygties sprendinys  $u_0(z, t)$  yra naudojamas kaip nehomogeninės lygties pradinės sąlygos. Kraštinės bazinės lygties (29) sąlygos yra randamos iš sekančios lygties:

$$u_i + R(u) = f(t). \quad (41)$$

Ši lygtis gaunama iš bazinės lygties (29), nes kai  $z \rightarrow \pm\infty$ , tai  $u_z \rightarrow 0$  ir  $u_{zz} \rightarrow 0$ . Lygties (41) pradinės sąlygos yra  $V_1(t = t_0) = u_1$  ir  $V_3(t = t_0) = u_3$ , kur  $u_1$  ir  $u_3$  atitinka homogeninės lygties kraštinės sąlygas. Suformuluotas Cauchy uždavinys yra naudojamas BF sprendiniui  $u(z, t)$  ir jo greičio funkcijai  $c(t)$  apskaičiuoti naudojant baigtinių skirtumų metodą.

### 3.2.2 Baigtinių skirtumų metodas

Baigtinių skirtumų metodo pirmas žingsnis yra sprendimo srities diskretizavimas pasirinktu žingsniu. Kadangi funkcija  $u(x,t)$  turi du argumentus, todėl apibrėžiama dvimatė erdvė  $\bar{D} = \{0 \leq x \leq X, 0 \leq t \leq T\}$ . Segmentas  $[0,X]$  padalinamas į  $N$  lygių žingsnių  $h = X/N$  taškuose  $x_i = ih$  su indeksais  $i = 0,1,\dots,N$ , o segmentas  $[0,T]$  padalinamas į  $M$  žingsnių  $k = T/M$  taškuose  $t_j = jk$ ,  $j = 0,1,\dots,M$ . Tokiu būdu sudaromas diskretusis tinklas [46]:

$$\bar{\omega}_{hk} = \{(x_i, t_j) \in \bar{D}\}. \quad (42)$$

Diferencialinės lygties (29) sprendiniai apskaičiuojami tik šio diskretaus tinklo taškuose:

$$u_i^j = u(x_i, t_j) \quad (43)$$

Antrajame žingsnyje diferencialiniai operatoriai aproksimuojami baigtiniais skirtumais:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} \quad \text{ir} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}. \quad (44)$$

Šios aproksimacijos gaunamos paėmus pirmuosius Taylor'o eilutės narius, todėl laiko išvestinės lokali aproksimacijos paklaida yra  $O(k)$ , o erdvės išvestinės –  $O(h^2)$  [46, 53].

Trečias žingsnis – skirtuminės lygties sprendimas, naudojant apibrėžtas pradines ir kraštines sąlygas. Diferencialinių operatorių aproksimacijos (44) įstatomos į lygtį (29), kurios koordinatų sistema nejudą (pakeitimas  $z = x - ct$  neatliktas):

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} - \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + R(u_i^j) = f(t_j). \quad (45)$$

Pertvarkius šią lygtį yra gaunamas išreikštinis sprendinys

$$u_i^{j+1} = (1 - 2r)u_i^j + r(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) + k(f(t_j) - R(u_i^j)), \quad (46)$$

kur  $r = k/h^2$ . Tokia išraiška yra vadinama išreikštinė baigtinių skirtumų schema, nes reikšmės laiko momentu  $t_{j+1}$  gali būti apskaičiuojamos naudojantis atitinkamomis reikšmėmis laiko momentu  $t_j$ . Ši skirtuminė schema užrašoma tik vidiniams srities  $\bar{\omega}_{hk}$  taškams:

$$\omega_{hk} = \{(x_i, t_j) \in \bar{D}\}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, M \quad (47)$$

Tada išoriniai srities taškai:  $\gamma_{hk} = \bar{\omega}_{hk} - \omega_{hk}$ . Kraštinės sąlygos (40) aproksimuojamos sekančiai:

$$u_0^j = u_1 \quad \text{ir} \quad u_N^j = u_3. \quad (48)$$

Pradiniu sąlygų (37) aproksimacija:

$$u_i^0 = a \tanh(q x_i) + b, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (49)$$

kur parametrai  $a$ ,  $q$  ir  $b$  yra apibrėžti išraiškose (38). Bazinės lygties (29) kraštinės sąlygos (41) aproksimuojamos sekančiai:

$$u_i^{j+1} = u_i^j + k(f(t_j) - R(u_i^j)) \quad (50)$$

Lygties (50) pradinės sąlygos kairiajai kraštinei yra  $u_0^0 = u_1$ , o dešiniajai –  $u_N^0 = u_3$ . Bazinės lygties (29) pradinės sąlygos gaunamos iš stacionaraus nesutrikdyto BF sprendinio  $u_0(z, t)$ .

Ši skirtuminė schema yra skaitiškai stabili ir konverguoja, jeigu patenkinta ši nelygybė [46, 53]:

$$r \leq 1/2, \quad (51)$$

o skaičiavimų apvalinimo paklaida yra

$$T_h = O(k + h^2). \quad (52)$$

Siekiant kuo tikslesnių skaičiavimo rezultatų, buvo parinktos atitinkamos žingsnių reikšmės: laiko –  $k = 0.001$  ir erdvės –  $h = 0.05$ .

### 3.2.3 Bistabilaus fronto greitis

BF greičio funkcija  $c(t)$  galima rasti lygtį (29) aproksimuojant baigtinių skirtumų metodu ir pritaikius bėgančias koordinates,  $z = x - x_C(t)$ , kur  $x_C(t)$  žymi bėgantį BF centrą. Tada greičio funkcija galima užrašyti sekančiai:

$$c(t_j) = \frac{x_C(t_j) - x_C(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} = \frac{\Delta x_C}{\Delta t}, \quad (53)$$

kur  $\Delta x_C$  žymi bėgančio BF centro postūmį. Bėgančio BF centro lygtis:

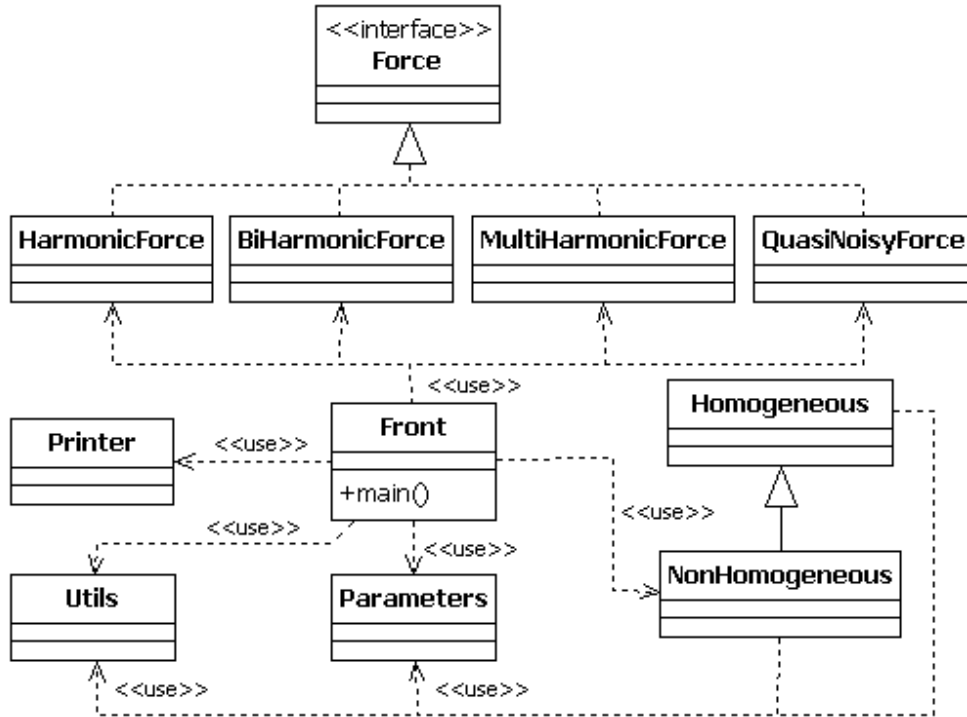
$$x_C(t) = \frac{\int_{-L}^L dx \, x \, u_x(x,t)}{\int_{-L}^L dx \, u_x(x,t)}. \quad (54)$$

Čia  $-L$  ir  $L$  atitinkamai žymi dešinią ir kairią tinklo  $\bar{D}$  kraštus. Kaip minėta, darbe naudojamos normuotos greičio funkcijos  $s(t) = c(t)/c_M$ , kur ribinis greitis  $c_M = 2\sqrt{\alpha_2}$ .

