VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro darbas

# ALTERNATYVAUS INVESTAVIMO STRATEGIJOS
# ALTERNATIVE INVESTMENT STRATEGIES

**Karolis Ramanauskas**

**VILNIUS 2009**

**Matematinės analizės katedra**

Darbo vadovas **doc. dr. M. Manstavičius** ____________

(parašas)

Darbo recenzentas ____________________

Darbas apgintas __2009 m. birželio mėn. 2 d.___

Registravimo Nr. _______

2009-05-25 _______________

## Santrauka

Šiame darbe visų pirma pateikiama alternatyvaus investavimo fondų apžvalga, vėliau pereinama prie arbitražo strategijų nagrinėjimo. Norint išnaudoti atsiradusį kainų skirtumą tarp dviejų vertybinių popierių su vienodais ateities pinigų srautais reikia pigesnį iš jų pirkti, o brangesnį skolintis ir parduoti. Skirtumui sumažėjus ar išnykus gaunamas pelnas. Skolinantis realiose rinkose beveik visada reikalaujama užstato. Dėl šios priežasties, kainų skirtumui netikėtai padidėjus, patiriamas nuostolis. Arbitražas tampa rizikinga investicija, reikalaujančia pradinio kapitalo. Sukūrėme patį paprasčiausią modelį, parodantį užstato reikalavimo įtaką pelnui iš arbitražo, taip pat randame optimalią strategiją, maksimizuojančią šį pelną. Parodome, kad rinkoje gali egzistuoti arbitražo galimybės, kurios nebus išnaudojamos dėl galimo kainų skirtumo padidėjimo.

*Raktiniai žodžiai:* alternatyvaus investavimo fondas, arbitražas, užstato reikalavimas.

## Summary

This paper, after giving a short introduction to hedge fund industry, studies arbitrage strategies. We consider two assets with identical cash flows. Initially, there is a gap between their prices. Arbitrageur, willing to profit from the mispricing, buys cheaper of the two assets and sells the more expensive one short. If the price difference converges to zero, he makes profit. Arbitrage position can generate losses if the spread widens before converging. Short selling is almost always done with a collateral requirement. For this reason, arbitrage position can generate losses if the spread widens before converging. Arbitrage becomes a risky investment with an initial wealth requirement. We created a simple model, showing how collateral requirement affects profit from an arbitrage opportunity. We also found the optimal strategy to maximize this profit. We showed that arbitrage opportunities can exist in a market; however, they might not be exploitable due to unexpected widening of spreads.



*Keywords:* hedge fund, arbitrage, collateral requirement.

## Turinys

# 1 Įvadas

Beveik visuose ekonominiuose modeliuose yra daroma prielaida, kad arbitražas neegzistuoja. Ji paaiškinama tuo, kad jei arbitražas egzistuotų, bet kuris investuotojas galėtų gauti neribotą kiekį pinigų. Vadovėliuose arbitražas apibrėžiamas kaip investavimo galimybė, kai nerizikuojant ir neturint pradinio kapitalo gaunamas teigiamas pelnas.

Norėdamas išnaudoti atsiradusią arbitražo galimybę, tai yra kainų skirtumą tarp identiškų vertybinių popierių. investuotojas turi suformuoti „trumpąją“ poziciją (angl. *short selling*) į brangesnį ir „ilgąją„ į pigesnį vertybinį popierių ir laukti, kol kainų skirtumas (angl. *spread*) taps lygus 0. Realiose rinkose skolinantis vertybinius popierius beveik visada yra reikalaujama užstato, ne mažesnio, nei jų vertė. Jei pries sukonverguodamas į 0 kainų skirtumas padidės ir užstato reikalavimas nebebus tenkinamas, investuotojui gali tekti likviduoti dalį arbitražo pozicijų nepalankiomis kainomis ir patirti nuostolį. Įtrauktas į teorinius modelius užstato reikalavimas iš esmės pakeičia investavimą į arbitraža – jis tampa rizikinga investicija, reikalaujančia pradinio kapitalo.

Kyla natūralus klausimas: kokia investavimo strategija optimali, kai rinkoje egzistuoja arbitražo galimybės? Šiame darbe aprašomas paprastas diskretaus laiko dviejų periodų modelis, parodantis, kaip užstato reikalavimas įtakoja investavimą į arbitražą. Randama strategija, maksimizuojanti vidutinį pelną arbitražo galimybės išnykimo momentu.

Optimali strategija parodo, kad galima situacija, kai vidutiniškai tikėsimės arbitražo galimybės sumažėjimo, o investuosime priešinga kryptimi. Iš pasiūlos ir paklausos dėsnių aišku, kad toks investavimas tik dar labiau padidins kainų skirtumą.

[1] straipsnyje nagrinėjamas tolydaus laiko modelis, kuriame arbitražo dydžio procesas nusakomas kaip Brauno tiltas (angl. *Brownian bridge*). Jame gauti rezultatai parodo, kad siekiant maksimizuoti pelną ne visada optimalu investuoti į didžiausią įmanomą arbitražo kiekį.
[3] straipsnyje parodoma, kad net ir esant arbitražo galimybėms rinkoje su užstato reikalavimu, racionalus investuotojas gali į jas neinvestuoti.

Pirmoje darbo dalyje pateikiama alternatyvaus investavimo fondų apžvalga. Šie fondai dažnai naudoja strategijas, išnaudojančias kainų netikslumus rinkoje, tai yra arbitražo galimybes. Antroje dalyje aprašomas dviejų periodų modelis bei randama optimali strategija.

# 2 Alternatyvaus investavimo fondų apžvalga

## 2.1 Kas yra alternatyvaus investavimo fondas?

Vieningo apibrėžimo alternatyvaus investavimo fondams (angl. *hedge fund*) nėra. Tiesioginis „hedge fund“ vertimas yra „investicinis fondas, naudojantis apsidraudimo („hedžingo“) strategijas, tačiau tai tik viena iš išskirtinių jų savybių ir viena iš daugelio naudojamų strategijų. Lietuviškas terminas „alternatyvaus investavimo fondas“, arba pagal galiojančią įstatymų bazę, „alternatyvaus kolektyvinio investavimo subjektas“, turbūt labiau atitinka jų veiklos principus. Pagrindiniai alternatyvaus investavimo fondų tikslai yra kapitalo išsaugojimas ir teigiamas pelnas su maža rizika bei maža grąžų koreliacija su akcijų ir obligacijų rinkomis.

Šie fondai naudoja alternatyvias investavimo priemones – vertybinių popierių skolinimąsi ir pardavimą, svertą (angl. *leverage*), įvairias išvestines investicines priemones ir kt. Be to, jų veiklą daug silpniau reguliuoja valstybinės institucijos. Dar viena išskirtinė šių investicinių instrumentų savybė – į juos gali investuoti tik profesionalūs investuotojai. Lietuvoje terminas „profesionalus investuotojas“ reiškia, kad investuotojo vertybinių popierių portfelio vertė viršija 500 tūkstančių eurų. Kitose šalyse taikomi panašūs reikalavimai.

Taigi, pagrindinės šių fondų savybės ir skirtumai nuo įprastinių investicinių fondų (angl. *mutual fund*):

-Valdytojas gali naudoti labai įvairius investavimo instrumentus;

-Valdytojas gali skolintis ir parduoti vertybinius popierius, t.y. atidaryti „trumpąsias pozicijas“;

-Valdytojas gali naudoti svertą (investuoti pasiskolintas lėšas ir didinti galimą pelną ar nuostolį);

-Valdytojui mokamas 1,5–2,5% mokestis nuo valdomo turto bei 20–25% dalis nuo naujo pelno (sėkmės mokestis). Sėkmės mokestis skaičiuojamas tik tada, jei fondo vieneto vertė yra pakilusi virš didžiausios anksčiau buvusios vertės;

-Valdytojas turi investuoti dalį asmeninio turto į savo valdomą alternatyvaus investavimo fondą. Tokiu būdu jo interesai labiau atitinka klientų interesus.

