ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Lina Šadbaraitė

Jungtinis diskretus elipsinių kreivių L-funkcijų universalumas

Magistro darbas

Darbo vadovė
prof. dr. R. Kačinskaitė

Šiauliai, 2011

TURINYS

Įvadas

Analizinėje skaičių teorijoje svarbią vietą užima dzeta ir L-funkcijų universalumo tyrimas. Pirmieji rezultatai šioje srityje buvo gauti S. M. Voronino 1975 metais. Jis tyrė Rymano dzeta funkciją $\zeta(s)$. Priminsime, kad funkcija $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

ir analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuriame turi paprastąjį polių su reziduumu 1.

Voroninas [11] įrodė tokią teoremą.

A teorema ([11]). *Tarkime, kad $0 < r < \frac{1}{4}$ ir $f(s)$ yra nenykstanti tolydi funkcija skritulyje $|s| \leq r$ bei analizinė jo viduje. Tada su kiekvienu $\varepsilon > 0$ egzistuoja realusis skaičius $\tau = \tau(\varepsilon)$ toks, kad*

$$\max_{|s|\leq r} \left| \zeta\left(s + \frac{3}{4} + i\tau\right) - f(s) \right| < \varepsilon.$$

Tai reiškia, kad kiekviena nenykstanti analizinė funkcija kritinėje juostoje yra tolygiai aproksimuojama Rymano dzeta funkcijos postūmiais.

Jungtinis duoto analizinių funkcijų rinkinio aproksimavimas dzeta funkcijų postūmių rinkiniu yra sudėtingesnė problema. Pirmasis rezultatas taip pat buvo gautas S. M. Voronino 1975 metais. Jis įrodė jungtinį Dirichlė L-funkcijų universalumą. Dirichlė L-funkcija $L(s, \chi)$ susijusi su charakteriu χ moduliu d, $d \in \mathbb{N}$, pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama eilute

$$L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}.$$

Jei χ_0 yra pagrindinis charakteris moduliu d, tai $L(s, \chi_0)$ yra analizinė, kai $\sigma > 1$, ir, jei χ yra nepagrindinis charakteris, tai $L(s, \chi)$ yra analizinė plokštumėje $\sigma > 0$.

Voronino universalumo teoremą užrašysime bendresniu pavidalu, naudojant įprastą ribinių teoremų terminologiją.

Pažymėkime $\text{meas}\{A\}$ mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą ir tegu, kai $T > 0$,

$$\nu_T(...) = \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0, T] : ...\right\};$$

čia vietoje daugtaškio įrašomos sąlygos, kurias tenkina τ. Teisingas toks teiginys.

B teorema ([12]). *Tegul* $\chi_1, ..., \chi_n$ *yra poromis neekvivalentūs Dirichlė charakteriai, o* $L(s, \chi_1), ..., L(s, \chi_n)$ *– atitinkamos Dirichlė funkcijos.* K_j *pažymėkime srities* $D_0 = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ *kompaktišką poaibį su jungiuoju papildiniu ir tegul* $f_j(s)$ *yra tolydi nenykstanti* K_j *funkcija ir analizinė jo viduje,* $j = 1, ..., n$. *Tada kiekvienam* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T \left(\sup_{1\le j\le n} \sup_{s\in K_j} |L(s + i\tau, \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Daugelis matematikų tyrė ir tiria įvairių dzeta ir L-funkcijų universalumo Voronino prasme savybę. Galima paminėti B. Bagčį, S. M. Goneką, K. Matsumoto, H. Mišu, J. Štaudingą. Lietuvoje šioje srityje dirba V. Garbaliauskienė, R. Kačinskaitė, A. Laurinčikas, R. Macaitienė, D. Šiaučiūnas ir kiti.

Galimas ir diskretus universalumo atvejis. Tokiu atveju kompleksinio kintamojo menamoji dalis įgyja reikšmes iš tam tikros aritmetinės progresijos. Pirmasis tokio tipo universalumą 1980 metais gavo A. Reichas [8]. Jis įrodė diskrečią universalumo teoremą Dedekindo dzeta funkcijai.

Priminsime Dedekindo dzeta funkcijos apibrėžimą. Algebrinių skaičių kūno $\mathbb{K}$ Dedekindo dzeta funkcija apibrėžiama formule

$$\zeta_{\mathbb{K}}(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{1}{(N\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}, \ \sigma > 1;$$

čia $\mathfrak{p}$ „prabėga“ visus kūno $\mathbb{K}$ daliklius ir $N\mathfrak{p}$ pažymi $\mathfrak{p}$ normą.

C teorema ([8]). *Tegul* $\mathbb{K}$ *yra laipsnio* d *algebrinių skaičių kūnas virš* $\mathbb{Q}$. *Tarkime, kad* K *yra juostos* $\max\{\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{d}\} < \sigma < 1$ *kompaktiškas poaibis su jungiuoju papildiniu, o* $g(s)$ *yra nenykstanti tolydi funkcija srityje* K *ir analizinė jos viduje. Tada kiekvienam realiam* $\Delta \neq 0$ *ir* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sharp \left\{ n \le N : \max_{s\in K} |\zeta_K(s + i\Delta n) - g(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

2009 metais bakalauro darbe yra nagrinėtas elipsinių kreivių L-funkcijų $L_E(s)$ diskretusis universalumas [9].

Tegul $N \in \mathbb{N}$ ir

$$\mu_N(...) = \frac{1}{N+1} \sharp \left\{ 0 \leq m \leq N : ... \right\};$$

čia vietoje daugtaškių įrašomos sąlygos, kurias tenkina m. Tarkime $h > 0$ yra fiksuotas skaičius, toks, kad $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ yra iracionalusis skaičius bet kokiam $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Tegu E yra elipsinė kreivė virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$ užrašoma Vejerštraso lygtimi

$$y^2 = x^3 + ax + b;$$

čia a ir b – racionalūs sveikieji skaičiai. Tarkime, kad kreivės E diskriminantas yra $\Delta = -16(4a^3 + 27b^2) \neq 0$. Yra žinoma, kad tuomet ji yra nesinguliarioji.