### 3.2.4 Programinė įranga

Sudarytai baigtinių skirtumų schemai spręsti yra sukurta programinė įranga naudojantis Java programavimo kalba, nes egzistuojantys matematiniai paketai nėra pritaikyti tokių problemų sprendimui. Algoritmas yra optimizuotas įgyvendinant du atskirus masyvus: viename masyve laikomi BF sprendinio reikšmės laiko momentu  $t$ , o kitame laiko momentu  $t - 1$ . Masyvų reikšmės yra apkeičiamos kiekviena žingsnyje, kai suskaičiuojamos naujos fronto sprendinio reikšmės, todėl atmintis naudojama efektingai. Kraštinės sąlygos yra saugomos atskiruose masyvuose, o išorinių laukų reikšmės saugomos tekstinėse bylose.

Apache Ant įrankis yra pritaikytas programos kompiliavimui ir paleidimui, naudojant komandinės eilutės sąsają. Kadangi skaičiavimui gali trukti palyginus ilgai, tai programos paleidimą patogiau planuoti (pvz. naudojantis Cron paketu). Visi programos pradiniai parametrai yra laikomi atskirose bylose. Homogeninės ir nehomogeninės lygčių sprendimai yra atskirti, kaip pavaizduota programos klasių diagramoje (13 pav.). Kiekviena išorinio lauko funkcija yra aprašyta atskiroje klasėje. Programa išveda rezultatus į tekstines CSV tipo bylas arba pavaizduoja naudojant jFreeChart grafikų biblioteką.



13 pav. Klasių diagrama

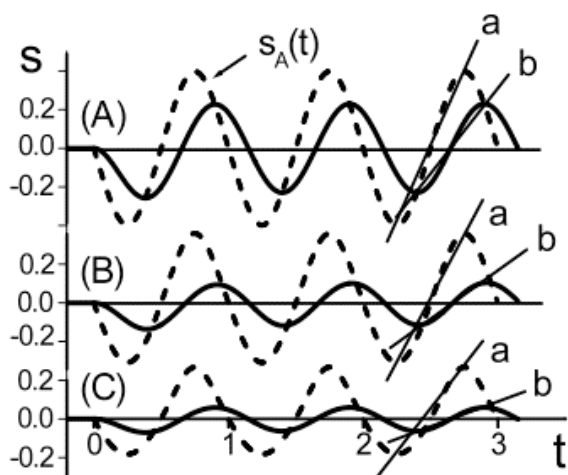
## 4. Rezultatai

Reketo efekto tyrimų rezultatai, gauti pasitelkiant kompiuterinį modeliavimą ir analitinius įrankius, pristatomi šiame skyriuje. Vidutinės reketo tipo transporto charakteristikos yra nusakomos  $v - f_0$  arba  $v - \omega_0$  priklausomybėmis, kur  $v = \langle c(t) \rangle$  – vidutinis BF greitis,  $f_0$  - osciliuojančio nulinio lauko stipris (amplitudė), o  $\omega_0$  žymi išorinio lauko dažnį. Dažnai BF vidutinis greitis yra labai mažas dydis, todėl siekiant kuo geriau iširti reketo efektą, vidutinis greitis pakeičiamas pagreitėjimo faktoriumi,  $\rho := |s_0|^{-1} v$ , žyminčiu santykinį vidutinio greičio padidėjimą. Toliau trumpai apžvelgiami pagrindiniai disertacijoje pristatomi rezultatai, suskirstyti pagal naudojamus išorinius laukus.

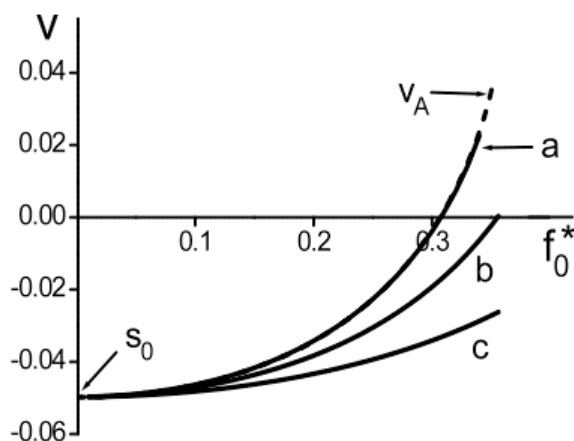
### 4.1 Periodinio lauko veikiami bistabilūs frontai

Vėlavimo laikų  $\tau_D$  (delsos reiškinių) atsiradimas tarp osciliuojančio nulinio lauko ir BF atsako greičio turi įtakos BF dreifui, kaip buvo parodyta nagrinėjant simetrinės spartos funkcijos modelį [38, 40]. Šiame skyriuje tyrinėjama spartos funkcijos simetrijų ir delsos reiškinių įtaka BF dreifui pasitelkiant asimetrinę spartos funkciją (25). BF veikiantis laukas yra aproksimuojamas tiksliai simetriška periodine funkcija (31), nes norima geriau pademonstruoti  $R - u$  simetrijos įtaką reketo tipo transportui. Kadangi tiriant reketo efektą greičio funkcija  $s(t)$  yra normuota, tai ir veikiantis laukas yra normuojamas,  $f^*(t) := f(t)/\Delta R$ . Vidutinės BF dreifo charakteristikos, gaunamos panašaus tipo (klasės) spartos funkcijomis (22), nepriklauso nuo spartos funkcijos aukščio  $\Delta R$ , jeigu abi funkcijos  $f^*(t)$  ir  $s(t)$  yra normuotos [15, 17, 38].

Osciliuojančios greičio funkcijos  $s(t)$ , apskaičiuojamos skaitiniais metodais naudojant skirtingus spartos funkcijos polinkio koeficientus  $\alpha_3$ , yra pavaizduotos 14 paveiksle ištisinėmis kreivėmis. Punktyrinėmis kreivėmis pažymėtos greičio funkcijos  $s_A(t)$ , kurios beveik iš karto, “akimirksniu” reaguoja į lėtai kintantį osciliuojantį lauką (31), apskaičiuojamos analitiškai naudojantis adiabatiniu artiniu. Didinant spartos funkcijos polinkio koeficientą  $\alpha_3$ , tikrosios greičio funkcijos  $s(t)$  palaipsniui plokštėja (14 pav.). Didėjantis vėlavimo laikas  $\tau_D$  tarp osciliuojančių funkcijų  $s_A(t)$  ir  $s(t)$  yra schematiškai pavaizduotas tiesėmis (a) ir (b), kurios žymi vidutinius priklausomybių  $s_A - t$  ir  $s - t$  polinkius. Galima pastebėti, kad polinkio kampas tarp tiesių (a) ir (b) didėja, kai spartos funkcijos polinkio koeficientas didėja. Greičio funkcijos  $s(t)$  amplitudė yra proporcinga  $\tan \beta$ , kur  $\beta$  yra kampas tarp tiesių (a) ir (b).



