

ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Simona Tutkienė

**Puasono dvimatės lygties vidinių reikšmių uždavinio
sprendimas „tilto“ funkcijų metodais**

MAGISTRINIS DARBAS

Darbo vadovas
doc. dr. Mindaugas Stakvilevičius

Šiauliai, 2011

TURINYS

IVADAS	4
1. TEORINĖ DALIS	5
1.1. PUASONO IR LAPLASO LYGTYS.....	5
1.1.1. Fizikiniai pavyzdžiai, aprašomi Laplaso lygtimi.....	6
1.2. HARMONINĖS FUNKCIJOS.....	7
1.2.1. Harmoninių funkcijų savybės.....	8
1.3. APROKSIMAVIMAS.....	9
1.4. SPLAINAI.....	11
1.4.1. Splainų metodas.....	11
1.5. NEAPIBRĖŽTŲ KOEFICIENTŲ METODAS.....	13
1.6. MAŽIAUSIŲ KVADRATŲ METODO TAIKYMAS TIESINIŲ ALGEBRINIŲ LYGČIŲ SPRENDIMUI.....	15
1.7. MATHCAD.....	17
2. UŽDAVINIO FORMULAVIMAS	19
3. PUASONO DVIMATĖS LYGTIES VIDINIŲ REIŠMIŲ UŽDAVINIO SPRENDIMAS „TILTO“ FUNKCIJŲ METODAIS	21
3.1. HIPERBOLINIO TANGENTO „TILTO“ FUNKCIJOS SAVYBĖS.....	21
3.2. TRIGONOMETRINĖS „TILTO“ FUNKCIJOS SAVYBĖS.....	21
3.3. HIPERBOLINIO TANGENTO IR TRIGONOMETRINĖS „TILTO“ FUNKCIJŲ SUMOS GRAFIKAI.....	22
3.4. HIPERBOLINIO TANGENTO „TILTO“ FUNKCIJOS ILIUSTRAVIMAS MATCHAD‘O PROGRAMA.....	23
3.5. PUASONO LYGTIES SPRENDIMO, PANAUDOJANT HIPERBOLINIO TANGENTO IR TRIGONOMETRINĖS „TILTO“ FUNKCIJAS, ALGORITMAS.....	25
3.5.1. Sprendimas naudojant hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijas.....	27
3.5.2. Sprendimas naudojant trigonometrines „tilto“ funkcijas.....	28
3.5.3. Algebrinių lygčių sistema Puasono lygties sprendinio neapibrėžtiesiems koeficientams nustatyti.....	29
3.6. PUASONO LYGTIES SPRENDIMO „TILTO“ FUNKCIJŲ METODU REALIZACIJA MATCHAD‘O PROGRAMA.....	30
3.7. PUASONO LYGTIES SPRENDINIŲ „TILTO“ FUNKCIJŲ METODU TIKSLUMO ANALIZĖ.....	35

3.8. SPRENDINIŲ PAKLAIDOS PRIKLAUSOMYBĖS NUO HIPERBOLINIO TANGENTO „TILTO“ FUNKCIJOS NUOLYDŽIO PARAMETRO (H) I MODELIO ...	37
3.9. SPRENDINIŲ PAKLAIDOS PRIKLAUSOMYBĖS NUO HIPERBOLINIO TANGENTO „TILTO“ FUNKCIJOS NUOLYDŽIO PARAMETRO (H) II MODELIO ..	39
IŠVADOS.....	41
LITERATŪRA	42
SUMMARY	43
PRIEDAI	45
PRIEDAS 1	46
PRIEDAS 2	47
PRIEDAS 3	48
PRIEDAS 4	49
PRIEDAS 5	52
PRIEDAS 6	55
PRIEDAS 7	58
PRIEDAS 8	61
PRIEDAS 9	64

ĮVADAS

Tema: Puasono dvimatės lygties vidinių reikšmių uždavinio sprendimas „tilto“ funkcijų metodais

Temos aktualumas. Spręsti Puasono lygtį yra labai daug metodų, tačiau mes siūlome dar vieną metodą. Išsivysčius kompiuterinėms technologijoms atsiranda reali galimybė suvesti Puasono lygties uždavinį į tiesinių algebrinių lygčių sistemą. Tuo tikslu panaudojami naujo tipo splainai, grįsti arba hiperbolinių tangentių „tilto“ funkcijomis, arba trigonometrinėmis „tilto“ funkcijomis.

Darbo objektas. Dvimatė Puasono lygtis, aprašanti arba stacionarius pernešimo procesus, arba plokštumos potencialus. Pastarasis uždavinys, kai sparčiai tiriamos plokščiojo darinio grafenų savybės, darosi vis aktualesnis.

Darbo tikslas. Tyrimo tikslas – Puasono lygties sprendimas.

Darbo uždaviniai:

1. Išspręsti Puasono lygtį kompiuterinio modeliavimo programomis.
2. Palyginti sprendinių, gautų trigonometrinės bei hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijomis, efektyvumą.
3. Ištirti modeliuojant kompiuteriu, kaip priklauso sprendinio tikslumas nuo hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos parametro (h).
4. Pateikti sprendimą, pasiūlymus bei rekomendacijas tolimesniems tyrimams.

Darbo šaltiniai. Rašant magistro darbą naudojamos mokslinės knygos, moksliniai straipsniai įvairiomis kalbomis. Informacija ieškoma įvairiuose šaltiniuose: bibliotekoje, internete ir kt.

Darbo metodika. Šiame darbe atliekami sprendimai, naudojantis kompiuterinio modeliavimo programomis.

Darbo struktūra. Baigiamąjį darbą sudaro įvadas, dvi dalys, suskirstytos į atskirus skyrius. Pirmoje dalyje aprašyta teorija, kuri naudojama įgyvendinti sprendimams. Teorijoje nagrinėjama: Puasono ir Laplaso lygtys; harmoninės funkcijos; funkcijų aproksimavimas; splainų metodas; neapibrėžtų koeficientų metodas bei mažiausių kvadratų metodas. Antroje dalyje pateikiami sprendimai, gauti kompiuteriu. Remiantis empiriniais tyrimais suformuluotos išvados, pasiūlymai ir rekomendacijos bei santrauka anglų kalba. Darbo pabaigoje pateikiamas literatūros sąrašas bei priedai.

1. TEORINĖ DALIS

1.1. PUASONO IR LAPLASO LYGTYS

Dekarto koordinačių sistemoje divergencija (pvz., elektrinio lauko stipris) ir gradientas išreiškiami tokiu būdu:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (1)$$

Tuo atveju, kai u – potencialas, tai elektrinio lauko stipris išreiškiamas jo gradientu formule

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} u, \\ \operatorname{grad} u &= \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2)$$

Čia \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} - vienetiniai atitinkamų koordinačių ašių vektoriai (ortai), o u gali būti potencialas.

Toje sistemoje

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}. \quad (3)$$

Pagal (1), (2) ir (3) nustatome, kad

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Įrašę tai į (1), gauname:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (4)$$

o iš I Maksvelo lygties

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Dekarto koordinatėmis:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (5)$$

Ši lygybė vadinama *Puasono* (*S. D. Poisson*) lygtimi. Ji sieja potencialą ir tūrinį krūvio tankį tame pačiame erdvės taške. Tose erdvės srityse, kuriose nėra krūvių, (5) tampa:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (6)$$

(6) vadinama *Laplaso* (*P. S. Laplace*) lygtimi.

1.1.1. Fizikiniai pavyzdžiai, aprašomi Laplaso lygtimi

1 pavyzdys. Stacionarinė temperatūra. Izoliuotoje iš šonų vienalytėje plokštelėje temperatūra $u = u(t, x, y)$ tenkina šilumos laidumo lygtį

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (7)$$

Jei plokštelė yra duota uždaroje srityje S , kurią apriboja uždara kreivė C , tai atitinkamą mišrųjų uždavinį formuluojame šitaip.

Reikia rasti srityje S , kai $t > 0$, (7) lygties sprendinį, tolydinį uždaroje srityje \bar{S} , kai $t \geq 0$, kuris tenkina srityje S pradinio momentu $t = 0$ pradinę sąlygą

$$u(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad (8)$$

o ant kontūro C - visą laiką ($t > 0$) – vieną iš trijų kraštinių sąlygų:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & u|_C = f_1(t, C), \\ \text{II} \quad & \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_C = f_2(t, C), \\ \text{III} \quad & \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_C + h(C)[u|_C - f_3(t, C)] = 0, \quad h(C) \geq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Prie II ir III kraštinių sąlygų, kai ant kontūro C apibrėžiama normalinė išvestinė $\frac{\partial u}{\partial n}$, srityje S , $t \geq 0$ turi būti tolydinė ne tik ieškomoji funkcija, bet ir jos dalinės išvestinės $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Jei funkcijos f_1 , f_2 ir f_3 nepriklauso nuo t :

$$f_i(t, C) \equiv f_i(C), \quad (i = 1, 2, 3),$$

tai, praėjus pakankamai ilgam laikui, plokštelėje susidaro pusiausvyros būvis, kuris nepriklauso nuo pradinės funkcijos (pradinės temperatūros) $\varphi(x, y)$. Tuomet ir plokštelės temperatūra u nepriklauso nuo laiko, o priklauso tik nuo koordinačių: ją vadiname *pusiausvyros*, arba *stacionare, temperatūra*. Tuo atveju

$$u = u(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Ir vietoj (7) lygties gauname dvimatę Laplaso lygtį

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (10)$$

o vietoj (9) kraštinių sąlygų – atitinkamai

$$\begin{aligned} \text{I} \quad u|_C &= f_1(C), \\ \text{II} \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_C &= f_2(C), \\ \text{III} \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_C + h(C)[u|_C - f_3(C)] &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Stacionarinė temperatūra turi būti tolydinė uždaroje srityje $\bar{S} = S + C$, srityje S patenkinti Laplaso lygtį, o ant kontūro C - vieną konkrečią iš (11) kraštinių sąlygų. Be to, (11) antrosios ir trečiosios sąlygų atvejais uždaroje srityje \bar{S} turi būti tolydinės ir dalinės išvestinės $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

2 pavyzdys. Taško potencialas. Materialiniame taške $Q(\xi, \eta, \zeta)$ patalpintas elektros krūvis q_0 , remiantis Š. A. Kulono (*Ch. A. Coulomb*) dėsniumi, veikia į bet kuriame erdvės taške $P(x, y, z)$ esantį vienetinį elektros krūvį jėga

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{q_0}{r_{PQ}} \cdot \frac{QP}{r_{PQ}^2}, \quad (12)$$

čia ϵ_0 - aplinkos dielektrinė konstanta. Tos jėgos didumas yra atvirkščiai proporcingas abiejų taškų atstumo kvadratui, nes vektorius \mathbf{QP} , padalytas iš jo ilgio r_{PQ} , reiškia vienetinį vektorių.

Keisdami taško P padėtį, gauname jėgų lauką, kurį sukuria taške Q elektros krūvis q_0 . Parodoma, kad *taškinio krūvio sukurtas (12) jėgų laukas yra potencialinis, t. y. kad egzistuoja toks skaliarinis laukas $u = u(x, y, z)$ (elektrostatinis potencialas), kad*

$$\mathbf{f} = -\text{grad } u.$$

Taškinis elektrostatinis potencialas tenkina Laplaso lygtį [2]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (13)$$

1.2. HARMONINĖS FUNKCIJOS

Tarkime, kad turime dvimatę Laplaso lygtį:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Laplaso lygties sprendiniai, tolydūs duotoje srityje, vadinami *harmoninėmis funkcijomis*.

Vienalyčio kūno stacionarinė temperatūra, taško ir kūno elektrostatinis bei gravitacinis potencialai tuštumoje yra harmoninės funkcijos.

Funkcija, duotoje srityje tenkinanti Laplaso lygtį, bet netolydi, jau yra *neharmoninė funkcija*. [2]

Pateiksime harmoninių funkcijų pavyzdžių.

1 pavyzdys. $u = axy + bx + cy$, kur a, b, c – koeficientai.

2 pavyzdys. $u = \alpha x^2 + \beta y^2$, kur $a = -b$.

3 pavyzdys. $u = e^{kx} \cdot \sin^{kx}$, kur k – bet koks koeficientas.

4 pavyzdys. $u = e^{kx} \cdot \cos^{kx}$, kur k – bet koks koeficientas.

5 pavyzdys. $u = e^{kx} \cdot \sin^{kx} + e^{hx} \cdot \cos^{hx}$, kur k, h – bet koks koeficientas

1.2.1. Harmoninių funkcijų savybės

Tarkime, kad turime Grino formulę:

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy, \quad (14)$$

čia C – glotni uždara kreivė, apsupanti plokščią sritį S , o funkcijos P, Q ir jų pirmosios dalinės išvestinės tolydinės uždaroje srityje $\bar{S} = S + C$. Jei (n, x) ir (n, y) – kreivės C normalės kampai su x ir y ašimis, tai judant taškui kreive C , $dx = -ds \cos(n, y)$, $dy = ds \cos(n, x)$. Atsižvelgę į tai ir pakeitę $Q = A_x$, $P = -A_y$, vietoj (14) parašome formulę

$$\iint_S \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C [A_x \cos(n, x) + A_y \cos(n, y)] ds. \quad (15)$$

Imdami, kad A_x ir A_y yra plokštumos vektoriaus $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j}$ projekcijos, parašome (15) formulę vektoriškai:

$$\iint_S \operatorname{div} \mathbf{A} dx dy = \oint_C A_n ds.$$

1 savybė. Jei funkcija u yra harmoninė plokščioje srityje S , apsuptoje lygia uždara kreive C , be to, u , $\frac{\partial u}{\partial x}$ ir $\frac{\partial u}{\partial y}$ yra tolydinės uždaroje srityje S , tai tos funkcijos normalinės išvestinės integralas kontūru C yra lygus nuliui:

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0. \quad (16)$$

2 savybė. Minėtomis sąlygomis harmoninės funkcijos u reikšmė bet kokiame taške P , esančiame kreivės C viduje, yra išreiškiamą tos funkcijos ir jos normalinės išvestinės reikšmėmis ant kontūro C :

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left[\ln \left(\frac{1}{r_{PQ}} \right) \frac{\partial u(Q)}{\partial n} - u(Q) \frac{\partial}{\partial n} \ln \left(\frac{1}{r_{PQ}} \right) \right] ds_Q. \quad (17)$$

3 savybė. Harmoninės funkcijos reikšmė skritulio centre yra lygi jos reikšmių ant apskritimo aritmetiniam vidurkiui:

$$u(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_p} u(Q) ds_Q. \quad (18)$$

4 savybė. *Plokštumos harmoninės funkcijos maksimumo ir minimumo teorema.* Jei funkcija u , harmoninė plokščioje srityje S , įgyja kuriame nors srities taške maksimumą ar minimumą, tai $u \equiv \text{const}$ visoje srityje S . Kitaip tariant, jei funkcija $u \equiv \text{const}$ yra harmoninė plokščioje srityje S , tai ji negali įgyti srities viduje nei maksimumo, nei minimumo.

Išvada. Jei funkcija u yra harmoninė plokščioje aprėžtoje srityje S ir tolydinė atitinkamoje uždaroje srityje \bar{S} , tai toji funkcija visuomet įgyja savo maksimumą ir minimumą srities pasienyje C .

5 savybė. Jei funkcija u yra harmoninė plokščioje srityje S , tolydinė uždaroje srityje \bar{S} ir lygi konstantai K srities pasienyje C , tai $u \equiv K$ visoje uždaroje srityje \bar{S} .

6 savybė. *Plokštumos harmoninės funkcijos vienatimumo teorema.* Jei funkcijos u_1 ir u_2 yra harmoninės plokščioje srityje S , tolydinės uždaroje srityje \bar{S} ir abiejų funkcijų reikšmės sutampa srities pasienyje C , tai $u_1 \equiv u_2$ visoje uždaroje srityje \bar{S} . [2]

1.3. APROKSIMAVIMAS

Funkcijų aproksimavimo uždavinių gausu įvairiose matematikos, fizikos ir technikos srityse. Literatūroje nagrinėjama daugybė funkcijų aproksimavimo uždavinio sprendimo metodų. Tai paaiškinama tuo, kad praktikoje susiduriama su daugeliu skirtingų šio uždavinio formuluočių.

Dažnai reikia žinoti daugelį funkcijos reikšmių. Tačiau daugumos funkcijų reikšmių paprastai apskaičiuoti negalima. Tada naudojamės lentelėmis funkcijos reikšmėmis arba interpoliacine funkcija. Bet interpoliacinė funkcija, sutampanti su duotąja interpoliavimo taškuose, ne visada yra jai artima kituose intervalo (a, b) taškuose. Mus dažnai domina kaip tik toks klausimas: rasti funkciją $\varphi(x)$, kurios reikšmės būtų kuo artimesnės $f(x)$

reikšmėms intervale (a, b) . Šis uždavinys paprastai sprendžiamas tokiu būdu. Parenkama funkcijų klasė M . Klasės M funkcijos išreiškiamos nesudėtinga analizine formule. Tarp funkcijų $\varphi(x) \in M$ ieškoma tokia, kad dydis $\rho(x, \varphi) = |f(x) - \varphi(x)|$ būtų mažiausias (tam tikra prasme) intervale (a, b) . Funkcija, kuri minimizuoja $\rho(x, \varphi)$, vadinama *aproksimavimo funkcija*, o jos radimas – *aproksimavimu*.

Jei minimizuojamas dydis $\max_{a \leq x \leq b} \rho(x, \varphi)$, tai aproksimavimas vadinamas *tolydiniu*, o

jei minimizuojamas dydis $\int_a^b \rho^2(x, \varphi) dx$, tai aproksimavimas vadinamas *kvadratinu*. Tokiu

būdu, tolydinio aproksimavimo atveju ieškome funkcijos $\varphi_0(x) \in M$, kuri tenkina sąlygą:

$$\delta(\varphi_0) = \min_{\varphi(x) \in M} \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \varphi(x)|, \quad (19)$$

o kvadratinio aproksimavimo atveju –

$$\delta(\varphi_0) = \min_{\varphi(x) \in M} \int_a^b p(x) |f(x) - \varphi(x)|^2 dx, \quad (20)$$

čia $p(x) > 0$ yra svorio funkcija.

Jei funkcija $f(x)$ išreikšta lentele, tai ieškome funkcijos $\varphi(x) \in M$, minimizuojančios dydį

$$\sum_{i=0}^n p_i |f(x_i) - \varphi(x_i)|^2,$$

čia p_i vadinami *svoriais* ir tenkina sąlygas

$$0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_{i=0}^n p_i = 1.$$

Jeigu klasę M sudaro n tiesiškai nepriklausomų funkcijų $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ tiesinė daugdara, o $f(x)$ yra duota jos reikšmių lentelė, tai $f(x)$ nesutampa su interpoliacine funkcija, jei $f(x) \notin M$.

Apibendrintai funkcijų aproksimavimo uždavinį galima suformuluoti taip: turint funkcijos $y = f(x)$ reikšmių lentelę (x_i, y_i) (čia $i = \overline{0, n}$, $y_i = f(x_i)$ ir $x_i \neq x_j$, kai $i \neq j$), reikia rasti funkcijos $f(x)$ reikšmę, kai $x = t$, o $t \in [x_0; x_n]$.

Funkcijos $f(x)$ analizinė išraiška paprastai yra nežinoma arba pernelyg sudėtinga.

Atsižvelgiant į y_i reikšmių tikslumą, taikomi du uždavinio sprendimo metodai:

- interpoliavimo metodas,

- suglodinimo metodas. [1,3]

1.4. SPLAINAI

Funkcijos panašios į dabar apdorojamas splainais, matematikams buvo žinomos jau seniai, net nuo Oilerio laikų. Tik jų intensyvus analizavimas prasidėjo XX amžiaus viduryje. 1946 m. Isaakas Šionbergas pirmasis panaudojo terminą nusakantį polinominių splainų klasę. Iki to splainai buvo teorinių tyrinėjimų instrumentas. Po 1960 m. vystantis skaičiavimo technikos pasiekimams splainai pradėti naudoti kompiuterinėje grafikoje ir modeliavime.

Splaino pavadinimas kilęs iš anglų kalbos žodžio *spline*, reiškiančio standžią liniuotę.

Splainas – tai tolydžioji iki p -tosios eilės išvestinės imtinai funkcija, sudaryta iš kurios nors funkcijos dalių. Istoriskai splainai pradėti konstruoti iš n -tosios eilės polinomo dalių, todėl čia, kalbėdami apie splainus, laikysime juos funkcijomis, sudarytomis iš polinomo dalių.

Dar naudojami splainai, angliškai vadinami gyvatėmis (*snakes*). Jie konstruojami dviem etapais:

1. Pasirenkama tikslo funkcija – funkcionalas.
2. Taikant variacinio skaičiavimo metodus, apskaičiuojama kreivė, minimizuojanti pasirinktą funkcionalą.

Paprasčiausias ir seniausiai naudojamas splainas yra laužtė. Tai pirmosios eilės splainas, kurio $p = 0$.

Splainas, sudarytas, pavyzdžiui, iš kubinio polinomo dalių, vadinamas *kubiniu*; jo $0 \leq p \leq 2$.

Splaino apibrėžimas. Tarkime, kad intervale $[a, b]$ duotas tinklelis $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$. Tada n -tosios eilės defekto k *splainas* yra funkcija $y = g(x)$, tenkinanti šias sąlygas:

- 1) kiekviename intervale $[x_{i-1}; x_i]$ ($i = \overline{1, N}$) $g(x)$ yra n -tojo laipsnio polinomas;
- 2) kiekviename vidiniame tinklelio taške x_i ($i = \overline{1, N-1}$) galioja lygybė $g^{(l)}(x_i - 0) = g^{(l)}(x_i + 0)$, $l = \overline{0, n-k}$. [3]

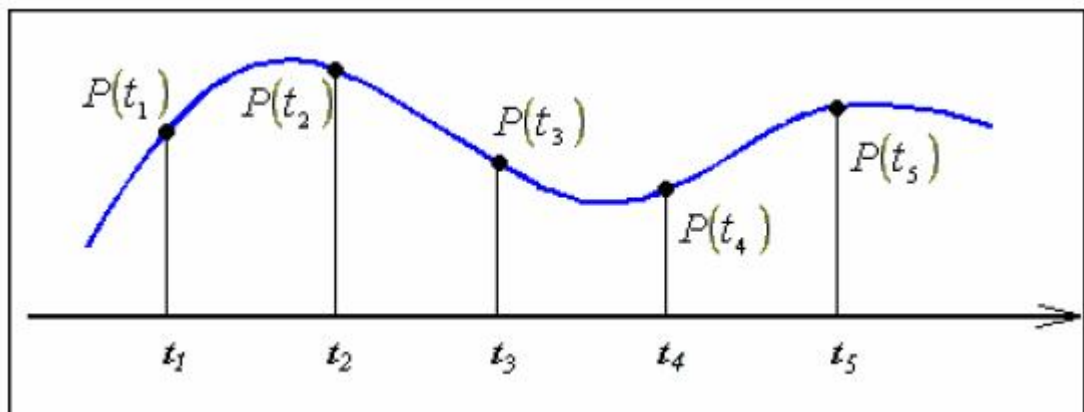
1.4.1. Splainų metodas

Funkcijų aproksimavimo metodai splainais pirmą kartą buvo pasiūlyti 1940 metais, tačiau plačiau pradėti naudoti tik pastaruoju metu.

