Šiaulių Universitetas
Matematikos ir Informatikos fakultetas
Matematikos Katedra

Gintarė Brenčienė

Išsigimstančios matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties sprendinių struktūra

Magistro darbas

Darbo vadovas:
Prof. Donatas Jurgaitis

Šiauliai, 2011

Turinys

1 Įvadas **2**

2 Mokslinio tyrimo metodologinis pagrindimas **4**

3 Uždavinio formulavimas **6**

3.1 Pagalbinis keitinys 6

3.2 Sistemos supaprastinimas 12

3.3 Apibendrinimas 16

4 Naudota literatūra **18**

1 Įvadas

Gamtos mokslų ir technikos uždaviniuose nagrinėjamųjų vyksmų tyrimas dažnai tiesiogiai neatskleidžia jų kitimo dėsnio. Tokiais atvejais svarbu sudaryti matematinį modelį, kuris būtų išreiškiamas tiriamojo vyksmo funkcijų ir jų išvestinių lygtimis [1].

Diferencialine lygtimi vadiname lygybę, siejančią nepriklausomus kintamuosius, nežinomą tų kintamųjų funkciją ir jos išvestines. Jei diferencialinėje lygtyje yra tik vienas nepriklausomas kintamasis, jį vadiname paprastąja diferencialine lygtimi. Bendras n-tos eilės diferencialinės lygties pavidalas yra

$$F(x, y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0.$$

Diferencialinės lygtys dalinėmis išvestinėmis yra gaunamos tuomet, kai lygtimi išreiškiamas funkcinis ryšys tarp kelių nepriklausomų kintamųjų, ieškomų funkcijų ir jų dalinių išvestinių. Bendro pavidalo diferencialinė lygtis dalinėmis išvestinėmis yra:

$$F\left(x_1, ..., x_n, \frac{\partial y}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial y}{\partial x_n}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, ..., \frac{\partial^{i_1+...+i_n} y}{\partial {x_1}^{i_1}, ..., \partial {x_n}^{i_n}}\right) = 0,$$

čia $x_1, ..., x_n$ nepriklausomi kintamieji, y jų ieškomoji funkcija.

Paprastosios diferencialinės lygtys, kurių koeficientai prie aukščiausios išvestinės virsta nuliumi arba lygties koeficientai turi ypatingumų vadinamos išsigimstančiomis.

Diferencialinių lygčių terminą pasiūlė G.V. Leibnicas [1]. XVII amžiaus pabaigoje, sprendžiant kai kuriuos mechanikos ir geometrijos, atlikti pirmieji diferencialinių lygčių tyrimai. Pastaruoju metu diferencialinės lygtys taikomos matematikoje, mechanikoje, fizikoje, astronomijoje, chemijoje, biologijoje, ekonomikoje, medicinoje, variaciniam skaičiavimui, diferencialinėje geometrijoje, optimalaus valdymo teorijoje ir kt. Be jų neįmanoma sparti technikos raida. Kita vertus, plėtojantis matematikai, diferencialinių lygčių taikymo sritys plečiasi. Plėtojamos diferencialinių lygčių įvairios šakos: kokybinė ir analizinė diferencialinių lygčių teorijos, stabilumo teorija, vėluojančiojo ir skubančiojo argumentų, stochastinės diferencialinės lygtys ir kt [1].

Paprastųjų diferencialinių lygčių sistemų, su eilės išsigimimu, sprendimo metodų apibendrinimas dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemoms, kurių eilė išsigimsta sunkus ir sudėtingas uždavinys [2]. Šis uždavinys abiejų tipų diferencialinių lygčių sistemoms ypatingai pasunkėja, kada galioja

[1] Gotfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)-vokiečių matematikas ir filosofas

sąlyga, kad pagrindinės sistemos koeficientų matricos tikrinės reikšmės yra sveikieji skaičiai ar jų skirtumai yra sveikieji skaičiai [3]. Spęsdami tokio tipo uždavinius daugelis autorių [4], [5], [6] bando surasti keitinius, kurių pagalba nagrinėjama sistema suvedama į sistemą, kurios struktūra patogi sprendinių skaičiaus nustatymui, tų sprendinių radimui ir jų struktūros tyrimui. Šiame darbe tirsime keturių pirmos eilės dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą trimatėje kompleksinėje erdvėje. Tiriamosios sistemos eilė išsigimsta hiperplokštumos $x = 0$ taškuose.

2 Mokslinio tyrimo metodologinis pagrindimas

Tema: IŠSIGIMSTANČIOS DALINIŲ IŠVESTINIŲ MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES SPRENDINIŲ STRUKTŪRA.

Temos aktualumas: Paprastųjų diferencialinių lygčių sistemų, su eilės išsigimimu, sprendimo metodų apibendrinimas dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemoms, kurių eilė išsigimsta sunkus ir sudėtingas uždavinys. Šis uždavinys abiejų tipų diferencialinių lygčių sistemoms ypatingai pasunkėja, kada galioja sąlyga, kad pagrindinės sistemos koeficientų matricos tikrinės reikšmės yra sveikieji skaičiai ar jų skirtumai yra sveikieji skaičiai. Spęsdami tokio tipo uždavinius daugelis autorių bando surasti keitinius, kurių pagalba nagrinėjama sistema suvedama į sistemą, kurios struktūra patogi sprendinių skaičiaus nustatymui, tų sprendinių radimui ir jų struktūros tyrimui.