Kiekvienam pirminiam skaičiui p pažymėkime $\nu(p)$ lyginio

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod{p}$$

sprendinių skaičių, o $\lambda(p) = p - \nu(p)$. Pagal klasikinį Hasės rezultatą teisingas įvertis

$$|\lambda(p)| < 2\sqrt{p}. \tag{1}$$

Skaičių $\lambda(p)$ tyrimui Hasė ir Veilis panaudojo L-funkciją, susijusią su kreive E. Tada pastaroji funkcija yra apibrėžiama sandauga

$$L_E(s) = \prod_{p \nmid \Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s-1}}\right)^{-1} \prod_{p \mid \Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Atsižvelgiant į (1) įvertį sandauga konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{3}{2}$. Pagal Šimuros-Tanijamos teoremą [2], funkcija $L_E(s)$ yra analiziškai pratęsiama į sveikąją funkciją ir tenkina funkcinę lygtį

$$\left(\frac{\sqrt{q}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s) L_E(s) = \eta \left(\frac{\sqrt{q}}{2\pi}\right)^{2-s} \Gamma(2-s) L_E(2-s);$$

čia q – teigiamas sveikasis skaičius, sudarytas iš diskriminanto Δ pirminių daugiklių, $\eta = \pm 1$, o $\Gamma(s)$ – Oilerio gama funkcija.

Suformuluosime diskrečią universalumo Voronino prasme teoremą funkcijai $L_E(s)$. Tegul $D_V = \{s \in \mathbb{C} : 1 < \sigma < \frac{3}{2}\}$ yra kompleksinės plokštumos $\mathbb{C}$ juosta. Teisingas toks tvirtinimas.

D teorema ([9]). *Tarkime, kad* $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ *yra iracionalusis skaičius visiems* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. *Tegu* K *yra juostos* D_V *kompaktinis poaibis su jungiuoju papildiniu, o* $f(s)$ *yra tolydi nenykstanti funkcija srityje* K *bei analizinė jos viduje. Tuomet kiekvienam* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{N\to\infty} \mu_N \left(\sup_{s\in K} |L_E(s+imh) - f(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Magistro **darbo tikslas** – apibendrinti D teoremą, t. y. gauti jungtinę diskrečią universalumo Voronino prasme teoremą elipsinių kreivių L-funkcijų rinkiniui.

Tegu $n > 1$ yra teigiamas sveikasis skaičius. Sudarome rinkinį iš n elipsinių kreivių $E_1, ..., E_n$ užrašomų atitinkamomis Vejerštraso lygtimis

$$y^2 = x^3 + a_j x + b_j,$$

o diskriminantai $\Delta_j = -16(4a_j^3 + 27b_j^2) \neq 0$, $j = 1, ..., n$. Tegu, kaip ir anksčiau,

$$\lambda_j(p) = p - \nu_j(p),$$

o $\nu_j(p)$ yra lyginio

$$y^2 \equiv x^3 + a_j x + b_j (\mathrm{mod}\, p), \quad j = 1, ..., n,$$

sprendinių skaičius.

Apibrėžkime funkcijas

$$L_{E_j}(s) = \prod_{p\nmid\Delta_j} \left(1 - \frac{\lambda_j(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s-1}}\right)^{-1} \prod_{p|\Delta_j} \left(1 - \frac{\lambda_j(p)}{p^s}\right)^{-1}, \quad j = 1, ..., n.$$

Kad galėtume suformuluoti diskrečią jungtinę universalumo teoremą, funkcijos $L_{E_j}(s)$ turi tenkinti tam tikras sąlygas. Tegu P yra visų pirminių skaičių aibė, o P_l yra aibės pirminių skaičių, tokios, kad $P_{l_1} \bigcap P_{l_2} = \varnothing$, kai $l_1 \neq l_2$, ir

$$P = \bigcup_{l=1}^{r} P_l,$$

$l = 1, ..., r$, $r \geq n$. Dar daugiau, pareikalaukime, kad

$$\sum_{\substack{p\leq x\\ p\in P_l}} \frac{1}{p} = \varkappa_l \log\log x + b_l + \rho_l(x), \text{ kai } x \to \infty; \tag{2}$$

čia $\varkappa_1 + ... + \varkappa_r = 1$, $\varkappa_l > 0$, $\rho_l(x) = O(\log^{-\theta_l} x)$ su $\theta_l > 1$, o b_l yra tam tikri realūs skaičiai, $l = 1, ..., r$. Pažymėkime

$$B_j(p) = \frac{\lambda_j(p)}{\sqrt{p}}$$

ir tarkime, kad $B_j(p)$ yra konstanta, kai $p \in P_l$, t. y., kai $p \in P_l$,

$$B_1(p) = B_{l1},$$

$$....................$$

$$B_n(p) = B_{ln}.$$

B_{rn} pažymėkime jų matricą, t. y.

$$B_{rn} = \begin{pmatrix} B_{11} & ... & B_{1n} \\ ...... & ...... & ...... \\ B_{r1} & ... & B_{rn} \end{pmatrix}.$$

1 teorema. *Tarkime, kad h yra fiksuotas teigiamas skaičius toks, kad* $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ *yra iracionalusis skaičius visiems $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Tarkime, kad* $\mathrm{rank}(B_{rn}) = n$. *Tegu K_j yra juostos D_V kompaktiškas poaibis su jungiuoju papildiniu, o $f_j(s)$ yra tolydi nenykstanti funkcija srityje K_j ir analizinė jos viduje, $j = 1, ..., n$. Tada kiekvienam $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{N \to \infty} \mu_N \left(\sup_{1 \le j \le n} \sup_{s \in K_j} |L_{E_j}(s + imh) - f_j(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

1 Jungtinė diskreti ribinė teorema analizinių funkcijų erdvėje

Dzeta funkcijų jungtinio universalumo savybės įrodymui reikalinga jungtinė ribinė teorema analizinių funkcijų erdvėje.

Jungtinio elipsinių kreivių L-funkcijų reikšmių pasiskirstymo tyrimas remiasi vienmate diskrečia ribine teorema šioms funkcijoms (D teorema) bei įrodymui reikalingais tam tikrais silpno tikimybinių matų konvergavimo teiginiais. Todėl šio skyriaus pradžioje juos pirmiausiai suformuluosime kaip lemas.