Pagrindinis aproksimavimų polinomų trūkumas tas, kad funkcijos, prašančios duomenis kažkurio taško aplinkoje, įneša pastebimą paklaidą ir tolimesniuose taškuose. Todėl panaudoję polinomų interpoliavimą duomenų intervale, tikslių rezultatų negausime.

Angliškas žodis „spline“ reiškia „lanksčią liniuotę“. Tokia lankstoma pagal eksperimentinius duomenų taškus funkcija gali būti aprašoma polinomais, su sąlyga, kad jų sritys galuose, funkcijos galai „suklijuojami“ taip, kad sujungimas nebūtų užlūžęs.

Toliau aptarsime splaino pritaikymo idėją. Visą aproksimavimo intervalą, kuriame ieškome atkuriamąją funkciją, suskaidome į mažesnius intervalus (zonas). Kiekvienoje zonoje aproksimavimo funkcija išreiškiama žemo laipsnio polinomu. Be to, pareikalaujama, kad polinominės funkcijos ir jų išvestinės besiribojančių zonų kraštuose sutaptų (1 pav.)



1 pav. Splainu pavaizduoti duomenys

Polinomų „suklijavimo“ galuose sąlyga:

$$P_{ni}(t_i) = P_{n(i-1)}(t_i),$$

t. y. n -tojo laipsnio splaino funkcijos, susidedančios iš duoto laipsnio polinomų „gabalėlių“, kurie sujungti taip, kad gauta funkcija būtų tolydi ir turėtų keletą tolydžių išvestinių.

Tokio vaizdo splainas vadinamas „gabalais“ polinomine funkcija. Nulinio laipsnio splainas sutampa su laipsnine interpoliuojama funkcija, o pirmojo laipsnio splainas – su tiesiškai interpoliuojama funkcija.

Pavyzdys. Vienalytė liniuotė tvirtinama kokiuose nors 2 taškuose ir jai duodame polinkį pagal tuos taškus. Tokios formos kreivės strypą nusako trečio laipsnio polinomas.

Tarkime, kad kubinė parabolė duota parametrine forma

$$P(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \quad (21)$$

praeina per 2 taškus $P(t_1)$ ir $P(t_2)$, kuriuose žinomos išvestinių $P'(t_1)$ ir $P'(t_2)$ reikšmės. Tai reiškia, kad yra duotos 4 būtinos ir pakankamos sąlygos tam, kad apibrėžtume keturis nežinomus koeficientus (21) išraiškoje. Šitokį polinomą vadiname *kubiniu Ermito interpoliaciniu polinomu*.

Parametrinė kreivės išraiška turi privalumą, kad galime laisvai išsirinkti norimą diapazoną, keičiant kreivės parametrus. Norėdami, kad skaičiavimo procesas būtų paprastesnis, laikysime, kad parametras t , apibrėžtas kiekviename segmente, kinta nuo 0 iki 1 ($0 \leq t \leq 1$).

Pastebime, kad $P(0) = a_0$, $P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$.

Apibrėšime išvestinę $P'(t)$: $P'(t) = 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1$.

Iš to seka, kad $P'(0) = a_1$, $P'(1) = 3a_3 + 2a_2 + a_1$.

Iš šių išraiškų galime rasti nežinomuosius a_0 , a_1 , a_2 , a_3 :

$$\begin{aligned} a_0 &= P(0), \\ a_1 &= P'(0), \\ a_2 &= 3[P(1) - P(0)] - 4P'(0) - P'(1), \\ a_3 &= 2[P(0) - P(1)] + P'(0) + P'(1). \end{aligned}$$

Tokia procedūra yra atliekama kiekvienai taškų porai. Tokiu būdu nustačius parabolės reikšmes $P(t_1)$ ir $P(t_2)$ intervalo t_1 ir t_2 galuose, reikia tas reikšmes sulygtinti su intervalo t_2 ir t_3 galuose esančiomis reikšmėmis. Tokia procedūra vadinama *susiuvimu arba suklijavimu*. [5]

1.5. NEAPIBRĖŽTŲ KOEFICIENTŲ METODAS

Tam, kad sudarytume skaitinio integravimo formules, galima pasinaudoti neapibrėžtu koeficientų metodu. Tuo tikslu pakeičiame išvestinę $y'(x_n)$ ir išraiškas $f(x_n, y(x_n))$ kažkokiomis išraiškomis

$$y'(x_n) \approx \sum_{i=0}^k \frac{a_{-i} y(x_{n-i})}{h}, \quad (22)$$

$$f(x_n, y(x_n)) \approx \sum_{i=0}^k b_{-i} f(x_{n-i}, y(x_{n-i})). \quad (23)$$

Turime galvoje, kad a_{-i} ir b_{-i} nepriklauso nuo h . Iš čia gauname apytikslią lygybę.

$$\sum_{i=0}^k \frac{a_{-i} y(x_{n-i})}{h} \approx \sum_{i=0}^k b_{-i} f(x_{n-i}, y(x_{n-i})). \quad (24)$$

Šią lygybę aprašo baigtinių skirtumų schema.

$$\sum_{i=0}^k \frac{a_{-i} y_{n-i}}{h} - \sum_{i=0}^k b_{-i} f_{n-i} = 0. \quad (25)$$

Dydis

$$r_n = \sum_{i=0}^k \frac{a_{-i} y(x_{n-i})}{h} - \sum_{i=0}^k b_{-i} f(x_{n-i}, y(x_{n-i})) = 0$$

yra vadinamas *diferencialinės lygties aproksimavimo lygčių sistemos (25) paklaida*.

Apibrėžimas. Skirtuminę schemą aproksimuoja diferencialinę lygtį atkarpoje $[x_0, x_0 + X]$, jeigu

$$\|r\| = \max_{x_0 \leq x_n \leq x_0 + X} |r_n| \rightarrow 0 \text{ i } h \rightarrow 0.$$

Turint galvoje, kad $f(x_{n-i}, y(x_{n-i})) = y'(x_{n-i})$ ir $x_{n-i} = x_n - ih$, gauname

$$r_n = \sum_{i=0}^k \frac{a_{-i} y(x_n - ih)}{h} - \sum_{i=0}^k b_{-i} y'(x_n - ih).$$

Tariame, kad visi sprendiniai iki eilės q apriboti:

$$|y^{(p)}(x)| \leq M_p < \infty \text{ ir } x_0 \leq x \leq x_0 + X, \quad p = 0, \dots, q.$$

Išreiškiame visus dydžius $y(x_n - ih)$ ir $y'(x_n - ih)$ su Teiloro formule:

$$y(x_n - ih) = \sum_{p=0}^{q-1} y^{(p)}(x_n) \frac{(-ih)^p}{p!} + \beta_n^i,$$

$$y'(x_n - ih) = \sum_{p=0}^{q-1} y^{(p)}(x_n) \frac{(-ih)^{p-1}}{(p-1)!} + \gamma_n^i,$$

kur pagal likusį Teiloro eilutės narį turime

$$|\beta_n^i| \leq M_q (ih)^q / q!, \quad |\gamma_n^i| \leq M_q (ih)^{q-1} / (q-1)!.$$

Irašydami išraiškas $y(x_n - ih)$ ir $y'(x_n - ih)$ į dešiniąją lygties pusę r_n ir surinkę visus koeficientus prie $y^{(p)}(x_n)$, gauname

$$r_n = E_0 h^{-1} y(x_n) + E_1 y'(x_n) + \dots + E_{q-1} h^{q-2} y^{(q-1)}(x_n) + \varepsilon_n, \quad (26)$$

čia

$$E_0 = \sum_{i=0}^k a_{-i},$$

$$E_0 = \sum_{i=0}^k \frac{a_{-i} (-i)^p}{p!} - \sum_{i=0}^k \frac{b_{-i} (-i)^{p-1}}{(p-1)!}, \quad p > 0, \quad (27)$$

$$E_0 = \sum_{i=0}^k \frac{a_{-i} \beta_n^i}{h} - \sum_{i=0}^k b_{-i} \gamma_n^i = O(h^{q-1}).$$

Turime

$$|\varepsilon_n| \leq D_q M_q h^{q-1},$$

kur

$$D_q = \sum_{i=0}^k |a_{-i}| \frac{i^q}{q!} + \sum_{i=0}^k |b_{-i}| \frac{i^{q-1}}{(q-1)!}.$$

Paprastai jeigu reikia atlikti tikslesnį įvertinimą, galime sumažinti įvartyje $|\varepsilon_n|$ dydį D_q . Jeigu $E_0 = \dots = E_m = 0$, iki $\varepsilon_n = O(h^m)$ ir sakome, kad tiesinių lygčių sistema

$$\begin{cases} C_1 y_1 - B_1 y_2 = F_1 + A_1 \mu_0, \\ -A_i y_{i-1} + C_i y_i - B_i y_{i+1} = F_i, i = 2, \dots, N-2, \\ -A_{N-1} y_{N-2} + C_{N-1} y_{N-1} = F_{N-1} + B_{N-1} \mu_1, \end{cases}$$

turi m -tosios eilės aproksimavimą. Bet kokia m -tosios eilės aproksimacija yra q eilės aproksimavimo schemeje, kai $q < m$. Jei $E_0 = \dots = E_m = 0$, o $E_{m+1} \neq 0$, tai sakome, kad *aproksimavimo eilė yra lygi m* .

Bet kokiai glotniai funkcijai $y(x)$ pagal (25), (23) gauname [4]:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^k \frac{a_{-i} y(x - ih)}{h} = y'(x), \quad (28)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^k b_{-i} f(x - ih, y(x - ih)) = f(x, y(x)).$$

1.6. MAŽIAUSIŲ KVADRATŲ METODO TAIKYMAS TIESINIŲ ALGEBRINIŲ LYGČIŲ SPRENDIMUI

Mažiausių kvadratų metodas taikomas algebrinių tiesinių lygčių apytiksliam sprendimui tada, kai lygčių skaičius yra didesnis už nežinomųjų skaičių ir tikslaus sprendinio gauti neįmanoma.

Tarkime, kad duotos trys tiesinės lygtys. Mažiausių kvadratų metodu nurodomas toks sprendinys - taškas A , kuriam visų trijų lygčių paklaidų kvadratų suma būtų minimali.

kurios kairiosios pusės matrica yra

$$\sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^N a_{km} a_{mn},$$

o dešinėsios pusės matrica [4]

$$\sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^N a_{km} b_n.$$

1.7. MATHCAD

MATHCAD’as – tai matematinis redaktorius, leidžiantis atlikti įvairiausių mokslinius ir inžinerinius skaičiavimus, pradedant elementariąja aritmetika ir baigiant sudėtingiausiais skaičiavimo metodais. MATHCAD’o naudotojai – studentai, mokslininkai, inžinieriai, įvairiausi technikos specialistai. Programa labai paprasta, turi didelę matematinių metodų biblioteką, puikias rezultatų vaizdavimo galimybes (grafikai, animacijos ir t.t.). Todėl Mathcad netruko tapti populiariausia matematinių skaičiavimų programa.

Matematinis programų paketas MATHCAD’as yra bene universaliausias – t.y., jis tinka tiek mokymuisi, tiek moksliniam darbui. Be to, nereikalauja ypatingų kompiuterio išteklių (spartos bei atmintinės talpos). Tačiau matematinio programų paketo MATHCAD’o simbolių skaičiavimų ir programavimo galimybės yra ribotos (t.y. labai sunku kurti savo programas ir funkcijas).

Pagrindinės MATHCAD’o funkcijos yra šios: skaičiavimo atlikimas su realaus tipo bei kompleksiniais kintamaisiais, su vektoriais, skaliariais ir matricomis; specialiųjų, elementariųjų, vartotojo, ir statistinių funkcijų panaudojimas; lygčių sprendimas; sumų ir integralų apskaičiavimas; simboliniai skaičiavimai; grafikų braižymas; programavimas.

MATHCAD’u galima apskaičiuoti įvairias kombinatorines išraiškas (pvz. faktorialą, derinių skaičių), integralus, eilučių sumų skaičių, nubraižyti 7 tipų grafikus ir kt. Taip pat MATHCAD’as leidžia atlikti turimų duomenų analizę ir parinkti geriausią nagrinėjamo objekto modelį. Galima įvesti bei išvesti skaitinius ir tekstinius duomenis bei dirbti su kintamųjų dimensijomis. Kartu su standartinėmis MS-OFFICE funkcijomis (FILE, EDIT, VIEW, INSERT, WINDOWS) galima naudoti MATHCAD’o įrankių juostas MATH, MATRIX, CALCULUS, CALCULATOR, GRAPH, SYMBOLICS ir kt.

MATHCAD’e galima apibrėžti ir įvesti įvairiausias funkcijas: trigonometrines; hiperbolines; atvirkštines trigonometrines; atvirkštines hiperbolines; rodyklines; logaritmines.

Be elementariųjų ir specialiųjų funkcijų dar yra ir vartotojo funkcijos. Funkcijos apibrėžiamos rašant funkcijos identifikatorių ir lokalinius bei globalinius kintamuosius.

Vartotojo funkcijos lokaliniai kintamieji aprašomi specialiosios funkcijos aprašymo viduje, o globaliniai – išorėje (t.y. kintamasis, kuriam priskiriama reikšmė – globalinis kintamasis). Kiekviena funkcija turi savo identifikatorių, pvz: $y := \sin(x)$.

2. UŽDAVINIO FORMULAVIMAS

Magistro darbe Puasono lygtį

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\rho \quad (1)$$

sprendžiame dviejų skirtingų „tilto“ funkcijų metodu:

1. Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcija

$$tilh(x, g, p, h) = \frac{1}{2} \left(th \left(\frac{x-g+p}{h} \right) - th \left(\frac{x-g-p}{h} \right) \right); \quad (2)$$

čia $tilh$ – hiperbolinio tangento „tilto“ funkcija, g – „tilto“ centro koordinatė, p – „tilto“ pusplotis, h – „tilto“ galų nuožulnumas.

2. Trigonometrine „tilto“ funkcija

$$tilt(x, g, p) = \cos \left(\pi \cdot \frac{x-g}{2p} \right)^2, \quad (-p < x-g \leq p), \quad (3)$$

čia $tilt$ – trigonometrinė „tilto“ funkcija, g – „tilto“ centro koordinatė, p – „tilto“ pusplotis.

Puasono lygtį spręsti klasikinių kubinių splineų metodu nepavyksta, nes atsiranda problemos splaino zonų ribose, kur antrosios išvestinės nėra tolydzios funkcijos. Kuo skiriasi klasikiniai splainai nuo mūsų siūlomų?

Kai sprendžiame klasikinių splineų metodu, turimą intervalą padaliname į dalis (zonas) ir kiekvienoje zonoje aproksimavimo funkciją išreiškiame polinomu. Be to, pareikalaujame, kad tų dalių sandūrose aproksimavimo funkcijos sprendiniai ir jų pirmos eilės išvestinės besiribojančių zonų kraštuose sutaptų. Tačiau jau nebereikalaujame, kad antros eilės išvestinės būtų lygios, t. y. nebereikalaujamas išvestinių glotnumas zonų ribose. Tokiu būdu zonų ribose gauname išvestinių lūžius. Vaizdžiai galima pasakyti, kad klasikinių splineų metodas suduria liniuotės galus (1 pav.).



1 pav. Splineų metodo iliustracija

O mūsų siūlomas būdas, t. y. „tilto“ funkcijų metodas, užtikrina bet kokios eilės išvestinių glotnumą visame intervale. Tai darome persidengiančiomis zonomis, t. y. kiekvienos dalies galus perdengiame, sulietimo zonose juos „paplonindami“ (2 pav.). Toks perdengimas tarsi duoda tvirtesnį suklįjavimą. „Tilto“ funkcijų metodu kiekvieną pailgintą, persidengiančią zoną aprašome polinomu, o bendrą sprendinį gauname sumuodami visų dalių

sprendinius. Mes naudosime hiperbolinio tangento „tilto“ funkciją ir trigonometrines „tilto“ funkcijas.



2 pav. „Tilto“ funkcijos metodo iliustracija

Šio metodo esmė: suskaidome visą sritį į atskiras persidengiančias zonas (tiltus) ir kiekvienoje sprendinį nusakome aproksimavimo polinomu, padaugintu iš tos zonos „tilto“ funkcijos. Bendras sprendinys yra lygus atskirų polinomų, padaugintų iš „tilto“ funkcijų, sumai.

3. PUASONO DVIMATĖS LYGTIES VIDINIŲ REIKŠMIŲ UŽDAVINIO SPRENDIMAS „TILTO“ FUNKCIJŲ METODAIS

3.1. HIPERBOLINIO TANGENTO „TILTO“ FUNKCIJOS SAVYBĖS

Puasono lygties (1) sprendimui naudojome „tilto“ funkcijas:

Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos (2) pagrindinės savybės (*Priedas Nr. 1*):

1. Sumos savybė:

$$\operatorname{tilh}(x, x_1, h, x_2 - x_1) + \operatorname{tilh}(x, x_2, h, x_3 - x_2) = \operatorname{tilh}(x, x_2, h, x_3 - x_1):$$

sugretinus N „tiltų“, gauname vieną „tiltą“, kurio plotis N kartų didesnis, t.y.

$$\sum_{n=1}^N \operatorname{tilh}(x, g, h, 2np) = \operatorname{tilh}(x, g, h, Np).$$

2. Integralo savybė – „tilto“ funkcijos plotas yra lygus pločiui $2p$:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\operatorname{th} \frac{x+p}{h} - \operatorname{th} \frac{x-p}{h} \right) dx = 2p.$$

3. Išvestinė:

Pažymėjus $y(x) = \operatorname{tilh}(x, g, h, p)$, gauname:

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \frac{1}{2h} \cdot \left(-\operatorname{th}^2 \frac{x+p}{h} + \operatorname{th}^2 \frac{x-p}{h} \right).$$

Taip pat apskaičiuojame hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos asimptotiką (*Priedas Nr. 2*). Pirmiausia apskaičiuojame asimptotės pobūdį į dešinę:

$$\frac{1}{2} \left(\operatorname{th} \frac{x+p}{hp} - \operatorname{th} \frac{x-p}{hp} \right) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{2}{h} \cdot e^{-\frac{2}{hp}x}, \text{ kai } x \rightarrow -\infty.$$

Analogiškai galime apskaičiuoti asimptotės pobūdį į kairę:

$$\frac{1}{2} \left(\operatorname{th} \frac{x+p}{hp} - \operatorname{th} \frac{x-p}{hp} \right) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{2}{h} \cdot e^{\frac{2}{hp}x}, \text{ kai } x \rightarrow +\infty.$$

Šitokia funkcija gali praversti sprendžiant paprastas diferencialines lygtis, turinčias analogiškas sprendinių asimptotes. Pavyzdžiui, Šredingerio lygties sprendiniai.

3.2. TRIGONOMETRINĖS „TILTO“ FUNKCIJOS SAVYBĖS

Trigonometrinės „tilto“ funkcijos (3) pagrindinės savybės (*Priedas Nr. 3*):

1. Sumos savybė – redukavus sinusą į kito argumento kosinusą, iš pagrindinės trigonometrinės tapatybės ($\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$) gauname:

$$\cos^2\left(\pi \cdot \frac{x}{2p}\right) + \cos^2\left(\pi \cdot \frac{x-p}{2p}\right) = 1.$$

2. Integralo savybė:

$$\int_0^{2p} \cos^2\left(\pi \cdot \frac{x}{2p}\right) dx + \int_p^{3p} \cos^2\left(\pi \cdot \frac{x-p}{2p}\right) dx = 2p.$$

3. Išvestinės savybė:

Pažymėjus $y(x) = \text{tilt}(x, g, p)$, gauname:

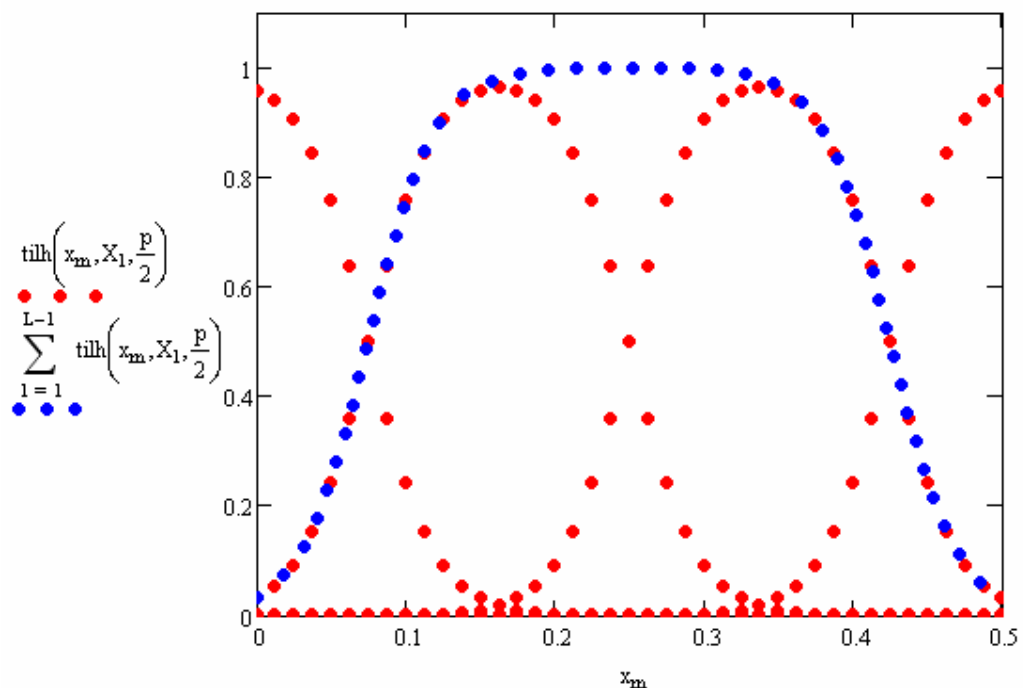
$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = -\frac{\pi}{2p} \cdot \sin\left(\pi \frac{x}{p}\right).$$

3.3. HIPERBOLINIO TANGENTO IR TRIGONOMETRINĖS „TILTO“ FUNKCIJŲ SUMOS GRAFIKAI

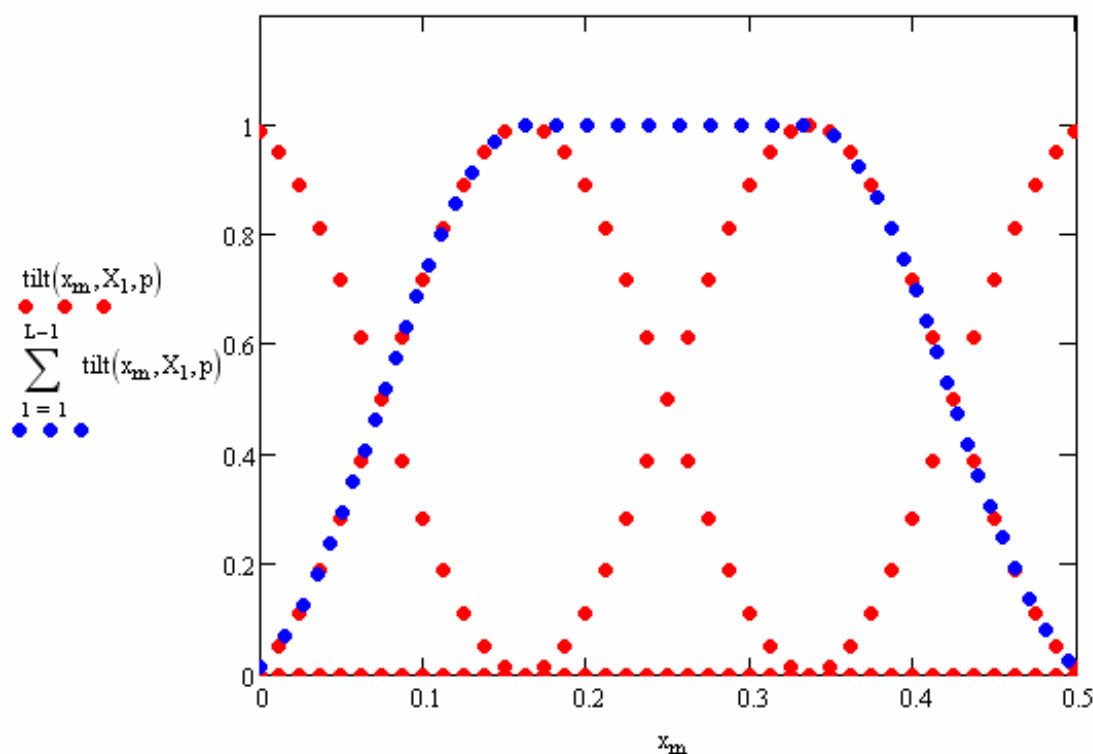
Sudėję atskiras „tilto“ funkcijas, gauname vienetinę funkciją, kurios atskiras zonas dauginsime iš skirtingų polinomų.