Šiame darbe tirsime keturių pirmos eilės dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą trimatėje kompleksinėje erdvėje. Tiriamosios sistemos eilė išsigimsta hiperplokštumos taškuose.

Tyrimo objektas. Darbe nagrinėjame išsigimstančios dalinių išvestinių diferencialinės lygties sprendinių struktūrą.

Darbo tikslas. Ieškosime (1) sistemos analizinių visur, išskyrus gal būt išsigimimo hiperplokštumos $x = 0$ taškus, sprendinių.

Temos nagrinėjimo bendrosios charakteristikos

*Tyrimo tikslas.*Išnagrinėti Moisilo- Teodoresko sistemą su jaunesniaisiais nariais, kurios matricinis užrašas yra toks:

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial v}{\partial x} + I_1\frac{\partial v}{\partial y} + I_2\frac{\partial v}{\partial z}\right) + A(x, y, z)v(x, y, z) = 0$$

Hiperplokštumos taškuose išsigimsta šios dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos eilė.

Tyrimo uždaviniai.

1. Išnagrinėti Moisilo- Teodoresko sistemą su jaunesniaisiais kintamais koeficientais.

2. Surasti keitinį, kurio pagalba keičiama sistemos koeficientų dėstinio laipsnine eilute pasirinkto koeficiento struktūra.

3. Rasti formalų keitinį, leidžiantį sistemą suskaldyti į dalines sistemas, kada sistemos jaunesniųjų narių dėstinio pagrindinė matrica yra blokinė.

4. Gautą rezultatą suformuluoti kaip teoremą.

Tyrimo metodai. Magistro darbe išnagrinėta Moisilo- Teodoresko sistema, surastas keitinys, naudojant įvairius teorinius tyrimo metodus: matricinę analizę, sisteminę analizę, keitinius ir kt.

Tyrimo struktūra. Magistro darbą sudaro įvadas, teorinė dalis, uždavinio formulavimas bei praktinė dalis, kur pateikti sprendimai ir rastas formalus keitinys, leidžiantis sistemą suskaldyti į dalines sistemas, kada sistemos jaunesniųjų narių dėstinio pagrindinė matrica yra blokinė- diagonalinė. Pabaigoje pateiktas apibendrinimas, anotacija lietuvių ir anglų kalba, bei naudotas literatūros sąrašas ir priedas.

3 Uždavinio formulavimas

Nagrinėkime Moisilo- Teodoresko sistemą [8] su jaunesniaisiais nariais, kurios matricinis užrašas yra toks:

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial v}{\partial x}+I_1\frac{\partial v}{\partial y}+I_2\frac{\partial v}{\partial z}\right)+A(x,y,z)v(x,y,z)=0, \tag{1}$$

čia $p-$ natūralusis skaičius arba nulis, $x,y,z-$ nepriklausomi kompleksiniai kintamieji, $v(x,y,z)=(v_1(x,y,z),v_2(x,y,z),v_3(x,y,z),-v_4(x,y,z))-$ ieškomoji vektorfunkcija, $E-$ vienetinė ketvirtos eilės kvadratinė matrica, I_1 ir I_2

$$\mathbf{I_1}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{I_2}=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

duotos pastovios ketvirtos eilės kvadratinės matricos, $A=(x,y,z)-$ žinoma kintamųjų x,y ir z funkcija, be to jai galioja skleidinys laipsnine eilute

$$A(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}x^kA_k(y,z), \tag{2}$$

Laipsninė eilutė (2) konverguoja hiperplokštumos $x=0$ aplinkoje. (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą nagrinėsime policilindre

$$P=\left\{(x,y,z)\middle||x|<r,|y|<r_1,|z|<r_2\right\}.$$

3.1 Pagalbinis keitinys

Dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemoje (1) ieškomąją vektorfunkciją $v(x,y,z)$ pakeitę nauja ieškomąja vektorfunkcija $u(x,y,z)$ keitinio

$$v(x,y,z)=T_1u(x,y,z) \tag{3}$$

čia T_1- pastovi neypatinga ketvirtos eilės kvadratinė matrica, pagalba gauname naują dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą

$$x^{p+1}\left(ET_1\frac{\partial u}{\partial x}+I_1T_1\frac{\partial u}{\partial y}+I_2T_1\frac{\partial u}{\partial z}\right)+A(x,y,z)T_1u=0 \tag{4}$$

Nagrinėsime atvejį, kada $p=0$, tai (1) matricinę diferencialinę lygtį užrašysime tokiu pavidalu

$$x\left(E\frac{\partial v}{\partial x}+I_1\frac{\partial v}{\partial y}+I_2\frac{\partial v}{\partial z}\right)+A(x,y,z)v(x,y,z)=0 \tag{5}$$

Tada (4) matricinė dalinių išvestinių diferencialinė lygtis atrodo taip:

$$x\left(ET_1\frac{\partial u}{\partial x}+I_1T_1\frac{\partial u}{\partial y}+I_2T_1\frac{\partial u}{\partial z}\right)+A(x,y,z)T_1u=0 \tag{6}$$

Pastarosios diferencialinės lygties sprendinių ieškosime laipsnine eilute

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(y,z,s)x^{k+\rho(y,z)}, \tag{7}$$

čia $\rho(y,z)-$ nežinoma funkcija, $u_k(y,z,s), k=0,1,...-$ nežinomi koeficientai, $s=lnx$.