2 lema. *Tarkime, kad* $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ *iracionalusis skaičius visiems* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. *Tada, kai* $N \to \infty$, *tikimybinis matas*

$$\mu_N(L_E(s+imh) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D_V)),$$

silpnai konverguoja į matą P_{L_E}.

Įrodymas. Tai yra 3.2 lema [9] darbe.

Tarkime h ir h_n yra mačios funkcijos, aibė S atvaizduojama į S_1. Taip pat tegul $E = \{x \in S : h_n(x_n) \not\to h(x)$ tam tikriems $x_n \to x$, kai $n \to \infty\}$.

3 lema. *Jeigu tikimybinis matas* P_N *silpnai konverguoja į matą* P *ir* $P(E) = 0$, *tai* $P_n h^{-1}$ *silpnai konverguoja į* Ph^{-1}, *kai* $n \to \infty$.

Ši lema yra 5.1 teorema iš [1].

Dabar esame pasiruošę suformuluoti ir įrodyti jungtinę diskrečią ribinę teoremą elipsinių kreivių L-funkcijoms analizinių funkcijų erdvėje. Priminsime, kad šiame skyriuje bus naudojami tokie patys žymėjimai, kaip ir įvade.

$H(G)$ pažymėkime analizinių srityje G funkcijų erdvę su tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija. Tegul $H^n(G)$ yra n erdvių $H(G)$ Dekarto sandauga, t. y.

$$H^n(G) = \underbrace{H(G) \times ... \times H(G)}_{n}, \quad n \geq 2.$$

$\mathcal{B}(S)$ pažymėkime erdvės S Borelio aibių klasę. Nagrinėsime tikimybinio mato

$$P_N(A) = \mu_N\left((L_{E_1}(s+imh), ..., L_{E_n}(s+imh)) \in A\right), \; A \in \mathcal{B}(H^n(D_V)),$$

kai $N \to \infty$, silpną konvergavimą.

Tarkime γ yra vienetinis kompleksinės plokštumos apskritimas, t. y. $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ ir

$$\Omega = \prod_p \gamma_p;$$

čia $\gamma_p = \gamma$ visiems pirminiams p. Su sandaugos topologija ir pataškine daugyba toras Ω yra kompaktiška topologinė Abelio grupė, todėl erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja tikimybinis Haro matas m_H. Tokiu būdu gauname tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. $\omega(p)$ pažymėkime $\omega \in \Omega$ projekciją į koordinatinę erdvę γ_p. Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžkime $H^n(D_V)$-reikšmį atsitiktinį elementą $L(s, \omega)$ formule

$$L(s, \omega) = \left(L_{E_1}(s, \omega), ..., L_{E_n}(s, \omega)\right); \tag{3}$$

čia

$$L_{E_j}(s, \omega) = \prod_{p \nmid \Delta_j} \left(1 - \frac{\lambda_j(p)\omega(p)}{p^s} + \frac{\omega^2(p)}{p^{2s-1}}\right)^{-1} \prod_{p | \Delta_j} \left(1 - \frac{\lambda_j(p)\omega(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

$j = 1, ..., n$. Šio atsitiktinio elemento skirstinys tegul yra

$$P_L(A) = m_H\left(\omega \in \Omega : L(s, \omega) \in A\right), \quad A \in \mathcal{B}(H^n(D_V)).$$

4 lema. *Tikimybinis matas P_N, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P_L.*

Įrodymas. 2 lemoje buvo įrodyta, kad kiekvienai mato $P_N(A)$ komponentei $L_{E_j}(s + imh)$ tikimybinis matas $\mu_N\left(L_{E_j}(s + imh) \in A\right)$ silpnai konverguoja į matą $P_L\left(L_{E_j}(s, \omega) \in A\right)$, $A \in \mathcal{B}(H(D_V)), j = 1, ..., n$.

$L_{E_j}(s)$ yra Matsumoto dzeta funkcijos atskiras atvejas su $\alpha = 0$ ir $\beta = \frac{1}{2}$ [6]. Pusplokštumėje $\sigma > 1$ galioja augimo įverčiai

$$L_{E_j}(\sigma + it) = O\left(|t|^{\alpha_j}\right), \quad |t| \geq t_0, \quad \alpha_j > 0$$

ir

$$\int_0^T |L_{E_j}(\sigma + it)|^2 \mathrm{d}t = O(T), \quad T \to \infty,$$

nes pagal Šimura-Tanijama teoremą funkcija $L_{E_j}(s)$ sutampa su L-funkcija, susijusia su 2 lygio nauja forma. Tai reiškia, kad pusplokštumėje $\sigma > \frac{3}{2}$ funkciją $L_{E_j}(s)$ galima užrašyti sandauga

$$L_{E_j}(s) = \prod_{p | \Delta_j} \left(1 - \frac{\lambda_j(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \nmid \Delta_j} \left(1 - \frac{\alpha_j(p)}{p^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\beta_j(p)}{p^s}\right)^{-1};$$

čia $\alpha_j(p) + \beta_j(p) = \lambda_j(p)$, o pagal (1) nelygybę $|\alpha_j(p)| \leq 2\sqrt{p}$, $|\beta_j(p)| \leq 2\sqrt{p}$, $j = 1, ..., n$. Todėl remiantis [4] darbo teorema turime, kad tikimybinis matas, kai $N \to \infty$,

$$\mu_N\left((L_{E_1}(s+imh), ..., L_{E_n}(s+imh)) \in A\right), \quad A \in \mathcal{B}(H^n(D_V)),$$

silpnai konverguoja į $H^n(D_V)$-reikšmio atsitiktinio elemento, apibrėžto (3) lygybe, skirstinį. Funkcija $u : H^n(D_V) \to H^n(D_V)$ yra tolydi. Vadinasi, pagal 3 lemą gauname mūsų įrodomos lemos tvirtinimą.

2 Tirštumo lema

Universalumo įrodymui reikalinga mato P_L atrama. Todėl nagrinėsime atsitiktinį elementą $L(s,\omega)$ ir jo atramą.