14 pav. Skaitiškai apskaičiuotos vėluojančios (atsiliekančios) greičio funkcijos  $s(t)$ , gaunamos naudojant skirtingus spartos funkcijos polinkio koeficientus  $\alpha_3$  yra pažymėtos ištisinėmis kreivėmis. Punktyrinės kreivės žymi analitiškai gautas greičio funkcijas  $s_A(t)$ , kurios ignoruoja vėlavimus. Vidutiniai greičio funkcijų  $s_A(t)$  ir  $s(t)$  polinkiai yra atitinkamai pažymėti (a) ir (b) tiesėmis. Santykinis polinkio kampas tarp tiesių (a) ir (b) didėja kartu su polinkio koeficientu  $\alpha_3$ . Parametrų reikšmės:  $f_0^* = 0.6 f_{Mx}^*$ ,  $T = 1$ ;  $\alpha_1 = 5$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $h_R = h_0$ ,  $s_0 = 0$ ; (A kreivės)  $\alpha_3 = 5$ ,  $T = 5\tau_R$ ,  $h_R = 1$ ; (B kreivės)  $\alpha_3 = 1$ ,  $T = \tau_R$ ,  $h_R = 1.29$ ; (C kreivės)  $\alpha_3 = 0.2$ ,  $T = 0.2\tau_R$ ,  $h_R = 2.24$ . Veikiančių laukų amplitudžių  $f_0^*$  reikšmės: (A) 0.30, (B) 0.26 ir (C) 0.19.



15 pav. Vidutinio BF dreifo greičio priklausomybė nuo periodinio lauko amplitudės. Ištisinės kreivės apskaičiuotos skaitiškai, o punktyrinė  $v_A$  kreivė gauta naudojant adiabatini artinį. Parametrų reikšmės:  $\alpha_1 = 5$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_3 = 0.2$ ,  $h_0 \approx 2.24$ ,  $h_R \approx 1.81$ ,  $s_0 = -0.05$ ,  $\tau_R = 5.0$ ; (a kreivė)  $T/\tau_R = 60$ ; (b kreivė)  $T/\tau_R = 10$ ; (c kreivė)  $T/\tau_R = 5$ . Maksimalus vidutinis dreifo greitis  $v_{Mx}$ : (a)  $v_{Mx} \approx 0.042$ ; (b)  $v_{Mx} \approx 0.000$ ; (c)  $v_{Mx} \approx -0.026$ . Priklausomai nuo veikiančio lauko dažnio, frontas, pradžioje judėdamas pastoviu greičio  $s_0$ , (i) apsigręžia (a kreivė), (ii) sustoja (b kreivė) arba (iii) sumažina kryptingo dreifo greitį (c kreivė).

Siekiant tiksliai aprašyti reketo tipo transporto charakteristikas plačiame nulinio lauko intervale, buvo apskaičiuotos  $v - f_0^*$  priklausomybės naudojant skaitinius ir analitinius metodus. Skaitiškai gautos kreivės, vaizduojančios vidutinio greičio didėjimą, kai pradžioje BF dreifo greitis yra neigiamas, juda priešinga kryptimi, yra pavaizduotos 15 paveiksle. Matome, kad lėtai osciliuojančio lauko atveju, kai nulinio lauko periodas  $T$  yra didesnis už charakteringąjį relaksacijos laiką sistemoje  $\tau_R = \max\{\alpha_1^{-1}, \alpha_3^{-1}\}$  (galioja nelygybė  $T \gg \tau_R$ ), tai skaitiškai gaunama  $v - f_0^*$  priklausomybė gerai sutampa su adiabatiniu artiniu pagalba apskaičiuota  $v_A - f_0^*$  priklausomybe (žr. 15 pav., ištisinė



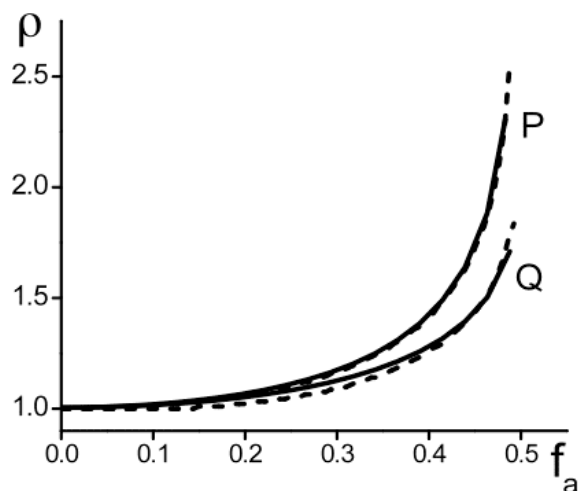
kreivė  $a$  ir punktyrinė kreivė  $v_A$ ). Verta pastebėti, kad charakteringasis sistemos relaksacijos laikas  $\tau_R$  yra apskaičiuotas analitiškai, naudojant trikdžių teorija. Charakteristikų  $v - f_0^*$  statusas mažėja didinant periodinio lauko dažnius. Apgrąžos reiškinys, kai fronto judėjimo kryptis pasikeičia, tampa priešinga, pavaizduotas 15 (ištinė kreivė  $a$ ). Kreivė  $b$  vaizduoja visiškai BF sustojimą, kai periodinio nulinio lauko amplitudė pasiekia maksimalią reikšmę. Bistabilaus fronto dreifas gesta visame periodinio lauko amplitudžių intervale ir apgrąžos ar sustojimo reiškiniai išnyksta, jeigu nelygybė  $\omega\tau_R \gg 1$  yra patenkinta (žr. 15 pav.,  $c$  kreivė). Tai reiškia, kad vidutinės  $v - f_0^*$  charakteristikos suplokštėja visame periodinio lauko amplitudžių intervale, nes didesni lauko dažniai lemia didesnius vėlavimo laikus.

## 4.2 Biharmoninio lauko veikiami bistabilūs frontai

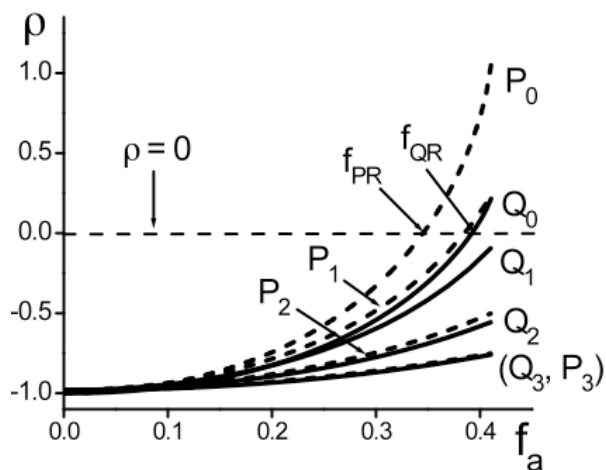
Pagrindinis šio skyriaus tikslas – išsiaiškinti kvaziperiodinio, nereguliaraus nulinio lauko efektyvumą, kuris susijęs su BF dreifo valdymu. Biharmoninė funkcija (32) yra naudojama periodinio  $f_P(t)$  ir kvaziperiodinio  $f_Q(t)$  laukų gavimui. Rezultatai, gauti naudojant šiuos abu osciliuojančius nulinius laukus, yra lyginami tarpusavyje, nes pradžioje nėra aišku ar nereguliariai osciliuojantis nulinis laukas  $f_Q(t)$  gali turėti įtakos BF sklidimui.