Galutinis sprendinys yra lygus atskirų polinomų, padaugintų iš „tilto“ funkcijų, sumai.

Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcija (2) (1 pav.) ir trigonometrinė „tilto“ funkcija (3) (2 pav.) pažymėta raudonu punktyru, o mėlynu punktyru pažymėta sumos: hiperbolinio tangento (2*) ir trigonometrinės „tilto“ funkcijos (3*).



1 pav. Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos suma



2 pav. Trigonometrinės „tilto“ funkcijos suma

3.4. HIPERBOLINIO TANGENTO „TILTO“ FUNKCIJOS ILIUSTRAVIMAS MATCHAD‘O PROGRAMA

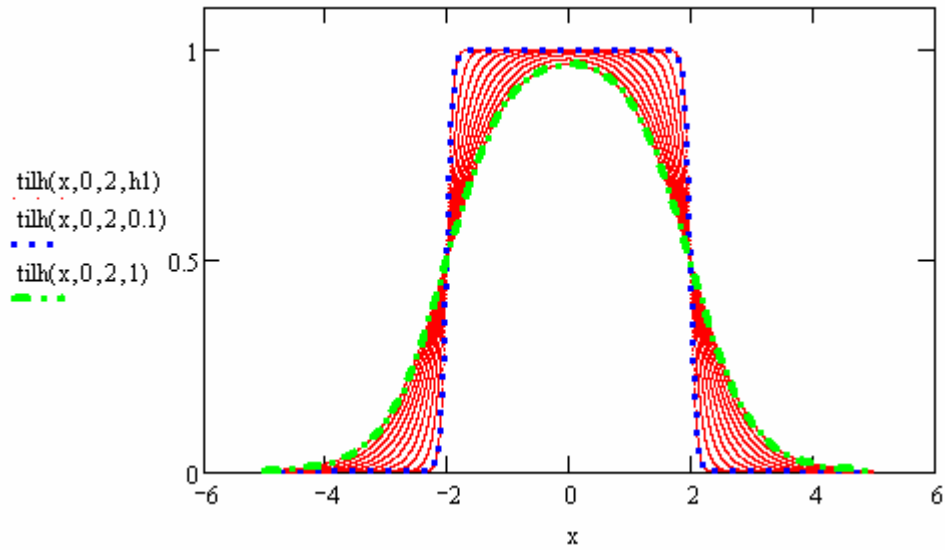
Parenkamas atitinkamas $X1$ – kairysis intervalo kraštas ir $X2$ – dešinysis intervalo kraštas, iš kurių pagal atitinkamas formules suskaičiuojama intervalo vidurio taškas (Xv) ir intervalo plotas (Xi); $h1$ – tilto nuožulnumas ir x – taškų koordinatės.

$$\begin{aligned} X1 &:= -5.0 & X2 &:= 5.0 & Xv &:= 0.5 \cdot (X1 + X2) & Xi &:= X2 - X1 \\ h1 &:= 0.1, 0.2..1 & & & & & x &:= X1, X1 + 0.002.. X2 \end{aligned}$$

Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijoje bei pirmojoje ir antrojoje išvestinėse grafikuose mėlynu pažymėti mažiausias tilto nuožulnumas $h = 0.1$, žaliu pažymėti didžiausias tilto nuožulnumas $h = 1$. Raudonos linijos yra tarpinės reikšmės tarp mažiausio ir didžiausio tilto nuožulnumo h (Priedas Nr. 4).

Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcija pagal x ir jos grafikas su įvairiais nuožulnumais h :

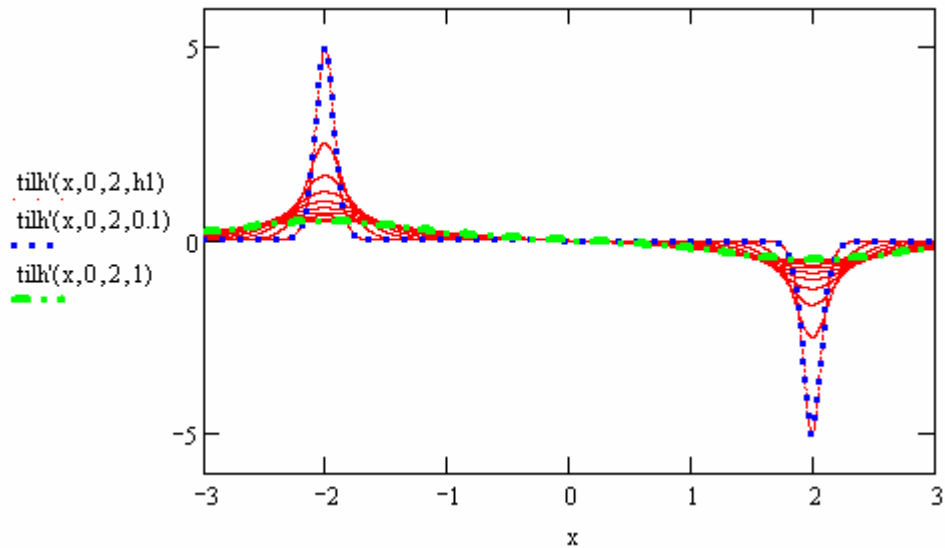
$$\text{tilh}(x, g, p, h) := \frac{1}{2} \cdot \left(\tanh\left(\frac{x - g + p}{p \cdot h}\right) - \tanh\left(\frac{x - g - p}{p \cdot h}\right) \right)$$



3 pav. „Tilto“ funkcijos su įvairiais nuožulnumais h grafikai

Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos pirmoji išvestinė pagal x ir jos grafikas su įvairiais nuožulnumais h :

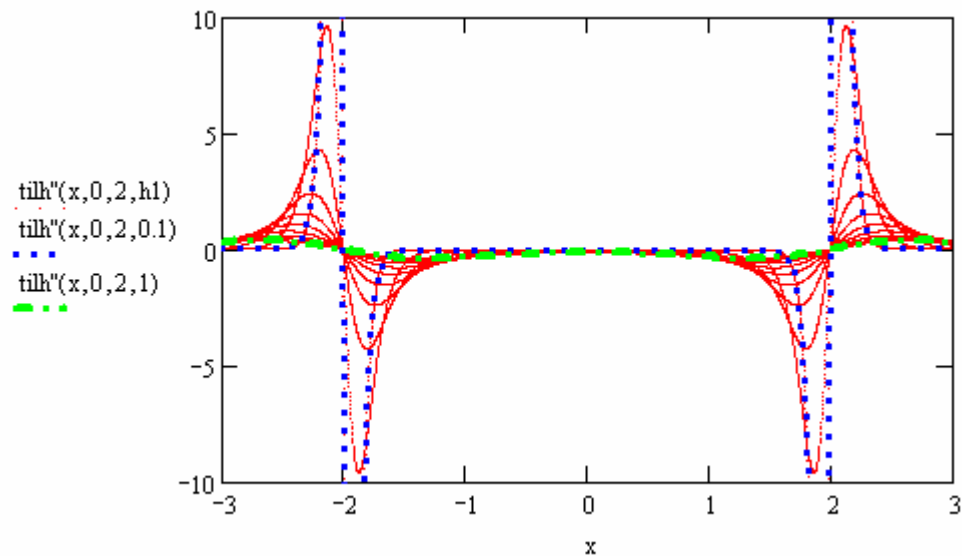
$$\text{tilh}'(x, g, p, h) := \frac{1}{2 \cdot h} \cdot \left(-\tanh\left(\frac{x - g + p}{h}\right)^2 + \tanh\left(\frac{x - g - p}{h}\right)^2 \right)$$



4 pav. Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos pirmosios išvestinės su įvairiais nuožulnumais h grafikai

Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos antroji išvestinė pagal x ir jos grafikas su įvairiais nuožulnumais h :

$$\text{tilh}''(x, g, p, h) := \frac{1}{h \cdot h} \left(-\tanh\left(\frac{x - g + p}{h}\right) + \tanh\left(\frac{x - g - p}{h}\right) + \tanh\left(\frac{x - g + p}{h}\right)^3 - \tanh\left(\frac{x - g - p}{h}\right)^3 \right)$$



5 pav. Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos antrosios išvestinės su įvairiais nuožulnumais h grafikai

Išvada: kuo tilto nuožulnumas h mažesnis, tuo išvestinių grafikų smaigaliai aukščiau, ypač antrosios išvestinės.

3.5. PUASONO LYGTIES SPRENDIMO, PANAUDOJANT HIPERBOLINIO TANGENTO IR TRIGONOMETRINĖS „TILTO“ FUNKCIJAS, ALGORITMAS

Mes nagrinėsime du modelius. I modelį kuriame taip: pasirenkame funkciją $U1$:

$$U1(x, y) = e^{(-\alpha x^2 - \beta y^2)}.$$

Įrašę šią funkciją į Puasono lygtį, nustatome, kokiam krūviui ρ sprendinys yra būtent ši funkcija $U1$. Tai padarome du kartus diferencijuodami $U1$ pagal x ir pagal y . Gauname tokią krūvio išraišką:

$$\rho(x, y) = 2 \cdot \left[-\alpha - \beta + 2 \cdot (\alpha \cdot x)^2 + 2 \cdot (\beta \cdot y)^2 \right] \cdot e^{-\alpha x^2 - \beta y^2}.$$

II modelį konstruojame taip: funkciją $U1$ papildome harmonine funkcija ir gauname tokią išraišką:

$$U1(x, y) = e^{(-\alpha x^2 - \beta y^2)} + e^x \cdot \cos y + e^y \cdot \cos x + 1,6 \cdot x \cdot y.$$

Kadangi harmoninė funkcija yra Laplaso lygties sprendinys, tai jos buvimas krūvio tankio nekeičia. Krūvio tankis lieka toks pat kaip ir I modelyje. Taigi, formuluojuame uždavinį I ir II modeliams.

I ir II modelių aprašymas: I modelyje yra tik krūviai mūsų nagrinėjamoje srityje ir sprendžiame Puasono lygtis, nusakant funkciją U , kurią sukuria mūsų nagrinėjamoje srityje esantys šaltiniai. II modelyje be nagrinėjamoje srityje esančių šaltinių yra išoriniai, ne šioje srityje, ir jie sukuria mūsų nagrinėjamoje srityje harmonines funkcijas, aprašomas Laplaso lygtimis. I modelyje duotas krūvio pasiskirstymas duotoje srityje ir duotos kai kuriuose taškuose funkcijos U_1 reikšmės. II modelyje analogiškai duotos šaltinių reikšmės ir kai kuriuose taškuose funkcijos U_1 reikšmės. Abiejuose modeliuose reikia rasti bendrą funkciją U duotoje srityje. Abiem atvejais sprendinio ieškome „tilto“ funkcijų metodu. Ir viename, ir kitame modelyje žinodami tikrąsias funkcijos U reikšmes visuose srities taškuose, tikriname, ar mūsų metodu gautos reikšmės pakankamai artimos joms.

Puasono lygties (1) sprendinio hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos metodu visuose taškuose ieškome tokiu pavidalu:

$$U(x, y) = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^J (c_{in(n,l,j)} \cdot \tilde{t}ilh(x, g, p, h) \cdot \tilde{t}ilh(y, g', q, h) \cdot \text{pol}(x, y, g, g', p, q, n)), \quad (4)$$

o trigonometrinei „tilto“ funkcijai Puasono lygties (1) sprendinio ieškome šitokiu pavidalu:

$$U(x, y) = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^J (c_{in(n,l,j)} \cdot \tilde{t}ilt(x, g, p) \cdot \tilde{t}ilt(y, g', q) \cdot \text{pol}(x, y, g, g', p, q, n)), \quad (5)$$

čia

$$c_{in(n,l,j)=n+N1 \cdot l + N1 \cdot L1 \cdot j}$$

- neapibrėžtieji koeficientai. Toliau šių c koeficientų indeksą nusakysime funkcija –

$$in(n, l, j, k) = n + N1 \cdot l + N1 \cdot L1 \cdot j. \quad (6)$$

g - „tilto“ funkcijų centrai x ašyje:

$$g = Xv + p \cdot (l - 0.5L),$$

čia Xv – intervalo vidurio taškas; L – „tilto“ funkcijų skaičius, l – tilto centrų koordinatų X indeksai ir p – „tilto“ pusplotis x ašyje.

g' - „tilto“ funkcijų centrai y ašyje:

$$g' = Yv + q \cdot (j - 0.5J),$$

čia Yv – intervalo vidurio taškas; J – „tilto“ funkcijų skaičius, j - tilto centrų koordinatų Y indeksai ir q – „tilto“ pusplotis y ašyje.

$\text{pol}(x, y, g, g', p, q, n)$ - dvinario polinomo narys, išreikštas per kintamuosius x ir y :

$$pol(x, y, g, g', p, q, n) = \left(\frac{x-g}{p} \right)^{Q_{n,0}} \cdot \left(\frac{y-g'}{q} \right)^{Q_{n,1}},$$

čia $Q_{n,0}$ ir $Q_{n,1}$ - polinomo narių laipsnių rodikliai.

3.5.1. Sprendimas naudojant hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijas

Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcija, kai argumentas x :

$$tilh(x, g, p, h) = \frac{1}{2} \cdot \left(th \left(\frac{x-g+p}{p \cdot h} \right) - th \left(\frac{x-g-p}{p \cdot h} \right) \right)$$

ir hiperbolinio tangento „tilto“ funkcija, kai argumentas y :

$$tilh(y, g', q, h) = \frac{1}{2} \cdot \left(th \left(\frac{t-g'+q}{q \cdot h} \right) - th \left(\frac{t-g'-q}{q \cdot h} \right) \right).$$

Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijų išvestinės (pirmoji ir antroji) pagal x :

$$tilh'_x(x, g, p, h) = \frac{1}{2 \cdot p \cdot h} \cdot \left(-th \left(\frac{x-g+p}{p \cdot h} \right)^2 + th \left(\frac{x-g-p}{p \cdot h} \right)^2 \right),$$

$$tilh''_x(x, g, p, h) = \frac{1}{p^2 \cdot h^2} \cdot \left(-2 \cdot tilh(x, g, p) + th \left(\frac{x-g+p}{p \cdot h} \right)^3 - th \left(\frac{x-g-p}{p \cdot h} \right)^3 \right).$$

Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijų išvestinės (pirmoji ir antroji) pagal y :

$$tilh'_y(y, g', q, h) = \frac{1}{2 \cdot q \cdot h} \cdot \left(-th \left(\frac{y-g'+q}{q \cdot h} \right)^2 + th \left(\frac{y-g'-q}{q \cdot h} \right)^2 \right),$$

$$tilh''_y(y, g', q, h) = \frac{-th \left(\frac{y-g'+q}{q \cdot h} \right) + th \left(\frac{y-g'-q}{q \cdot h} \right)^2 + th \left(\frac{y-g'+q}{q \cdot h} \right)^3 - th \left(\frac{y-g'-q}{q \cdot h} \right)^3}{q^2 \cdot h^2}$$

Apskaičiuojame polinominių narių pirmąją išvestinę pagal x ir pagal y :

$$pol'_x(x, y, g, g', p, q, n) = \frac{Q_{n,0}}{p} \cdot \left[\left(\frac{x-g}{p} \right)^{|Q_{n,0}-1|} \cdot \left(\frac{y-g'}{q} \right)^{Q_{n,1}} \right],$$

ir

$$pol'_y(x, y, g, g', p, q, n) = \frac{Q_{n,1}}{q} \cdot \left[\left(\frac{x-g}{p} \right)^{Q_{n,0}} \cdot \left(\frac{y-g'}{q} \right)^{|Q_{n,1}-1|} \right].$$

Apskaičiuojame polinominių narių antrąją išvestinę pagal x ir pagal y :

$$pol''_x(x, y, g, g', p, q, n) = \frac{(Q_{n,0})^2 - Q_{n,0}}{p^2} \cdot \left[\left(\frac{x-g}{p} \right)^{|Q_{n,0}-2|} \cdot \left(\frac{y-g'}{q} \right)^{Q_{n,1}} \right],$$

ir

$$pol_y''(x, y, g, g', p, q, n) = \frac{(Q_{n,1})^2 - Q_{n,1}}{q^2} \cdot \left[\left(\frac{x-g}{p} \right)^{Q_{n,0}} \cdot \left(\frac{y-g'}{q} \right)^{|Q_{n,1}-2|} \right].$$

Sudauginame „tilto“ funkcijas (pagal x ir pagal y) ir polinoma:

$$di(x, y, g, g', p, q, n) = tilh(x, g, p, h) \cdot tilh(y, g', q, h) \cdot pol(x, y, g, g', p, q, n).$$

Apskaičiuojame tos funkcijos antrąsias išvestines pagal x ir pagal y ašis:

$$di_x''(x, y, g, g', p, q, n) = tilh(x, g, p, h) \cdot pol_x''(x, y, g, g', p, q, n) \cdot tilh(y, g', q, h) + \\ + 2 \cdot tilh'_x(x, g, p, h) \cdot pol'_x(x, y, g, g', p, q, n) \cdot tilh(y, g', q, h) + \\ + tilh_x''(x, g, p, h) \cdot pol(x, y, g, g', p, q, n) \cdot tilh(y, g', q, h),$$

$$di_y''(x, y, g, g', p, q, n) = tilh(y, g', q, h) \cdot pol_y''(x, y, g, g', p, q, n) \cdot tilh(x, g, p, h) + \\ + 2 \cdot tilh'_y(y, g', q, h) \cdot pol'_y(x, y, g, g', p, q, n) \cdot tilh(x, g, p, h) + \\ + tilh_y''(y, g', q, h) \cdot pol(x, y, g, g', p, q, n) \cdot tilh(x, g, p, h).$$

3.5.2. Sprendimas naudojant trigonometrines „tilto“ funkcijas

Trigonometrinė „tilto“ funkcija pagal x :

$$tilt(x, g, p) = \cos\left(\pi \cdot \frac{x-g}{2p}\right), (-p < x-g \leq p)$$

ir trigonometrinė „tilto“ funkcija pagal y :

$$tilt(y, g', q) = \cos\left(\pi \cdot \frac{y-g'}{2q}\right), (-q < y-g' \leq q).$$

Trigonometrinių „tilto“ funkcijų išvestinės (pirmoji ir antroji) pagal x :

$$tilt'_x(x, g, p) = -\frac{\pi}{2p} \sin\left(\pi \cdot \frac{x-g}{p}\right), (-p < x-g \leq p)$$

ir

$$tilt''_x(x, g, p) = -\frac{\pi^2}{2p^2} \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{x-g}{p}\right), (-p < x-g \leq p).$$

Trigonometrinių „tilto“ funkcijų išvestinės (pirmoji ir antroji) pagal y :

$$tilt'_y(y, g', q) = \cos\left(\pi \cdot \frac{y-g'}{2q}\right), (-q < y-g' \leq q)$$

ir

$$tilt''_y(y, g', q) = \cos\left(\pi \cdot \frac{y-g'}{2q}\right), (-q < y-g' \leq q).$$

Apskaičiuojame polinominių narių pirmąją išvestinę pagal x ir pagal y :

$$pol'_x(x, y, g, g', p, q, n) = \frac{Q_{n,0}}{p} \cdot \left[\left(\frac{x-g}{p} \right)^{|Q_{n,0}-1|} \cdot \left(\frac{y-g'}{q} \right)^{Q_{n,1}} \right],$$

ir

$$pol'_y(x, y, g, g', p, q, n) = \frac{Q_{n,1}}{q} \cdot \left[\left(\frac{x-g}{p} \right)^{Q_{n,0}} \cdot \left(\frac{y-g'}{q} \right)^{|Q_{n,1}-1|} \right].$$

Apskaičiuojame polinominių narių antrąją išvestinę pagal x ir pagal y :

$$pol''_x(x, y, g, g', p, q, n) = \frac{(Q_{n,0})^2 - Q_{n,0}}{p^2} \cdot \left[\left(\frac{x-g}{p} \right)^{|Q_{n,0}-2|} \cdot \left(\frac{y-g'}{q} \right)^{Q_{n,1}} \right],$$

ir

$$pol''_y(x, y, g, g', p, q, n) = \frac{(Q_{n,1})^2 - Q_{n,1}}{q^2} \cdot \left[\left(\frac{x-g}{p} \right)^{Q_{n,0}} \cdot \left(\frac{y-g'}{q} \right)^{|Q_{n,1}-2|} \right].$$

Sudauginame „tilto“ funkcijas (pagal x ir pagal y) ir polinomą:

$$di(x, y, g, g', p, q, n) = tilt(x, g, p) \cdot tilt(y, g', q) \cdot pol(x, y, g, g', p, q, n).$$

Apskaičiuojame tos funkcijos antrąsias išvestines pagal x ir pagal y ašis:

$$\begin{aligned} di''_x(x, y, g, g', p, q, n) &= tilt(x, g, p) \cdot pol''_x(x, y, g, g', p, q, n) \cdot tilt(y, g', q) + \\ &+ 2 \cdot tilt'_x(x, g, p) \cdot pol'_x(x, y, g, g', p, q, n) \cdot tilt(y, g', q) + \\ &+ tilt''_x(x, g, p) \cdot pol(x, y, g, g', p, q, n) \cdot tilt(y, g', q), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} di''_y(x, y, g, g', p, q, n) &= tilt(y, g', q) \cdot pol''_y(x, y, g, g', p, q, n) \cdot tilt(x, g, p) + \\ &+ 2 \cdot tilt'_y(y, g', q) \cdot pol'_y(x, y, g, g', p, q, n) \cdot tilt(x, g, p) + \\ &+ tilt''_y(y, g', q) \cdot pol(x, y, g, g', p, q, n) \cdot tilt(x, g, p). \end{aligned}$$

3.5.3. Algebrainių lygčių sistema Puasono lygties sprendinio neapibrėžtiesiems koeficientams nustatyti

Nežinomųjų gauname $N1 \cdot L1 \cdot J1$ skaičių. Parenkame taškų skaičių $M1 \cdot R1$, kuriuose turi būti tenkinama Puasono lygtis ir sudarome koeficientų prie nežinomųjų c matricą:

$$A_{m+M1 \cdot r, in(n, l, j)} = di''_x(x_m, y_r, g, g', p, q, n) + di''_y(x_m, y_r, g_l, g', p, q, n).$$

Parenkame bet kaip išsidėsčiusių taškų skaičių. Iš sąlygos, kad tuose taškuose mūsų ieškomas sprendinys būtų lygus tikrajam sprendiniui U , sudarome matricą:

$$A_{M+M1 \cdot R+1+m1, in(n, l, j)} = di(X'_{m1}, Y'_{m1}, g, g', p, q, n) \cdot H,$$

čia H – svoris.