Tarkime, kad $|a_p| \in \gamma$ visiems pirminiams p. Apibrėžkime funkciją

$$f_{jp}(s,a_p) = \begin{cases} -\log\left(1 - \frac{\lambda_j(p)a_p}{p^s} + \frac{a_p^2}{p^{2s-1}}\right), & \text{jei} \quad p \nmid \Delta_j, \\ -\log\left(1 - \frac{\lambda_j(p)a_p}{p^s}\right), & \text{jei} \quad p | \Delta_j, \end{cases}$$

$j = 1, ..., n$ ir

$$\underline{f}_p(s,a_p) = \left(f_{1p}(s,a_p), ..., f_{np}(s,a_p)\right).$$

Pirmiausia pateiksime pagalbinius teiginius, kurie yra reikalingi pagrindiniam šio skyriaus rezultato – aibės tirštumo – įrodymui.

5 lema. *Tarkime, kad μ yra kompleksinis Borelio matas erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ su kompaktiška atrama, priklausančia sričiai $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_0\}$ ir*

$$f(z) = \int\limits_{\mathbb{C}} \mathrm{e}^{sz} \mathrm{d}\mu(s), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Jeigu $f(z) \not\equiv 0$, tada

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\log|f(x)|}{x} > \sigma_0.$$

Ši lema yra 6.4.10 lema iš [5].

6 lema. *Tarkime, kad $f(s)$ yra sveikoji eksponentinė funkcija, o $\{\lambda_m\}$ yra kompleksinių skaičių seka. Tegul α, β ir δ yra teigiami realieji skaičiai tokie, kad:*

(i) $\displaystyle\limsup_{x\to\infty} \frac{\log|f(\pm ix)|}{x} \le \alpha$;

(ii) $|\lambda_m - \lambda_n| \ge \delta|m-n|$;

(iii) $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{\lambda_m}{m} = \beta$;

(iv) $\alpha\beta < \pi$.

Tada

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{\log|f(\lambda_m)|}{|\lambda_m|} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log|f(r)|}{r}.$$

Lema yra Bernšteino teoremos atskiras atvejis. Įrodymą galima rasti [5].

Priminsime, kad analizinė kampe $|\arg s| \leq \theta_0$, $0 < \theta_0 < \pi$, funkcija $f(s)$ yra vadinama eksponentinio tipo, jeigu tolygiai pagal θ, $|\theta| \leq \theta_0$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log |f(re^{i\theta})|}{r} < \infty.$$

7 lema. *Tegul $f(s)$ yra eksponentinio tipo funkcija tokia, kad*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\log |f(x)|}{x} > -1.$$

Tada, kai $l = 1, ..., r$,

$$\sum_{p\in P_l} |f(\log p)| = \infty.$$

Ši lema yra 4 lema iš [3]. Jos įrodymas remiasi (2) savybe aibėse P_l, bei 6 lema.

8 lema. *Tegul $\{\underline{f}_m\} = \{(f_{1m}, ..., f_{nm})\}$ yra erdvės $H^n(D_V)$ seka, kuri tenkina šiuos reikalavimus:*

(i) jei $\mu_1, ..., \mu_n$ yra kompleksiniai Borelio matai erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ su kompaktinėmis atramomis srityje D_V tokiomis, kad

$$\sum_{m=1}^{\infty} \Big|\sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{C}} f_{jm} \mathrm{d}\mu_j\Big| < \infty,$$

tada

$$\int_{\mathbb{C}} s^r \mathrm{d}\mu_j(s) = 0,$$

kai $j = 1, ..., n$ ir $r = 0, 1, 2, ...$;

(ii) eilutė $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \underline{f}_m$ konverguoja erdvėje $H^n(D_V)$;

(iii) kiekvienam kompaktui $K_1, ..., K_n \subset D_V$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \sup_{s\in K_j} |f_{jm}(s)|^2 < \infty.$$

Tada visų konverguojančių eilučių $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m \underline{f}_m$ aibė su $a_m \in \gamma$ yra tiršta erdvėje $H^n(D_V)$.

Ši lema yra atskiras 5 lemos iš [7] atvejis.

Dabar suformuluosime pagrindinį skyriaus tvirtinimą ir jį įrodysime.

9 lema. *Tarkime, kad* $\operatorname{rank}(B_{rn}) = n$. *Visų konverguojančių eilučių* $\sum\limits_p \underline{f}(s, a_p)$ *aibė yra tiršta erdvėje* $H^n(D_V)$.

Įrodymas. Tarkime, kad p_0 yra fiksuotas teigiamas skaičius. Apibrėžkime

$$\underline{f}_p(s) = \begin{cases} \underline{f}_p(s,1), & \text{jeigu} \quad p > p_0, \\ 0, & \text{jeigu} \quad p \le p_0. \end{cases}$$

Pirmiausia įrodysime, kad egzistuoja seka $\{\hat{a}_p : \hat{a}_p \in \gamma\}$ tokia, kad eilutė

$$\sum_p \hat{a}_p \underline{f}_p \tag{4}$$

konverguotų erdvėje $H^n(D_V)$. Iš tiesų, atsižvelgiant į Hasės įvertį ((1) nelygybė),

$$f_{jp}(s,1) = \frac{\lambda_j(p)}{p^s} + r_{jp}(s);$$

čia $r_{jp}(s) = O\left(p^{1-2\sigma}\right)$, $j = 1, ..., n$. Todėl gauname, kad srities D_V kompaktiškuose poaibiuose $K_1, ..., K_n$ eilutė

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_p \sup_{s \in K_j} |r_{jp}(s)|$$

konverguoja.

Įrodant, kad $L_{E_j}(s, \omega)$, $j = 1, ..., n$, yra $H(D_V)$-reikšmiai atsitiktiniai elementai buvo gauta, kad eilutė

$$\sum_p \frac{\lambda_j(p)\omega(p)}{p^s}, \quad j = 1, ..., n,$$

konverguoja tolygiai srities D_V kompaktiškuose poaibiuose su beveik visais $\omega \in \Omega$ [6]. Todėl eilutė

$$\sum_p \left(\frac{\lambda_1(p)\omega(p)}{p^s}, ..., \frac{\lambda_n(p)\omega(p)}{p^s} \right)$$

konverguoja erdvėje $H^n(D_V)$ beveik visiems $\omega \in \Omega$. Vadinasi, egzistuoja seka $\{\hat{a}_p : \hat{a}_p \in \gamma\}$ tokia, kad (4) eilutė konverguotų erdvėje $H^n(D_V)$.