## 2.2 Truputis istorijos

Nors alternatyvaus investavimo fondai gali pasirodyti kaip labai modernios investavimo priemonės, pirmasis fondas buvo įsteigtas daugiau nei prieš pusę amžiaus. 1949 m. Alfred‘as Jones‘as įkūrė pirmąjį alternatyvaus investavimo fondą su pradiniu $100 000 kapitalu. A. Jones‘as manė, kad naudodamas dvi spekuliacines priemones, vertybinių popierių skolinimąsi ir svertą, jis gali sukurti konservatyvų investicinį portfelį, kurio grąžos nepriklausys nuo rinkų krypties. Siekdamas pritraukti daugiau investuotojų jis investavo visą savo asmeninį turtą į tą patį fondą, o jo gaunamas mokestis buvo ne, kaip įprasta tuo metu, fiksuota dalis nuo valdomo turto, o 20% nuo pelno. Šios alternatyvaus investavimo fondų savybės išliko iki šių dienų.

1952 m. A. Jones‘as paskirstė investicinį portfelį kitiems fondų valdytojams, o pats tiesiog sprendė, kokią turto dalį konkrečiu laiko momentu leisti valdyti kiekvienam iš jų. Pirmasis alternatyvaus investavimo fondas tapo pirmuoju kelis valdytojus turinčiu (angl. *multi-manager*) alternatyvaus investavimo fondu.

1969 m. Michael‘as Steinhardt‘as įkūrė alternatyvaus investavimo fondą su $7,7 mln. pradiniu kapitalu ir 8 darbuotojais. 1980 m. šiame fonde dirbo 100 žmonių, o valdomas turtas siekė $5 mlrd. Po didelių nuostolių 1994 m. M. Steinhardt‘as baigė savo alternatyvaus investavimo karjerą 1995 m.

1969m. SEC (US Securities & Exchange Comission – vertybinių popierių priežiūros komisija JAV) pradėjo stebėti labai greitai augančią alternatyvaus investavimo fondų industriją. Tuo metu SEC duomenimis gyvavo apie 200 alternatyvaus investavimo fondų, į kuriuos buvo investuota $1,5 mlrd. turto.

1969 m. įkurtas pirmasis alternatyvaus investavimo fondų fondas (angl. *fund of hedge funds*), kuris vadinosi „Leveraged Capital Holdings“.

1992 m. alternatyvaus investavimo fondai patraukė žiniasklaidos ir finansų rinkų dalyvių dėmesį po to, kai George‘o Soros‘o valdomas fondas per labai trumpą laiką gavo $1,1 mlrd. pelno. 1992 m. rugsėjo 16 d. šis fondas suformavo „trumpąją“ 10 mlrd. Didžiosios Britanijos svarų poziciją numatydamas greitą šios valiutos devalvaciją dėl tam tikrų klaidingų Anglijos Banko (angl. *Bank of England*) sprendimų. George‘as Soros‘as buvo teisus ir pelnytai tapo tituluojamas „žmogumi, kuris sugriovė Anglijos Banką“.

1998 m. alternatyvaus investavimo fondai vėl atsidūrė pirmuosiuose laikraščių puslapiuose, kai LTCM (Long Term Capital Management) fondas, valdomas John‘o Meriwether‘io, kurio komandoje buvo 2 ekonomikos Nobelio premijos laureatai (Myron‘as Scholes‘as ir Robert‘as

Merton‘as), patyrė $4 mlrd. nuostolių per 9 mėnesius. Po šio įvykio daug bankų ir kitų finansinių institucijų atsidūrė ant bankroto ribos. LTCM fondas investavo į vertybinius popierius, kurių kainos buvo glaudžiai susijusios ir tarp kurių atsirado kainų skirtumas. Suformavęs „trumpąją“ brangesnio vertybinio popieriaus ir „ilgąją“ pigesniojo pozicijas šio fondo valdytojas investuodavo į skirtumą, kuris turi išnykti. Kadangi kainų netikslumai būdavo labai maži, LTCM naudojo 25:1 svertą – fondas turėjo $5 mlrd. turto, o buvo pasiskolinęs ir investavęs $125 mlrd. 1998 m. Rusijos kredito krizė ir po to įvykusi likvidumo krizė buvo mirtinas smūgis fondui, naudojančiam tokį didelį svertą.

Nuo alternatyvaus investavimo fondų atsiradimo buvo daug kalbama apie tai, kokią įtaką šiems fondams daro finansų krizės bei kokią įtaką rinkoms krizės metu daro jie. Nors 1990 m., 1997 m., 1998 m. ir 2000 m. krizės labai skyrėsi nuo 2008 m. įvykių, tačiau ir jų metu alternatyvaus investavimo fondai buvo kaltinami dėl „burbulų“ kūrimo, įvairių kompanijų ar net sektorių žlugdymo spekuliuojant ir pan. Dalis tiesos tuose kaltinimuose egzistuoja, tačiau dažniausiai jie atsiranda dėl to, kad šie fondai nėra tokie „skaidrūs“ kaip įprastiniai investiciniai fondai – alternatyvaus investavimo fondai gali teikti daug mažiau informacijos apie savo veiklą ir jos rezultatus.

Patiems fondams ankstesnės krizės neturėjo labai didelės įtakos. Pagrindinė to priežastis buvo jų galimybė naudoti labai įvairius investicinius instrumentus ir taip apsidrausti nuo didelių rinkos svyravimų. Tačiau, kaip matome 1 pav., 2008m. rugsėjo mėnesį alternatyvaus investavimo fondai patyrė nemažų nuostolių, nors ir ne tokių didelių, kokius patyrė į akcijų rinkas investuojantys įprastiniai fondai. Viena iš priežasčių buvo ta, kad 2008 m. rugsėjo 19 d. SEC uždraudė skolintis ir parduoti finansų sektoriaus akcijas, dėl to nemaža dalis alternatyvaus investavimo fondų naudojamų strategijų nebegalėjo veikti.

## 2.3 Alternatyvaus investavimo fondų statistika

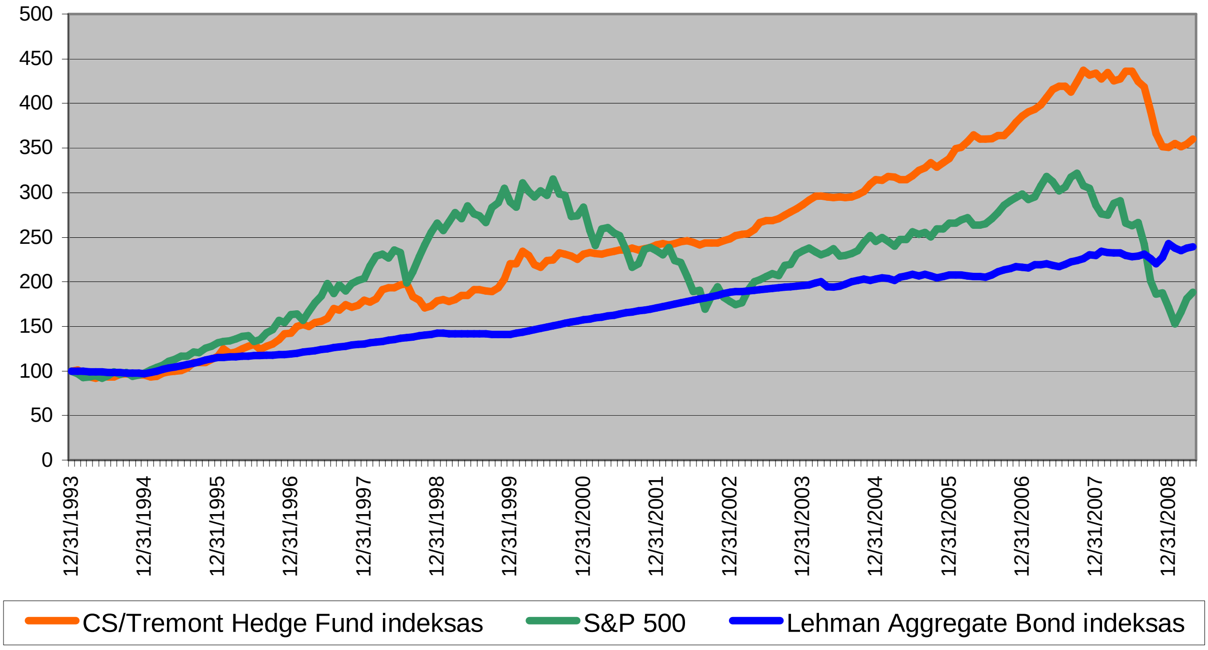
Dėl „skaidrumo“ trūkumo gana sunku įvertinti alternatyvaus investavimo fondų industrijos dydį. Remiantis HFR[1] duomenimis, į šiuos fondus investuoto kapitalo dydis 2008 m. vasarą siekė apie $2700 mlrd., o 2009 m. gegužės pradžioje sumažėjo iki $1800 mlrd. Veikiančių fondų priskaičiuojama apie 8-10 tūkstančių.