Naudojami lėtai osciliuojantys nuliniai laukai, tenkinantys nelygybę  $\omega\tau_R \ll 1$ . Greičio funkciją  $s(t)$  beveik iškarto (ignoruoja vėlavimus) seka lėtai osciliuojanti lauką, jeigu greičiausia moda (superharmonika) yra žymiai mažesnė už charakteringąjį sistemos relaksacijos laiką  $\tau_R^{-1}$ . Vidutinės  $\rho - f_a$  charakteristikos, gaunamos naudojant periodiškai  $f_P(t)$  ir kvaziperiodiškai  $f_Q(t)$  osciliuojančius laukus, žymiai skiriasi, kaip parodyta 16 paveiksle (atitinkamos kreivės  $P$  ir  $Q$ ). Ištinės kreivės žymi rezultatus, kurie gauti naudojant skaitinius metodus, o punktyrinės kreivės yra apskaičiuotos analitiškai, naudojant adiabatinių artinį. Gauti rezultatai rodo, kad reketo tipo BF sklidimas yra mažiau sužadinas su kvaziperiodiniu nuliniu lauku, nes kreivės  $Q$  yra plokštesnės už periodines visame amplitudės intervale. Iš to seka, kad fronto valdymas reguliariai osciliuojančiais nulinais laukais yra efektyvesnis lyginant su nereguliarais.

Vidutinės  $\rho - f_a$  charakteristikos, gaunamos naudojant lėtai ir greitai osciliuojančius nulinius laukus, yra pavaizduotos 17 paveiksle. Galima pastebėti, kad visos priklausomybės  $\rho - f_a$  tampa vis plokštesnės didinant osciliuojančių laukų dažnius  $\omega$ , nes delsos reiškiniai silpnina BF dreifą. Kreivės  $(P_0, Q_0)$  ir  $(P_1, Q_1)$  yra daug statesnės, kai naudojami lėtai kintantys laukai tenkina sąlygą:  $\omega\tau_R < 1$ . Be to, apgrąžos reiškiniai pasireiškia naudojant tik lėtai kintančius laukus, kai delsos reiškiniai yra maži. “Kritinės” laukų amplitudės  $f_{PR}$  ir  $f_{QR}$ , prie kurių pasireiškia fronto apgrąža, yra pažymėtos rodyklėmis (17 pav.). Aukštų dažnių srityje gaunamos vidutinės  $\rho - f_a$  charakteristikos, kai patenkinta sąlyga  $\omega\tau_R \geq 1$ , yra arti viena kitos (beveik sutampa) periodinio ir kvaziperiodinio laukų atvejais (kreivės  $(P_2, Q_2)$  ir  $(P_3, Q_3)$ )



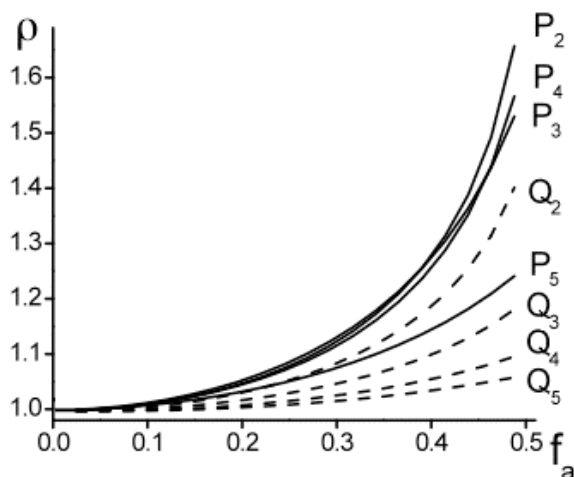
16 pav. Pagreitėjimo faktoriaus  $\rho$  priklausomybės nuo osciliuojančio lauko amplitudės  $f_a$ . Periodiškai ir kvaziperiodiškai osciliuojantys nuliniai laukai yra atitinkamai žymimi P ir Q. Skaitiškai gautos  $\rho - f_a$  priklausomybės yra parodytos ištisinėmis kreivėmis, o punktyrinės kreivės yra gautos analitiškai. Osciliuojančio lauko pagrindinės modos periodas yra  $T = 100\tau_R$ . Simetrinės spartos funkcijos parametrų reikšmės:  $\alpha_1 = \alpha_3 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = 5.0$ , ir  $h_R = 1.05$ . Kiti parametrai:  $s_0 \approx 0.009$  ir  $\tau_R = 1.0$ . Maksimalus pagreitėjimo faktorius kiekvienai P ir Q kreivei:  $\rho_P(f_{Mx}) = 2.5$  ir  $\rho_Q(f_{Mx}) = 1.7$ .



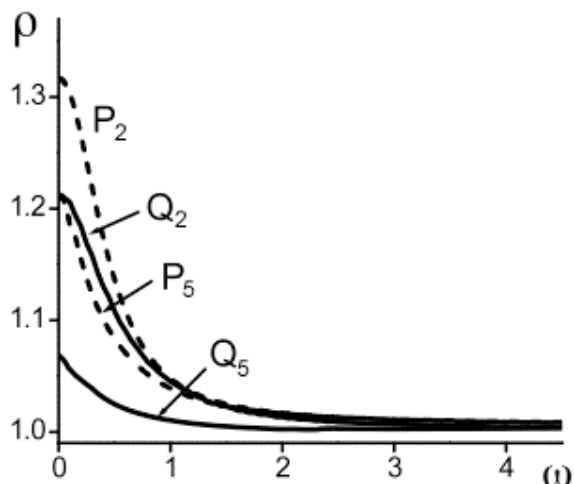
17 pav. Pagreitėjimo faktoriaus  $\rho$  priklausomybės nuo osciliuojančio lauko amplitudės  $f_a$ . Periodiškai ir kvaziperiodiškai osciliuojantys nuliniai laukai yra atitinkamai žymimi punktyrinėmis ( $P_j$ ) ir ištisinėmis ( $Q_j$ ) kreivėmis. Asimetriškos spartos funkcijos parametrų reikšmės:  $\alpha_1 = 5.0$ ,  $\alpha_2 = 3.0$ ,  $\alpha_3 = 1.0$ ,  $h_0 \approx 1.58$  ir  $h_R \approx 1.44$ . Kiti parametrai:  $s_0 \approx 0.009$  ir  $\tau_R = 1$ . Osciliuojančio lauko dažniai  $\omega$ , kurie atitinka skirtingas charakteristikų poras ( $P_0, Q_0$ ), ( $P_1, Q_1$ ), ( $P_2, Q_2$ ) ir ( $P_3, Q_3$ ), turi sekancias reikšmes:  $\omega\tau_R = 0.01, 0.30, 0.70$  ir  $1.00$ .

### 4.3 Daugiaharmoninio lauko veikiami bistabilūs frontai

Šiame skyriuje nagrinėjamos naujos BF dreifo valdymo galimybės nereguliais laukais, kurie aprašomi daugiaharmonine lauko funkcija (33), keičiant spektrines laukų charakteristikas. Norima išsiaiškinti BF dreifo elgseną, keičiant nereguliais osciliuojančių laukų dažnių spektrą. 18 paveiksle pavaizduotos skaitiškai gautos  $\rho - f_a$  priklausomybės, naudojant kvaziperiodiškai (kreivės  $Q_n$ ) ir periodiškai (kreivės  $P_n$ ) osciliuojančius nulinius laukus su panašiomis spektrinėmis charakteristikomis. Paveiksle pavaizduoti indeksai 2, 3, 4 ir 5 atitinkamai reiškia bi-, tri-, tetra- ir pentaharmonines lauko funkcijas. Lėtai kintančio lauko, kuris tenkina sąlyga  $\omega\tau_R \ll 1$ , atveju gautos vidutinės  $\rho - f_a$  priklausomybės rodo, kad periodiškai ir kvaziperiodiškai veikiamo BF dreifas mažėja, jeigu palaipsniui plečiamos spektrinės laukų charakteristikos, t.y. pridedamos skirtingų dažnių atskiros harmonikos (18 pav.). Be to, pristatytos  $\rho - f_a$  priklausomybės aiškiai parodo, kad reketo tipo BF sklidimas yra lėtesnis (mažiau sužadinas) kvaziperiodinio, nereguliaro lauko atveju, jeigu lyginama su periodiniu lauku. Pentaharmoninio nereguliaro lauko atveju BF dreifas praktiškai išnyksta visame amplitudės  $f_a$  intervale (kreivė  $Q_5$ ), o tuo tarpu periodinis pentaharmoninis laukas demonstruoja santykinai aukštą efektyvumą (kreivė  $P_5$ )