Apskaičiavę duotojo sprendinio ir svorio sandaugą ir suradę tikrąjį sprendinį tuose taškuose, apskaičiuojame Puasono lygties dešiniąją pusę:

$$B_{m+M1-r} = \rho(x_m, y_r).$$

Ši Puasono lygties uždavinį suvedėme į tiesinę algebrinių lygčių su nežinomaisiais C sistemą:

$$A \cdot C = B,$$

kurią sprendžiame mažiausių kvadratų metodu su sąlyga, kad lygčių skaičius žymiai viršija nežinomųjų (parametrų) $c_{in(l,n,j,k)}$ skaičių (6).

3.6. PUASONO LYGTIES SPRENDIMO „TILTO“ FUNKCIJŲ METODU REALIZACIJA MATCHAD‘O PROGRAMA

Naudodamiesi matematiniu kompiuterio paketu Matchad sudarėme originalias skaitinio sprendimo programas. Žemiau aprašyta mūsų sudaryta programa, sprendžianti Puasono lygtį, panaudojant hiperbolinio tangento bei trigonometrines „tilto“ funkcijas (*Priedai Nr. 5 - 8*).

Pasirenkame trigonometrinės ir hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijų metodui tas pačias ieškomojo sprendinio sritis.

$$\begin{array}{llll} X1 := 0 & X2 := 2 & Xv := 0.5(X1 + X2) & Xi := X2 - X1 \\ Y1 := 0 & Y2 := 2 & Yv := 0.5(Y1 + Y2) & Yi := Y2 - Y1 \\ \alpha := 0.5 & \beta := 1 & & \end{array}$$

Čia: $X1$ – pradinis taškas x ašyje; $X2$ – baigtinis taškas x ašyje; iš kurių pagal atitinkamas formules suskaičiuojama intervalo vidurio taškas Xv ir intervalo plotis Xi . Analogiškai, $Y1$ – pradinis taškas y ašyje; $Y2$ – baigtinis taškas y ašyje; iš kurių pagal atitinkamas formules suskaičiuojama intervalo vidurio taškas Yv ir intervalo plotis Yi . α, β - parenkami koeficientai.

Parenkame tokį sprendinį $U1$, kad tenkintų Puasono lygtį.

I modelis: pasirenkame $U1$ štai tokiu pavidalu:

$$U1(x,y) := \exp(-\alpha x^2 - \beta y^2)$$

II modelis: pasirenkame $U1$ štai tokiu pavidalu:

$$U1(x,y) := \exp(-\alpha x^2 - \beta y^2) + e^x \cdot \cos(y) + e^y \cdot \cos(x) + 1.6x \cdot y$$

Paveikę $U1$ Laplaso operatoriumi gauname krūvio tankį ρ , o toliau spendžiame atvirkštinį uždavinį, t. y. su duotuoju ρ ir duotais $U1$ kaikuriuose atsitiktiniuose taškuose, randame U visuose duotos lygties taškuose.

$$\rho(x,y) := 2 \cdot \left[-\alpha - \beta + 2(\alpha \cdot x)^2 + 2(\beta \cdot y)^2 \right] \cdot e^{-\alpha \cdot x^2 - \beta \cdot y^2}$$

Pasirenkame: h – nuolydžio parametro reikšmę; $N1$ – išdėstymo dvimate Teiloro eilute narių skaičių; nustatome N – paskutinio nario numerį; n – eilutės nario indeksai.

$$h := 0.5 \quad N1 := 36 \quad N := N1 - 1 \quad n := 0..N$$

Įvedame hiperbolinio tangento „tilto“ funkciją bei apskaičiuojame jos pirmąją ir antrąją išvestines, kur g – „tilto“ funkcijos centras, o p – „tilto“ pusplotis.

Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcija pagal x :

$$\text{tilh}(x, g, p, h) := \frac{1}{2} \left(\tanh\left(\frac{x - g + p}{p \cdot h}\right) - \tanh\left(\frac{x - g - p}{p \cdot h}\right) \right)$$

Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos pirmoji ir antroji išvestinė pagal x :

$$\text{tilh}'(x, g, p, h) := \frac{1}{2 \cdot h} \left(-\tanh\left(\frac{x - g + p}{h}\right)^2 + \tanh\left(\frac{x - g - p}{h}\right)^2 \right);$$

$$\text{tilh}''(x, g, p, h) := \frac{1}{h \cdot h} \left(-\tanh\left(\frac{x - g + p}{h}\right) + \tanh\left(\frac{x - g - p}{h}\right) + \tanh\left(\frac{x - g + p}{h}\right)^3 - \tanh\left(\frac{x - g - p}{h}\right)^3 \right)$$

Trigonometrinė „tilto“ funkcija bei jos pirmoji ir antroji išvestinės:

$$\text{tilt}(x, g, p) := \cos\left(\pi \cdot \frac{x - g}{2p}\right) \cdot (-p < x - g \leq p)$$

$$\text{tilt}'(x, g, p) := \frac{-\pi}{2p} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x - g}{p}\right) \cdot (-p < x - g \leq p)$$

$$\text{tilt}''(x, g, p) := \frac{-\pi^2}{2p^2} \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{x - g}{p}\right) \cdot (-p < x - g \leq p)$$

Abiejų „tilto“ funkcijų aproksimavimo polinomo narys yra lygus:

$$\text{pol}(x, y, g, g', p, q, n) := \left(\frac{x - g}{p}\right)^{Q_{n,0}} \cdot \left(\frac{y - g'}{q}\right)^{Q_{n,1}}$$

čia g – centras pagal x ašį, o g' – centras pagal y ašį.

Jo pirmoji išvestinė pagal x ir pagal y yra atitinkamai lygios:

$$\text{pol}^n x(x, y, g, g', p, q, n) := \frac{Q_{n,0}}{p} \left[\left(\frac{x-g}{p} \right)^{|Q_{n,0}-1|} \cdot \left(\frac{y-g'}{q} \right)^{Q_{n,1}} \right]$$

$$\text{pol}^n y(x, y, g, g', p, q, n) := \frac{Q_{n,1}}{q} \cdot \left(\frac{x-g}{p} \right)^{Q_{n,0}} \cdot \left(\frac{y-g'}{q} \right)^{|Q_{n,1}-1|}$$

Antroji išvestinė pagal x ir pagal y yra atitinkamai lygios:

$$\text{pol}^{n,0} x(x, y, g, g', p, q, n) := \frac{(Q_{n,0})^2 - Q_{n,0}}{p^2} \left[\left(\frac{x-g}{p} \right)^{|Q_{n,0}-2|} \cdot \left(\frac{y-g'}{q} \right)^{Q_{n,1}} \right]$$

$$\text{pol}^{n,0} y(x, y, g, g', p, q, n) := \frac{(Q_{n,1})^2 - Q_{n,1}}{q^2} \cdot \left(\frac{x-g}{p} \right)^{Q_{n,0}} \cdot \left(\frac{y-g'}{q} \right)^{|Q_{n,1}-2|}$$

Tuomet hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijas padauginame iš vieno polinomo (Teiloro) eilutės nario ir apskaičiuojame hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos padaugintos iš polinomo nario antrąsias išvestines pagal x ir pagal y :

$$d(x, y, g, g', p, q, n) := \text{tilh}(x, g, p, h) \cdot \text{tilh}(y, g', q, h) \cdot \text{pol}(x, y, g, g', p, q, n)$$

$$d'(x, y, g, g', p, q, n) := \text{tilh}'(x, g, p, h) \cdot \text{pol}(x, y, g, g', p, q, n) + 2 \cdot \text{tilh}(x, g, p, h) \cdot \text{pol}'(x, y, g, g', p, q, n)$$

$$d^{i,0} x(x, y, g, g', p, q, n) := [(d'(x, y, g, g', p, q, n) + \text{tilh}''(x, g, p, h) \cdot \text{pol}(x, y, g, g', p, q, n)) \cdot \text{tilh}(y, g', q, h)]$$

$$d1(x, y, g, g', p, q, n) := \text{tilh}(y, g', q, h) \cdot \text{pol}^{n,0} y(x, y, g, g', p, q, n) + 2 \cdot \text{tilh}'(y, g', q, h) \cdot \text{pol}' y(x, y, g, g', p, q, n)$$

$$d^{i,0} y(x, y, g, g', p, q, n) := (d1(x, y, g, g', p, q, n) + \text{tilh}''(y, g', q, h) \cdot \text{pol}(x, y, g, g', p, q, n)) \cdot \text{tilh}(x, g, p, h)$$

Bei trigonometrines „tilto“ funkcijas padauginame iš vieno polinomo (Teiloro) eilutės nario ir apskaičiuojame trigonometrines „tilto“ funkcijos padaugintos iš polinomo nario antrąsias išvestines pagal x ir pagal y :

$$d(x, y, g, g', p, q, n) := \text{tilt}(x, g, p) \cdot \text{tilt}(y, g', q) \cdot \text{pol}(x, y, g, g', p, q, n)$$

$$d'(x, y, g, g', p, q, n) := \text{tilt}'(x, g, p) \cdot \text{pol}(x, y, g, g', p, q, n) + 2 \cdot \text{tilt}(x, g, p) \cdot \text{pol}'(x, y, g, g', p, q, n)$$

$$d^{i,0} x(x, y, g, g', p, q, n) := [(d'(x, y, g, g', p, q, n) + \text{tilt}''(x, g, p) \cdot \text{pol}(x, y, g, g', p, q, n)) \cdot \text{tilt}(y, g', q)]$$

$$d1(x, y, g, g', p, q, n) := \text{tilt}(y, g', q) \cdot \text{pol}^{n,0} y(x, y, g, g', p, q, n) + 2 \cdot \text{tilt}'(y, g', q) \cdot \text{pol}' y(x, y, g, g', p, q, n)$$

$$d^{i,0} y(x, y, g, g', p, q, n) := (d1(x, y, g, g', p, q, n) + \text{tilt}''(y, g', q) \cdot \text{pol}(x, y, g, g', p, q, n)) \cdot \text{tilt}(x, g, p)$$

Suvienodinus trigonometrinei ir hiperbolinei tangento „tilto“ funkcijai visus parametrus ir parinkus neapibrėžtų parametų skaičių vienodą $N1 \cdot L1 \cdot J1 = 576$, gauname šitokius parametrus:

$$L1 := 4 \quad \underline{L} := L1 - 1 \quad \underline{l} := 0..L \quad J1 := 4 \quad \underline{J} := J1 - 1 \quad j := 0..J \quad N1 \cdot L1 \cdot J1 = 576$$

$$p := \frac{X1}{L - 1} \quad p = 1 \quad X_1 := Xv + p \cdot (1 - 0.5L) \quad q := \frac{Y1}{J - 1} \quad q = 1 \quad Y_j := Yv + q \cdot (j - 0.5J)$$

$$M := 40 \quad M1 := M + 1 \quad \underline{m} := 0..M \quad x_m := X1 + X1 \cdot \frac{m}{M}$$

$$\underline{R} := 40 \quad R1 := R + 1 \quad r := 0..R \quad y_r := Y1 + Y1 \cdot \frac{r}{R} \quad M1 \cdot R1 = 1681$$

$$\underline{in}(n, l, j) := n + N1 \cdot l + N1 \cdot L1 \cdot j$$

Čia $L1$ – „tilto“ funkcijos x ašies kryptimi skaičius; L – paskutinio nario numeris; l – indeksai; $J1$ – „tilto“ funkcijos y ašies kryptimi skaičius; J – paskutinio nario numeris; j – indeksai; $N1 \cdot L1 \cdot J1$ - neapibrėžtų parametrų skaičius; p - atskiro „tilto“ plotis x ašyje; X_1 - „tilto“ funkcijų centrai x ašyje; q – atskiro „tilto“ plotis y ašyje; Y_j - „tilto“ funkcijų centrai y ašyje; $M1$ – „tvarkingai išsidėsčiusių“ taškų x ašyje skaičius; M – paskutinio skaičiaus indeksas; m – aproksimavimo taško x ašyje indeksas; x_m - aproksimavimo taškų x ašyje koordinatės; $R1$ – „tvarkingai išsidėsčiusių“ taškų y ašyje skaičius; R – paskutinio skaičiaus indeksas; r – aproksimavimo taško y ašyje indeksas; y_r - aproksimavimo taškų y ašyje lygčių skaičius; $in(n, l, j)$ – sutrumpinta indeksų funkcija.

Sudarome matricą iš reikalavimo, kad būtų patenkinta Puasono lygtis su duotuoju krūvio tankiu:

$$\underline{A}_{M+M1, R, in(n, l, j)} := d^l x(x_m, y_r, X_1, Y_j, p, q, n) + d^l y(x_m, y_r, X_1, Y_j, p, q, n)$$

Įvedame „chaotiškai išsidėsčiusių“ kontrolinių taškų skaičių pagal x ir pagal y ašis:

$$M' := 99$$

$$m1 := 0..M' \quad X'_{m1} := X1 + rnd(X1) \quad Y'_{m1} := Y1 + rnd(Y1)$$

čia X'_{m1} - „chaotiškai išsidėsčiusių“ kontrolinių taškų koordinatės pagal x ašį; Y'_{m1} - „chaotiškai išsidėsčiusių“ kontrolinių taškų koordinatės pagal y ašį; viso kontrolinių taškų skaičius yra $(M' + 1)^2$.

Kadangi „tvarkingai išsidėsčiusių“ taškų skaičius yra 1681, o „chaotiškai išsidėsčiusių“ taškų skaičius yra 10^3 , t. y. „tvarkingai išsidėsčiusių“ taškų skaičius mažesnis už „chaotiškai išsidėsčiusių“ taškų skaičių, tai įvedame svorį H ir sudarome matricą, kad būtų patenkinta Laplaso lygties harmoninės funkcijos daliai:

$$\underline{H} := 20$$

$$\underline{A}_{M+M1, R+1+m1, in(n, l, j)} := d^l (X'_{m1}, Y'_{m1}, X_1, Y_j, p, q, n) \cdot H$$

Apskaičiuojame sprendinio, kuris priklauso nuo atsitiktinai parinktų koordinačių, ir svorio sandaugą:

$$B_{M+M1 \cdot R+1+m1} := U1(X_{m1}, Y_{m1}) \cdot H$$

Tuomet randame tikrąjį sprendinį duotuose taškuose:

$$u1_{m,r} := U1(x_m, y_r)$$

Apskaičiuojame Puasono lygties dešiniąją pusę, t. y. randame krūvio tankio stulpelį:

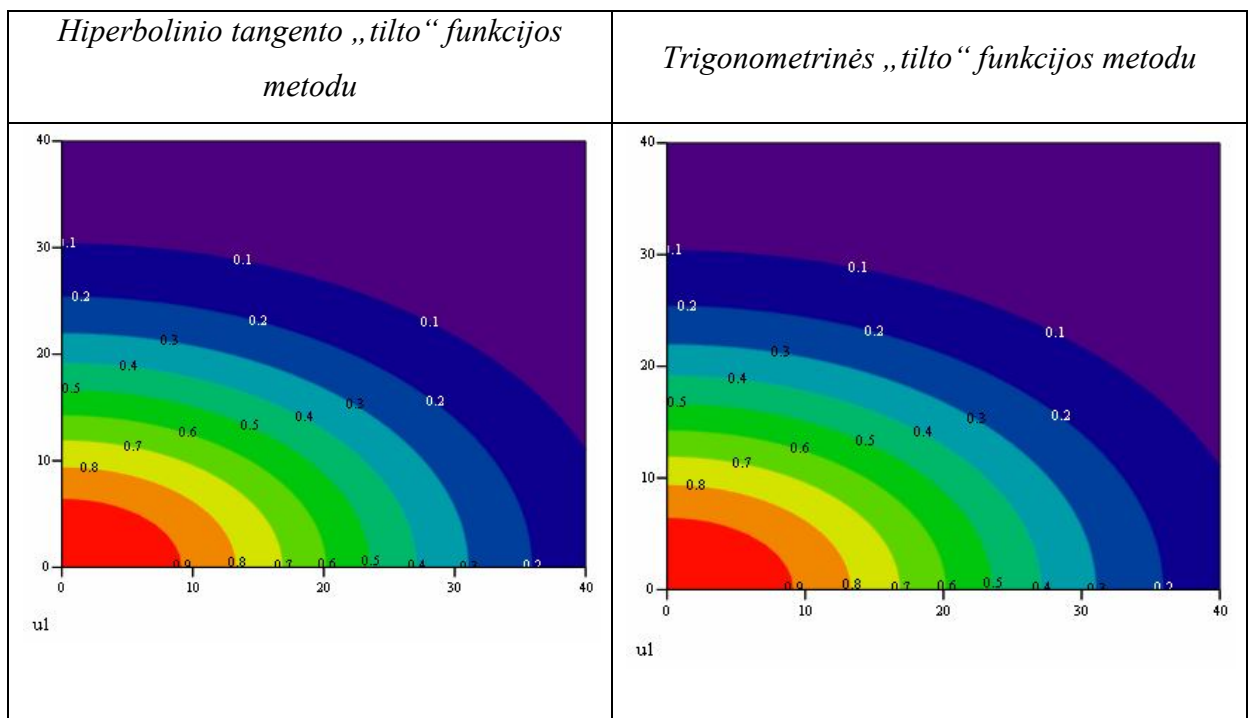
$$B_{m+M1 \cdot r} := \rho(x_m, y_r)$$

Turėdami kairiosios lygties dalies matricą A ir dešinėsios dalies stulpelį B , galime rasti Puasono lygties sprendinį bendru pavidalu ir konkrečiuose taškuose:

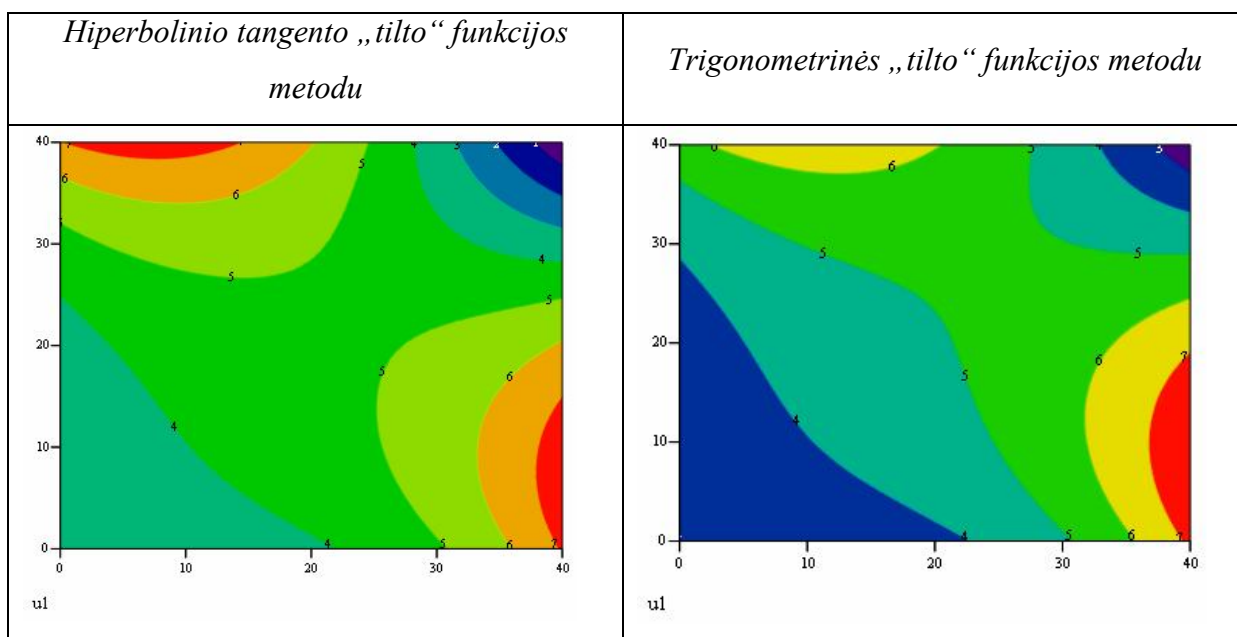
$$c := \text{solve}(A, B) \quad \max(c) - \min(c) = 2.404$$

$$U(x, y) := \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^J (c_{\text{in}(n, l, j)} \cdot \text{di}(x, y, X_l, Y_j, p, q, n)) \quad u_{m,r} := U(x_m, y_r)$$

Čia: $c := \text{solve}(A, B)$ – algebrinių lygčių sistemos surastieji neapibrėžtieji koeficientai; $\max(c) - \min(c)$ – patikriname, ar matricos koeficientai nėra labai dideli, t. y. iš didžiausio koeficiento atimamas mažiausias; $U(x, y)$ – Puasono lygties sprendinys bendru pavidalu; $u_{m,r}$ – Puasono lygties sprendinys konkrečiuose taškuose, kur prašėme, kad būtų patenkintos Laplaso ir Puasono lygtys.