Lyginant su visų pasaulio vertybinių popierių rinkų kapitalizacija alternatyvaus investavimo fondų valdomas turtas sudaro apie 3,5%, įskaitant svertą. Šių fondų naudojamos strategijos lemia

[1] http://www.hedgefundresearch.com/

tai, kad jie sukuria 10% rinkų apyvartos. Skolos vertybinių popierių rinkose šis skaičius išauga iki 30%.

Kaip matome 1 pav., alternatyvaus investavimo fondų grąža nuo 1994 m. buvo didesnė nei fiksuotų palūkanų vertybinių popierių indekso grąža, o akcijų rinkų nuosmūkio metu jie sugebėjo išsaugoti kapitalą ir net gauti teigiamą pelną.




1 pav. Alternatyvaus investavimo fondų grąža lyginant su akcijų ir obligacijų rinkų grąžomis nuo 1994 m. pradžios iki 2009 m. gegužės mėn.[2]

## 2.4 Alternatyvaus investavimo fondų strategijos

Alternatyvaus investavimo fondai naudoja daug skirtingų investavimo strategijų, kurios įgyvendinamos skirtingose rinkose bei naudoja skirtingus investicinius instrumentus. Kiekvieną strategiją galima išskirstyti į keletą elementų:

- Stilius: globalus makroekonominis (angl. *global macro*), sekantis svarbius įvykius (angl. *event driven*), santykinės vertės, t.y. arbitražo strategijos (angl. *relative value*).

- Rinka: akcijų, obligacijų, valiutų, prekių.

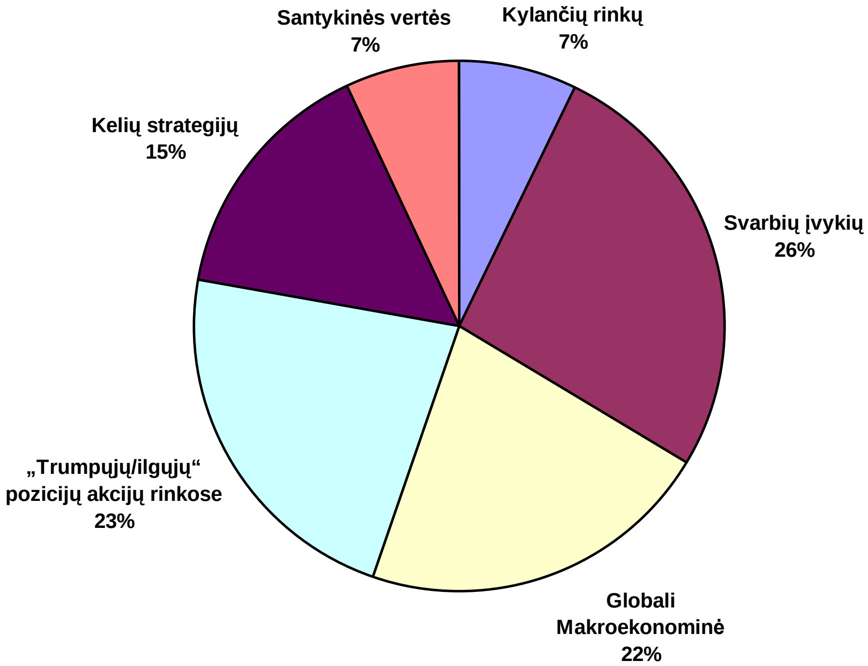
- Investiciniai instrumentai: „trumposios/ilgosios pozicijos“, opcionai, ateities sandoriai.

- Sektorius: kylančių rinkų, farmacijos, aukštųjų technologijų.

[2] Dėl tikslių obligacijų indekso duomenų trūkumo iki 2004 m. pradžios jie yra pateikti ne kas mėnesį, o kas metus.

- Metodas: ar investavimo sprendimus priima fondo valdytojas, ar jie priimami automatiškai naudojant skaitinius metodus kompiuterizuotose sistemose.

- Diversifikacija: fondų valdytojų, rinkų ar strategijų atžvilgiu.




2 pav. Alternatyvaus investavimo fondų strategijos pagal užimamą rinkos dalį (2009 m. balandžio mėn. HFR duomenimis)

Toliau aprašysime pagrindines alternatyvaus investavimo fondų naudojamas strategijas.

### 2.4.1 Globali makroekonominė strategija

Alternatyvaus investavimo fondų valdytojai, naudojantys šią strategiją, numato ir išnaudoja ateities makroekonominius įvykius naudodami visas rinkas bei visus investicinius instrumentus. Strategija skirstoma pagal tai, kokiose rinkose ji naudojama bei kokiu metodu priimami investavimo sprendimai – automatiškai ar fondų valdytojo.

### 2.4.2 „Trumpųjų/ilgųjų" pozicijų akcijų rinkose strategija

Šią strategiją taikantys valdytojai investuoja akcijų rinkose ir iš dalies ar pilnai apsidraudžia naudodami akcijų rinkų indeksų opcionus. Tokiu būdu jie gali investuoti ne į pačios rinkos kryptį, o į tai, kurios akcijos pasirodys geriau ar blogiau už kitas to paties sektoriaus akcijas. Šią strategiją taikantys alternatyvaus investavimo fondai skirstomi pagal rinką ir pagal sektorių.

### 2.4.3 Svarbių įvykių strategijos

Tai didžiausią alternatyvaus investavimo fondų rinkos dalį užimanti strategija. Ji skirstoma į smulkesnes strategijas.

*Susijungimų arbitražo strategija* (angl. *merger arbitrage*) – tai strategija, kuria siekiama išnaudoti arbitražo galimybes, atsirandančias jungiantis kompanijoms. Ją naudojantis fondų valdytojas turi numatyti tikimybę, kad susijungimo sandoris bus sėkmingas. Susijungus kompanijoms jų akcijų vertės santykis taps fiksuotas (vienos kompanijos akcijos bus keičiamos kitos kompanijos akcijomis iš anksto žinomu santykiu). Prieš susijungimą tarp kainų egzistuoja skirtumas, kurį ir stengiasi išnaudoti valdytojas, investuodamas skirtingomis kryptimis į abi akcijas. Dažniausiai, kuo didesnė tikimybė, kad sandoris nepavyks, tuo didesnis ir skirtumas.

*Bankrutuojančių įmonių arbitražas* (angl. *distressed securities*) – strategija, kurią naudojantys fondų valdytojai investuoja į kompanijas, kurių vertė dėl potencialaus bankroto smarkiai sumažėjusi, tačiau yra tikimybė, kad kompanija atsigaus ir jos vertė smarkiai išaugs. Kartais patys valdytojai įgyja kontrolinį akcijų paketą ir pertvarko kompaniją siekdami ją „pastatyti ant kojų“, o tai padarę ją vėl parduoda.

### 2.4.4 Santykinės vertės strategijos

Šios strategijos išnaudoja susijusių vertybinių popierių kainų netikslumus.

*Fiksuotų palūkanų vertybinių popierių arbitražas* (angl. *fixed income arbitrage*) – strategija, kurią naudojantys valdytojai skirtingomis kryptimis investuoja į fiksuotų palūkanų vertybinius popierius, kurių kainos glaudžiai susijusios.