(6) matricinėje diferencialinėje lygtyje yra ieškomosios funkcijos dalinės išvestiės pagal kintamuosius x, y ir z, todėl randame tas išvestines. Diferencijuodami (7) pagal nepriklausomus kintamuosius x,y,z gauname tokias lygybes

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho-1}\left((k+\rho)u_k+\frac{\partial u_k}{\partial s}\right); \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}\left(s\frac{\partial \rho}{\partial y}u_k+\frac{\partial u_k}{\partial s}\right); \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}\left(s\frac{\partial \rho}{\partial z}u_k+\frac{\partial u_k}{\partial s}\right). \tag{10}$$

Įrašome (2),(7),(8),(9) ir (10) į (6) ir gauname:

$$x\Bigg\{E\textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\left((k+\rho)u_k+\frac{\partial u_k}{\partial s}\right)x^{k+\rho-1}+I_1\sum_{k=0}^{\infty}(s\frac{\partial\rho}{\partial y}u_k+\frac{\partial u_k}{\partial y})x^{k+\rho}+$$

$$+I_2\sum_{k=0}^{\infty}(s\frac{\partial \rho}{\partial z}u_k+\frac{\partial u_k}{\partial z})x^{k+\rho}\Bigg\}+\sum_{k=0}^{\infty}A_kx^k\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\rho}u_k=0. \tag{11}$$

Pertvarkę (11), gauname

$$\sum_{k=0}^{\infty}E(k+\rho)u_kx^{k+\rho}+\frac{\partial u_k}{\partial s}x^{k+\rho}+s\left(I_1\frac{\partial \rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)u_kx^{k+\rho+1}+$$

$$+\left(I_1\frac{\partial u_k}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_k}{\partial z}\right)x^{k+\rho+1}+\sum_{1=0}^{k}A_1u_{k-1}x^{k+\rho}=0. \tag{12}$$

Kad rastume (7) eilutės koeficientus $u_k(y,z,s), k=0,1,2,...,$ (12) lygybėje lyginame nuliui koeficientus prie vienodų x-o laipsnių. Mažiausias x-o laipsnis (7) eilutėje yra ρ. Koeficientas prie x^ρ yra

$$(E\rho+A_0)u_0+\frac{\partial u_0}{\partial s}=0. \tag{13}$$

Toliau gausime, kad koeficientas prie $x^{\rho+1}$ yra

$$(E(\rho+1)+A_0)u_1+\frac{\partial u_1}{\partial s}+I_1\frac{\partial u_0}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_0}{\partial z}+s\left(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)u_0+A_1u_0=0. \tag{14}$$

Koeficientas prie $x^{\rho+2}$ yra

$$(E(\rho+2)+A_0)u_2+\frac{\partial u_2}{\partial s}+I_1\frac{\partial u_1}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_1}{\partial z}+s\left(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)u_1+A_1u_1+A_2u_0=0. \tag{15}$$

Koeficientas bet kokio laipsnio $\rho+k$, $k=0,1,2,...$ yra randamas iš šios rekurentinės formulės

$$(E(\rho+k)+A_0)u_k+\frac{\partial u_k}{\partial s}+I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+s\left(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)u_{k-1}+$$

$$+\sum_{1=0}^{k-1}A_{k-1}u_1=0. \tag{16}$$

Šioje lygybėje visi $u_k\equiv 0$, kai $k<0$.

Iš (13), gauname

$$(E\rho+A_0)u_0+\frac{\partial u_0}{\partial s}=0. \tag{17}$$

Iš (17) turime rasti pirmąjį laipsninės eilutės (7) koeficientą ir nežinomą funkciją ρ. Pareikalaukime, kad u_0 nepriklausytų nuo kintamojo s, t.y. $u_0=u_0(y,z)$. Tuomet iš (17) gauname

$$(E\rho+A_0)u_0=0. \tag{18}$$

Gavome tiesinių algebrinių lygčių homogeninę sistemą, kurioje u_0 yra nežinomųjų vektorius stulpelis. Iš tiesinės algebros kurso žinoma, kad tiesinių homogeninių lygčių sistema turi nenulinį sprendinį tada ir tik tada kada sistemos determinantas yra lygus nuliui. Turime, kad

$$det(E\rho + A_0) = 0. \tag{19}$$

(19) lygybė funkcijos atžvilgiu ρ yra ketvirtojo laipsnio algebrinė lygtis. Bendruoju atveju ši lygtis turi keturias šaknis. Pareikalaukime, kad šaknų skaičius nesikeistų visiems $(y, z) \in P$. (19) lygybę, analogiškai kaip ir paprastųjų diferencialinių lygčių teorijoje, pavadinkime (5) lygčių sistemos nusakančiąja lygtimi.