Dabar įrodysime, kad visų konverguojančių eilučių

$$\sum_p a_p \underline{f}_p, \quad a_p \in \gamma, \tag{5}$$

aibė yra tiršta erdvėje $H^n(D_V)$. Kad tai padaryti, pakanka parodyti, kad visų konverguojančių eilučių

$$\sum_p b_p \underline{g}_p, \quad b_p \in \gamma, \tag{6}$$

aibė yra tiršta erdvėje $H^n(D_V)$; čia $g_p = \hat{a}_p \underline{f}_p$. Tam sekai $\{\underline{g}_p\}$ pritaikysime 8 lemą.

Iš $\underline{g}_p$ apibrėžimo seka, kad eilutė $\sum\limits_p \underline{g}_p$ konverguoja erdvėje $H^n(D_V)$. Be to, atsižvelgiant į (1) įvertį eilutė

$$\sum_p \sum_{j=1}^n \sup_{s \in K_j} |g_{jp}(s)|^2$$

konverguoja kiekviename iš kompaktų $K_1, ..., K_n \subset D_V$. Todėl 8 lemos ii) ir iii) hipotezės yra tenkinamos. Lieka patikrinti i) hipotezę.

Tarkime, kad $\mu_1, ..., \mu_n$ yra kompleksiniai Borelio matai erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ su kompaktiškomis atramomis, priklausančiomis sričiai D_V, tokiomis, kad eilutė

$$\sum_p \left| \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{C}} b_p g_{jp} \mathrm{d}\mu_j \right| \tag{7}$$

konverguotų.

Tarkime, kad $D_{0V} = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ ir $v(s) = s - \frac{1}{2}$. Apibrėžkime $\mu_j v^{-1}(A) = \mu_j(v^{-1}A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$, $j = 1, ..., n$. Akivaizdu, kad $\mu_j v^{-1}$ yra kompleksinis matas erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ su kompaktiška atrama, priklausančia sričiai D_{0V}, $j = 1, ..., n$. Pastarasis faktas ir (7) eilutės konvergavimas parodo, kad eilutė

$$\sum_{p \in P_l} \left| \sum_{j=1}^n b_{lj} \int_{\mathbb{C}} p^{-s} \mathrm{d}\mu_j v^{-1}(s) \right| \tag{8}$$

konverguoja visiems $l = 1, ..., r$.

Imkime

$$\nu_l(s) = \sum_{j=1}^n b_{lj} \mu_j v^{-1}(s).$$

Tada iš (8) eilutės konvergavimo seka, kad eilutė

$$\sum_{p \in P_l} \left| \rho_l(\log p) \right|, \quad l = 1, ..., r,$$

konverguoja; čia $\rho_l(z) = \int\limits_{\mathbb{C}} \mathrm{e}^{-sz} \mathrm{d}\nu_l(s)$, $z \in \mathbb{C}$.

Akivaizdu, kad

$$|\rho_l(r\mathrm{e}^{i\varphi})| \le \mathrm{e}^{Vr} \int\limits_{\mathbb{C}} |\mathrm{d}\nu_l(s)|, \qquad r > 0.$$

Vadinasi,

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log|\rho_l(r\mathrm{e}^{i\varphi})|}{r} \le V$$

tolygiai pagal φ, $0 < \varphi \le \pi$. Tai parodo, kad funkcija $\rho_l(z)$ yra eksponentinio tipo funkcija, $l = 1, ..., r$.

Atsižvelgiant į 5 ir 7 lemas randame, kad $\rho(z) \equiv 0$ visiems $l = 1, ..., r$. Todėl diferencijuodami gauname

$$\int\limits_{\mathbb{C}} s^k \mathrm{d}\nu_l(s) = 0 \tag{9}$$

visiems $l = 1, ..., r$ ir $k = 0, 1, 2, ...$

Imkime

$$x_j = x_j(k) = \int\limits_{\mathbb{C}} s^k \mathrm{d}\mu_j v^{-1}(s).$$

Iš $\nu_j(s)$ apibrėžimo ir (9) lygybės gauname lygčių

$$\sum_{j=1}^{n} b_{lj} x_j = 0, \quad l = 1, ..., r,$$

sistemą. Kadangi koeficientų b_{l_j} matricos B_{rn} rangas yra lygus n, tai pastaroji sistema turi vienintelį sprendinį $x_j = 0$, $j = 1, ..., n$. Todėl visiems $j = 1, ..., n$ ir $k = 0, 1, 2, ...$

$$\int\limits_{\mathbb{C}} s^k \mathrm{d}\mu_j v^{-1}(s) = 0.$$

O iš čia seka, kad

$$\int\limits_{\mathbb{C}} s^k \mathrm{d}\mu_j(s) = 0,$$

$j = 1, ..., n$ ir $k = 0, 1, 2, ...$

Tai parodo, kad visos 8 lemos hipotezės yra tenkinamos, todėl visų (6) konverguojančių eilučių aibė yra tiršta erdvėje $H^n(D_V)$. Vadinasi, toks pat teiginys yra teisingas ir visų (5) konverguojančių eilučių aibei.