*Akcijų arbitražas arba neutrali akcijų rinkai strategija* (angl. *equity arbitrage, equity market neutral*) – strategija, kai naudojant „ilgąsias“ ir „trumpąsias“ pozicijas siekiama išlikti neutraliu rinkos svyravimams.

*„Trumpųjų/ilgųjų pozicijų“ paskolų rinkoje strategija* – ta pati kaip ir „Trumpųjų/ilgųjų pozicijų“ akcijų rinkose strategija, tik investuojama paskolų rinkose.

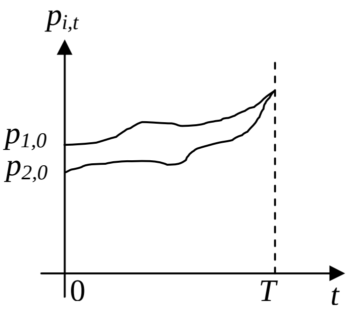
*Statistinis arbitražas* – neutrali akcijų rinkai strategija, naudojanti statistinius modelius ir automatines prekybos sistemas.

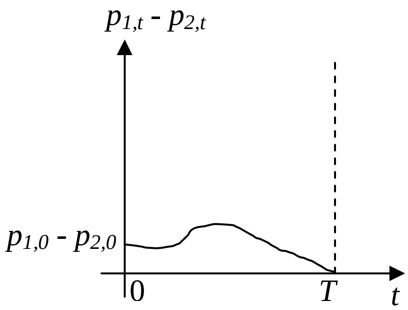
# 3 Arbitražo strategijos

Įprastinis arbitražo apibrėžimas: arbitražas – galimybė be pradinio kapitalo ir be jokios rizikos gauti teigiamą pelną. Pats paprasčiausias pavyzdys yra skirtingose rinkose parduodami identiški vertybiniai popieriai, kurių kainos dabartiniu laiko momentu skiriasi. Kitas pavyzdys galėtų būti to paties emitento išplatintos obligacijos, kurių ateities pinigų srautai yra vienodi, vienoda ir teisė į turtą emitento bankroto atveju, tačiau jų kainos skiriasi. Skirtumas galėtų atsirasti dėl likvidumo, pavyzdžiui, jei obligacijos buvo išplatintos skirtingais laiko momentais. Paprastai ilgesnio termino obligacijos būna mažiau likvidžios, todėl gali atsirasti kainų skirtumas, taigi, ir arbitražo galimybė. Pažymėkime:

$$p_{i,t} \in \mathbf{R}_{+} \text{ – } i\text{-osios obligacijos kaina laiko momentu } t \in [0,T].$$

1 ir 2 paveiksluose pavaizduotas tokių obligacijų kainų kitimo laike pavyzdys.




1 pav. Dviejų obligacijų kainos momentu *t*.

2 pav. Skirtumas tarp šių obligacijų kainų.

Arbitražo galimybe norintis pasinaudoti investuotojas suformuos „trumpąją“ obligacijos $p_1$ poziciją, tai yra pasiskolins šią obligaciją ir iš karto parduos ją rinkoje gaudamas pinigų srautą $p_{1,0}$. Už šiuos pinigus nusipirks obligaciją $p_2$ už kainą $p_{2,0} < p_{1,0}$. Taigi, investuotojui liks pinigų kiekis $p_{1,0} - p_{2,0} > 0$. Paprastumo dėlei laikysime, kad nerizikingų palūkanų norma $r = 0$. Laiko momentu $t = T$ obligacijų kainos taps vienodos. Investuotojas parduos antrąją obligaciją, už tokią pačią kainą nusipirks pirmąją ir grąžins skolą.

Turime situaciją, kurioje be pradinio kapitalo ir be jokios rizikos gaunamas teigiamas pelnas, lygus pradiniam kainų skirtumui. Bet kuris investuotojas, esant tokiai arbitražo galimybei, teoriškai galėtų gauti begalinį pelną, tačiau reiktų nepamiršti ir to, kad arbitražo dydis mažėja tiesiog į jį investuojant. Atsiradus arbitražo galimybei vis daugiau investuotojų ją atranda ir formuoja „trumpąsias“ pozicijas į brangesnę obligaciją, tai yra ją parduoda didindami pasiūlą ir tuo pačiu mažindami kainą. Pirkdami pigesnę obligaciją jie didina jos paklausą, taigi, ir kainą. Kainų skirtumas mažėja, kol tampa lygus 0 – arbitražo galimybė išnyksta. Tokiais ir panašiais samprotavimais remiasi daugelis ekonominių modelių, kuriuose teigiama, kad realiose rinkose arbitražas neegzistuoja.

Mes parodysime, kad šis teiginys nėra visiškai teisingas. Realiose rinkose, net ir esant pusiausvyrai, arbitražas gali egzistuoti dėl vienos priežasties – skolinimo su užstato reikalavimu (angl. *collateral requirement*). 2000 m. ISDA (International Swaps and Derivatives Association)[3] vykdytos apklausos duomenimis didžioji dalis vertybinių popierių skolinimo paslaugas teikiančių institucijų (vadinsime jas brokeriais) tai daro kartu reikalaudamos užstato, didesnio negu paskolintų VP vertė rinkoje. Ir „trumposios“ pozicijos, ir užstatas grynaisiais pinigais arba likvidžiais aktyvais turi būti laikomi brokerio valdomoje sąskaitoje (angl. *margin account*). Skirtumas tarp reikalaujamo užstato dydžio ir paskolintų vertybinių popierių vertės rinkoje vadinamas „apkirpimu“ (angl. *haircut*). Pažymėkime jį:

$\lambda > 0$ – papildomo užstato dydis atidarant „trumpąją“ poziciją į vieną VP vienetą.

$\lambda$ dydis skiriasi priklausomai nuo skolinamo VP likvidumo ir patikimumo. Pavyzdžiui, JAV Iždo obligacijoms $\lambda$ yra lygus $1–2 kiekvienam $100 nominalios jų vertės. Didžiųjų JAV korporacijų obligacijoms šis dydis padidėja iki $10–20. Dėl šio reikalavimo norint pasinaudoti arbitražo galimybe jau reikia pradinio kapitalo.

Jei „trumpųjų“ pozicijų kaina padidėjo, užstato reikalavimas gali būti nebetenkinamas. Tokiu atveju brokeris perspės apie tai investuotoją (angl. *margin call*), kuris per nustatytą laiką turės įnešti papildomą pinigų sumą, kuri užtikrins, kad užstato reikalavimas vėl būtų patenkintas. Siekdamas apsidrausti nuo galimų nuostolių brokeris gali likviduoti dalį „trumpųjų“ pozicijų net ir iš anksto neperspėjęs investuotojo. Daugelis brokerių balansą tarp užstato ir įsipareigojimų tikrina kasdien. Kaip matome, investuojant į arbitražą egzistuoja rizika patirti nuostolį. Taigi, arbitražas realiose rinkose nebūtinai reiškia „nemokamus pietus“ (angl. *„There is no free lunch“* – „nemokamų pietų nebūna“ – senas akcijų rinkų dalyvių posakis). Arbitražas tampa išvestiniu finansiniu instrumentu, reikalaujančiu kapitalo ir turinčiu savas rizikas.

## 3.1 Dviejų periodų modelis

Šiame skyrelyje aprašysime patį paprasčiausią modelį, parodantį, kaip kinta pelnas iš arbitražo priklausomai nuo arbitražo dydžio kitimo prieš sukonverguojant į 0. Prekyba vyks 3 laiko momentais $t = 0,1,2$. Naudosime šiuos žymėjimus:

[3] http://www.isda.org/

$u \geq 0$ – pradinis investuotojo kapitalas.

$\lambda > 0$ – užstato parametras, parodantis, kiek papildomai pinigų reikia įnešti atidarant „trumpają" poziciją į vieną obligaciją.

$p_{i,t}$ – *i*-osios obligacijos kaina laiko momentu *t*.

$A_t = p_{1,t} - p_{2,t}$ – arbitražo dydis, tai yra skirtumas tarp obligacijų kainų.