ρ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ gauname iš (19) lygties. Laisvai parenkame u_0 pasirinktam ρ_i.

Reikia surasti visus kitus laipsninės eilutės (7) koeficientus $u_k(y, z, s)$, $k = 1, 2, 3, ...$ Norint tai gauti reikia pertvarkyti (16) lygybę išreikšdami $u_k(y, z, s)$ per $u_{k-1}...u_0$.

$$(E(\rho + k) + A_0)u_k + \frac{\partial u_k}{\partial s} = -(s\left(I_1\frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)u_{k-1} + I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} +$$

$$+ \sum_{1=0}^{k-1} A_{k-1}u_1). \tag{20}$$

Jeigu fiksuotume nepriklausomus kintamuosius y ir z, tuomet (19) lygybė $u_k(y, z, s)$ ir kintamojo s atžvilgiu yra pirmos eilės paprastoji diferencialinė lygtis. Tačiau mus domina ne bendrasis šios diferencialinės lygties sprendinys, o tik vienas konkretus sprendinys, kurio pagalba rekurentiškai rastume (7) laipsninės eilutės koeficientus $u_k(y, z, s)$, $k = 1, 2, 3, ...$ Tada ieškomoji funkcija u priklauso tik nuo kintamojo s, t.y. $u = u(s)$. $u(s)$ atžvilgiu (20) yra tiesinė paprastoji pirmos eilės diferencialinė lygtis, kurią spręsime konstantos varijavimo metodu. Pirmiausia kairiąją diferencialinės lygties (20) pusę prilyginame nuliui ir gauname tokią pirmos eilės paprastąją diferencialinę lygtį kintamojo s atžvilgiu

$$(E(\rho + k) + A_0)u_k + \frac{\partial u_k}{\partial s} = 0. \tag{21}$$

Atskirsime kintamuosius ir gausime

$$\frac{du_k}{u_k} = -(E(\rho + k) + A_0)ds. \tag{22}$$

Suintegravę abi (22) lygybės puses, gauname

$$lnu_k(y,z,s) = -s(E(\rho+k)+A_0)+C, \tag{23}$$

čia C yra integravimo konstanta.

Iš (23) lygybės randame, jo išraiška bus tokia

$$u_k(y,z,s) = e^{-s(E(\rho+k)+A_0)}C. \tag{24}$$

Varijuojame konstantą C. Tarkime, kad $C = C(s)$, tada turime

$$u_k(y,z,s) = e^{-s(E(\rho+k)+A_0)}C(s). \tag{25}$$

(25) lygybėje nežinoma yra funkcija $C(s)$. Norint ją rasti,(25) lygybę diferencijuojame pagal kintamąjį s, gauname

$$u_k^{'}(y,z,s) = C^{'}e^{-s(E(\rho+k)+A_0)} - C(E(\rho+k)+A_0)e^{-s(E(\rho+k)+A_0)}. \tag{26}$$

(25) ir (26) įrašę į (20), gauname

$$(E(\rho+k)+A_0)Ce^{-s(E(\rho+k)+A_0)} + C^{'}e^{-s(E(\rho+k)+A_0)} - C(E(\rho+k)+A_0)\cdot$$

$$\cdot e^{-s(E(\rho+k)+A_0)} = -(s\left(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)u_{k-1}+I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\sum_{1=0}^{k-1}A_{k-1}u_1). \tag{27}$$

Tuomet sutraukę panašius narius, gauname

$$C^{'}e^{-s(E(\rho+k)+A_0)} = -(s\left(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)u_{k-1}+I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+\sum_{1=0}^{k-1}A_{k-1}u_1). \tag{28}$$

Ši diferencialinė lygtis $C(s)$ atžvilgiu yra tiesinė diferencialinė lygtis su atskirtaisiais kintamaisiais. Atskyrę kintamuosius gauname

$$dC = -e^{-s(E(\rho+k)+A_0)}(s\left(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)u_{k-1}+I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}+I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z}+ \tag{29}$$

$$+\sum_{1=0}^{k-1}A_{k-1}u_1)ds.$$

Suintegravę abi puses, gauname

$$C(s) = -\int e^{-s(E(\rho+k)+A_0)}(s\left(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)u_{k-1} + I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} +$$

$$+\sum_{1=0}^{k-1} A_{k-1}u_1)ds + C. \tag{30}$$

Tuomet C pasirenkame patys ir tada $C = 0$

(30) įrašę į (25) gauname, kam lygūs u_k, kai $k = 1, 2, ...$

$$u_k(y,z,s) = -e^{-s(E(\rho+k)+A_0)}\int e^{-s(E(\rho+k)+A_0)}(s\left(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)u_{k-1} +$$

$$+I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{1=0}^{k-1} A_{k-1}u_1)ds \tag{31}$$