18 pav. Pagreitėjimo faktoriaus  $\rho$  priklausomybės nuo osciliuojančio lauko amplitudės  $f_a$ . Kreivės yra gautos naudojant žemų dažnių laukus, kurie tenkina sąlygą  $\omega_{Mx} \ll \tau_R^{-1}$ . Vidutinės charakteristikos, gautos naudojant periodiškai osciliuojantį lauką, yra pavaizduotos ištiesinėmis kreivėmis ( $P_n$ ), o kvaziperiodiškai osciliuojančio lauko atveju gautos charakteristikos yra žymimos ( $Q_n$ ); indeksai 2, 3, 4 ir 5 atitinkamai reiškia bi-, tri-, tetra- ir pentaharmoninius laukus. Spartos funkcijos parametrų reikšmės:  $\alpha_1 = \alpha_3 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = 3.0$  ir  $h_R = 1.05$ . Kitų parametrų reikšmės:  $s_0 \approx 0.009$ ,  $\tau_R = 1.0$  ir  $\omega\tau_R = 0.01$ .



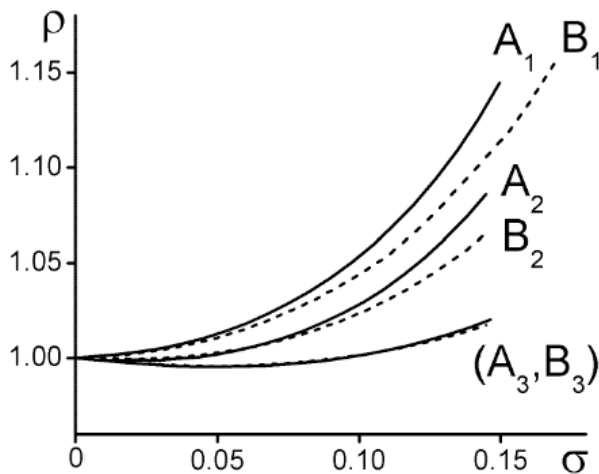
19 pav. Pagreitėjimo faktoriaus  $\rho$  priklausomybės nuo osciliuojančio lauko bazinės modos dažnio  $\omega$ . Rezultatai, gauti naudojant periodiškai osciliuojantį lauką, yra pavaizduotos punktyrinėmis kreivėmis ( $P_n$ ), o kvaziperiodiškai osciliuojančio lauko atveju – ištiesinėmis kreivėmis ( $Q_n$ ); indeksai 2 ir 5 atitinka biharmoninius ir pentaharmoninius nulinius laukus. Spartos funkcijos parametrų reikšmės:  $\alpha_1 = \alpha_3 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = 3.0$  ir  $h_R = 1.05$ . Kitų parametrų reikšmės:  $s_0 \approx 0.0108$ ,  $f_a = 0.8 f_{Mx}$  ir  $\tau_R = 1.0$ .

Vidutinės  $\rho - \omega$  charakteristikos, kurios parodo pagreitėjimo faktoriaus priklausomybę nuo daugiaharmoninės funkcijos (33) bazinės modos dažnio  $\omega$ , yra pateiktos 19 paveiksle. Žymėjimai  $P$  ir  $Q$  atitinka periodiškai ir kvaziperiodiškai osciliuojančius nulinius laukus, o indeksai 2 ir 5 žymi biharmoninę ir pentaharmoninę funkcijas. Gauti reketo tipo transporto rezultatai skiriasi žemų dažnių srityje, kai sąlyga  $\omega < \tau_R^{-1}$  patenkinta, ir aukštų dažnių srityje,  $\omega \geq \tau_R^{-1}$ . Žemų dažnių srityje reketo tipo BF sklidimas yra daug mažiau jautrus kvaziperiodiškai, nereguliariai kintančiam laukui, jeigu lyginti su periodiniu nuliniu lauku (19 pav.). Be to, rezultatai parodo, kad pentaharmoninės funkcijos, kurios pasižymi plačiomis spektrinėmis laukų charakteristikomis, yra blogesnės BF valdymo atžvilgiu žemų dažnių srityje, lyginant su biharmoninėmis funkcijomis. Kita vertus, pagreitėjimo faktorius, gaunamas naudojant abiejų tipų osciliuojančius laukus, praktiškai sutampa aukštų dažnių srityje. Toks skirtingas periodiškai ir kvaziperiodiškai veikiamų BF elgesys dviejuose dažnių intervaluose gali būti paaiškintas delsos reiškinio atsiradimu fronto dinamikoje.

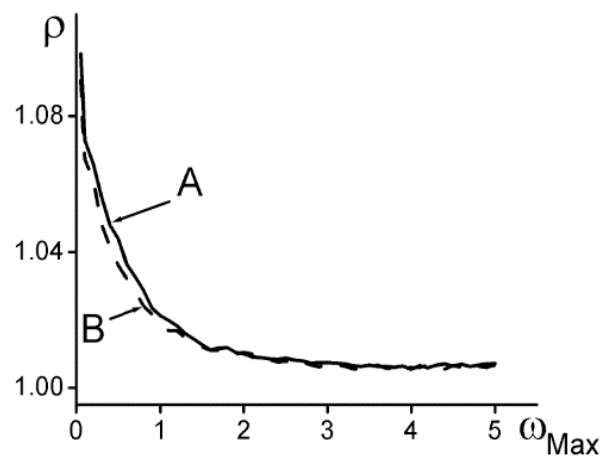
#### 4.4 Atriboto triukšmo veikiami bistabilūs frontai

Bistabilaus fronto dreifas, veikiamas nulinio triukšmo aprašomo atriboto triukšmo funkcija (34), yra nagrinėjamas šiame skyriuje. Naudojant skaitinius metodus tiriama kaip triukšmo veikiami BF reaguoja į palaipsniui didinamą triukšmo intensyvumą, t.y. didinant atriboto triukšmo funkcijos (34) maksimalaus dažnio  $\omega_M$  reikšmę (plečiant

dažnių spektrą). Vidutinės  $\rho - \sigma$  charakteristikos, kurios aprašo pagreitėjimo faktoriaus  $\rho$  priklausomybę nuo standartinio nuokrypio (lauko intensyvumo)  $\sigma$ , yra pateikiamos 20 paveiksle. Ištinės kreivės žymi priklausomybes, kai fazės  $\varphi_n = 0$ , o punktyrinės kreivės atitinka rezultatus, gautus atsitiktinėms fazėms tolygiai pasiskirsčius intervale  $[0, 2\pi]$ . Apriboto triukšmo atsitiktiniai dažniai yra tolygiai pasiskirstę intervale  $[\omega_m, \omega_M]$  abiejų laukų atvejais. Apriboto triukšmo lėčiausios modos minimalus dažnis,  $\omega_m = 0.005\tau_R^{-1}$ , ir dažnių pasiskirstymo tankis,  $\gamma_\omega = 155$ , intervale  $[\omega_m, \omega_M]$  yra tokie pat visiems skaičiavimams. 20 paveiksle pavaizduotos  $\rho - \sigma$  priklausomybės palaipsniui mažėja plečiant dažnių spektrą (didinat veikiančio lauko triukšmo lygį). Be to, BF dreifas yra mažiau jautrus nereguliariems laukams su atsitiktinai kintančiomis fazėmis  $\varphi_n$ , kaip seka iš atliktų skaitinių skaičiavimų, naudojant apriboto triukšmo funkcijas (34) su vienodomis spektrinėmis charakteristikomis (žr. 20 pav., ištinės ir punktyrinės kreivės). Vidutinės  $\rho - \sigma$  charakteristikos, gautos naudojant apriboto triukšmo funkciją su ir be fazės  $\varphi_n$ , praktiškai sutampa aukštų dažnių spektre, kai triukšmas intensyviausias (20 pav., kreivės  $(A_3, B_3)$ ).