$A_t \in \mathbf{R}$.

$A_0$ – pradinis arbitražo dydis, žinomas laiko momentu $t = 0$.

$A_1 = A_1(\omega)$ – arbitražas viduriniu laiko momentu (atsitiktinis dydis).

$A_2 = 0$ – galiniu laiko momentu obligacijų kainos tampa lygios, taigi, arbitražo dydis lygus 0.

$N_t \in \mathbf{R}$ – į kiek vienetų arbitražo investuojame.

Pvz., jei $N_t = 10$, tai reikš, kad atidarome 10 „trumpųjų" pozicijų į obligaciją $p_1$ ir 10 „ilgųjų" pozicijų į $p_2$. $N_t = -10$ reikš 10 „ilgųjų" pozicijų į obligaciją $p_1$ ir 10 „trumpųjų" pozicijų į $p_2$.

$cash_t \in \mathbf{R}$ – Investuotojo turimų grynųjų pinigų kiekis laiko momentu *t*.

$cash_0 = u + N_0 A_0$,

$cash_1 = u + N_0 A_0 + A_1(N_1 - N_0)$, arba

$$cash_1 = u + N_0(A_0 - A_1) + N_1 A_1. \qquad (1)$$

$cash_1 < 0$ – tokia situacija galima, jei laiko momentu $t = 1$ arbitražo dydis tiek padidėjo, kad $u + N_0(A_0 - A_1)$ tapo neigiamas. Tokiu atveju automatiškai $N_1 = 0$, t.y. investuoti toliau tampa neįmanoma, o sąskaitos balansas lieka neigiamas. Šiuo atžvilgiu mūsų modelis skiriasi nuo tolydaus laiko modelio, nagrinėjamo [1] straipsnyje – tolydžiame laike arbitražo dydžiui judant nepalankia linkme, investicijos į jį palaipsniui mažinamos, kol (blogiausiu atveju) turtas tampa lygus 0. Realiose rinkose viskas vyksta pagal tarpinį scenarijų – prekyba vyksta tolydžiai, o užstato reikalavimas tikrinamas kartą per dieną, prekybos pabaigoje. Taigi, investuotojo turtas realiose rinkose gali tapti neigiamas.

$cash_2 = cash_1$ – laiko momentu $t = 2$ „ilgoji" ir „trumpoji" pozicija kompensuoja viena kitą – įsipareigojimų nelieka, o mūsų investicijos į arbitražą tampa lygios 0.

## 3.2 Užstato reikalavimas

Norint investuoti į $N_0 = 10$ vienetų arbitražo brokeris reikalaus užstato, nemažesnio už

$$N_0 p_{1,0} + \lambda |N_0| .$$

Užstato dalis $N_0 p_{2,0}$ bus padengta „ilgąja“ pozicija, liks padengti dalį

$$N_0 p_{1,0} - N_0 p_{2,0} + \lambda |N_0| = N_0 A_0 + \lambda |N_0| .$$

Investuotojo turimi grynieji pinigai:

$$cash_0 = u + N_0 A_0 .$$

Užstato reikalavimas:

$$cash_0 \geq N_0 A_0 + \lambda |N_0| .$$

Iš čia:

$$|N_0| \leq \frac{u}{\lambda} . \tag{2}$$

Tas pats reikalavimas galioja ir laiko momentu $t = 1$:

$$cash_1 \geq N_1 A_1 + \lambda |N_1| .$$

Iš čia ir iš (1) gauname:

$$|N_1| \leq \frac{1}{\lambda} (u + N_0 (A_0 - A_1))^+ , \tag{3}$$

čia $x^+ = \max(x, 0)$. Ankstesniame skyrelyje aprašėme, kas vyksta, kai $cash_1 < 0$. Tai paaiškina, kodėl reikalingas šis maksimumas.

Analogiški kaip ir (2), (3) apribojimai gaunasi ir kai $N_0 < 0$.

Antrame periode, tai yra tarp $t = 1$ ir $t = 2$ arbitražo kaina pasikeičia nuo jau žinomo dydžio $A_1(\omega)$ iki $A_2 = 0$. Akivaizdu, kad šiame periode optimali strategija $N_1^*$ yra investuoti į maksimalų leidžiamą $N_1$, jei $A_1 > 0$ ir į minimalų $N_1$, jei $A_1 < 0$.

$$N_1^* = \operatorname{sgn}(A_1) \frac{1}{\lambda} (u + N_0 (A_0 - A_1))^+ , \tag{4}$$

čia $\operatorname{sgn}(x)$ – ženklo funkcija, kuri yra lygi 1, kai *x* teigiamas, –1, kai *x* neigiamas ir 0, kai $x = 0$.

Įstatę (4) į (1) gauname:

$$
\begin{aligned}
cash_1 &= u + N_0(A_0 - A_1) + N_1^* A_1 \\
&= u + N_0(A_0 - A_1) + |A_1| \frac{1}{\lambda}(u + N_0(A_0 - A_1))^+ \qquad (5) \\
&= (u + N_0(A_0 - A_1))(1 + \frac{|A_1|}{\lambda} \mathbf{I}_{\{u + N_0(A_0 - A_1) \geq 0\}}).
\end{aligned}
$$

Čia $\mathbf{I}_{\{A\}}$ – indikatoriaus funkcija.

Toliau pateiksime skaitinį pavyzdį, parodantį, kad norėdamas išnaudoti arbitražo galimybę investuotojas gali patirti nuostolių ir kad investuodamas į mažiau vienetų arbitražo jis gali gauti didesnį pelną.

*1 Pavyzdys.*

Investuotojas, turintis \$1000 pradinį kapitalą pastebėjo, kad rinkoje egzistuoja 2 identiškos JAV Iždo obligacijos, kurių kainos skiriasi \$0,50. Brokeris, skolindamas vieną obligaciją reikalauja papildomo \$2 užstato.

$u = 1000$,

$\lambda = 2$,

$A_0 = 0.50$.

Iš (2) gauname:

$$|N_0| \leq \frac{u}{\lambda} = \frac{1000}{2} = 500.$$

*1. Situacija.* Tarkime, investuotojas nusprendžia investuoti į maksimalų leistiną kiekį arbitražo, t.y.

$N_0 = 500$.

Kainų skirtumas padidėjo iki \$1,5.

$A_1 = 1.5$.

Iš (4) gauname:

$$N_1^* = \mathrm{sgn}(A_1) \frac{1}{\lambda}(u + N_0(A_0 - A_1))^+ = \frac{1}{2}(1000 + 500(0.5 - 1.5))^+ = 250.$$

Taigi, investuotojas privalo likviduoti dalį arbitražo pozicijų nepalankiomis kainomis ir atstatyti užstato reikalavimą.

Iš (5):

$$cash_2 = (u + N_0(A_0 - A_1))(1 + \frac{|A_1|}{\lambda} \mathbf{I}_{\{u + N_0(A_0 - A_1) \geq 0\}}) =$$

$$= (1000 + 500(0.5 - 1.5))(1 + \frac{|1.5|}{2}\mathbf{I}_{\{1000+500(0.5-1.5)\geq 0\}}) = 875.$$

Investuotojas patyrė 12,5% nuostolį.

*2. Situacija.* Jei jis būtų investavęs į $N_0 = 300$ vienetų arbitražo, atėjus laiko momentui $t = 1$,

$$N_1^* = \frac{1}{2}(1000 + 300(0.5 - 1.5))^+ = 350,$$

Tai yra užstato reikalavimas tenkinamas ir galima investuoti į dar 50 vienetų arbitražo.

$$cash_2 = (1000 + 300(0.5 - 1.5))(1 + \frac{|1.5|}{2}\mathbf{I}_{\{1000+300(0.5-1.5)\geq 0\}}) = 1225.$$

Gaunamas 22,5% pelnas.

Žinoma, jei kainų skirtumas laiko momentu $t = 1$ sumažėtų, investavus į teigiamą kiekį arbitražo būtų gaunamas teigiamas pelnas. Iš čia ir kyla klausimas, kokia yra optimali strategija $N_0^*$, maksimizuojanti vidutinį pinigų kiekį laiko momentu $t = 2$, jei arbitražo dydis viduriniu laiko momentu yra atsitiktinis, t.y. $A_1 = A_1(\omega)$.