Nagrinėkime vektorių $\underline{x}(s) = (x_1(s), ..., x_n(s))$, kuris yra laisvai pasirinktas erdvės $H^n(D_V)$ elementas. Sakykime, kad $K_1, ..., K_n$ yra juostos D_V kompaktiški poaibiai, o ε pakankamai mažas laisvai pasirinktas teigiamas skaičius. Fiksuokime p_0 tokį, kad

$$\sum_{j=1}^{n} \sup_{s\in K_j} \sum_{p>p_0} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|\lambda_j(p)|^k}{kp^{k\sigma}} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{10}$$

Iš visų konverguojančių eilučių tirštumo seka, kad egzistuoja seka $\{\widetilde{a}_m : \widetilde{a}_m \in \gamma\}$ tokia, kad

$$\sup_{1\le j\le n} \sup_{s\in K_j} \left| \underline{x}(s) - \sum_{p\le p_0} \underline{f}_p(s) - \sum_{p\ge p_0} \widetilde{a}_p \underline{f}_p(s) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

Parinkime

$$a_p = \begin{cases} 1, & \text{jeigu} \quad p \le p_0, \\ \widetilde{a}_p, & \text{jeigu} \quad p > p_0. \end{cases}$$

Tada iš (10) ir (11) nelygybių turime

$$\begin{aligned} \sup_{1\le j\le n} \ \sup_{s\in K_j} & \left| \underline{x}(s) - \sum_{p} \underline{f}_p(s, a_p) \right| \\ = \quad & \sup_{1\le j\le n} \sup_{s\in K_j} \left| \underline{x}(s) - \sum_{p\le p_0} \underline{f}_p(s, a_p) - \sum_{p>p_0} \underline{f}_p(s, a_p) \right| \\ \le \quad & \sup_{1\le j\le n} \sup_{s\in K_j} \left| \underline{x}(s) - \sum_{p\le p_0} \underline{f}_p(s) - \sum_{p\ge p_0} \widetilde{a}_p \underline{f}_p(s) \right| \\ & + \sup_{1\le j\le n} \sup_{s\in K_j} \left| \sum_{p>p_0} \widetilde{a}_p \underline{f}_p(s) - \sum_{p>p_0} \underline{f}_p(s, \widetilde{a}_p) \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Kadangi $\underline{x}(s)$, $K_1, ..., K_n$ ir ε yra parinkti laisvai, gauname lemos tvirtinimą.

3 Mato P_L atrama

Šiame skyriuje įrodysime teoremą apie mato P_L atramą. Jos įrodymas remiasi 9 ir 10 lemomis bei Hurvico teorema.

Priminsime, kad mato P_L atrama yra minimali uždara aibė S tokia, kad $P_L(S) = 1$.

Sudarykime aibę S iš visų elementų $f \in H(D_V)$, kurių kiekviena aplinka G būtų tokia, kad $P_L(G) > 0$, t. y.

$$S = \{f \in H(D_V) : f(s) \neq 0 \quad \text{arba} \quad f(s) \equiv 0\}.$$

Pažymėkime S_X atsitiktinio elemento X atramą.

10 lema. *Tarkime $\{X_n\}$ yra $H^n(D_V)$-reikšmių atsitiktinių elementų seka tokia, kad eilutė $\sum\limits_{m=1}^{\infty} X_m$ konverguotų beveik tikrai. Tada pastarosios eilutės sumos atrama yra visų $\underline{f} \in H^n(D_V)$ aibės uždarinys, kai $\underline{f}$ galima užrašyti konverguojančia eilute*

$$\underline{f} = \sum_{m=1}^{\infty} \underline{f}_m, \quad \underline{f}_m \in S_{X_m}.$$

Ši lema yra 4 lemos iš [7] atskiras atvejis.

11 lema (Hurvico teorema). *Tarkime $\{f_n(s)\}$ yra seka funkcijų analizinių srityje D, kuri yra aprėžta paprastu uždaru kontūru ir tegul $f_n(s) \to f(s)$, $n \to \infty$ tolygiai srityje D. Tarkime $f_n(s) \not\equiv 0$. Tada srities D vidinis taškas s_0 yra funkcijos $f(s)$ nulis tada ir tik tada, jei egzistuoja seka $\{s_n\} \subset D$, tokia, kad $s_n \to s_0$, $n \to \infty$ ir $f_n(s_n) = 0$ su $n > n_0 = n_0(s_0)$.*

Ši lema yra 3.45 teorema iš [10].

Pagrindinis šio skyriaus teiginys yra ši lema.

12 lema. *Mato P_L atrama yra aibė S^n.*

Įrodymas. Kadangi $\{\omega(p)\}$ yra nepriklausomų atsitiktinių elementų seka, aibė $\{\underline{f}_p(s, \omega(p))\}$ yra $H^n(D_V)$-reikšmių nepriklausomų atsitiktinių elementų, apibrėžtų tikimybinėje erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}), m_H)$ seka. Kiekvieno atsitiktinio elemento $\omega(p)$ atrama yra vienetinis apskritimas γ, o $\underline{f}_p(s, \omega(p))$ atrama yra aibė $\{\underline{f} \in H(D_V) : \underline{f}(s) = \underline{f}(s, a), a \in \gamma\}$. Todėl pagal 10 lemą $H^n(D_V)$-reikšmio atsitiktinio elemento

$$(\log L_{E_1}(s, \omega), ..., \log L_{E_n}(s, \omega)) \tag{12}$$

atrama yra uždarinys aibės, sudarytos iš visų konverguojančių eilučių $\sum\limits_p \underline{f}_p(s, a_p)$; čia $\log L_{E_j}(s,\omega) = \sum\limits_p f_p(s,\omega(p)), j = 1,...,n$. Pagal 9 lemą aibė $\{\underline{f}_p(s,\omega(p))\}$ yra visur tiršta erdvėje $H^n(D_V)$. Todėl (12) formule apibrėžto atsitiktinio elemento atrama yra tiršta erdvėje $H^n(D_V)$. Atvaizdis $v : H^n(D_V) \to H^n(D_V)$, apibrėžtas formule

$$v(f_1(s),...,f_n(s)) = \left(\mathrm{e}^{f_1(s)},...,\mathrm{e}^{f_n(s)}\right), \quad f_1,...,f_n \in H^n(D_V)$$

yra tolydus ir kiekvieną $H^n(D_V)$-reikšmio atsitiktinio elemento komponentę $\log L_{E_j}(s,\omega), j = 1,...,n$ atvaizduoja į elementą $L(s,\omega)$, o erdvę $H^n(D_V)$ į $(S \setminus \{0\})^n$. Iš čia turime, kad atstiktinio elemento $L(s,\omega)$ atrama S_L priklauso aibei $(S \setminus \{0\})^n$. Be to, pagal apibrėžimą atsitiktinio elemento atrama yra uždara aibė. Atsižvelgiant į Hurvico teoremą (11 lemą), $S \setminus \{0\}$ uždarinys yra aibė S, todėl $S^n \subseteq S_L$. Iš kitos pusės elemento $L_{E_j}(s,\omega)$, $j = 1,...,n$ apibrėžime esantys daugikliai yra nenykstantys su $s \in D_V$. Iš tiesų, $L_{E_j}(s,\omega)$, $j = 1,...,n$ yra beveik tikrai konverguojanti nenykstančių daugiklių sandauga. Todėl Hurvico teorema parodo, kad beveik tikrai elementas $L_{E_j}(s,\omega)$, $j = 1,...,n$, priklauso aibei S. Iš čia $S_L \subset S^n$. Vadinasi S_L ir S^n sutampa, t. y. $S_L = S^n$.