Apibendrindami gautuosius rezultatus suformuluojame kaip teoremą:

1. Teorema. *Matricinės diferencialinės lygties*

$$x\left(ET_1\frac{\partial u}{\partial x} + I_1T_1\frac{\partial u}{\partial y} + I_2T_1\frac{\partial u}{\partial z}\right) + A(x,y,z)T_1u = 0$$

sprendiniai, kuomet diferencialinės lygties koeficientų matricos $A(x,y,z)$ sklei-dinio laipsnine eilute koeficientai priklauso nuo kintamųjų y ir z, yra

$$v(x,y,z) = T_1u(x,y,z)$$

pilnai pavidalo, čia ρ randame iš

$$(E\rho + A_0)u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial s} = 0,$$

$u_k(y,z,s), k = 0, 1, 2, ...$ randami iš

$$u_k(y,z,s) = -e^{-s(E(\rho+k)+A_0)}\int e^{-s(E(\rho+k)+A_0)}(s\left(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y} + I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)u_{k-1} +$$

$$+I_1\frac{\partial u_{k-1}}{\partial y} + I_2\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} + \sum_{1=0}^{k-1} A_{k-1}u_1)ds$$

lygybės, o u_0 parenkamas laisvai toks, kad nepriklausytų nuo s ir priklausytų tik nuo kintamųjų y, z.

Padauginę (4) sistemą iš kairės iš matricos T_1^{-1}, gauname tokią dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą:

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial v}{\partial x}+J_1\frac{\partial v}{\partial y}+J_2\frac{\partial v}{\partial z}\right)+T_1^{-1}A(x,y,z)T_1u=0 \tag{32}$$

čia $J_1 = T_1^{-1}I_1T_1, \quad J_2 = T_1^{-1}I_2T_1$ Matricų I_1 I_2 tikrinės reikšmės yra i ir $-i$ ir abi jos antrojo kartotinumo. Matricos I_1 Žordano kanoninė forma yra matrica

$$\mathbf{J_1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kadangi matricos J_1 ir I_1 turi tuos pačius elementariuosius daliklius, tai jos yra panašios ir egzistuoja neypatinga kvadratinė matrica $T_1: \quad J_1 = T_1^{-1}I_1T_1$ ir

$$\mathbf{T_1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pastebėkime, kad

$$\mathbf{J_2}=\mathbf{T_1^{-1}I_2T_1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrica I_1 suvedama i Žordano matricą J_1 neypatingos matricos T_1 pagalba, o matrica I_2 panaši į matricą J_2 ir abiejų struktūra yra blokinė- diagonalinė.

Keitinio (3) pagalba dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos (1) pagrindinės dalies matricas I_1 irI_2 suvedame į Žordano normaliąją formą, kuri patogi tolimesniems tyrimams.

3.2 Sistemos supaprastinimas

Nagrinėkime (3) keitinį, kuriame pastovią neypatingą matricą T_1 keičiame ketvirtos eilės kvadratine matrica funkcija, kurios determinantas nėra tapatingai lygus nuliui. Po šio keitinio dalinių išvestinių diferencialinių lygšių sistema (1) atrodo taip:

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial v}{\partial x}+K_1(y,z)\frac{\partial v}{\partial y}+K_2(y,z)\frac{\partial v}{\partial z}\right)+B(x,y,z)v=0, \tag{33}$$

čia $K_1(y,z) = T^{-1}(y,z)I_1T(y,z),\ K_2(y,z) = T^{-1}(y,z)I_2T(y,z),\ B(x,y,z)$ tenkina tokią matricinę diferencialinę lygtį

$$x^{p+1}\left(I_1\frac{\partial T}{\partial y} + I_2\frac{\partial T}{\partial z}\right) + AT - TB = 0.$$

$B(x,y,z)$ skleidinys laipsnine x eilute egzistuoja ir to skleidinio pagrindinis narys yra [9]

$$B(0,y,z) = T^{-1}(y,z)A_0(y,z)T(y,z) = diag(\lambda_1(y,z),\lambda_2(y,z),\lambda_3(y,z),\lambda_4(y,z))$$

čia $\lambda_i(y,z),\quad i = 1,2,3,4-$ matricos $A_0(y,z)$ tikrinės reikšmės.

Vadinasi, keitinio (3) kuriame $T_1 = T(y,z)$ pagalba (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistema suvedama į dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą (7), kurios koeficientų skleidinio laipsnine eilute pagrindinis narys yra blokinė diagonalioji matrica funkcija.

Dabar dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemoje (1) ieškomąją vektorfunkciją $v(x,y,z)$ pakeiskime nauja ieškomąja vektorfunkcija $u(x,y,z)$ keitinio

$$v(x,y,z) = (E + x^{\alpha}P_{\alpha}(y,z))u(x,y,z), \tag{34}$$

?ia $\alpha-$ natūralusis skaičius, $E-$ vienetinė matrica, $P_{\alpha}(y,z)-$ kol kas nežinoma kintamųjų y ir z matrica funkcija, pagalba.