## 3.3 Optimalios strategijos radimas

Optimalia strategija vadinsime tokią strategiją

$$(N_0^*, N_1^*) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R},$$

kuri maksimizuoja vidutinį pinigų kiekį laiko momentu $t = 2$.

$N_1^*$ jau žinoma iš praeito skyrelio:

$$N_1^* = \mathrm{sgn}(A_1)\frac{1}{\lambda}(u + N_0(A_0 - A_1))^+$$

Lieka rasti tik $N_0^*$. Tai yra

$$\arg\max_{|N_0| \leq \frac{u}{\lambda}} E(cash_2(N_0)) = ? \qquad (*)$$

Kadangi $x^+ = x\mathbf{I}_{\{x\geq 0\}} = x(1 - \mathbf{I}_{\{x<0\}}) = x - x^-$,

čia $x^- = \min(x, 0)$, gauname:

$$E(cash_2(N_0)) = u + N_0(A_0 - E(A_1)) + E(|A_1| \frac{1}{\lambda}(u + N_0(A_0 - A_1))^+)$$
$$= u + N_0(A_0 - E(A_1)) + E(|A_1| \frac{1}{\lambda}(u + N_0(A_0 - A_1))) - E(|A_1| \frac{1}{\lambda}(u + N_0(A_0 - A_1))^-). \quad (6)$$

Nagrinėkime paskutinį (6) narį $E(|A_1| \frac{1}{\lambda}(u + N_0(A_0 - A_1))^-)$:

$$E(|A_1| \frac{1}{\lambda}(u + N_0(A_0 - A_1))^-) = E(|A_1| \frac{1}{\lambda}(u + N_0(A_0 - A_1))\mathbf{I}_{\{u+N_0(A_0-A_1)<0\}}). \qquad (7)$$

Kadangi $|N_0| \le \frac{u}{\lambda}$ ir $u \ge 0$, gauname

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{\{u+N_0(A_0-A_1)<0\}} &= \mathbf{I}_{\{u+N_0(A_0-A_1)<0\}}\mathbf{I}_{\{-\frac{u}{\lambda}\le N_0\le\frac{u}{\lambda}\}} = \mathbf{I}_{\{N_0A_1>u+N_0A_0\}}\mathbf{I}_{\{-\frac{u}{\lambda}\le N_0\le\frac{u}{\lambda}\}} \\
&= \left(\mathbf{I}_{\{N_0>0\}}\mathbf{I}_{\{A_1>\frac{u}{N_0}+A_0\}} + \mathbf{I}_{\{N_0<0\}}\mathbf{I}_{\{A_1<\frac{u}{N_0}+A_0\}}\right)\mathbf{I}_{\{-\frac{u}{\lambda}\le N_0\le\frac{u}{\lambda}\}} \\
&= \mathbf{I}_{\{0<N_0\le\frac{u}{\lambda}\}}\mathbf{I}_{\{A_1>\frac{u}{N_0}+A_0\}} + \mathbf{I}_{\{-\frac{u}{\lambda}\le N_0<0\}}\mathbf{I}_{\{A_1<\frac{u}{N_0}+A_0\}} \\
&\le \mathbf{I}_{\{A_1>\lambda+A_0\}} + \mathbf{I}_{\{A_1<-\lambda+A_0\}} = 1 - \mathbf{I}_{\{A_0-\lambda\le A_1\le A_0+\lambda\}}.
\end{aligned} \qquad (8)$$

Įstatę (8) į (7) gauname:

$$E(|A_1| \frac{1}{\lambda}(u + N_0(A_0 - A_1))^-) \le E(|A_1| \frac{1}{\lambda}(u + N_0(A_0 - A_1))(1 - \mathbf{I}_{\{A_0-\lambda\le A_1\le A_0+\lambda\}})). \qquad (9)$$

Pastebėkime, kad (9) vidurkis bus lygus 0, jei $\forall\omega: A_1(\omega) \in [A_0 - \lambda, A_0 + \lambda]$. Taigi, jei atsitiktinis dydis $A_1$ nenukrypsta nuo $A_0$ per daugiau nei $\lambda$, paskutinis (6) $E(cash_2(N_0))$ išraiškos narys tampa lygus 0.

Pagal [2] ir [3] atliktus stebėjimus, didžiausias kainų skirtumas tarp JAV Iždo obligacijų buvo atitinkamai \$0,40 per 7 metų laikotarpį ir \$0,80 per 10 metų laikotarpį. Pasak [1] ir [4] papildomo užstato dydis $\lambda$ šiems vertybiniams popieriams yra atitinkamai \$1-2 ir „\$5 ir mažiau“. Kaip matome $\lambda$ realiose rinkose nustatytas maždaug toks, kad arbitražo dydis niekada nebūtų už jį didesnis.

Taigi, per daug nemažindami bendrumo toliau laikysime, kad $A_1(\omega) \in [A_0 - \lambda, A_0 + \lambda]$. Siekdami matematinio griežtumo, atvejus, kai $A_1(\omega) \in \mathbf{R}$, nagrinėsime vėliau.

Jei $\forall\omega: A_1(\omega) \in [A_0 - \lambda, A_0 + \lambda]$, turime:

$$E(cash_2(N_0)) = u + N_0(A_0 - E(A_1)) + E(|A_1|\frac{1}{\lambda}(u + N_0(A_0 - A_1)))$$
$$= N_0(A_0 - E(A_1) + \frac{1}{\lambda}A_0 E(|A_1|) - \frac{1}{\lambda}E(A_1|A_1|)) + u(1 + \frac{1}{\lambda}E(|A_1|). \qquad (10)$$

Gavome tiesinę lygtį. Akivaizdu, kad jei koeficientas prie $N_0$ bus teigiamas, optimali strategija bus investuoti į didžiausią leistiną arbitražo kiekį, jei neigiamas – į mažiausią. Todėl tiriame, kada

$$A_0 - E(A_1) + \frac{1}{\lambda}A_0 E(|A_1|) - \frac{1}{\lambda}E(A_1|A_1|) \geq 0,$$

$$A_0 \geq \frac{E(A_1) + \frac{1}{\lambda}E(A_1|A_1|)}{1 + \frac{1}{\lambda}E(|A_1|)},$$

$$A_0 \geq \frac{E(A_1(\lambda + |A_1|)}{E(\lambda + |A_1|)} = \frac{E(A_1)E(\lambda + |A_1|) + Cov(A_1, \lambda + |A_1|)}{E(\lambda + |A_1|)} = E(A_1) + \frac{Cov(A_1, |A_1|)}{\lambda + E(|A_1|)}. \qquad (11)$$

Pažymėkime

$$A_0^* = E(A_1) + \frac{Cov(A_1, |A_1|)}{\lambda + E(|A_1|)} = E(A_1) + \frac{D(A^+) - D(A^-)}{\lambda + E(|A_1|)}. \qquad (12)$$

Gauname optimalią strategiją

$$N_0^* = \begin{cases} \frac{u}{\lambda}, A_0 \geq A_0^*, \\ -\frac{u}{\lambda}, A_0 < A_0^*. \end{cases} \qquad (13)$$

Pastebėkime, kad jei $\forall \omega : A_1(\omega) \geq 0$,

$Cov(A_1, |A_1|) = D(A_1)$.

Jei $\forall \omega : A_1(\omega) < 0$:

$Cov(A_1, |A_1|) = -D(A_1)$.

Šiais 2 atvejais kovariacijos ženklas sutampa su $E(A_1)$ ženklu. Bendru atveju taip gali ir nebūti. Tai iliustruoja šis pavyzdys:

*2 Pavyzdys*. Tarkime, kad $A_1(\omega)$ yra diskretus atsitiktinis dydis, įgyjantis dvi reikšmes, $a > 0$ ir $b < 0$ su tikimybėmis $p$ ir $1 - p$, t.y.