20 pav. Vidutinės  $\rho - \sigma$  charakteristikos, gautos naudojant apribotą triukšmą. Ištinės kreivės  $(A_j)$  žymi rezultatus, gautus kai funkcijų fazė  $\varphi_n = 0$ , o punktyrinės kreivės  $(B_j)$  – atsitiktinė lauko funkcijos fazė tolygiai pasiskirsčiusi intervale  $[0, 2\pi]$ . Spartos funkcijos parametrų reikšmės:  $\alpha_1 = \alpha_3 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = 5.0$  ir  $h_R = 1.05$ . Kitų parametrų reikšmės:  $\omega_m = 0.005\tau_R^{-1}$ ,  $s_0 \approx 0.0094$ ,  $\tau_R = 1.0$  ir  $\gamma_\omega = 155$ . Apribotos triukšmo maksimalių dažnių, kurie pažymėti atskiromis kreivių poromis  $(A_1, B_1)$ ,  $(A_2, B_2)$  ir  $(A_3, B_3)$ , reikšmės atitinkamai yra sekančios:  $\omega_{Max}\tau_R = 0.05$ ,  $0.5$  ir  $5.0$ .



21 pav. Pagreitėjimo faktoriaus  $\rho$  priklausomybė nuo maksimalaus nulinio apriboto triukšmo dažnio  $\omega_{Max}$ . Rezultatai, gaunami naudojant apriboto triukšmo funkciją be fazės postūmio,  $\varphi_n = 0$ , yra pažymėti ištinine kreive  $(A)$ , o su atsitiktiniu fazės  $\varphi_n$  pasiskirstymu intervale  $[0, 2\pi]$  yra pavaizduoti punktyrine kreive  $(B)$ . Spartos funkcijos parametrų reikšmės:  $\alpha_1 = \alpha_3 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = 5.0$  ir  $h_R = 1.05$ . Kitų parametrų reikšmės:  $\omega_m = 0.005\tau_R^{-1}$ ,  $s_0 \approx 0.0094$ ,  $\tau_R = 1.0$  ir  $\gamma_\omega = 155$ . Osciliuojančių laukų nuokrypis:  $\sigma = 0.8\sigma_{Max}$ .

Vidutinės  $\rho - \omega_{Max}$  charakteristikos, kurios aprašo pagreitėjimo faktoriaus  $\rho$  priklausomybę nuo maksimalaus apriboto triukšmo dažnio  $\omega_{Max}$ , yra pateikiamos 21 paveiksle. Kaip ir prieš tai, kreivės  $A$  ir  $B$  atitinkamai žymi naudojamas apriboto triukšmo funkcijas be fazės postūmio,  $\varphi_n = 0$ , ir su atsitiktinai pasiskirsčiuose faze. Abiem

atvejais gaunamos  $\rho - \omega_{Max}$  priklausomybės yra panašios formos: pagreitėjimo faktorius palaipsniui mažėja plečiant nereguliariai osciluojančių laukų dažnių spektrą. Vis dėlto, veikiančių laukų efektyvumas skiriasi siaurame dažnių spektre, kai patenkinta sąlyga  $\omega_{Max} < \tau_R^{-1}$ : triukšmo sukeltas BF dreifas yra mažesnis, kai atsitiktinė fazė  $\varphi_n$  nėra įjungta,  $\varphi_n = 0$  (21 pav.). Plačiame dažnių spektre,  $\omega_M \gg \tau_R^{-1}$ , pagreitėjimo faktorius praktiškai sutampa abiejų stochastinių laukų atveju; triukšmo sukeltas BF dreifas išnyksta didinat triukšmo intensyvumą, kaip seka iš skaitinių skaičiavimų.

## 5. Išvados

- 1) Taikant sudarytus matematinį ir skaitinį modelius, galima tiksliai tirti BF valdymo galimybes stochastiškai arba reguliariai osciluojančiais nuliniiais laukais. Rezultatai, gauti naudojant sukurtą programinę įrangą, gerai sutampa su rezultatais, gautais taikant analitinius metodus.
- 2) Frontų valdymas nuliniiais osciluojančiais laukais yra efektyvesnis žemų dažnių srityje, kai veikiantis frontą laukas kinta lėtai. Delsos reiškiniai, pasireiškiantys įtakojančio lauko aukštų dažnių srityje, lėtina BF dreifą disipatyviose sistemose.
- 3) Sistemos charakteristinis relaksacijos laikas, aprašomas trikdžių teorija, kai BF veikiamas silpnų trikdžių, gerai tinka ir stiprių laukų atveju, apskaičiuojamų taikant kompiuterinį modeliavimą.
- 4) Nereguliarūs nuliniai laukai silpnina BF reketo efektą. Fronto valdymas reguliariai osciluojančiais nuliniiais laukais yra efektyvesnis lyginant su nereguliais.
- 5) Bistabilaus fronto dreifas, veikiamas nereguliais laukais, kurie aprašomi daugiaharmonine arba apriboto triukšmo funkcijomis, yra jautrus spektrinėms laukų charakteristikoms. Plečiant nereguliariai osciluojančių laukų dažnių spektrą, BF dreifas palaipsniui mažėja – reketo efektas silpnėja.

## Trumpos žinios apie autorių

Valdas Jasaitis gimė 1982 m. birželio 29 d. Radviliškyje. 2000 m. baigė Radviliškio Vaižganto gimnaziją. 2000-2006 m. įgijo informatikos bakalauro ir magistro kvalifikacinius laipsnius Vilniaus Universiteto Matematikos ir Informatikos fakultete. 2006-2010 m. – Vilniaus Universiteto doktorantas. Nuo 2004 metų dirba privačioje IT įmonėje programuotoju.

## Paskelbtų mokslinių straipsnių disertacijos tema sąrašas

1. V. Jasaitis, F. Ivanauskas, R. Bakanas. Front Dynamics with Delays in a Spatially Extended Bistable System: Computer Simulation, *Nonlinear Analysis: Modeling and Control*, ISSN 1392-5113, **13**(4), pp. 433–438, 2008.
2. R. Bakanas, V. Jasaitis and F. Ivanauskas, Front dynamics with time delays in a bistable system of the reaction-diffusion type: role of the symmetry of the rate function, *Acta Physica Polonica A*, ISSN 0587-4246, 119(3), pp. 282–293, 2010.
3. R. Bakanas, V. Jasaitis and F. Ivanauskas, Self-ordered Front under Temporally Irregular Forcing: Ratchet-like Transport of the Quasi-periodically Forced Front, *Acta Physica Polonica A*, ISSN 0587-4246, 119(6), pp. 731–739, 2011.

## Summary

Spatio-temporal control of both the point-particles and self-ordered structures by use of the time-dependent oscillatory fields of zero-time average, either deterministic (temporally regular) or noisy (temporally irregular) ones, has today become a fundamental field of multidisciplinary research in a wide variety of the highly nonlinear systems of the different physical origin, ranging from biology to physics. The concept of a “force-free” motion, under the generic name of “ratchet-like transport”, has provided a new possibility of controlling both the point particles (electrons, atoms, molecules, etc.) and the self-ordered front-structures without any net external force. The “self-propelling” devices, the so-called ratchets, perform work by applying the oscillatory force of zero-time average, either noisy or deterministic one [1]. An intriguing property of the systems performing the ratchet-like shuttling of the self-ordered fronts is their capability to rectify the oscillatory motion of the ac driven front even in the case of the spatially uniform system, by contrast to the ordinary ratchets performing the unforced dc motion of the free particles in the systems lacking the spatial inversion symmetry. The unforced dc drift of the self-ordered fronts (so-called *ratchet effect*) usually originates due to the “hidden” asymmetry of the system, or it comes from the broken temporal symmetry of the oscillatory force acting on the front in the system [2].