Diferencijuojame (34) pagal kintamuosius x, y ir z,turime

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho-1}\left((k+\rho)u_k + \frac{\partial u_k}{\partial s}\right); \tag{35}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho}\left(s\frac{\partial \rho}{\partial y}u_k + \frac{\partial u_k}{\partial s}\right); \tag{36}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\rho}\left(s\frac{\partial \rho}{\partial z}u_k + \frac{\partial u_k}{\partial s}\right). \tag{37}$$

Įrašę (35) į (1) sistemą gauname tokią dalinių išvestinių diferencialinių lygčų sistemą:

$$x^{p+1}(E + x^kP_{\alpha})E\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha x^{p+\alpha}P_{\alpha}v + x^{p+1+\alpha}\left(I_1\frac{\partial P_{\alpha}}{\partial y} + I_2\frac{\partial P_{\alpha}}{\partial z}\right)v +$$

$$+x^{p+1}I_1(E+x^kP_{\alpha})\frac{\partial v}{\partial y} + x^{p+1}I_2(E+x^kP_{\alpha})\frac{\partial v}{\partial z} + A(x,y,z)(E+x^kP_{\alpha})v = 0 \tag{38}$$

Pasinaudokime formaliu skleidiniu

$$\Big((E+x^{\alpha}P_{\alpha}(y,z)\Big)^{-1}=E-x^{\alpha}P_{\alpha}(y,z)+x^{2\alpha}P_{\alpha}^{2}(y,z)+...=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\Big(x^{\alpha}P_{\alpha}(y,z)\Big)^{k} \tag{39}$$

ir (35) sistemą padauginkime iš kairės iš $\Big((E+x^{\alpha}P_{\alpha}(y,z)\Big)^{-1}$. Po pertvarkymų, gauname tokią dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial v}{\partial x}+J_{1}(x,y,z)\frac{\partial v}{\partial y}+J_{2}(x,y,z)\frac{\partial v}{\partial z}\right)+B(x,y,z)v=0 \tag{40}$$

kurioje

$$J_{1}(x,y,z)=I_{1}+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(-1\Big)^{k}x^{ak}P_{\alpha}^{k-1}(y,z)\Big(P_{\alpha}I_{1}-I_{1}P_{\alpha}\Big),$$

$$J_{2}(x,y,z)=I_{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(-1\Big)^{k}x^{ak}P_{\alpha}^{k-1}(y,z)\Big(P_{\alpha}I_{2}-I_{2}P_{\alpha}\Big),$$

$$B(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{k}\big(-1\big)^{k-l+1}x^{\alpha(k-l+1)+l}P_{\alpha}^{k-l}\big(P_{\alpha}A_{l}-A_{l}P_{\alpha}\big)+(-1)^{k}x^{\alpha(k+1)+p}\right.$$

$$\left.\alpha P_{\alpha}^{k+1}\right]+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(-1\Big)^{k}x^{p+1+\alpha(k+1)}P_{\alpha}^{k}\left(I_{1}\frac{\partial P_{\alpha}}{\partial y}+I_{2}\frac{\partial P_{\alpha}}{\partial z}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}x^{k}A_{k}(y,z). \tag{41}$$

Pastebėkime, kad (41) matricos funkcijos tenkina tokias sąlygas:

$$J_{1}(0,y,z)\equiv I_{1},$$
$$J_{2}(0,y,z)\equiv I_{2},$$
$$B(0,y,z)\equiv A_{0}(y,z) \tag{42}$$

Dabar detaliau išsiaiškinkime $B(x,y,z)$ struktūrą ir būdus kaip nustatyti matricą- funkciją $P_{\alpha}(y,z)$. Kadangi α yra natūralusis skaičius, tai iš (41) ir (42) nesunku pastebėti, kad (34) keitinys nekeičia pirmųjų α (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemos koeficiento $A(x,y,z)$ skleidinio laipsnine eilute koeficientų. Koeficiento prie x^{α} išraiška bus tokia:

$$B_\alpha(y,z) = \begin{cases} A_\alpha(y,z) + A_0(y,z)P_\alpha(y,z) - P_\alpha(y,z)A_0(y,z) + \alpha P_\alpha(y,z), p = 0, \\ A_\alpha(y,z) + A_0(y,z)P_\alpha(y,z) - P_\alpha(y,z)A_0(y,z), p > 0. \end{cases} \tag{43}$$

Tarkime, kad $A_0(y,z)$ yra tokios struktūros matrica:

$$= \left(\delta_{ij}A^{(i)}(y,z)\right), i,j = 1,2,...,s \leq 4, \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{44}$$

Pasinaudoję matricos $A_0(y,z)$ suskaldymu į blokus (44) atitinkamus matricų $B_\alpha(y,z)$, $A_\alpha(y,z)$, $P_\alpha(y,z)$ blokus pažymėkime $B_\alpha^{(r,s)}(y,z)$, $A_\alpha^{(r,s)}(y,z)$, $P_\alpha^{(r,s)}(y,z)$, čia viršutiniai indeksai reiškia, kad blokas yra r-tosios eilutės ir s-tojo stulpelio susikirtime. Šių submatricų elementus žymėkime atitinkamai $b_{ij}(y,z)$, $a_{ij}(y,z)$, $p_{ij}(y,z)$, $i,j = 1,2,3,4$.