6 pav. I modelio Puasono lygties sprendinių $u1$ reljefiniai grafikai



7 pav. II modelio Puasono lygties sprendinių $u1$ reljefiniai grafikai

3.7. PUASONO LYGTIES SPRENDINIŲ „TILTO“ FUNKCIJŲ METODU TIKSLUMO ANALIZĖ

Palyginkime sprendinių, gautų trigonometrinės ir hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijų metodu, paklaidas.

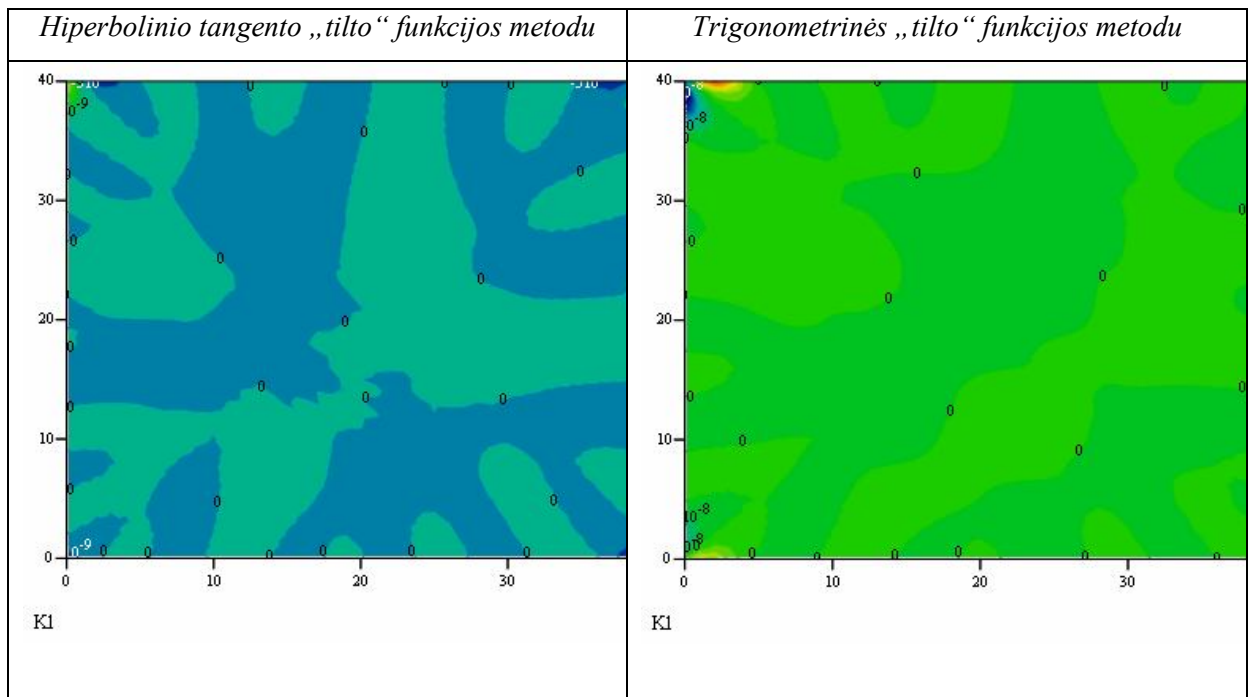
Patikrinimui įvedame kitus „chaotiškai išsidėsčiusius“ kontrolinius taškus M'' , kurie patenkintų visą Puasono lygtį. Ir lygindami mūsų gautus rezultatus tuose taškuose su tikrojo sprendinio reikšmėmis įvedame klaidos matricą Kl .

$$M'' := 1000$$

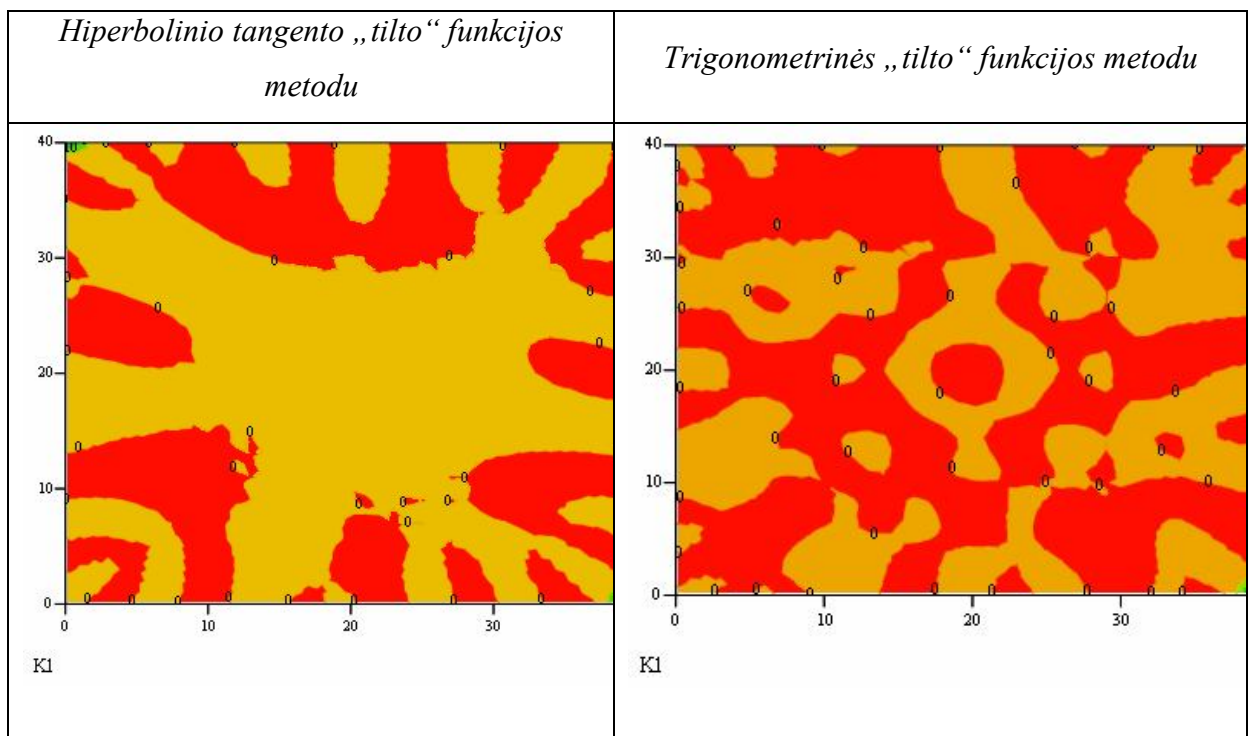
$$m'' := 0..M'' \quad x''_{m''} := X1 + \text{rnd}(X1) \quad y''_{m''} := Y1 + \text{rnd}(Y1) \quad kl_{m''} := U(x''_{m''}, y''_{m''}) - U1(x''_{m''}, y''_{m''})$$

$$Kl_{m,r} := u_{m,r} - u1_{m,r} \quad \sigma := \frac{\text{stdev}(kl)}{\text{mean}(u1)} \quad \sigma = 2.514 \times 10^{-11} \quad \frac{\max(kl) - \min(kl)}{\text{mean}(u1)} = 7.15 \times 10^{-10}$$

Čia $x''_{m''}$ - „chaotiškai išsidėsčiusių“ kontrolinių taškų koordinatės pagal x ašį; $y''_{m''}$ - „chaotiškai išsidėsčiusių“ kontrolinių taškų koordinatės pagal y ašį; $kl_{m''}$ - iš gautų sprendinio reikšmių atimama tikrojo sprendinio reikšmės; Kl - klaidų atskiruose taškuose matrica; σ - apskaičiuojame bendrą santykinę paklaidą, kuri nusakoma paklaidų dispersijos kvadratine šaknimi padalyta iš vidurkio; $\frac{\max(kl) - \min(kl)}{\text{mean}(u1)}$ - skirtumas tarp didžiausios ir mažiausios paklaidos padalytos iš vidurkio. Paklaidų planą parodo grafikai:



8 pav. I modelio Puasono lygties sprendinių standartinių nuokrypių reljefiniai grafikai



9 pav. II modelio Puasono lygties sprendinių standartinių nuokrypių reljefiniai grafikai

Išvada. Palyginus trigonometrinės ir hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos paklaidų planus, kurie yra nubrėžti grafiškai, galime teigti, kad tiek I modelio, tiek II modelio

hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos sprendinių paklaida yra mažesnė negu trigonometrinės „tilto“ funkcijos.

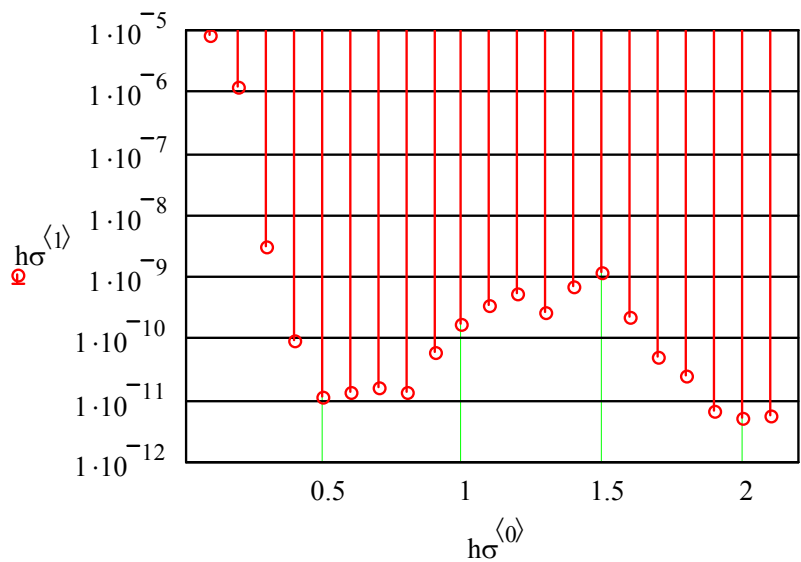
	I modelis	II modelis
Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos metodu	$\sigma = 5.438 \times 10^{-9}$	$\sigma = 2.514 \times 10^{-11}$
Trigonometrinės „tilto“ funkcijos metodu	$\sigma = 1.701 \times 10^{-8}$	$\sigma = 1.39 \times 10^{-9}$

10 pav. Puasono lygties sprendinio „tilto“ funkcijomis paklaidos

3.8. SPRENDINIŲ PAKLAIDOS PRIKLAUSOMYBĖS NUO HIPERBOLINIO TANGENTO „TILTO“ FUNKCIJOS NUOLYDŽIO PARAMETRO (H) I MODELIO

I modelio hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos nuolydžio parametro kitimas ir sprendinių paklaidos priklausomybė (pirmasis stulpelis: nuolydžio parametras – h , o antrasis stulpelis: sprendinių paklaidos – σ). Pirmiausiai pasirinkus nuolydžio parametą nuo 0.1 iki 2.1, keičiant žingsnį kas 0.1 pastebime šitokią tendenciją išreikštoje matricoje bei grafiškai:

0.1	7.871×10^{-6}
0.2	1.138×10^{-6}
0.3	3.086×10^{-9}
0.4	8.867×10^{-11}
0.5	1.108×10^{-11}
0.6	1.275×10^{-11}
0.7	1.559×10^{-11}
0.8	1.343×10^{-11}
0.9	6.029×10^{-11}
1.0	1.665×10^{-10}
1.1	3.251×10^{-10}
1.2	5.393×10^{-10}
1.3	2.629×10^{-10}
1.4	7.056×10^{-10}
1.5	1.192×10^{-9}
1.6	2.27×10^{-10}
1.7	4.843×10^{-11}
1.8	2.546×10^{-11}
1.9	6.628×10^{-12}
2.0	5.226×10^{-12}
2.1	5.643×10^{-12}

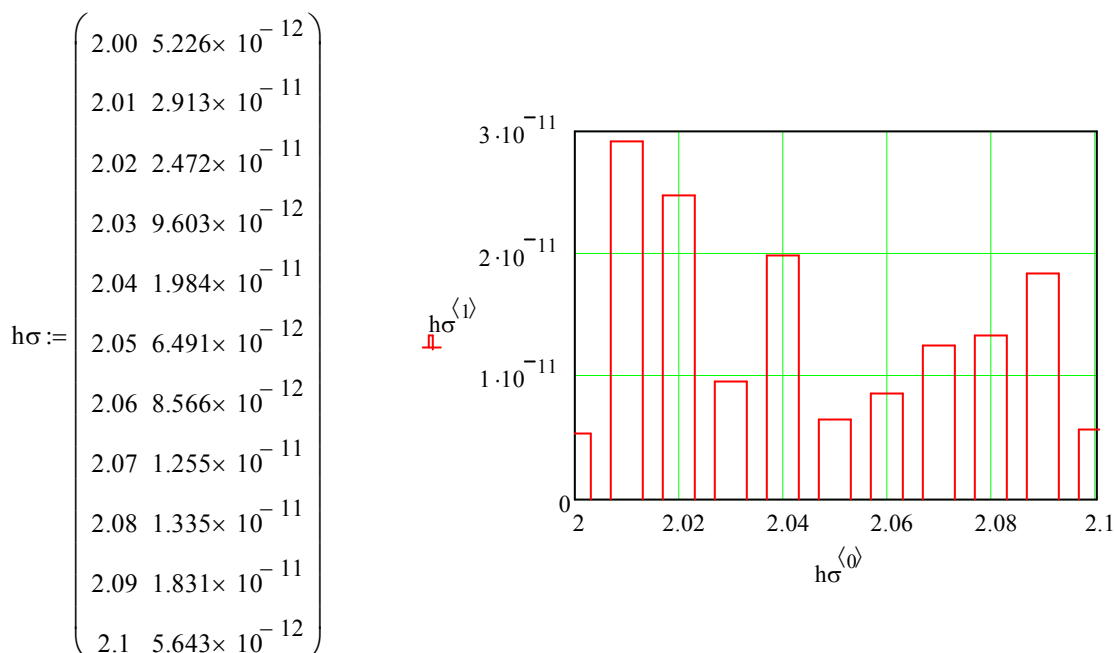


Logaritminis sprendinių paklaidų σ priklausomybės nuo h grafikas

11 pav. Sprendinių paklaidos priklausomybės nuo hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos nuolydžio parametro (h) iliustracija

Išvada: Pasirinkus nuolydžio parametą nuo 0.1 iki 2.1 su žingsneliu 0.1 pastebime, kad didžiausia sprendinių paklaida, kai nuolydžio parametras yra mažiausias $h=0.1$. Šiame intervale mažiausia sprendinių paklaida $\sigma=5.226 \cdot 10^{-12}$, kai nuolydžio parametras yra $h=2.0$. Tačiau pagal duomenis matome, kad negalime tvirtinti, kad kuo didesnis nuolydžio parametras, tuo tikslesnė bei mažesnė sprendinių paklaida. Bet matome, kad esant labai mažam h , tikslumas labai mažas.

Pažiūrėkime, kaip kinta h , kai nuolydžio parametras imamas nuo 2.0, t. y. kai paklaida šiame intervale pati mažiausia, iki 2.1 žingsniu 0.01. Taigi šią tendenciją galime išvelgti matricoje bei grafike:



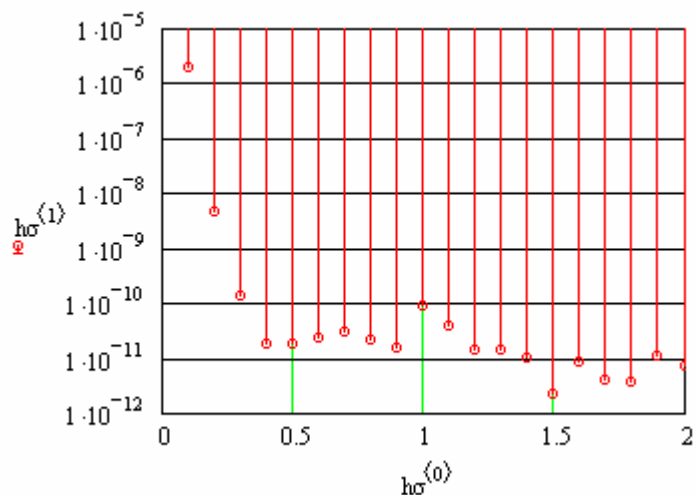
12 pav. Sprendinių paklaidos priklausomybės nuo hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos nuolydžio parametro (h) iliustracija

Išvada: Pasirinkus nuolydžio parametą nuo 2.0 iki 2.1 su žingsneliu 0.01 pastebime, sprendinių paklaida nežymiai priklauso šiame intervale nuo h .

3.9. SPRENDINIŲ PAKLAIDOS PRIKLAUSOMYBĖS NUO HIPERBOLINIO TANGENTO „TILTO“ FUNKCIJOS NUOLYDŽIO PARAMETRO (h) II MODELIO

II modelio hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos nuolydžio parametro kitimas ir sprendinių paklaidos priklausomybė (pirmasis stulpelis: nuolydžio parametras – h , o antrasis stulpelis: sprendinių paklaidos – σ). Pirmiausiai pasirinkus nuolydžio parametą nuo 0.1 iki 2.0, keičiant žingsnį kas 0.1 pastebime šitokią tendenciją išreikštoje matricoje bei grafiškai:

0.1	2.014×10^{-6}
0.2	4.524×10^{-9}
0.3	1.369×10^{-10}
0.4	1.812×10^{-11}
0.5	1.76×10^{-11}
0.6	2.277×10^{-11}
0.7	3.082×10^{-11}
0.8	2.071×10^{-11}
0.9	1.51×10^{-11}
1.0	8.719×10^{-12}
1.1	3.866×10^{-11}
1.2	1.386×10^{-11}
1.3	1.367×10^{-11}
1.4	9.932×10^{-12}
1.5	2.313×10^{-12}
1.6	8.688×10^{-12}
1.7	3.974×10^{-12}
1.8	3.712×10^{-12}
1.9	1.066×10^{-11}
2.0	7.112×10^{-12}



Logaritminis sprendinių paklaidų σ priklausomybės nuo h grafikas

13 pav. Sprendinių paklaidos priklausomybės nuo hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos nuolydžio parametro (h) iliustracija

Išvada: Pasirinkus nuolydžio parametą nuo 0.1 iki 2.1 su žingsneliu 0.1 pastebime, kad didžiausia sprendinių paklaida, kai nuolydžio parametras yra mažiausias $h=0.1$ (kaip ir I modelyje). Šiame intervale mažiausia sprendinių paklaida $\sigma=2.313 \cdot 10^{-12}$, kai nuolydžio parametras yra $h=1.5$. Pagal duomenis matome, kad sprendinių paklaida yra nepastovi šiame intervale. Bet pastebime, kad kaip ir I modelyje, taip ir dabar, - esant labai mažam h , tikslumas labai mažas. Tačiau matome, kad šiame nuolydžio parametro intervale (0,1;2,1) nėra problemų su h parinkimu, nes gaunama maža paklaida.

IŠVADOS

Magistro darbe matematinio modeliavimo išnagrinėjome Puasono lygtis

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\rho$$

sprendimo efektyvumą naujais metodais.

Mes šiame darbe pasiūlėme spręsti šias lygtis naudojant vadinamąsias „tilto“ funkcijas.

Išbandėme dviejų rūšių „tilto“ funkcijas:

- hiperbolinio tangento

$$tilh(x, g, p, h) = \frac{1}{2} \left(th \left(\frac{x-g+p}{p \cdot h} \right) - th \left(\frac{x-g-p}{p \cdot h} \right) \right)$$

ir

- trigonometrines

$$tilt(x, g, p) = \cos \left(\pi \cdot \frac{x-g}{2p} \right)^2, (-p < x-g \leq p).$$

Puasono lygties sprendinio ieškojome per „tilto“ funkcijų ir polinomų sandaugų sumą:

- hiperbolinei tangento „tilto“ funkcijai

$$U(x, y) = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^J (c_{in(n,l,j)} \cdot tilh(x, g, p, h) \cdot tilh(y, g', q, h) \cdot pol(x, y, g, g', p, q, n))$$

ir

- trigonometrinei „tilto“ funkcijai

$$U(x, y) = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^J (c_{in(n,l,j)} \cdot tilt(x, g, p) \cdot tilt(y, g', q) \cdot pol(x, y, g, g', p, q, n)).$$

Gavome kompiuterinius sprendinius ir nustatėme tų sprendinių paklaidas (8 pav. ir 9 pav. tų paklaidų reljefiniai grafikai).

- Palyginę trigonometrinių bei hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos paklaidų standartinius nuokrypius gavome, kad tikslesnis yra hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos metodas.

- Šį metodą būtų galima panaudoti modeliuojant grafenų arba nanovamzdelių potencialus. Taip pat šis būdas gali būti apibendrintas ir trimačiam atvejui.

LITERATŪRA

1. ČIEGIS R. *Diferencialinių lygčių skaitiniai sprendimo metodai*. Vilnius, 2003.
2. KVEDARAS. B., SAPAGOVAS M. *Skaičiavimo metodai*. Vilnius, 1974.
3. PAULAUSKAS V. *Matematinės fizikos lygtys*. Vilnius, 1974.
4. PLUKAS K. *Skaitiniai metodai ir algoritmai*. Kaunas, 2001.
5. STONKUTĖ. A. *Kintamo difuzijos koeficiento parabolinių lygčių sprendimas skaitiniais metodais (magistrinis darbas)*. Šiauliai, 2010.
6. ŠUKUTIENĖ-BALTRUŠAITYTĖ D. *Didelių masyvų matavimo rezultatų aproksimavimas Kvazi-Gauso funkcijomis (magistrinis darbas)*. Šiauliai, 2008.
7. Matematikos knygos internete. Prieiga per internetą: http://193.219.157.231/Vilkas/Dalys/Nuorodos_knygos.htm [Žiūrėta 2011 - 04-30].

SUMMARY

Solution of Poisson two-dimensional equation internal values' task by "brige" function approaches

The objective of this Master Thesis is the solution of Poisson equation.

The tasks of the Thesis is to solve Poisson equation using computer modeling programs; to compare the affectivity of solutions gained by trigonometric and hyperbolic tangent „bridge“ functions; to investigate the solution precision dependability of hyperbolic tangent “bridge” function’s parameter “ h ”, using computer modulations.

Poisson equation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\rho.$$

In this study Poisson function is solved using “bridge” functions method, meaning that all range is divided to separate zones (“bridges”) and to separate approximation polynomial multiplied of “bridge” functions. Common solution is equal to the sum of separate polynomial multiplied of “bridge” functions.

To solve Poisson equation, the so-called "bridge" function was used.

Two types of "bridge" functions were tested:

- hyperbolic tangent

$$tilh(x, g, p, h) = \frac{1}{2} \left(th \left(\frac{x-g+p}{p \cdot h} \right) - th \left(\frac{x-g-p}{p \cdot h} \right) \right)$$

and

- trigonometric

$$tilt(x, g, p) = \cos \left(\pi \cdot \frac{x-g}{2p} \right)^2, (-p < x-g \leq p).$$

Differential equation, the solution we were looking via the "bridge" functions and products of powers of polynomials amount.