Analytical solutions for the governing equations, describing ratchet-like transport of the self-ordered front-structures, are known for very limited cases (i.e., perturbation theory, adiabatic approximation). Moreover, only sine-Gordon [3], cubic polynomial [4] and pseudolinear [5] models have analytical solution of free (unperturbed) self-ordered front-structures. Therefore, more general solutions are obtained using numerical methods on computers, namely, computer modeling: the mathematical model of the considered system is approximated using numerical methods and implemented as a program. Hence, computer modeling has become a very useful method to simulate and analyze ratchet-like transport in wide ranges of parameter values. Moreover, the ever rapidly improving computer power allows extremely precise numerical experiments uncovering new aspects of the ratchet effect.

In the present research the ratchet-like transport of the self-ordered fronts that result from the competition between the nonlinearity and diffusion are investigated. More exactly, the “bistable” fronts (BFs), which perform the transition from the least stable to the most stable state of the system of the reaction-diffusion type, are examined within the considered model. A crucial factor for the existence of the unforced dc motion of the self-ordered fronts is dissipation, which leads to the temporal irreversibility of the dynamical equations. The self-ordered fronts in the essentially dissipative systems of the reaction-diffusion type driven by noisy (randomly fluctuating) and deterministic (periodically oscillating) zero-average ac forces has been studied in numerous papers, [2, 6-14] and [15-18], respectively.

The focus of the research is to study new possibilities of controlling the directed transport of the dissipative front without any net external force using numerical simulations and analytic tools. There are two different mechanisms for controlling the “unforced” unidirectional net motion of the ac driven front: parametrically stimulated and directly induced. The parametrically stimulated dc drift comes through the action of the external oscillatory field of zero-time average on the externally controllable

parameter of the system: the external time-symmetric field acting on the system is transformed into the asymmetrically oscillating force of a finite time average, that pushes the front in the system [2, 6-11]. In other words, the ratchet-like transport takes place when the external time-symmetric field acting on the system is converted (transformed) into the asymmetrically oscillating force of a finite time average, acting on the front in the system. In case of the directly induced dc motion, the ratchet-like transport is derivable by the additive zero-average force acting on the front in the system [12-18]. Numerical methods are used to analyze BF propagation induced by quasi-periodic and bounded noise additive forces of zero-time average.

The object of this research is mathematical and numerical models describing self-ordered bistable fronts under deterministic and noisy oscillatory fields of zero-time average. Models in the dissertation are formulated by parabolic partial differential equations (PDE) and solved numerically using explicit finite difference method. The computer-aided simulations were used to investigate properties of the ratchet-like transport of the BFs.

### **Results and scientific innovation of the dissertation:**

1. The mathematical and computer models for the ratchet-like transport of the BF were applied. The computer software for investigation of the BFs being subjected to the oscillatory fields was developed.
2. The influence of the retardation effects (time lags) on the ratchet-like transport of the ac driven fronts was investigated, performing computer simulations. Results were compared using perturbation theory and adiabatic approximation. Role of the symmetry of the rate function on ratchet-like transport was investigated.
3. The performance of the ratchet-like shuttling of the self-ordered BF driven by quasi-periodic, temporally irregular ac fields was investigated using computer modeling. The reversal behavior of the directed net motion of the quasi-periodically forced BFs derivable by the asymmetrical rate functions was analyzed.
4. Oscillatory fields acting on the BF in the system were approximated by the multi-harmonic and bounded noise forcing functions. The performance of the ratchet-like shuttling derivable by the quasi-periodic zero-average fields of the different spectral content was investigated.

### **Findings presented for defense:**

1. The occurrence of the retardation effects (time lags) in the oscillatory motion of the ac driven front shrink the spurious drift of the BF. The effective controlling of the directed net motion of the self-ordered fronts is achieved using the low-frequency zero-mean ac forces.
2. The characteristic relaxation time derivable analytically, by use of the perturbation theory is adequate enough even in case of the strong forcing.
3. The temporally irregular oscillations of the unbiased oscillatory forcing shrink the spurious drift of BF. The optimal, more effective controlling of the directed net motion of BFs is achieved using the periodic ac forcing.
4. The ratchet-like shuttling of the BFs being influenced by the deterministic (quasi-periodic) and noisy ac forces is very sensitive to the spectral content of the

oscillatory forcing and rapidly decreases by gradually extending the frequency spectrum of the incommensurable frequency modes.

### **Main conclusions of the dissertation:**

1. The constructed mathematical and numerical models can be used for investigations of the self-ordered BF under deterministic and noisy oscillatory fields of zero-time average. Both numerically and analytically derived results coincide well.
2. The optimal, more effective controlling of the directed net motion of BFs is achievable in the low-frequency domain of the oscillatory force, by the slow (quasi-stationary) ac drive. The retardation effects in the front dynamics, that become more pronounced in the high-frequency range of the zero-mean ac forces, shrink the spurious drift of the front, in both cases of the symmetrical and asymmetrical rate functions satisfying the different R-u symmetry.
3. The characteristic relaxation time, that describes the rate of the transient processes in a bistable system, derivable analytically, within the perturbation theory is adequate enough even in case of the strong forcing, as follows from the numerical simulations.
4. The oscillatory unbiased forces exhibiting the temporally irregular behavior, both the deterministic (quasi-periodic) and noisy ones, are much lesser effective in terms of the ratchet-like shuttling of BFs if compared to periodic ones.
5. The temporally irregular ac forces with a broader spectral content, both the deterministic (quasi-periodic) and noisy ones, result in much lower performance of the ratchet-like shuttling of BFs. The directed net motion of the ac driven BF rapidly decreases by gradually extending the frequency spectrum of the incommensurable frequency modes of the oscillating force.

### **Literatūra**

1. P. Reimann, Brownian motors: Noisy transport far from equilibrium, *Phys. Rep.*, **361**, pp. 57–265, 2002.
2. A. S. Mikhailov, L. Schimansky-Geier, and W. Ebeling, Stochastic motion of the propagating front in bistable media, *Phys. Lett. A*, **96**, pp. 453–456, 1983.
3. F. J. Cao, E. Zamora-Sillero, and N. R. Quintero, Domain wall dynamics in expanding spaces, *Physical Review E*, **73**, pp. 056603, 2006.
4. D. H. Sattinger, On the stability of waves of nonlinear parabolic systems, *Adv. Math.*, **22**, pp. 312–355, 1976.
5. R. Bakanas, Traveling fronts in a piecewise-linear bistable system, *Nonlinearity*, **16**, pp. 313–325, 2003.
6. J. Armero, J. M. Sancho, J. Casademunt, A. M. Lacasta, L. Ramírez-Piscina, and F. Sagués, External fluctuations in front propagation, *Phys. Rev. Lett.*, **76**, pp. 3045, 1996.
7. J.M. Sancho M.A. Santos, Front dynamics in the presence of spatiotemporal structured noises, *Phys. Rev. E*, **64**, pp. 016129, 2001.
8. R. Landauer M. Büttiker, Nucleation theory of overdamped soliton motion, *Phys. Rev. A*, **23**, pp. 1397, 1981.