Matricos $A_0(y,z)$ Žordano langus atitinkančius skirtingas tikrines reikšmes $\rho_r(y,z), \rho_s(y,z)$ žymėkime taip:

$$A^{(r)}(y,z) = \rho_r(y,z)E_r + L_r,$$
$$A^{(s)}(y,z) = \rho_s(y,z)E_s + L_s, \qquad r,s = 1,2,3,4, \tag{45}$$

čia E_r, E_s- vienetinės matricos, matricų L_r, L_s- visi elementai yra nuliai, išskyrus elementus virš pagrindinės įstrižainės, kurie lygūs vienetui.

Iš (41) gauname, kad

$$B_\alpha^{(r,s)}(y,z) = \begin{cases} A_\alpha^{(r,s)}(y,z) + A_0(y,z)P_\alpha^{(r,s)}(y,z) - \\ A_\alpha^{(r,s)}(y,z) + A_0(y,z)P_\alpha^{(r,s)}(y,z) - \end{cases} \tag{46}$$

$$\begin{cases} -P_\alpha^{(r,s)}(y,z)A_0(y,z) + \alpha {P_\alpha}^{(r,s)}(y,z), p = 0, \\ -P_\alpha^{(r,s)}(y,z)A_0(y,z), p > 0. \end{cases}$$

Iš (42), pareikalavę, kad $B_\alpha^{(r,s)}(y,z)$ struktūra atitiktų $A_0(y,z)$ struktūrą, gauname sąlygas matricos funkcijos $P_\alpha^{(r,s)}(y,z)$ elementų nustatymui. Šios sąlygos yra

$$a_{ij} + (\rho_r - \rho_s)p_{ij} + p_{i+1} - p_{ij+1} - kp_{ij} = 0, \ p = 0$$
$$a_{ij} + (\rho_r - \rho_s)p_{ij} + p_{i+1} - p_{ij+1} = 0, \ p > 0, \ i,j = 1,2,3,4. \tag{47}$$

Iš (47), randame $p_{ij}(y,z)$ išraiškas. Jos yra tokios:

$$p_{ij} = -\frac{a_{ij}}{\rho_r - \rho_s + \alpha},$$

$$p_{ij+1} = \frac{1}{\rho_r - \rho_s + \alpha}(p_{ij} - \alpha_{ij+1}),$$
$$p_{i-1j} = \frac{1}{\rho_r - \rho_s + \alpha}(p_{ij} - \alpha_{i-1j}), \tag{48}$$
$$p_{i-1j+1} = \frac{1}{\rho_r - \rho_s + \alpha}(p_{i-1j} - p_{ij+1} - \alpha_{i-1j+1}),$$

čia $p_{0j}(y,z) \equiv 0, \quad j = 1,2,3,4, \quad p_{i5}(y,z) \equiv 0, \quad i = 1,2,3,4$. Visi $p_{ij}(y,z), \quad i,j = 1,2,3,4$ nustatomi vienareikšmiškai, jeigu visiems y ir z : $|y| < r_2, \ |z| < r_3 \ \rho_r(y,z) - \rho_s(y,z) + \alpha \neq 0$. Atveju $p = 0, \ \rho_r(y,z) - \rho(y,z)_s + \alpha = 0$ to padaryti negalima ir šiuo atveju $p_{ij}(y,z) \equiv 0, \ i,j = 1,2,3,4$.

Jeigu $A_0(y,z) = \rho(y,z)E$, tai analogiškai kaip čia buvo išdėstyta nustatoma matrica $P_\alpha(y,z)$. Jos koeficientų išraiškos bus tokios:

$$p_{ij}(y,z) = \begin{cases} -\frac{a_{ij}(y,z)}{\alpha}, & i \neq j, \\ -\frac{\rho(y,z) - a_{ij}(y,z)}{\alpha}, & i = j. \end{cases}$$

Gautąjį rezultatą suformuluokime kaip teoremą.

2 Teorema. *Dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistema*

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial v}{\partial x} + I_1\frac{\partial v}{\partial y} + I_2\frac{\partial v}{\partial z}\right) + A(x,y,z)v(x,y,z) = 0$$

keitinio

$$v(x,y,z) = (E + x^\alpha P_\alpha(y,z))u(x,y,z)$$

pagalba suvedama į dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial v}{\partial x} + J_1(x,y,z)\frac{\partial v}{\partial y} + J_2(x,y,z)\frac{\partial v}{\partial z}\right) + B(x,y,z)v = 0,$$

kurioje pirmieji α $B(x,y,z)$ skleidinio x laipsnine eilute koeficientai sutampa su $A(x,y,z)$ skleidinio x laipsnine eilute koeficientais ir skleidinio $B(x,y,z)$ laipsnine x eilute koeficiento $B_\alpha(y,z)$ struktūra sutampa su koeficiento $A_0(y,z)$ struktūra.