Solution expressed hyperbolic tangent “bridge“ function in this form:

$$U(x, y) = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^J (c_{in(n,l,j)} \cdot tilh(x, g, p, h) \cdot tilh(y, g', q, h) \cdot pol(x, y, g, g', p, q, n))$$

and trigonometric “bridge“ function in this form:

$$U(x, y) = \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^J (c_{in(n,l,j)} \cdot tilt(x, g, p) \cdot tilt(y, g', q) \cdot pol(x, y, g, g', p, q, n)).$$

Differential equation's solution inserted to linear algebraic equation system

$$A \cdot C = B.$$

From which indefinite coefficients C are found.

Computer-based solution was received as well as errors for solutions found (Figure 8 and 9 shows diagrams of the mentioned errors).

The obtained results will be used while modeling potentials of graphens and nanotubes. The mentioned approach may be generalized for the three-dimensional case as well.

PRIEDAI

Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos pagrindinių savybių tyrimas

1. Sumos savybė:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(th \frac{x+p}{h} - th \frac{x-p}{h} \right) + \frac{1}{2} \left(th \frac{x-p}{h} - th \frac{x-3p}{h} \right) = \frac{1}{2} \left(th \frac{x+p}{h} - th \frac{x-3p}{h} \right), \\ & \frac{1}{2} \left(th \frac{x+p}{h} - th \frac{x-3p}{h} \right) + \frac{1}{2} \left(th \frac{x-3p}{h} - th \frac{x-5p}{h} \right) = \frac{1}{2} \left(th \frac{x+p}{h} - th \frac{x-5p}{h} \right), \\ & \frac{1}{2} \left(th \frac{x+p}{h} - th \frac{x-3p}{h} \right) + \frac{1}{2} \left(th \frac{x-3p}{h} - th \frac{x-5p}{h} \right) = \frac{1}{2} \left(th \frac{x+p}{h} - th \frac{x-5p}{h} \right), \\ & \tilde{t}ilh(x, x_1, h, x_2 - x_1) + \tilde{t}ilh(x, x_2, h, x_3 - x_2) = \tilde{t}ilh(x, x_2, h, x_3 - x_1). \end{aligned}$$

Sugretinus N tiltų, gauname vieną, kurio tilto plotis N kartų didesnis, t.y.

$$\sum_{n=1}^N \tilde{t}ilh(x, g, h, 2np) = \tilde{t}ilh(x, g, h, Np).$$

2. Integralo savybė:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(th \frac{x+p}{h} - th \frac{x-p}{h} \right) dx = \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot h \cdot \left(\ln ch \frac{x+p}{h} \Big|_{-Q}^Q - \ln ch \frac{x-p}{h} \Big|_{-Q}^Q \right) = \\ & = \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{h}{2} \cdot \left(\ln \frac{ch \frac{Q+p}{h}}{ch \frac{p-Q}{h}} - \ln \frac{ch \frac{Q-p}{h}}{ch \frac{-Q-p}{h}} \right) = \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{h}{2} \cdot \left(\ln \frac{ch \frac{Q+p}{h} \cdot ch \frac{-Q-p}{h}}{ch \frac{p-Q}{h} \cdot ch \frac{Q-p}{h}} \right) = \\ & = \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{h}{2} \cdot \left(\ln \frac{ch \frac{Q+p}{h} \cdot ch \frac{Q+p}{h}}{ch \frac{Q-p}{h} \cdot ch \frac{Q-p}{h}} \right) = \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{h}{2} \cdot \ln \frac{ch^2 \frac{Q+p}{h}}{ch^2 \frac{p-Q}{h}} = \lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot h}{2} \cdot \ln \frac{ch \frac{Q+p}{h}}{ch \frac{p-Q}{h}} = \\ & = \lim_{Q \rightarrow \infty} h \cdot \ln \frac{ch \frac{Q+p}{h}}{ch \frac{p-Q}{h}} = \lim_{Q \rightarrow \infty} h \cdot \ln \frac{e^{\frac{Q+p}{h}} + e^{\frac{-Q-p}{h}}}{e^{\frac{p-Q}{h}} + e^{\frac{Q-p}{h}}} = h \cdot \ln e^{\frac{2p}{h}} = h \cdot \frac{2p}{h} = 2p. \end{aligned}$$

3. Išvestinės savybė:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = y'(x) & = \left(\frac{1}{2} \left(th \frac{x+p}{h} - th \frac{x-p}{h} \right) \right)' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h} \cdot th^2 \frac{x+p}{h} - \frac{1}{h} + \frac{1}{h} \cdot th^2 \frac{x-p}{h} \right) = \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h} \cdot th^2 \frac{x-p}{h} - \frac{1}{h} \cdot th^2 \frac{x+p}{h} \right) = \frac{1}{2h} \left(th^2 \frac{x-p}{h} - th^2 \frac{x+p}{h} \right). \end{aligned}$$

Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos asimptotika

Apskaičiuojame asimptotės pobūdį į dešinę:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \left(th \frac{x+p}{hp} - th \frac{x-p}{hp} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{\frac{x+p}{hp}} - e^{-\frac{x+p}{hp}}}{e^{\frac{x+p}{hp}} + e^{-\frac{x+p}{hp}}} - \frac{e^{\frac{x-p}{hp}} - e^{-\frac{x-p}{hp}}}{e^{\frac{x-p}{hp}} + e^{-\frac{x-p}{hp}}} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cdot e^{-\frac{x-p}{hp}} \cdot e^{\frac{x+p}{hp}} + 2 \cdot e^{\frac{x-p}{hp}} \cdot e^{-\frac{x+p}{hp}}}{e^{\frac{x+p}{hp}} \cdot e^{-\frac{x-p}{hp}} + e^{\frac{x-p}{hp}} \cdot e^{\frac{x+p}{hp}} + e^{\frac{x+p}{hp}} \cdot e^{-\frac{x-p}{hp}} + e^{-\frac{x-p}{hp}} \cdot e^{\frac{x+p}{hp}}} \right) = \\
 &= \frac{e^{\frac{-x+p+x+p}{hp}} - e^{\frac{x-p-x-p}{hp}}}{e^{\frac{x+p+x-p}{hp}} + e^{\frac{x+p-x+p}{hp}} + e^{\frac{-x-p+x-p}{hp}} + e^{\frac{-x-p-x+p}{hp}}} = \\
 &= \frac{e^{\frac{2p}{hp}} - e^{-\frac{2p}{hp}}}{e^{\frac{2x}{hp}} + e^{\frac{2p}{hp}} + e^{-\frac{2p}{hp}} + e^{-\frac{2x}{hp}}} = \frac{e^{\frac{2}{h}} - e^{-\frac{2}{h}}}{e^{\frac{2x}{hp}} + e^{\frac{2}{h}} + e^{-\frac{2}{h}} + e^{-\frac{2x}{hp}}} = \frac{\frac{sh \frac{2}{h}}{2}}{e^{\frac{2x}{hp}}} = \frac{1}{2} \cdot sh \frac{2}{h} \cdot e^{-\frac{2x}{hp}}.
 \end{aligned}$$

Analogiškai galime apskaičiuoti asimptotės pobūdį į kairę:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \left(th \frac{x+p}{hp} - th \frac{x-p}{hp} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{\frac{x+p}{hp}} - e^{-\frac{x+p}{hp}}}{e^{\frac{x+p}{hp}} + e^{-\frac{x+p}{hp}}} - \frac{e^{\frac{x-p}{hp}} - e^{-\frac{x-p}{hp}}}{e^{\frac{x-p}{hp}} + e^{-\frac{x-p}{hp}}} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cdot e^{-\frac{x-p}{hp}} \cdot e^{\frac{x+p}{hp}} + 2 \cdot e^{\frac{x-p}{hp}} \cdot e^{-\frac{x+p}{hp}}}{e^{\frac{x+p}{hp}} \cdot e^{-\frac{x-p}{hp}} + e^{\frac{x-p}{hp}} \cdot e^{\frac{x+p}{hp}} + e^{\frac{x+p}{hp}} \cdot e^{-\frac{x-p}{hp}} + e^{-\frac{x-p}{hp}} \cdot e^{\frac{x+p}{hp}}} \right) = \\
 &= \frac{e^{\frac{-x+p+x+p}{hp}} - e^{\frac{x-p-x-p}{hp}}}{e^{\frac{x+p+x-p}{hp}} + e^{\frac{x+p-x+p}{hp}} + e^{\frac{-x-p+x-p}{hp}} + e^{\frac{-x-p-x+p}{hp}}} = \\
 &= \frac{e^{\frac{2p}{hp}} - e^{-\frac{2p}{hp}}}{e^{\frac{2x}{hp}} + e^{\frac{2p}{hp}} + e^{-\frac{2p}{hp}} + e^{-\frac{2x}{hp}}} = \frac{e^{\frac{2}{h}} - e^{-\frac{2}{h}}}{e^{\frac{2x}{hp}} + e^{\frac{2}{h}} + e^{-\frac{2}{h}} + e^{-\frac{2x}{hp}}} = \frac{\frac{sh \frac{2}{h}}{2}}{e^{\frac{2x}{hp}}} = \frac{1}{2} \cdot sh \frac{2}{h} \cdot e^{-\frac{2x}{hp}}.
 \end{aligned}$$

Trigonometrinės „tilto“ funkcijos pagrindinių savybių tyrimas

1. Sumos savybė:

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\pi \cdot \frac{x}{2p}\right) + \cos^2\left(\pi \cdot \frac{x-p}{2p}\right) &= \cos^2\left(\pi \cdot \frac{x}{2p}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi x}{2p} - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \cos^2\left(\pi \cdot \frac{x}{2p}\right) + \sin^2\left(\pi \cdot \frac{x}{2p}\right) = 1 \end{aligned}$$

2. Integralo savybė:

$$\begin{aligned} \int_0^{2p} \cos^2\left(\pi \cdot \frac{x}{2p}\right) dx + \int_p^{3p} \cos^2\left(\pi \cdot \frac{x-p}{2p}\right) dx &= \int_0^{2p} \frac{1 + \cos\left(\pi \cdot \frac{x}{p}\right)}{2} dx + \int_p^{3p} \frac{1 + \cos\left(\pi \cdot \frac{x-p}{p}\right)}{2} dx = \\ &= \int_0^{2p} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos\left(\pi \cdot \frac{x}{p}\right)}{2}\right) dx + \int_p^{3p} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos\left(\pi \cdot \frac{x-p}{p}\right)}{2}\right) dx = \int_0^{2p} \frac{1}{2} dx + \frac{p}{\pi} \int_0^{2p} \frac{\cos\left(\pi \cdot \frac{x}{p}\right)}{2} d\left(x \cdot \frac{\pi}{p}\right) + \\ &+ \int_p^{3p} \frac{1}{2} dx + \frac{p}{\pi} \int_p^{3p} \frac{\cos\left(\pi \cdot \frac{x-p}{p}\right)}{2} d\left(\pi \cdot \frac{x-p}{p}\right) = \frac{1}{2} x \Big|_0^{2p} + \frac{p}{2\pi} \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{p}\right) \Big|_0^{2p} + \\ &+ \frac{1}{2} x \Big|_p^{3p} + \frac{p}{2\pi} \sin\left(\pi \cdot \frac{x-p}{p}\right) \Big|_p^{3p} = \frac{1}{2}(2p-0) + \frac{p}{2\pi} \cdot \left(\sin\left(\pi \cdot \frac{2p}{p}\right) - \sin\left(\pi \cdot \frac{0}{p}\right)\right) + \\ &+ \frac{1}{2}(3p-p) + \frac{p}{2\pi} \cdot \left(\sin\left(\pi \cdot \frac{3p-p}{p}\right) - \sin\left(\pi \cdot \frac{p-p}{p}\right)\right) = p + p = 2p. \end{aligned}$$

3. Išvestinės savybė:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = y'(x) &= 2 \cos\left(\pi \cdot \frac{x}{2p}\right) \cdot \left[-\sin\left(\pi \cdot \frac{x}{2p}\right)\right] \cdot \frac{\pi}{2p} = -\frac{\pi}{2p} \cdot 2 \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{2p}\right) \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{x}{2p}\right) = \\ &= -\frac{\pi}{2p} \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{x}{2p}\right) = -\frac{\pi}{2p} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x}{p}\right). \end{aligned}$$

Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos sprendimo algoritmo realizavimas matchad'o programa

Parenkamas atitinkamas $X1$ – kairysis intervalo kraštas

$$X1 = -0.5$$

ir $X2$ – dešinysis intervalo kraštas

$$X2 = 0.5,$$

iš kurių suskaičiuojama intervalo vidurio taškas (Xv)

$$Xv = 0.5 \cdot (X1 + X2)$$

ir intervalo plotis (Xi)

$$Xi = X2 - X1.$$

h – tilto nuožulnumas

$$h = 0.1, 0.2, ..1$$

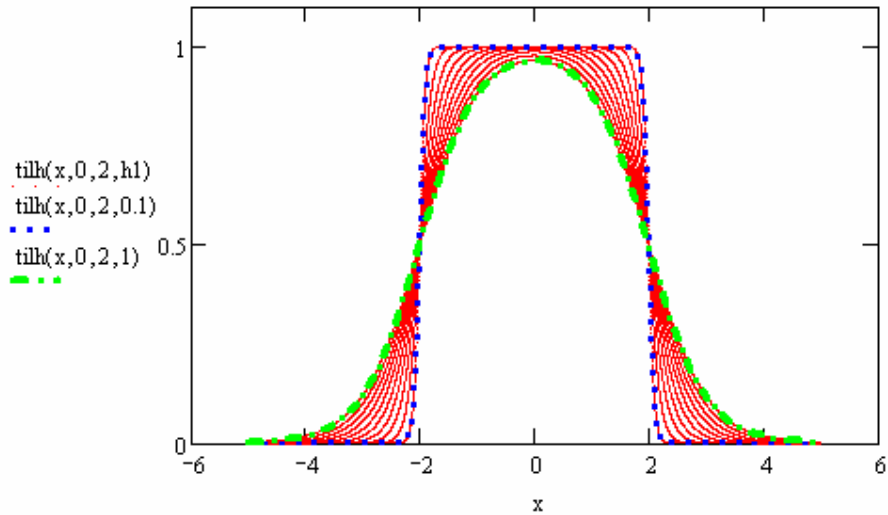
ir x – taškų koordinatės

$$x = X1, X1 + 0.002..X2.$$

Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijoje bei pirmojoje ir antrojoje išvestinėse grafikuose mėlynu pažymėti mažiausias „tilto“ nuožulnumas $h = 0.1$, žaliu pažymėti didžiausias „tilto“ nuožulnumas $h = 1$. Raudonos linijos yra tarpinės reikšmės tarp mažiausio ir didžiausio „tilto“ nuožulnumo h .

Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcija pagal x ir jos grafikas su įvairiais nuožulnumais h :

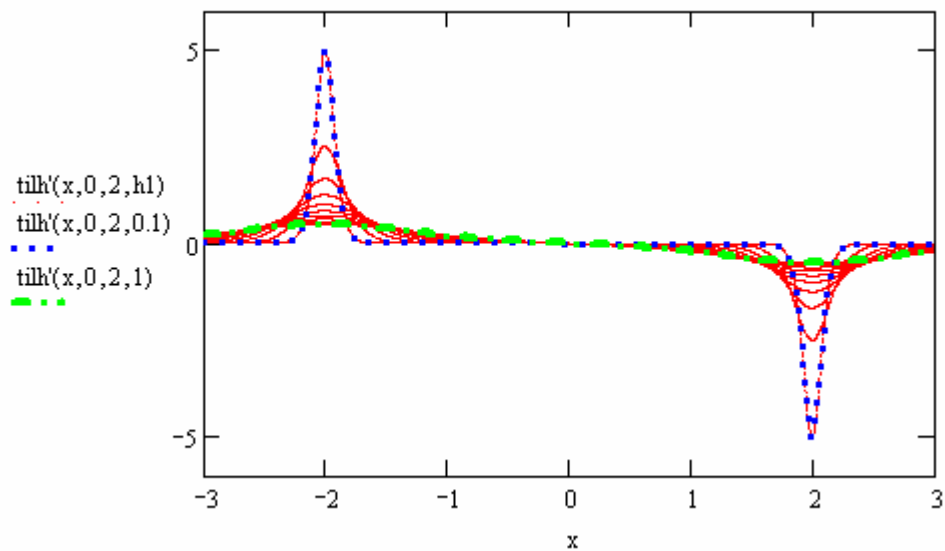
$$\text{tilh}(x, g, p, h) := \frac{1}{2} \cdot \left(\tanh\left(\frac{x - g + p}{p \cdot h}\right) - \tanh\left(\frac{x - g - p}{p \cdot h}\right) \right)$$



1 pav. „Tilto“ funkcijos su įvairiais nuožulnumais h grafikai

Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos pirmoji išvestinė pagal x ir jos grafikas su įvairiais nuožulnumais h :

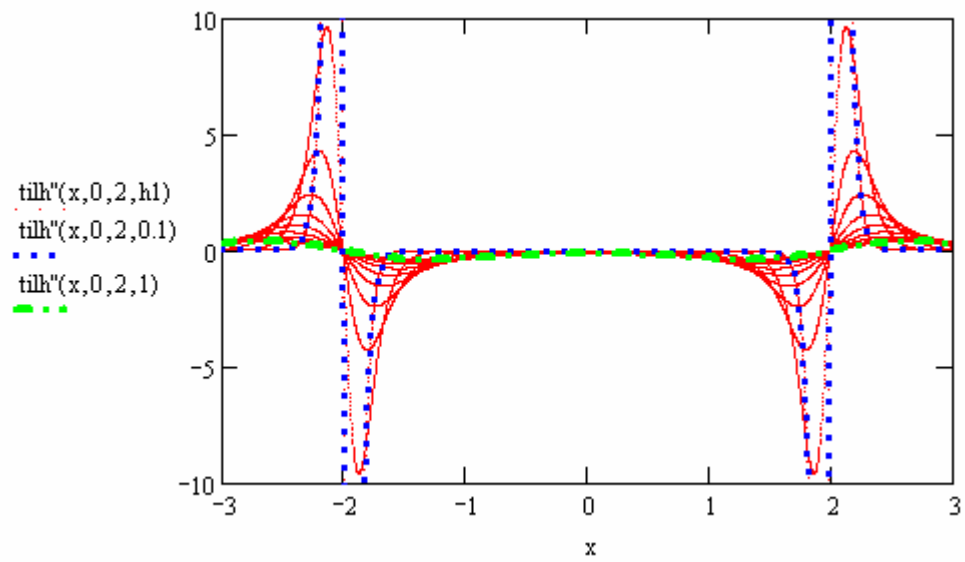
$$\text{tilh}'(x, g, p, h) := \frac{1}{2 \cdot h} \cdot \left(-\tanh\left(\frac{x - g + p}{h}\right)^2 + \tanh\left(\frac{x - g - p}{h}\right)^2 \right)$$



2 pav. Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos pirmosios išvestinės su įvairiais nuožulnumais h grafikai

Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos antroji išvestinė pagal x ir jos grafikas su įvairiais nuožulnumais h :

$$\text{tilh}''(x, g, p, h) := \frac{1}{h \cdot h} \cdot \left(-\tanh\left(\frac{x - g + p}{h}\right) + \tanh\left(\frac{x - g - p}{h}\right) + \tanh\left(\frac{x - g + p}{h}\right)^3 - \tanh\left(\frac{x - g - p}{h}\right)^3 \right)$$



3 pav. Hiperbolinio tangento „tilto“ funkcijos antrosios išvestinės su įvairiais
 nuožulnumais h grafikai

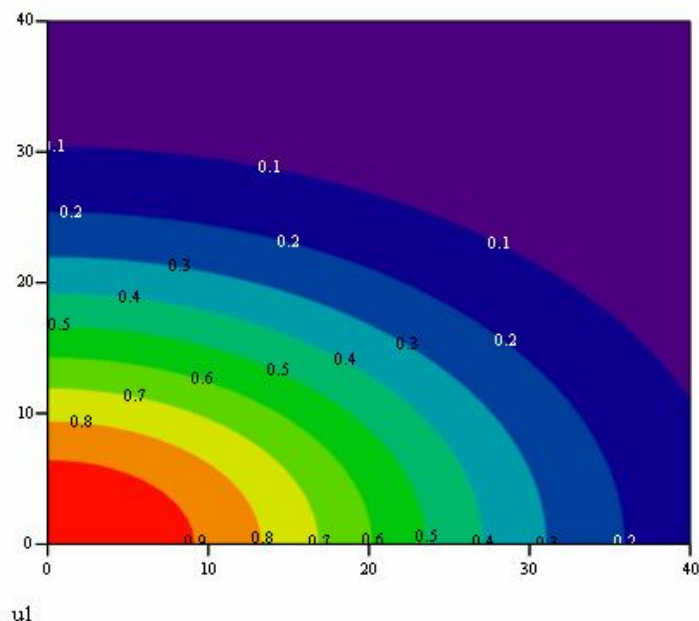
Puasono lygties sprendimo hiperbolinių tangentių „tilto“ funkcijų metodu realizacija Matchad'o programa I modelis

$$\begin{aligned}
 X1 &:= 0 & X2 &:= 2 & Y1 &:= 0 & Y2 &:= 2 & \alpha &:= 0.5 & \beta &:= 1 \\
 Xv &:= 0.5(X1 + X2) & Yv &:= 0.5(Y1 + Y2) & Xi &:= X2 - X1 & Yi &:= Y2 - Y1 \\
 U1(x,y) &:= \exp(-\alpha x^2 - \beta y^2) \\
 \rho(x,y) &:= 2 \cdot [-\alpha - \beta + 2(\alpha \cdot x)^2 + 2(\beta \cdot y)^2] \cdot e^{-\alpha \cdot x^2 - \beta \cdot y^2} \\
 h &:= 0.5 & \text{tilh}(x,g,p,h) &:= \frac{1}{2} \cdot \left(\tanh\left(\frac{x-g+p}{p \cdot h}\right) - \tanh\left(\frac{x-g-p}{p \cdot h}\right) \right) \\
 N1 &:= 36 & N &:= N1 - 1 & n &:= 0..N \\
 \text{tilh}(x,g,p,h) &:= \frac{1}{2 \cdot p \cdot h} \cdot \left(-\tanh\left(\frac{x-g+p}{p \cdot h}\right)^2 + \tanh\left(\frac{x-g-p}{p \cdot h}\right)^2 \right) \\
 \text{tilh}^3(x,g,p,h) &:= \frac{-2 \text{tilh}(x,g,p,h) + \tanh\left(\frac{x-g+p}{p \cdot h}\right)^3 - \tanh\left(\frac{x-g-p}{p \cdot h}\right)^3}{p^2 \cdot h^2} \\
 \text{pol}(x,y,g,g',p,q,n) &:= \left(\frac{x-g}{p}\right)^{Q_{n,0}} \cdot \left(\frac{y-g'}{q}\right)^{Q_{n,1}} \\
 \text{pol}^x(x,y,g,g',p,q,n) &:= \frac{Q_{n,0}}{p} \cdot \left[\left(\frac{x-g}{p}\right)^{|Q_{n,0}-1|} \cdot \left(\frac{y-g'}{q}\right)^{Q_{n,1}} \right] \\
 \text{pol}^y(x,y,g,g',p,q,n) &:= \frac{Q_{n,1}}{q} \cdot \left(\frac{x-g}{p}\right)^{Q_{n,0}} \cdot \left(\frac{y-g'}{q}\right)^{|Q_{n,1}-1|} \\
 \text{pol}^{xx}(x,y,g,g',p,q,n) &:= \frac{(Q_{n,0})^2 - Q_{n,0}}{p^2} \cdot \left[\left(\frac{x-g}{p}\right)^{|Q_{n,0}-2|} \cdot \left(\frac{y-g'}{q}\right)^{Q_{n,1}} \right] \\
 \text{pol}^{yy}(x,y,g,g',p,q,n) &:= \frac{(Q_{n,1})^2 - Q_{n,1}}{q^2} \cdot \left(\frac{x-g}{p}\right)^{Q_{n,0}} \cdot \left(\frac{y-g'}{q}\right)^{|Q_{n,1}-2|}
 \end{aligned}$$