4 Pagrindinės teoremos įrodymas

Pagrindinės magistro darbo teoremos, t. y. 1 teoremos įrodymas remiasi 4 ir 12 lemomis. Taip pat šiam tikslui mums bus reikalinga Mergeliano teorema.

13 lema (Mergeliano teorema). *Tegul $K \subset \mathbb{C}$ kompaktiškas poaibis su jungiuoju papildiniu, o $f(s)$ – tolydi srityje K funkcija, kuri yra analizinė K viduje. Tada funkciją $f(s)$ srityje K galima tolygiai aproksimuoti kintamojo s polinomais.*

Įrodymą galima rasti [13].

1 teoremos įrodymas. Akivaizdu, kad egzistuoja teigiamas skaičius V toks, kad aibės $K_1, ..., K_n$ priklausytų sričiai D_V. Tarkime, kad funkcijos $f_1(s), ..., f_n(s)$ turi nenulinį analizinį pratęsimą į D_V. Apibrėžiame aibę $G = \{(g_1, ..., g_n) : (g_1, ..., g_n) \in H^n(D_V)\}$ bei

$$\sup_{1 \le j \le n} \sup_{s \in K_j} \left| g_j(s) - f_j(s) \right| < \varepsilon.$$

Aibė G yra atvira, vadinasi iš tikimybinių matų silpno konvergavimo savybių ir tikimybinio mato P_N silpno konvergavimo į matą P_L, kai $N \to \infty$ (4 lema), gauname, kad

$$\liminf_{N \to \infty} \mu_N \left((L_{E_1}(s + imh), ..., L_{E_n}(s + imh)) \in G \right) \ge P_L(G).$$

Be to iš mato atramos savybių ir 12 lemos seka, kad $P_L(G) > 0$. Todėl

$$\liminf_{N \to \infty} \mu_N \left(\sup_{1 \le j \le n} \sup_{s \in K_j} \left| L_{E_j}(s + imh) - f_j(s) \right| < \varepsilon \right) > 0. \tag{13}$$

Dabar tarkime, kad funkcijos $f_1(s), ..., f_n(s)$ tenkina 1 teoremos sąlygas. Tuomet pagal Mergeliano teoremą, egzistuoja polinomai $p_1(s), ..., p_n(s)$, kurie yra nenykstantys atitinkamose srityse $K_1, ..., K_n$ ir tokie, kad būtų tenkinama nelygybė

$$\sup_{1 \le j \le n} \sup_{s \in K_j} \left| f_j(s) - p_j(s) \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{14}$$

Kiekvienas iš polinomų $p_j(s)$, $j = 1, ..., n$ turi baigtinį skaičių nulių. Vadinasi, egzistuoja sritis G_j su jungiuoju papildiniu tokia, kad $K_j \subset G_j$ ir $p_j(s) \ne 0$, $s \in G_j$, $j = 1, ..., n$. Todėl galime fiksuoti tolydžią logaritmo $\log p_j(s)$ šaką ir $\log p_j(s)$ yra analizinė srities G_j viduje, $j = 1, ..., n$. Dar kartą pritaikius Mergeliano teoremą matome, kad egzistuoja polinomai $q_1(s), ..., q_n(s)$ tokie, kad

$$\sup_{1\le j\le n}\sup_{s\in K_j}\left|p_j(s)-\mathrm{e}^{q_j(s)}\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Pastaroji ir (14) nelygybės parodo, kad

$$\sup_{1\le j\le n}\sup_{s\in K_j}\left|f_j(s)-\mathrm{e}^{q_j(s)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{15}$$

Be to, $\mathrm{e}^{q_j(s)}\neq 0$, $j=1,...,n$. Vadinasi, atsižvelgus į (13) nelygybę gauname

$$\liminf_{N\to\infty}\mu_N\left(\sup_{1\le j\le n}\sup_{s\in K_j}\left|L_{E_j}(s+imh)-\mathrm{e}^{q_j(s)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\right)>0.$$

Pastarasis sąryšis kartu su (15) nelygybe įrodo jungtinę diskrečią universalumo teoremą.

Išvados

Darbe įrodyta elipsinių kreivių L-funkcijų jungtinė diskreti universalumo Voronino prasme teorema, kuri tvirtina, kad jei $h > 0$ yra fiksuotas skaičius toks, kad $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ yra iracionalusis skaičius visiems $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\operatorname{rank}(B_{rn}) = n$, K_j yra juostos $D_V = \{s \in \mathbb{C} : 1 < \sigma < \frac{3}{2}\}, V > 0$, kompaktiškas poaibis su jungiuoju papildiniu ir $f_j(s)$ yra tolydi nenykstanti funkcija srityje K_j ir yra analizinė jos viduje, $j = 1, ..., n$. Tada, kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{N \to \infty} \mu_N \left(\sup_{l \leq j \leq n} \sup_{s \in K_j} |L_{E_j}(s + imh) - f_j(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Summary

The aim of the master work is to obtain a joint discrete universality theorem in the Voronin sense for L-functions of elliptic curves.

Let $n > 1$ be an positive integer. Consider n elliptic curves $E_1, ..., E_n$ given by the Weierstrass equations $y^2 = x^3 + a_j x + b_j$ with discriminant $\Delta_j = -16(4a_j^3 + 27b_j^2) \neq 0$, $j = 1, ..., n$.