3.3 Apibendrinimas

Keitinį (34) taikykime (1)dalinių išvestinių daiferencialinių lygčių sistemai imdami $\alpha = 1,2,...$ ir apibrėžkime tokio tipo formalų keitinį

$$u(x,y,z) = \big[(E + xP_1)(E + x^2P_2)(E + x^3P_3)...\big]v(x,y,z). \tag{49}$$

Taikydami šį keitinį dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemai (1) pasiekiame, kad visi $A(x, y, z)$ skleidinio x laipsnine eilute koeficientai $A_k(y, z),\ k = 1, 2, ...$ turėtų pagrindinio skleidinio nario matricos $A_0(y, z)$ struktūrą. Vadinasi, (1) dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą suskaldoma į atskiras, dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemas, atitinkančias $A_0(y, z)$ blokinę struktūrą.

3 Teorema. *Jeigu $A_0(y, z)$ blokinė- diagonalinė matrica, tai formalaus keitinio*

$$v(x, y, z) = (E + x^\alpha P_\alpha(y, z))u(x, y, z)$$

pagalba dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistema

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial v}{\partial x} + I_1\frac{\partial v}{\partial y} + I_2\frac{\partial v}{\partial z}\right) + A(x, y, z)v(x, y, z) = 0$$

suskaldoma į tokią dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą:

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} + J_1\frac{\partial u^{(i)}}{\partial y} + J_2\frac{\partial u^{(i)}}{\partial z}\right) + A^{(i)}(x, y, z)u^{(i)} = 0,\ i = 1, 2, ...,\ s \leq 4$$

$$u(x, y, z) = \left(\delta_{ij}u^{(i)}(x, y, z)\right)$$

$$A^{(i)}(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k A_k^{(i)}(y, z), \quad i, j = 1, 2, ...,\ s \leq 4.$$

4 Naudota literatūra

Literatūra

[1] Golokvosčius P., *Diferencialinės lygtys*, Vilnius, 2000.

[2] Janušauskas A. I., *Elipsinių lygčių analizinė teorija* (rusiškai), Novasibirskas, Mokslas CO, 1979.

[3] Turrittin H. L., Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point, *Acta Mathematica*, 93, 27-66, 1955.

[4] Vazov V., *Asimptotiniai skleidiniai paprastoms diferencialinėms lygtims* Maskva, Taika, 1968.

[5] Froim V.X., Analizės aprendimų vaizdavimas, kai matricos lygtis konkretūs deriniai , *Diferencialinė lygtis* (rusiškai), **8**(10)(1972), 1848-1856.

[6] Horn J. Uber die Reicheentwicklungen der Integrale eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgebung gewisser singularen Stellen, *Journal fur reine und angewandte Mathematiker*, (1897), 117, 104-128, 254-266.

[7] Kosareva N. *Matematika 1 Paskaitos*, [elektroninis išteklius], http://e-stud.vgtu.lt/files/dest/5003/paskaitos.pdf, [Žiūrėta 2011.05.15]

[8] Janušauskas A. I., *Daugiamatės elipsinės sistemos su kintamaisiais koeficientais* (rusiškai), Vilnius, Mokslas 1990.

[9] Fedoriuk M.V., Lygčių su ireguliariuoju ypatumu izomorfinės diferenciacijos *Diferencialinė lugtis* (rusiškai), **22**(6) (1986), 961-967.

Brenčienė G. Išsigimstančios dalinių išvestinių matricinės diferencialinės lygties sprendinių struktūra / Matematikos ir informatikos magistro baigiamasis darbas. Vadovas prof. D. Jurgaitis. - Šiauliai: Šiaulių Universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, 2011.- 21 p.

SANTRAUKA

Straipsnyje išnagrinėta Moisilo- Teodoresko sistema su jaunesniaisiais koeficientais. Sistemos eilė išsigimsta hiperplokštumos taškuose. Rastas keitinys, kurio pagalba keičiama sistemos koeficientų skleidinio laipsnine eilute struktūra. Šio koeficiento struktūra atitinka sistemos koeficiento skleidinio pagrindinės matricos struktūrą. Rastas formalus keitinys, leidžiantis sistemą suskaldyti į dalines sistemas, kada sistemos jaunesniųjų narių skleidinio pagrindinė matrica yra blokinė- diagonalinė.

Brenčienė G. Degenerate partial derivatives matrix differential equation structure / Mathematics and computer a master's thesis. Head prof. D. Jurgaitis. - Šiauliai: Šiauliai University, Mathematics and Computer Science, 2011 .- 21 p.

SUMMARY

The paper examined Moisilo-Teodoresko system junior coefficients. Number of degenerate system hiperplane points. We find the amendment, as an aid System gradual series coefficients of expansions in the structure. This coefficient structure expansions of the system coefficient matrix of the main structure. Found a formal amendment to allow the system divide into subsystems, when younger members of the system expansions in the main block-diagonal of the matrix.