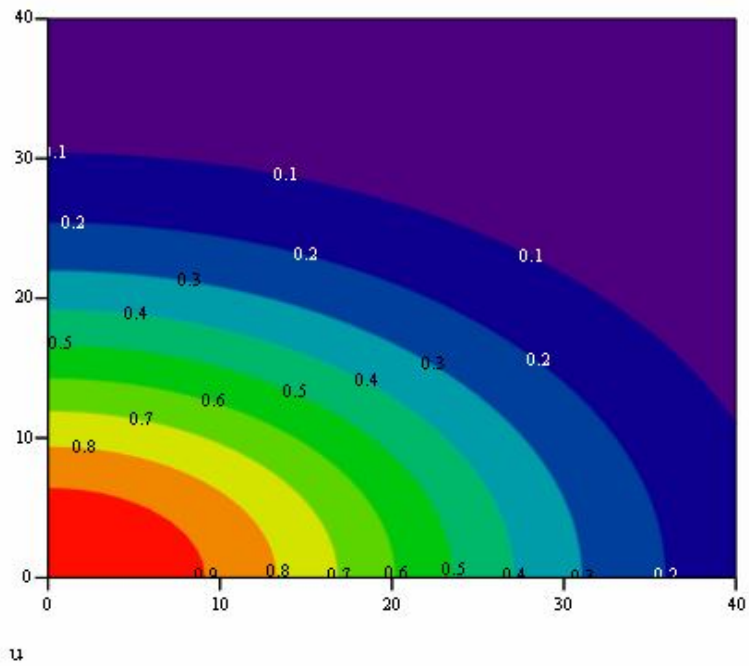
Q :=

0	0
0	1
1	0
0	2
1	1
2	0
0	3
1	2
2	1
3	0
0	4
1	3
2	2
3	1
4	0
0	5
1	4
2	3
3	2
4	1
5	0
0	6
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1
6	0
0	7
1	6
2	5
3	4
4	3
5	2
6	1
7	0

$di(x, y, g, g', p, q, n) := tilh(x, g, p, h) \cdot tilh(y, g', q, h) \cdot pol(x, y, g, g', p, q, n)$
 $d'(x, y, g, g', p, q, n) := tilh(x, g, p, h) \cdot pol'(x, y, g, g', p, q, n) + 2 \cdot tilh'(x, g, p, h) \cdot pol(x, y, g, g', p, q, n)$
 $di''(x, y, g, g', p, q, n) := [(d'(x, y, g, g', p, q, n) + tilh''(x, g, p, h) \cdot pol(x, y, g, g', p, q, n)) \cdot tilh(y, g', q, h)]$
 $d1(x, y, g, g', p, q, n) := tilh(y, g', q, h) \cdot pol''(x, y, g, g', p, q, n) + 2 \cdot tilh'(y, g', q, h) \cdot pol'(x, y, g, g', p, q, n)$
 $di''(y, y, g, g', p, q, n) := (d1(x, y, g, g', p, q, n) + tilh''(y, g', q, h) \cdot pol(x, y, g, g', p, q, n)) \cdot tilh(x, g, p, h)$
 $L1 := 4 \quad \underline{L} := L1 - 1 \quad \underline{l} := 0..L$
 $J1 := 4 \quad \underline{J} := J1 - 1 \quad j := 0..J \quad N1 \cdot L1 \cdot J1 = 576$
 $p := \frac{Xi}{L - 1} \quad p = 1 \quad X_1 := Xv + p \cdot (1 - 0.5L) \quad q := \frac{Yi}{J - 1} \quad q = 1 \quad Y_j := Yv + q \cdot (j - 0.5J)$
 $M := 40 \quad M1 := M + 1 \quad \underline{m} := 0..M \quad x_m := X1 + Xi \cdot \frac{m}{M}$
 $\underline{R} := 40 \quad R1 := R + 1 \quad r := 0..R \quad y_r := Y1 + Yi \cdot \frac{r}{R} \quad M1 \cdot R1 = 1681$
 $\underline{in}(n, l, j) := n + N1 \cdot l + N1 \cdot L1 \cdot j$
 $A_{m+M1 \cdot r, in(n, l, j)} := di''(x_m, y_r, X_1, Y_j, p, q, n) + di''(x_m, y_r, X_1, Y_j, p, q, n) \quad M' := 99$
 $m1 := 0..M' \quad X_{m1} := X1 + md(Xi) \quad Y_{m1} := Y1 + md(Yi) \quad H := 20$
 $A_{M+M1 \cdot R+1+m1, in(n, l, j)} := di(X_{m1}, Y_{m1}, X_1, Y_j, p, q, n) \cdot H$
 $B_{M+M1 \cdot R+1+m1} := U1(X_{m1}, Y_{m1}) \cdot H \quad u1_{m,r} := U1(x_m, y_r)$
 $B_{m+M1 \cdot r} := \rho(x_m, y_r) \quad c := \text{Isolve}(A, B)$
 $U(x, y) := \sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^J (c_{in(n, l, j)} \cdot di(x, y, X_1, Y_j, p, q, n)) \quad u_{m,r} := U(x_m, y_r)$

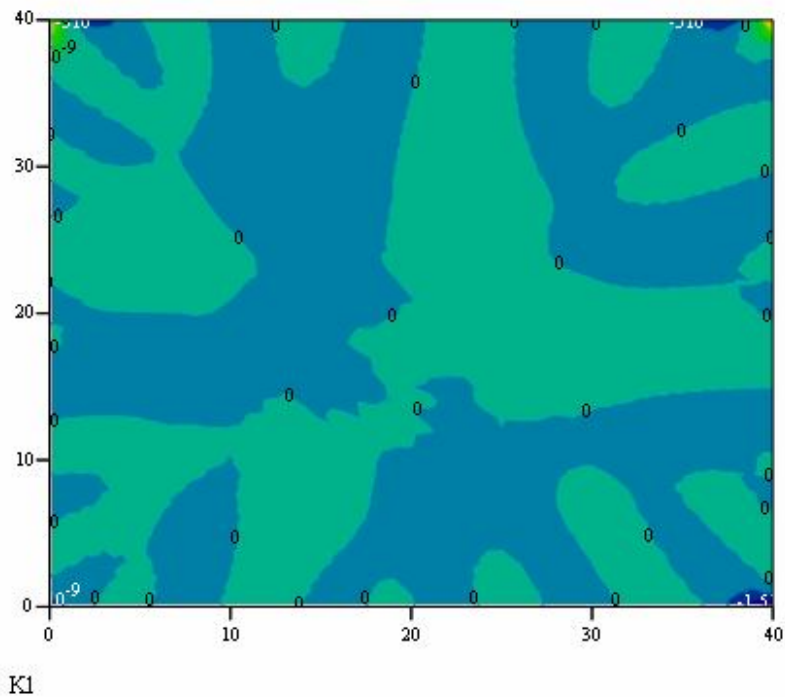


4 pav. I modelio Puasono lygties sprendinių ul reljefiniai grafikai



5 pav. I modelio Puasono lygties sprendinių u reljefiniai grafikai

$$Kl_{m,r} := u_{m,r} - u1_{m,r} \quad \sigma := \frac{\text{stdev}(Kl)}{\text{stdev}(u1)} \quad \sigma = 7.604 \times 10^{-11} \quad \max(c) - \min(c) = 2.583$$



6 pav. I modelio Puasono lygties sprendinių standartinių nuokrypių reljefiniai grafikai

Puasono lygties sprendimo trigonometrinių „tilto“ funkcijų metodu realizacija Matchad'o programa I modelis

$$\begin{aligned}
 X1 &:= 0 & X2 &:= 2 & Y1 &:= 0 & Y2 &:= 2 & \alpha &:= 0.5 & \beta &:= 1 \\
 Xv &:= 0.5(X1 + X2) & Yv &:= 0.5(Y1 + Y2) & Xi &:= X2 - X1 & Yi &:= Y2 - Y1 \\
 U1(x,y) &:= \exp(-\alpha x^2 - \beta y^2) & \rho(x,y) &:= 2 \left[-\alpha - \beta + 2(\alpha \cdot x)^2 + 2(\beta \cdot y)^2 \right] \cdot e^{-\alpha \cdot x^2 - \beta \cdot y^2} \\
 \text{tilt}(x,g,p) &:= \cos\left(\pi \cdot \frac{x-g}{2p}\right) \cdot (-p < x-g \leq p) \\
 N1 &:= 36 & N &:= N1 - 1 & n &:= 0..N \\
 \text{tilt}^1(x,g,p) &:= \frac{-\pi}{2p} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x-g}{p}\right) \cdot (-p < x-g \leq p) \\
 \text{tilt}^2(x,g,p) &:= \frac{-\pi^2}{2p^2} \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{x-g}{p}\right) \cdot (-p < x-g \leq p) \\
 \text{pol}(x,y,g,g',p,q,n) &:= \left(\frac{x-g}{p}\right)^{Q_{n,0}} \cdot \left(\frac{y-g'}{q}\right)^{Q_{n,1}} \\
 \text{pol}^x(x,y,g,g',p,q,n) &:= \frac{Q_{n,0}}{p} \cdot \left[\left(\frac{x-g}{p}\right)^{|Q_{n,0}-1|} \cdot \left(\frac{y-g'}{q}\right)^{Q_{n,1}}\right] \\
 \text{pol}^y(x,y,g,g',p,q,n) &:= \frac{Q_{n,1}}{q} \cdot \left(\frac{x-g}{p}\right)^{Q_{n,0}} \cdot \left(\frac{y-g'}{q}\right)^{|Q_{n,1}-1|} \\
 \text{pol}^{xx}(x,y,g,g',p,q,n) &:= \frac{(Q_{n,0})^2 - Q_{n,0}}{p^2} \cdot \left[\left(\frac{x-g}{p}\right)^{|Q_{n,0}-2|} \cdot \left(\frac{y-g'}{q}\right)^{Q_{n,1}}\right] \\
 \text{pol}^{yy}(x,y,g,g',p,q,n) &:= \frac{(Q_{n,1})^2 - Q_{n,1}}{q^2} \cdot \left(\frac{x-g}{p}\right)^{Q_{n,0}} \cdot \left(\frac{y-g'}{q}\right)^{|Q_{n,1}-2|} \\
 d1(x,y,g,g',p,q,n) &:= \text{tilt}(x,g,p) \cdot \text{tilt}(y,g',q) \cdot \text{pol}(x,y,g,g',p,q,n) \\
 d^1(x,y,g,g',p,q,n) &:= \text{tilt}(x,g,p) \cdot \text{pol}^x(x,y,g,g',p,q,n) + 2 \cdot \text{tilt}(x,g,p) \cdot \text{pol}^y(x,y,g,g',p,q,n) \\
 d^{1x}(x,y,g,g',p,q,n) &:= [(d^1(x,y,g,g',p,q,n) + \text{tilt}^1(x,g,p) \cdot \text{pol}(x,y,g,g',p,q,n)) \cdot \text{tilt}(y,g',q)] \\
 d1(x,y,g,g',p,q,n) &:= \text{tilt}(y,g',q) \cdot \text{pol}^y(x,y,g,g',p,q,n) + 2 \cdot \text{tilt}(y,g',q) \cdot \text{pol}^x(x,y,g,g',p,q,n) \\
 d^{1y}(x,y,g,g',p,q,n) &:= (d1(x,y,g,g',p,q,n) + \text{tilt}^1(y,g',q) \cdot \text{pol}(x,y,g,g',p,q,n)) \cdot \text{tilt}(x,g,p)
 \end{aligned}$$

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 5 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 5 & 0 \\ 0 & 6 \\ 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \\ 6 & 0 \\ 0 & 7 \\ 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ 4 & 3 \\ 5 & 2 \\ 6 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

```

L1 := 4   L1 := L1 - 1   l1 := 0..L
J1 := 4   J1 := J1 - 1   j := 0..J           N1·L1·J1 = 576
p :=  $\frac{X_i}{L-1}$    p = 1   X1 := Xv + p·(1 - 0.5L)   q :=  $\frac{Y_i}{J-1}$    q = 1   Yj := Yv + q·(j - 0.5J)
M := 40   M1 := M + 1   m := 0..M   xm := X1 + Xi· $\frac{m}{M}$ 
R := 40   R1 := R + 1   r := 0..R   yr := Y1 + Yi· $\frac{r}{R}$    M1·R1 = 1681

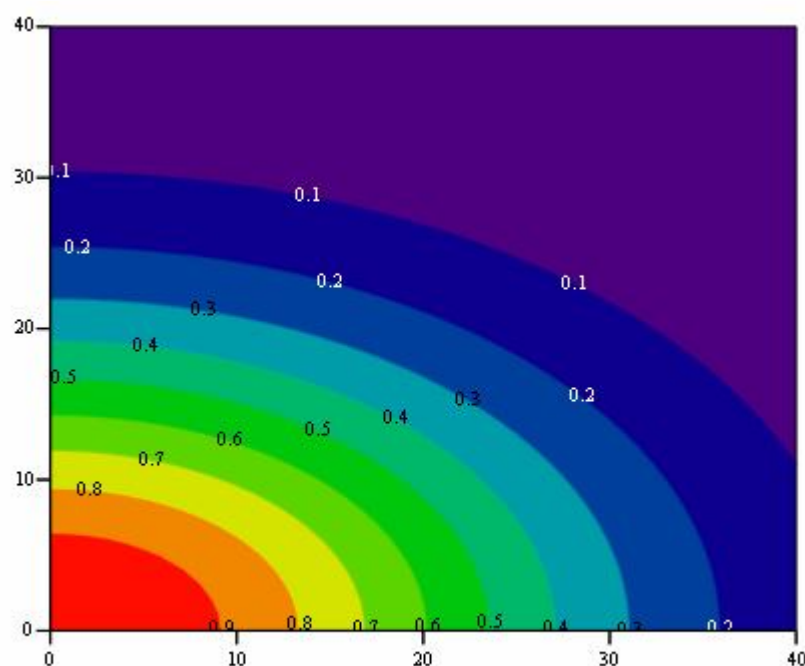
in(n,l,j) := n + N1·l + N1·L1·j
AM+M1·r,in(n,l,j) := dinx(xm,yr,X1,Yj,p,q,n) + diny(xm,yr,X1,Yj,p,q,n)   M' := 99
m1 := 0..M'   Xm1 := X1 + md(Xi)   Ym1 := Y1 + md(Yi)   H := 20

AM+M1·R+1+m1,in(n,l,j) := di(Xm1,Ym1,X1,Yj,p,q,n)·H
BM+M1·R+1+m1 := U1(Xm1,Ym1)·H   ulm,r := U1(xm,yr)

Bm+M1·r := ρ(xm,yr)   c := Isolve(A,B)

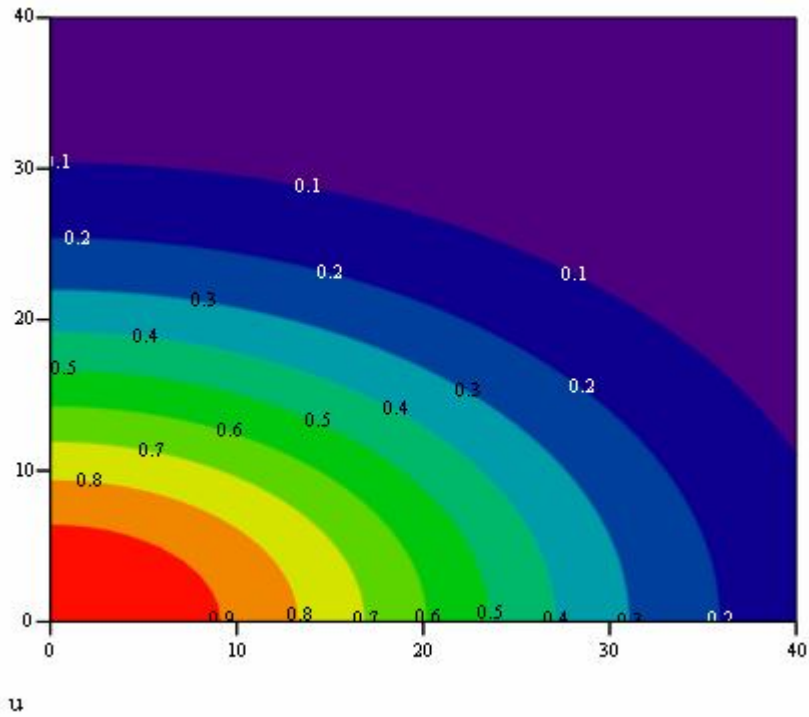
U(x,y) :=  $\sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^J (c_{in(n,l,j)} \cdot di(x,y,X_1,Y_j,p,q,n))$    um,r := U(xm,yr)

```



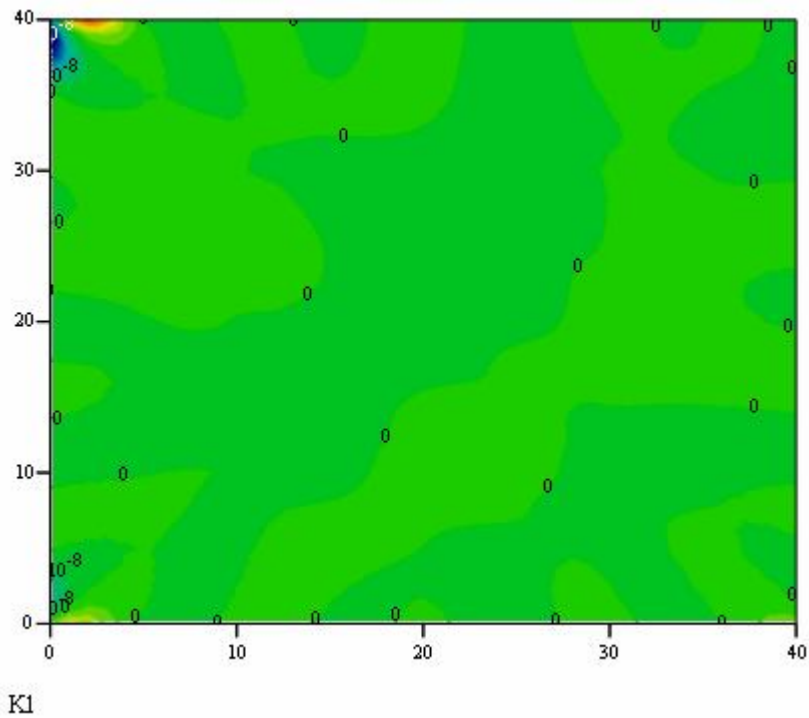
ul

7 pav. I modelio Puasono lygties sprendinių ul reljefiniai grafikai



8 pav. I modelio Puasono lygties sprendinių u reljefiniai grafikai

$$K1_{m,r} := u_{m,r} - u1_{m,r} \quad \sigma := \frac{\text{stdev}(K1)}{\text{stdev}(u1)} \quad \sigma = 1.701 \times 10^{-8} \quad \max(c) - \min(c) = 2.139$$



9 pav. I modelio Puasono lygties sprendinių standartinių nuokrypių reljefiniai grafikai

Puasono lygties sprendimo hiperbolinių tangentių „tilto“ funkcijų metodu realizacija Matchad'o programa II modelis

$$\begin{aligned}
 X1 &:= 0 & X2 &:= 2 & Y1 &:= 0 & Y2 &:= 2 & \alpha &:= 0.5 & \beta &:= 1 \\
 Xv &:= 0.5(X1 + X2) & Yv &:= 0.5(Y1 + Y2) & Xi &:= X2 - X1 & Yi &:= Y2 - Y1 \\
 U1(x,y) &:= \exp(-\alpha x^2 - \beta y^2) + e^x \cdot \cos(y) + e^y \cdot \cos(x) + 1.6x \cdot y \\
 \rho(x,y) &:= 2 \cdot [-\alpha - \beta + 2(\alpha \cdot x)^2 + 2(\beta \cdot y)^2] \cdot e^{-\alpha \cdot x^2 - \beta \cdot y^2} \\
 h &:= 0.5 & N1 &:= 36 & N &:= N1 - 1 & n &:= 0..N \\
 \text{tilh}(x,g,p,h) &:= \frac{1}{2} \cdot \left(\tanh\left(\frac{x-g+p}{p \cdot h}\right) - \tanh\left(\frac{x-g-p}{p \cdot h}\right) \right) \\
 \text{tilh}(x,g,p,h) &:= \frac{1}{2 \cdot p \cdot h} \cdot \left(-\tanh\left(\frac{x-g+p}{p \cdot h}\right)^2 + \tanh\left(\frac{x-g-p}{p \cdot h}\right)^2 \right) \\
 \text{tilh}''(x,g,p,h) &:= \frac{-2 \text{tilh}(x,g,p,h) + \tanh\left(\frac{x-g+p}{p \cdot h}\right)^3 - \tanh\left(\frac{x-g-p}{p \cdot h}\right)^3}{p^2 \cdot h^2} \\
 \text{pol}(x,y,g,g',p,q,n) &:= \left(\frac{x-g}{p}\right)^{Q_{n,0}} \cdot \left(\frac{y-g'}{q}\right)^{Q_{n,1}} \\
 \text{pol}^x(x,y,g,g',p,q,n) &:= \frac{Q_{n,0}}{p} \cdot \left[\left(\frac{x-g}{p}\right)^{|Q_{n,0}-1|} \cdot \left(\frac{y-g'}{q}\right)^{Q_{n,1}} \right] \\
 \text{pol}^y(x,y,g,g',p,q,n) &:= \frac{Q_{n,1}}{q} \cdot \left(\frac{x-g}{p}\right)^{Q_{n,0}} \cdot \left(\frac{y-g'}{q}\right)^{|Q_{n,1}-1|} \\
 \text{pol}^{xx}(x,y,g,g',p,q,n) &:= \frac{(Q_{n,0})^2 - Q_{n,0}}{p^2} \cdot \left[\left(\frac{x-g}{p}\right)^{|Q_{n,0}-2|} \cdot \left(\frac{y-g'}{q}\right)^{Q_{n,1}} \right] \\
 \text{pol}^{yy}(x,y,g,g',p,q,n) &:= \frac{(Q_{n,1})^2 - Q_{n,1}}{q^2} \cdot \left(\frac{x-g}{p}\right)^{Q_{n,0}} \cdot \left(\frac{y-g'}{q}\right)^{|Q_{n,1}-2|}
 \end{aligned}$$