The L-function $L_{E_j}(s)$ of elliptic curve E_j is defined by

$$L_{E_j}(s) = \prod_{p \nmid \Delta_j} \left(1 - \frac{\lambda_j(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s-1}}\right)^{-1} \prod_{p \mid \Delta_j} \left(1 - \frac{\lambda_j(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

respectively, $j = 1, ..., n$. Here $s = \sigma + it$ is a complex variable, p is prime number, $\lambda_j(p) = p - \nu_j(p)$, and $\nu_j(p)$ is the number of solutions of the congruence $y^2 \equiv x^3 + a_j x + b_j (\bmod p)$, $j = 1, ..., n$.

To state a joint discrete universality theorem for the $L_{E_j}(s)$ we need some additional conditions. Let $P = \bigcup_{l=1}^{r} P_l$, where P is the set of all prime numbers, and P_l, $l = 1, ..., r$, $r \geq n$, are the sets of prime numbers such that $P_{l_1} \bigcap P_{l_2} = \varnothing$ for $l_1 \neq l_2$. Moreover, we suppose that, for $x \to \infty$, $\sum_{\substack{p \leq x \\ p \in P_l}} \frac{1}{p} = \varkappa_l \log\log x + b_l + \rho_l(x)$, where $\varkappa_1 + ... + \varkappa_r = 1$, $\varkappa_l > 0$, $\rho_l(x) = O(\log^{-\theta_l} x)$ with $\theta_l > 1$, and b_l is some real number, $l = 1, ..., r$. Denote $B_j(p) = \frac{\lambda_j(p)}{\sqrt{p}}$, and suppose that $B_j(p)$ is constant for $p \in P_l$, i. e., $p \in P_l$, $B_j(p) = B_{lj}$, $j = 1, ..., n$. Let

$$B_{rn} = \begin{pmatrix} B_{11} & ... & B_{1n} \\ ...... & ...... & ...... \\ B_{r1} & ... & B_{rn} \end{pmatrix}.$$

Then the main statement of master's work follows.

Theorem. *Suppose that h is a positive fixed number such that* $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ *is an irrational number for all $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, and suppose that* $\operatorname{rank}(B_{rn}) = n$. *Let K_j be a compact subset of the strip D_V with connected complement, and let $f_j(s)$ be a continuous non-vanihing on K_j function which is analytic in the interior of K_j, $j = 1, ..., n$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left(\sup_{1 \leq j \leq n} \sup_{s \in K_j} |L_{E_j}(s + imh) - f_j(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Literatūra

1. P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, New York, John Wiley (1968).

2. C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond, R. Taylor, On the modularity of elliptic curves over $\mathbb{Q}$: wild 3-adic exercises, *J. Amer. Math. Soc.,* **14**, 843–939 (2001).

3. V. Garbaliauskienė, R. Kačinskaitė, A. Laurinčikas, The joint universality for L-functions of elliptic curves, *Nonlinear Anal., Model. Control,* **Vol. 9**, No. 4, 331–348 (2004).

4. R. Kačinskaitė, A multidimensional discrete limit theorem for the Matsumoto zeta-function in the space of analytic functions, *Liet. Matem. Rink. (spec. nr.),* **41**, 76–83 (2001)

5. A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer, Dordrecht, Boston, London (1996).

6. A. Laurinčikas, On the Matsumoto zeta-function, *Acta Arith.,* **84**, 1–16 (1998).

7. A. Laurinčikas, K. Matsumoto, The joint universality of zeta-functions attached to certain cusp forms, *Fiz. Matem. Fak. Moksl. Sem. Darbai,* **5**, 58–75 (2002).

8. A. Reich, Wertverteilung von Zeta funktionen, *Arch. Math.,* **34**, 440–451 (1980).

9. L. Šadbaraitė, *Elipsinių Kreivių L-Funkcijų Diskretusis Universalumas*, Bakalauro darbas, Šiaulių universitetas (2009).

10. E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford University Press, Oxford (1939).

11. S. M. Voronin, Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function, *Math. USSR Izv.,* **9**, 443–453 (1975).

12. S. M. Voronin, On the functional independence of Dirichlet L-functions, *Acta Arith.,* **27**, 493–503 (1975), (rusų kalba).

13. J. L. Walsh, *Interpolation and Approximation by rational Functions in the Complex Domain*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., **20** (1960).

Žymėjimai

k, l, m, n, j – natūralieji skaičiai

α, β – teigiamos konstantos

p – pirminis skaičius

$\mathbb{N}$ – natūraliųjų skaičių aibė

$\mathbb{Z}$ – sveikųjų skaičių aibė

$\mathbb{R}$ – realiųjų skaičių aibė

$\mathbb{C}$ – kompleksinių skaičių aibė

$\mathbb{Q}$ – racionaliųjų skaičių aibė

i – menamasis vienetas: $i = \sqrt{-1}$

$s = \sigma + it$ – kompleksinis kintamasis

$Res = \sigma$ – kompleksinio kintamojo s realioji dalis

$Ims = t$ – kompleksinio kintamojo s menamoji dalis

$\text{meas}\{A\}$ – aibės A Lebego matas

$\nu_T(...) = \frac{1}{T}\text{meas}\{\tau \in [0, \tau] : ...\}$ – vietoje daugtaškio įrašomos sąlygos, kurias tenkina τ

$\#\{A\}$ – aibės A elementų skaičius

$\mu_N(...) = \frac{1}{N+1}\#\{0 \leq m \leq N : ...\}$ – vietoje daugtaškio įrašomos sąlygos, kurias tenkina m

$H(D)$ – analizinių srityje D funkcijų erdvė

$M(D)$ – meromorfinių srityje D funkcijų erdvė

$\xrightarrow{\mathcal{D}}$ – konvergavimas pagal skirstinį

$\mathcal{B}(S)$ – erdvės S Borelio aibių klasė

$\Gamma(s)$ – Oilerio gama funkcija pusplokštumėje $\sigma > 0$ apibrėžiama $\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{s-1} \mathrm{d}x$ ir analiziškai pratęsiama į visą $\mathbb{C}$ plokštumą

$\zeta(s)$ – Rymano dzeta funkcija pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama $\zeta(s) = \sum\limits_{m=1}^\infty \frac{1}{m^s}$ ir analiziškai pratęsiama į visą $\mathbb{C}$ plokštumą