9. J.M. Sancho and A. Sanchez, External fluctuations in front dynamics with inertia: The overdamped limit, *Eur. Phys. J.*, **16**(1), pp. 127-131, 2000.
10. D.J. Kaup, Thermal corrections to overdamped soliton motion, *Phys. Rev. B*, **27**(11), pp. 6787-6795, 1983.
11. L. Schimansky-Geier and Ch. Zulicke, Kink propagation induced by multiplicative noise, *Z. Phys. B Con. Mat.*, **82**, pp. 157-162, 1991.
12. F. Marchesoni, Thermal Ratchets in 1+1 Dimensions, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, pp. 2364-2367, 1996.
13. N.R. Quintero, A. Sanchez, and F.G. Mertens, Overdamped sine-Gordon kink in a thermal bath, *Phys. Rev. E*, **60**(1), pp. 222-230, 1999.
14. M.G. Clerc, C. Falconi, and E. Tirapegui, Additive noise induces front propagation, *Phys. Rev. Lett.*, **94**, pp. 148302-(1-4), 2005.
15. R. Bakanas, Unidirectional drift of fronts under zero-mean force and broken symmetries of the rate function, *Phys. Rev. E*, **69**(1), pp. 016103-(1-10), 2004.
16. R. Bakanas, Unidirectional drift of bistable front under asymmetrically oscillating zero-mean force, *Phys. Rev. E*, **71**, pp. 026201-(1-12), 2005.
17. R. Bakanas, Rectified oscillatory motion of the self-ordered front under zero-mean ac force: Role of symmetry of the rate function, *Phys. Rev. E*, **78**(4), 046202, 2008.
18. F. G. Bass and R. Bakanas, Fronts in a continuous bistable system under periodically oscillating forcing, *Europhys. Lett.*, **53**(4), pp. 444-450, 2001.
19. I. Zapata, R. Bartussek, F. Sols, and P. Hänggi, Voltage rectification by a SQUID ratchet, *Phys. Rev. Lett.*, **77**, pp. 2292-2295, 1996.
20. M. Beck, E. Goldobin, M. Neuhaus, M. Siegel, R. Kleiner, and D. Koelle, High-Efficiency Deterministic Josephson Vortex Ratchet, *Phys. Rev. Lett.*, **95**(9), pp. 090603, 2005.
21. M.V. Fistul, E. Goldobin, and A.V. Ustinov, ac-induced damping of a fluxon in a long Josephson junction, *Phys. Rev. B*, **64**, pp. 092501, 2001.
22. A. V. Ustinov, C. Coqui, A. Kemp, Y. Zolotaryuk, and M. Salerno, Ratchetlike Dynamics of Fluxons in Annular Josephson Junctions Driven by Biharmonic Microwave Fields, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, pp. 087001, 2004.
23. F. Falo, P.J. Martínez, J.J. Mazo, T.P. Orlando, K. Segall, and E. Trías, Fluxon ratchet potentials in superconducting circuits, *Applied Physics A: Materials Science & Processing*, **75**(2), pp. 263-269, 2002.
24. R. Besseling, P.H. Kes, T. Droese, and V.M. Vinokur, Depinning and dynamics of vortices confined in mesoscopic flow channels, *New Journal of Physics*, **7**(71), 2005.
25. F. Nori and S. Savel'ev, Controlling vortex motion and vortex kinetic friction, *Physica C*, **437**, pp. 226-229, 2006.
26. M. Löcher, D. Cigna, and E. R. Hunt, Noise sustained propagation of a signal in coupled bistable electronic elements, *Phys. Rev. Lett.*, **80**, pp. 5212, 1998.
27. M. Löcher, N. Chatterjee, F. Marchesoni, W. L. Ditto, and E. R. Hunt, Noise sustained propagation: Local versus global noise, *Phys. Rev. E*, **61**, pp. 4954, 2000.
28. A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovsky, and N. S. Piskunov, Study of the Diffusion Equation with Growth of the Quantity of Matter and its Application to a Biological Problem, *Moscow Univ. Bull. Math*, **Section A. 1**, pp. 1-26, 1937.

29. R. A. Fisher, The wave of advance of advantageous genes, *Annals of Eugenics*, **7**, pp. 355–369, 1937.
30. Ya. B. Zeldovich and D. A. Frank-Kamenetsky, K teorii ravnomernogo rasprostraneniya plameni (Toward a theory of uniformly propagating flames), *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **19**, pp. 693–697, 1938.
31. H. G. Purwins, H. U. Bodeker, and Sh Amiranashvili, Dissipative solitons, *Advances in Physics*, **59**(5), pp. 485-701, 2010.
32. R. FitzHugh, Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane, *Biophysical J.*, **1**(6), pp. 445–466, 1961.
33. J. Nagumo, S. Arimoto, and S. Yoshizawa, An active pulse transmission line simulating nerve axon, *Proc. Instit. Radio Eng. Electr.*, **50**, pp. 257-278, 1962.
34. A. Scott, *Nonlinear Science: Emergence and Dynamics of Coherent Structure*, 2nd edition, Oxford University Press, Oxford and New York, 2003.
35. F.G. Bass and R. Bakanas, Propagation of a Gunn wave under the influence of spatially homogeneous random perturbations, *Phys. Lett. A*, **214**, pp. 301-306, 1996.
36. F. Schlögl, C. Escher, and R. Stephen Berry, Fluctuations in the interface between two phases, *Physical Review A*, **27**(5), pp. 2698–2704, 1983.
37. F. Sanchez-Garduno, E. Kappos, and P.K. Maini, A Review of Travelling Wave Solutions of One-dimensional Reaction-Diffusion Equations with Non-Linear Diffusion Term, *FORMA*, **11**, pp. 45-59, 1996.
38. R. Bakanas, F. Ivanauskas, and A. Raguotis, Ratchet-like transport of the self-ordered fronts generated by the similarly shaped rate functions: high-efficiency deterministic front-ratchet, *Phys. Scripta*, **77**, pp. 055003, 2008.
39. A. Raguotis, F. Ivanauskas, and R. Bakanas, Retarded accelerations of the self-organized front: propagation of the bistable front under step-like force, *Lith. J. Phys.*, **45**, pp. 153–160, 2005.
40. A. Raguotis, F. Ivanauskas, and R. Bakanas, Retarding accelerations and ratchet-like transport of the self-ordered front in a bistable system of reaction-diffusion type, *Phys. Scripta*, **74**, pp. 629–637, 2006.
41. S. Flach, Y. Zolotaryuk, A. E. Miroshnichenko, and M. V. Fistul, Broken symmetries and directed collective energy transport in spatially extended systems, *Phys. Rev. Lett.*, **88**, pp. 184101-(1-4), 2002.
42. S. Flach and S. Denisov, Symmetries and transport with quasiperiodic driving, *Acta Physica Polonica B*, **35**(4), pp. 1437-1445, 2004.
43. S. Denisov, S. Flach, A. A. Ovchinnikov, O. Yevtushenko, and Y. Zolotaryuk, Broken space-time symmetries and mechanisms of rectification of ac fields by nonlinear (non)adiabatic response, *Phys. Rev. E*, **66**, pp. 041104, 2002.
44. J. P. Gleeson, Transport in randomly-fluctuating spatially-periodic potentials, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **388**, pp. 277–287, 2009.
45. P. R. Kramer, O. Kurbanmuradov, and K. Sabelfeld, Comparative analysis of multiscale Gaussian random field simulation algorithms, *Journal of Computational Physics*, **226**, pp. 897–924, 2007.
46. A.A. Samarskii, *The Theory of Difference Schemes*, Marcel Dekker, New York, 2001.

47. G. W. Griffiths and W. E. Schiesser, *Traveling Wave Analysis of Partial Differential Equations: Numerical and Analytical Methods with Matlab and Maple*, Academic Press, Burlington, USA, 2011.
48. J. Li and Y.T. Chen, *Computational partial differential equations using MATLAB*, CRC Press, USA, 2009.
49. I.K. Shingareva and C. Lizarraga-celaya, *Solving Nonlinear Partial Differential Equations with Maple and Mathematica*, Springer, New York, 2011.
50. H.T. Lau, *A numerical library in Java for scientists and engineers*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, USA, 2004.
51. G.P. Nikishkov, *Programming Finite Elements in Java*, Springer, London, 2009.
52. R. Mak, *Java number cruncher: the Java programmer's guide to numerical computing*, Prentice Hall PTR, New Jersey, 2003.
53. R. Čiegis, *Diferencialinių lygčių skaitiniai sprendimo metodai*, Technika, Vilnius, 2003.