Q :=

0	0
0	1
1	0
0	2
1	1
2	0
0	3
1	2
2	1
3	0
0	4
1	3
2	2
3	1
4	0
0	5
1	4
2	3
3	2
4	1
5	0
0	6
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1
6	0
0	7
1	6
2	5
3	4
4	3
5	2
6	1
7	0

```

di(x,y,g,g',p,q,n) := tilh(x,g,p,h)·tilh(y,g',q,h)·pol(x,y,g,g',p,q,n)

d'(x,y,g,g',p,q,n) := tilh(x,g,p,h)·pol'(x,y,g,g',p,q,n) + 2·tilh'(x,g,p,h)·pol(x,y,g,g',p,q,n)

di'(x,y,g,g',p,q,n) := [(d'(x,y,g,g',p,q,n) + tilh''(x,g,p,h)·pol(x,y,g,g',p,q,n))·tilh(y,g',q,h)]

d1(x,y,g,g',p,q,n) := tilh(y,g',q,h)·pol''y(x,y,g,g',p,q,n) + 2·tilh'(y,g',q,h)·pol'y(x,y,g,g',p,q,n)

di''y(x,y,g,g',p,q,n) := (d1(x,y,g,g',p,q,n) + tilh''(y,g',q,h)·pol(x,y,g,g',p,q,n))·tilh(x,g,p,h)

L1 := 4   L := L1 - 1   i := 0..L

J1 := 4   J := J1 - 1   j := 0..J   N1·L1·J1 = 576

p :=  $\frac{Xi}{L-1}$    p = 1   X1 := Xv + p·(1 - 0.5L)   q :=  $\frac{Yi}{J-1}$    q = 1   Yj := Yv + q·(j - 0.5J)

M := 40   M1 := M + 1   m := 0..M   xm := X1 + Xi· $\frac{m}{M}$ 

R := 40   R1 := R + 1   r := 0..R   yr := Y1 + Yi· $\frac{r}{R}$    M1·R1 = 1681

in(n,l,j) := n + N1·l + N1·L1·j

Am+M1·r,in(n,l,j) := di'(xm,yr,X1,Yj,p,q,n) + di''y(xm,yr,X1,Yj,p,q,n)   M' := 99

m1 := 0..M'   Xm1 := X1 + md(Xi)   Ym1 := Y1 + md(Yi)   H := 20

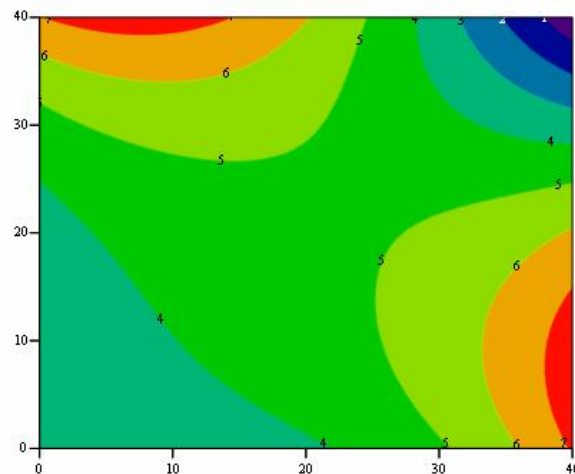
AM+M1·R+1+m1,in(n,l,j) := di(Xm1,Ym1,X1,Yj,p,q,n)·H

BM+M1·R+1+m1 := U1(Xm1,Ym1)·H   ulm,r := U1(xm,yr)

Bm+M1·r := ρ(xm,yr)   c := Isolve(A,B)   max(c) - min(c) = 33.864

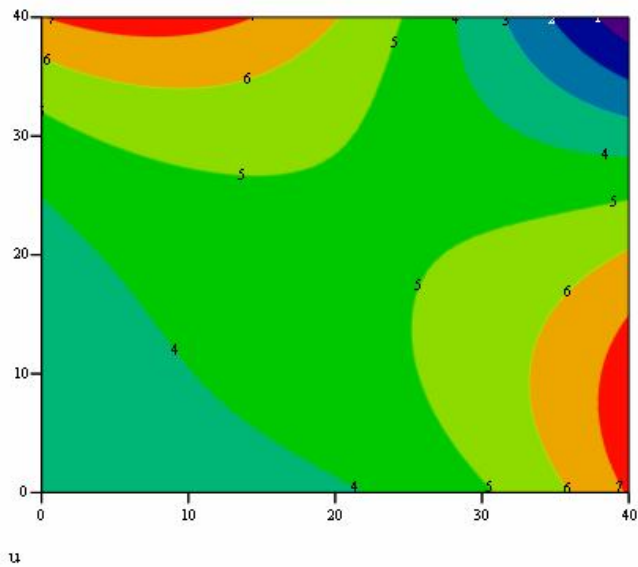
U(x,y) :=  $\sum_{l=0}^L \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^J (c_{in(n,l,j)} \cdot di(x,y,X1,Yj,p,q,n))$    um,r := U(xm,yr)

```



ul

10 pav. I modelio Puasono lygties sprendinių ul reljefiniai grafikai



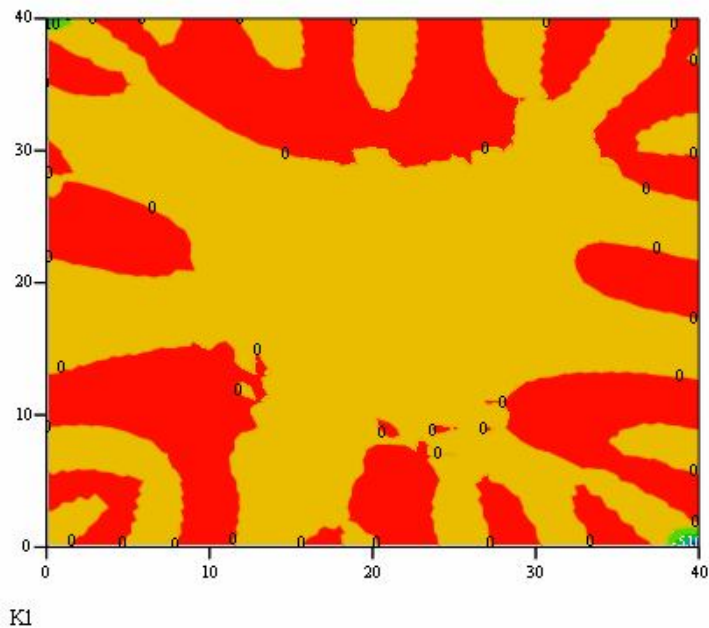
11 pav. I modelio Puasono lygties sprendinių u reljefiniai grafikai

$M'' := 1000$

$m'' := 0..M'' \quad x''_{m''} := X1 + \text{rnd}(X1) \quad y''_{m''} := Y1 + \text{rnd}(Y1)$

$k1_{m''} := U(x''_{m''}, y''_{m''}) - U1(x''_{m''}, y''_{m''})$

$K1_{m,r} := u_{m,r} - u1_{m,r} \quad \sigma := \frac{\text{stdev}(k1)}{\text{mean}(u1)} \quad \sigma = 1.373 \times 10^{-11} \quad \frac{\max(k1) - \min(k1)}{\text{mean}(u1)} = 5.005 \times 10^{-10}$



12 pav. I modelio Puasono lygties sprendinių standartinių nuokrypių reljefiniai grafikai

Puasono lygties sprendimo trigonometrinių „tilto“ funkcijų metodu realizacija Matchad‘o programa II modelis

$$X1 := 0 \quad X2 := 2 \quad \underline{Y1} := 0 \quad Y2 := 2$$

$$\alpha := 0.8 \quad \beta := 0.7 \quad \mu := 1.0 \quad \nu := 0.9 \quad \eta := 1.7$$

$$Xv := 0.5(X1 + X2) \quad Yv := 0.5(Y1 + Y2)$$

$$Xi := X2 - X1 \quad Yi := Y2 - Y1$$

$$U1(x,y) := \exp(-\alpha x^2 - \beta y^2) + e^{\mu \cdot x} \cdot \cos(\mu \cdot y) + e^{\nu \cdot y} \cdot \cos(\nu \cdot x) + \eta \cdot x \cdot y$$

$$\rho(x,y) := 2 \cdot [-\alpha - \beta + 2(\alpha \cdot x)^2 + 2(\beta \cdot y)^2] \cdot e^{-\alpha \cdot x^2 - \beta \cdot y^2}$$

$$N1 := 36 \quad \underline{N} := N1 - 1 \quad n := 0..N$$

$$\text{tilt}(x,g,p) := \cos\left(\pi \cdot \frac{x-g}{2p}\right) \cdot (-p < x-g \leq p)$$

$$\text{tilt}'(x,g,p) := \frac{-\pi}{2p} \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x-g}{p}\right) \cdot (-p < x-g \leq p)$$

$$\text{tilt}''(x,g,p) := \frac{-\pi^2}{2p^2} \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{x-g}{p}\right) \cdot (-p < x-g \leq p)$$

$$\text{pol}(x,y,g,g',p,q,n) := \left(\frac{x-g}{p}\right)^{Q_{n,0}} \cdot \left(\frac{y-g'}{q}\right)^{Q_{n,1}}$$

$$\text{pol}^x(x,y,g,g',p,q,n) := \frac{Q_{n,0}}{p} \cdot \left[\left(\frac{x-g}{p}\right)^{|Q_{n,0}-1|} \cdot \left(\frac{y-g'}{q}\right)^{Q_{n,1}}\right]$$

$$\text{pol}^y(x,y,g,g',p,q,n) := \frac{Q_{n,1}}{q} \cdot \left(\frac{x-g}{p}\right)^{Q_{n,0}} \cdot \left(\frac{y-g'}{q}\right)^{|Q_{n,1}-1|}$$

$$\text{pol}^{xx}(x,y,g,g',p,q,n) := \frac{(Q_{n,0})^2 - Q_{n,0}}{p^2} \cdot \left[\left(\frac{x-g}{p}\right)^{|Q_{n,0}-2|} \cdot \left(\frac{y-g'}{q}\right)^{Q_{n,1}}\right]$$

$$\text{pol}^{yy}(x,y,g,g',p,q,n) := \frac{(Q_{n,1})^2 - Q_{n,1}}{q^2} \cdot \left(\frac{x-g}{p}\right)^{Q_{n,0}} \cdot \left(\frac{y-g'}{q}\right)^{|Q_{n,1}-2|}$$

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 5 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 5 & 0 \\ 0 & 6 \\ 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \\ 6 & 0 \\ 0 & 7 \\ 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ 4 & 3 \\ 5 & 2 \\ 6 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

```

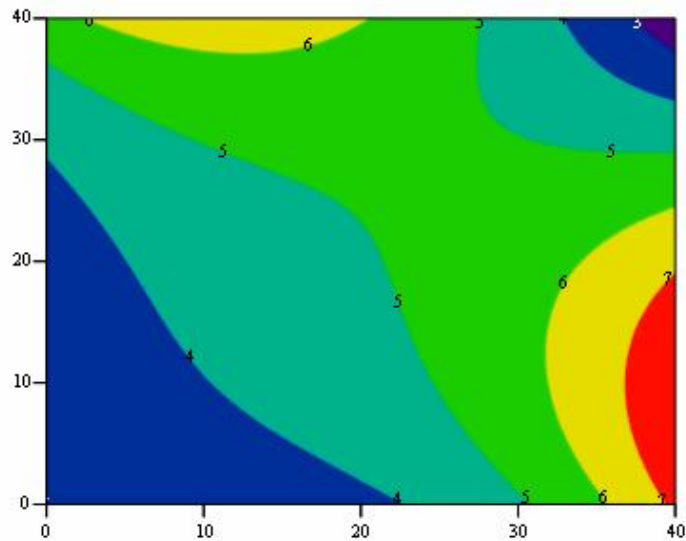
di(x,y,g,g',p,q,n) := tilt(x,g,p)·tilt(y,g',q)·pol(x,y,g,g',p,q,n)

d'(x,y,g,g',p,q,n) := tilt(x,g,p)·pol''x(x,y,g,g',p,q,n) + 2·tilt'(x,g,p)·pol'x(x,y,g,g',p,q,n)
di''x(x,y,g,g',p,q,n) := [(d'(x,y,g,g',p,q,n) + tilt''(x,g,p)·pol(x,y,g,g',p,q,n))·tilt(y,g',q)]

d1(x,y,g,g',p,q,n) := tilt(y,g',q)·pol''y(x,y,g,g',p,q,n) + 2·tilt'(y,g',q)·pol'y(x,y,g,g',p,q,n)
di''y(x,y,g,g',p,q,n) := (d1(x,y,g,g',p,q,n) + tilt''(y,g',q)·pol(x,y,g,g',p,q,n))·tilt(x,g,p)
L1 := 4   L := L1 - 1   i := 0..L
J1 := 4   J := J1 - 1   j := 0..J           N1·L1·J1 = 576
p := Xi / (L - 1)   p = 1   X1 := Xv + p·(1 - 0.5L)   q := Yi / (J - 1)   q = 1   Yj := Yv + q·(j - 0.5J)
M := 40   M1 := M + 1   m := 0..M   xm := X1 + Xi·m / M
R := 40   R1 := R + 1   r := 0..R   yr := Y1 + Yi·r / R   M1·R1 = 1681

in(n,l,j) := n + N1·l + N1·L1·j
Am+M1·R+1,in(n,l,j) := di''x(xm,yr,X1,Yj,p,q,n) + di''y(xm,yr,X1,Yj,p,q,n)   M' := 299
m1 := 0..M'   Xm1 := X1 + rnd(Xi)   Ym1 := Y1 + rnd(Yi)   H := 100
Am+M1·R+1+m1,in(n,l,j) := di(Xm1,Ym1,X1,Yj,p,q,n)·H   M1·R1 + M' = 1980
Bm+M1·R+1+m1 := U1(Xm1,Ym1)·H   ulm,r := U1(xm,yr)   N1·L1·J1 = 576
Bm+M1·r := rho(xm,yr)   c := isolve(A,B)   max(c) - min(c) = 28.061
U(x,y) := sum_{l=0}^L sum_{n=0}^N sum_{j=0}^J (c_in(n,l,j)·di(x,y,X1,Yj,p,q,n))   um,r := U(xm,yr)

```



ul

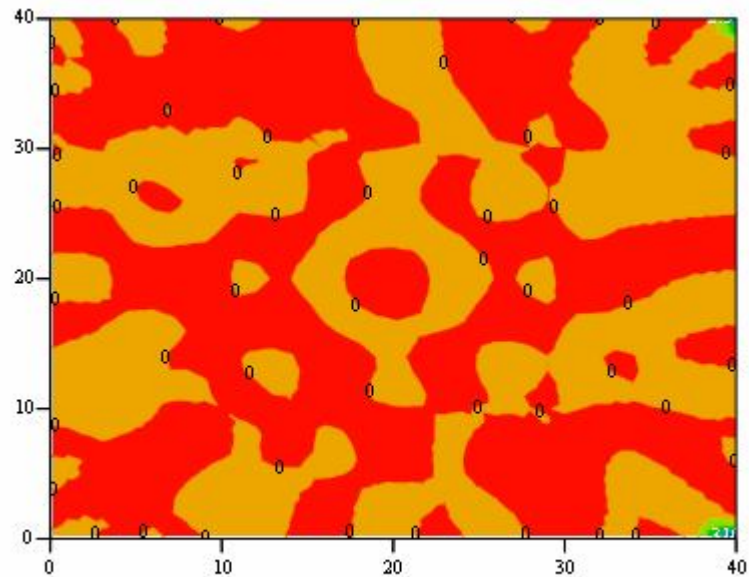
13 pav. I modelio Puasono lygties sprendinių ul reljefiniai grafikai

$M'' := 1000$

$m'' := 0..M'' \quad x''_{m''} := X1 + \text{rnd}(X1) \quad y''_{m''} := Y1 + \text{rnd}(Y1)$

$k1_{m''} := U(x''_{m''}, y''_{m''}) - U1(x''_{m''}, y''_{m''})$

$K1_{m,r} := u_{m,r} - u1_{m,r} \quad \sigma := \frac{\text{stdev}(k1)}{\text{stdev}(u1)} \quad \sigma = 1.39 \times 10^{-9} \quad \max(k1) - \min(k1) = 3.3 \times 10^{-8}$



K1

14 pav. I modelio Puasono lygties sprendinių standartinių nuokrypių reljefiniai grafikai

Sprendinio konstravimo trigonometrinių "tilto" funkcijų metodu animacija

```

X1 := 0      X2 := 2      Y1 := 0      Y2 := 2
Xv := 0.5(X1 + X2)      Yv := 0.5(Y1 + Y2)
Xi := X2 - X1      Yi := Y2 - Y1

tilt(x, g, p) := cos(π * (x - g) / 2p)^2 * (-p < x - g ≤ p)

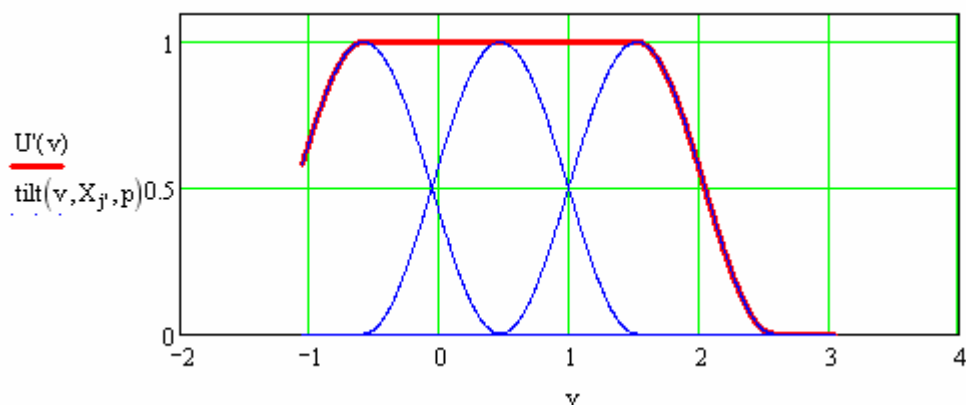
L1 := 4      L := L1 - 1      l := 0..L      p := X1 / (L - 1.1)      p = 1.053      Xl := Xv + p * (l - 0.5L)

J1 := 4      J := J1 - 1      j := 0..J      q := Y1 / (J - 1.1)      q = 1.053      Yj := Yv + q * (j - 0.5J)

M := 40      M1 := M + 1      m := 0..M      xm := X1 + Xi * m / M

R := 40      R1 := R + 1      r := 0..R      yr := Y1 + Yi * r / R

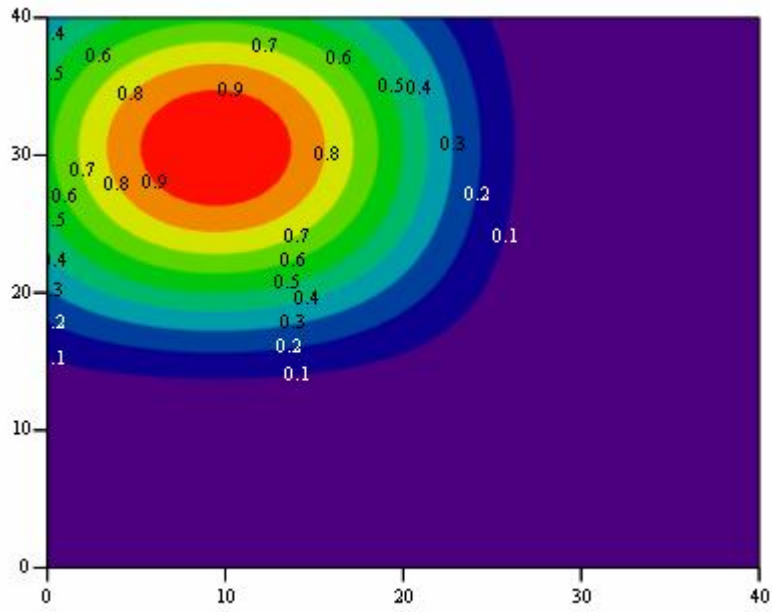
J' := FRAME + 2      j' := 0..J'      v := X1 - p, X1 - p + X1 / 500 .. X2 + p      U'(v) := ∑_{j'=0}^{J'} tilt(v, Xj', p)
    
```



15 pav. „Tilto“ formavimo trigonometrinėmis funkcijomis eiga

```

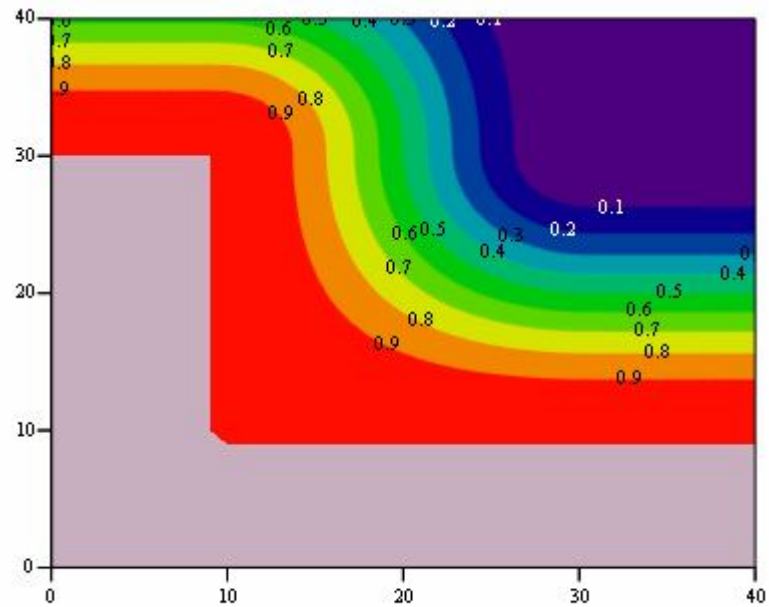
J2 := FRAME + 9      pl(x, y, g, g') := tilt(x, g, p) * tilt(y, g', q)
Jy := floor(J2 / J1)      Jx := mod(J2, L1)      Plm,r := pl(xm, yr, XJx, YJy)      X = ( -0.579, 0.474, 1.526, 2.579 )
    
```

P1

16 pav. Plokštės formavimo vienas epizodas

$$J3 := \text{FRAME} + 9 \quad PL_{m,r} := \sum_{j3=0}^{J3} pl\left(x_m, y_r, X_{\text{mod}(j3, L1)}, Y_{\text{floor}\left(\frac{j3}{J1}\right)}\right)$$



PL

17 pav. Plokštės formavimo eiga