$P(A_1 = a) = p$,

$P(A_1 = b) = 1 - p$.

Tada:

$$Cov(A_1, |A_1|) = D(A_1^+) - D(A_1^-)$$
$$= pa^2 - p^2a^2 - (1-p)b^2 + (1-p)^2 b^2$$
$$= p(1-p)a^2 - p(1-p)b^2$$
$$= p(1-p)(a^2 - b^2).$$

$E(A_1) = pa + (1-p)b.$

Nesunku parinkti tokius $a$, $b$ ir $p$, kad $Cov(A_1, |A_1|)$ ir $E(A_1)$ būtų tiek skirtingų, tiek vienodų ženklų. Kovariacija gali būti lygi 0, jei $D(A_1^+) = D(A_1^-)$.

Vadinasi, tarp $A_0^*$ ir $E(A_1)$ yra intervalas (jei $Cov(A_1, |A_1|) \neq 0$), kuriame vidutiniškai tikėtina arbitražo judėjimo kryptis yra viena, o optimali strategija yra investuoti priešinga kryptimi. Vienintelė to priežastis yra papildomo užstato reikalavimas. Taip pat pastebėkime, kad šio intervalo dydis atvirkščiai proporcingas $\lambda$ ir tiesiogiai proporcingas $A_1$ išsibarstymui apie vidurkį.

Taigi, įrodėme šį teiginį:

**1 Teiginys**. Tarkime,

$u \geq 0$ – pradinis kapitalas,

$\lambda > 0$ – užstato parametras,

$A_0 \in \mathbf{R}$ – pradinis arbitražo dydis,

$\forall \omega : A_1(\omega) \in [A_0 - \lambda, A_0 + \lambda]$ – arbitražo dydis viduriniu laiko momentu – atsitiktinis dydis, kurio reikšmės nenutolsta nuo $A_0$ per daugiau nei $\lambda$.

$|N_0| \leq \dfrac{u}{\lambda}$ – arbitražo vienetų kiekis pradiniu laiko momentu. Tuomet uždavinio

$$\arg \max_{|N_0| \leq \frac{u}{\lambda}} E(cash_2(N_0)) = ?$$

sprendinys yra

$$N_0^* = \begin{cases} \dfrac{u}{\lambda}, A_0 \geq A_0^*, \\ -\dfrac{u}{\lambda}, A_0 < A_0^*. \end{cases}$$

Čia $A_0^* = E(A_1) + \dfrac{Cov(A_1, |A_1|)}{\lambda + E(|A_1|)} = E(A_1) + \dfrac{D(A^+) - D(A^-)}{\lambda + E(|A_1|)}$.

## 3.4 $A_1(\omega) \in \mathbf{R}$ atvejis

Didžioji laiko dalis rašant šį darbą buvo panaudota mėginant rasti optimalią strategiją, kai $A_1(\omega) \in \mathbf{R}$. Prisiminkime, kad mūsų uždavinys buvo šis:

$$\arg\max_{|N_0| \le \frac{u}{\lambda}} E(cash_2(N_0)) = ?\,. \qquad (*)$$

Jo taip ir nepavyko išspręsti analiziškai. Gali būti, kad atsakymo be specialiųjų funkcijų ir nėra. Toliau pateiksime gautus rezultatus.

**2 Teiginys.** Tarkime,

$u \ge 0$ – pradinis kapitalas,

$\lambda > 0$ – užstato parametras,

$A_0 \in \mathbf{R}$ – pradinis arbitražo dydis,

$A_1(\omega) \in \mathbf{R}$ – arbitražo dydis viduriniu laiko momentu – atsitiktinis dydis, turintis tankį $p(x)$.

$|N_0| \le \dfrac{u}{\lambda}$ – arbitražo vienetų kiekis pradiniu laiko momentu.

$E(A_1)^2 < \infty$.

Tuomet uždavinio

$$\arg\max_{|N_0| \le \frac{u}{\lambda}} E(cash_2(N_0)) = \arg\max_{|N_0| \le \frac{u}{\lambda}} E(u + N_0(A_0 - A_1))(1 + \frac{|A_1|}{\lambda}\mathbf{I}_{\{u+N_0(A_0-A_1)\ge 0\}})$$

sprendinys $N_0^* \in \{-\frac{u}{\lambda}, 0, \frac{u}{\lambda}\}$.

$\triangleright$ Diferencijuokime $E(cash_2(N_0))$ pagal $N_0$:

$$(E(cash_2(N_0)))'_{N_0} = A_0 - E(A_1) + \frac{1}{\lambda}(\int_{-\infty}^{\infty} |x|(u + N_0(A_0 - x))\mathbf{I}_{\{u+N_0(A_0-A_1)\ge 0\}} p(x)dx)'_{N_0}\,.$$

$$\mathbf{I}_{\{u+N_0(A_0-A_1)\ge 0\}} = \mathbf{I}_{\{N_0>0\}}\mathbf{I}_{\{A_1<\frac{u}{N_0}+A_0\}} + \mathbf{I}_{\{N_0<0\}}\mathbf{I}_{\{A_1>\frac{u}{N_0}+A_0\}}\,.$$

1) Kai $N_0 > 0$:

$$(E(cash_2(N_0)))'_{N_0} = A_0 - E(A_1) + \frac{1}{\lambda}(\int_{-\infty}^{\frac{u}{N_0}+A_0} |x|(u + N_0(A_0 - x))p(x)dx)'_{N_0}$$

$$= A_0 - E(A_1) + \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{\frac{u}{N_0}+A_0} |x|(A_0 - x)p(x)dx)$$

$$+(\frac{u}{N_0} + A_0)'_{N_0}\left|\frac{u}{N_0} + A_0\right|(u + N_0(A_0 - \frac{u}{N_0} - A_0)p(\frac{u}{N_0} + A_0)$$

$$= A_0 - E(A_1) + \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{\frac{u}{N_0}+A_0} |x|(A_0 - x)p(x)dx.$$

$$(E(cash_2(N_0)))''_{N_0,N_0} = \frac{1}{\lambda}(\int_{-\infty}^{\frac{u}{N_0}+A_0} |x|(A_0 - x)p(x)dx)'_{N_0}$$

$$= \frac{1}{\lambda}(\int_{-\infty}^{\frac{u}{N_0}+A_0} 0dx + (\frac{u}{N_0} + A_0)'_{N_0}\left|\frac{u}{N_0} + A_0\right|(A_0 - \frac{u}{N_0} - A_0)p(\frac{u}{N_0} + A_0))$$

$$= \frac{1}{\lambda}u^2\left|\frac{u}{N_0} + A_0\right|p(\frac{u}{N_0} + A_0)\frac{1}{N_0^3} \geq 0.$$

Kadangi, kai $N_0 > 0$, funkcijos antroji išvestinė yra neneigiama, maksimizuojama funkcija yra iškila, taigi, maksimumas bus įgyjamas tik intervalo $(0, \frac{u}{\lambda})$ galuose.

1) Kai $N_0 < 0$, analogiškai gauname:

$$(E(cash_2(N_0)))'_{N_0} = A_0 - E(A_1) + \frac{1}{\lambda}\int_{\frac{u}{N_0}+A_0}^{\infty} |x|(A_0 - x)p(x)dx.$$

$$(E(cash_2(N_0)))''_{N_0,N_0} = -\frac{1}{\lambda}u^2\left|\frac{u}{N_0} + A_0\right|p(\frac{u}{N_0} + A_0)\frac{1}{N_0^3} \geq 0.$$

Ir intervale $(-\frac{u}{\lambda}, 0)$ maksimizuojama funkcija yra iškila, taigi, maksimumas bus įgyjamas intervalo $(-\frac{u}{\lambda}, 0)$ galuose.

Vadinasi,

$N_0^* \in \{-\frac{u}{\lambda}, 0, \frac{u}{\lambda}\} \triangleleft$

Čia norint tęsti skaičiavimus buvo padaryta hipotezė, kad $N_0^* = 0$ negali būti optimali strategija. Ši iki galo neįrodyta hipotezė buvo padaryta remiantis skaitiniais rezultatais ir funkcijų $E(cash_2(-\frac{u}{\lambda}))$, $E(cash_2(0))$ ir $E(cash_2(\frac{u}{\lambda}))$ grafikais nuo $A_0$ su įvairiais parametrais $p(x), \lambda, u$.

Taigi, toliau lyginsime $E(cash_2(-\frac{u}{\lambda}))$ ir $E(cash_2(\frac{u}{\lambda}))$ reikšmes.

Apibrėžkime funkciją

$$g(A_0) = E(cash_2(\frac{u}{\lambda})) - E(cash_2(-\frac{u}{\lambda})). \tag{14}$$

Pagal jos ženklą galime nustatyti, kuri strategija yra optimali.

**3 Teiginys.** Tarkime, galioja 2 teiginio pradinės sąlygos. Tuomet egzistuoja vienintelis toks $A_0^*$, kad $g(A_0^*) = 0$, o optimali strategija

$$N_0^* = \begin{cases} \frac{u}{\lambda}, A_0 \geq A_0^*, \\ -\frac{u}{\lambda}, A_0 < A_0^*. \end{cases} \tag{15}$$

$\triangleright$ Įstatę (10) į (14) gauname

$$\begin{aligned} g(A_0) &= E(cash_2(\frac{u}{\lambda})) - E(cash_2(-\frac{u}{\lambda})) \\ &= u + \frac{u}{\lambda}(A_0 - E(A_1)) + \frac{1}{\lambda}E(|A_1|(u + \frac{u}{\lambda}(A_0 - A_1))^+) \\ &\quad -u + \frac{u}{\lambda}(A_0 - E(A_1)) - \frac{1}{\lambda}E(|A_1|(u - \frac{u}{\lambda}(A_0 - A_1))^+) \\ &= \frac{u}{\lambda^2}(2\lambda(A_0 - E(A_1)) + E(|A_1|((\lambda + (A_0 - A_1))^+ - (\lambda - (A_0 - A_1))^+) \\ &= \frac{u}{\lambda^2}(2\lambda(A_0 - E(A_1)) + E(|A_1|(\lambda + (A_0 - A_1))\mathbf{I}_{\{\lambda + (A_0 - A_1) \geq 0\}}) \\ &\quad -E(|A_1|(\lambda - (A_0 - A_1))\mathbf{I}_{\{\lambda - (A_0 - A_1) \geq 0\}})). \end{aligned} \tag{16}$$

Be to,

$$\lim_{A_0 \to \infty} g(A_0) = \infty,$$

$$\lim_{A_0 \to -\infty} g(A_0) = -\infty.$$

Diferencijuokime $g(A_0)$ pagal $A_0$:

$$(g(A_0))'_{A_0} = \frac{u}{\lambda^2}(2\lambda + (\int_{-\infty}^{A_0+\lambda} |x|(\lambda + (A_0 - x))p(x)dx)'_{A_0} - (\int_{A_0-\lambda}^{\infty} |x|(\lambda - (A_0 - x))p(x)dx)'_{A_0})$$

$$= \frac{u}{\lambda^2}(2\lambda + \int_{-\infty}^{A_0+\lambda} |x|p(x)dx + |A_0 + \lambda|(\lambda + (A_0 - A_0 - \lambda))p(A_0 + \lambda)$$

$$- \int_{A_0-\lambda}^{\infty} |x|(-1)p(x)dx + |A_0 - \lambda|(\lambda - (A_0 - A_0 + \lambda))p(A_0 - \lambda))$$

$$= \frac{u}{\lambda^2}(2\lambda + \int_{-\infty}^{A_0+\lambda} |x|p(x)dx + \int_{A_0-\lambda}^{\infty} |x|p(x)dx))$$

$$= \frac{u}{\lambda^2}(2\lambda + E(|A_1|\mathbf{I}_{\{\lambda+(A_0-A_1)\ge 0\}}) + E(|A_1|\mathbf{I}_{\{\lambda-(A_0-A_1)\ge 0\}})) > 0,$$

kai $u > 0$.

(17)

Pirmoji išvestinė gavosi teigiama, taigi funkcija $g(A_0)$ yra didėjanti. Kadangi kažkokio intervalo galuose $g(A_0)$ įgyja priešingų ženklų reikšmes, ši funkcija $A_0$ ašį būtinai kirs ir tik viename taške. Pažymėkime šį tašką $A_0^*$. Kai $A_0 \ge A_0^*$, funkcija $g(A_0)$ bus teigiama, taigi optimali strategija $N_0^* = \frac{u}{\lambda}$ ir atvirkščiai, kai $A_0 < A_0^*$, gausime $N_0^* = -\frac{u}{\lambda}$. ◁

Suskaičiuokime antrąją $g(A_0)$ išvestinę:

$$(g(A_0))''_{A_0,A_0} = \frac{u}{\lambda^2}((\int_{-\infty}^{A_0+\lambda} |x|p(x)dx)'_{A_0} + (\int_{A_0-\lambda}^{\infty} |x|p(x)dx)'_{A_0})$$

$$= \frac{u}{\lambda^2}(|A_0 + \lambda|\, p(A_0 + \lambda) - |A_0 - \lambda|\, p(A_0 - \lambda)).$$

(18)

Tarkime, $A_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$. Prilyginę antrąją $g(A_0)$ išvestinę nuliui gauname:

$$\frac{u}{\lambda^2}(|A_0 + \lambda|\, p(A_0 + \lambda) - |A_0 - \lambda|\, p(A_0 - \lambda)) = 0,$$

$$|A_0 + \lambda| e^{-\frac{(A_0+\lambda-\mu)^2}{2\sigma^2}} = |A_0 - \lambda| e^{-\frac{(A_0-\lambda-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$e^{-\frac{2\lambda(A_0-\mu)}{\sigma^2}} = \frac{|A_0 - \lambda|}{|A_0 + \lambda|},$$

$$\frac{2\lambda(A_0 - \mu)}{\sigma^2} = \ln(\frac{|A_0 - \lambda|}{|A_0 + \lambda|}), \qquad |A_0| \ne \lambda,$$

$$\mu = A_0 - \frac{\sigma^2}{2\lambda}\ln(\frac{|A_0 + \lambda|}{|A_0 - \lambda|})\ .$$

Gavome labai panašią išraišką į (12) – lygtyje $\mu$ ir $A_0$ skiriasi dydžiu, tiesiogiai proporcingu $\sigma^2$ ir atvirkščiai proporcingu $\lambda$, be to, logaritmas ženklu sutampa su $A_0$.

# 4 Išvados

Ištyrėme optimalią racionalaus investuotojo investavimo strategiją rinkoje, kurioje egzistuoja arbitražo galimybės, iš anksto žinomu laiko momentu sukonverguojančios į 0. Šioje rinkoje taip pat galioja užstato reikalavimas formuojant „trumpąsias" pozicijas. Tai iš esmės pakeičia investavimą į arbitražą, kuris tampa rizikinga investicija, reikalaujančia pradinio kapitalo. Parodėme, kad galima situacija, kai vidutiniškai arbitražo galimybės dydis ateityje mažės, o optimali strategija yra investuoti priešingai. Tokia investicija tik dar labiau padidins arbitražą. Taigi, į teorinius modelius įtraukus užstato reikalavimą skolinantis vertybinius popierius, galiojantį realiose rinkose, arbitražo galimybės ne tik gali egzistuoti, investavimas į jas tampa atskiru išvestiniu finansiniu instrumentu.

Tolesnė tyrimo kryptis galėtų būti rizikos, t.y. pelno išsibarstymo apie vidurkį, skaičiavimas naudojant vieną ar kitą investavimo strategiją, komisinio mokesčio už vertybinių popierių pirkimą ir pardavimą įtraukimas į modelį, taip pat 3.4 skyrelyje pateiktų rezultatų apibendrinimas ir plėtojimas.

# 5 Literatūra


1. J. Liu, F.A. Longstaff, Losing Money on Arbitrage: Optimal Dynamic Portfolio Choice in Markets with Arbitrage Opportunities, *The Review of Financial Studies*, **17**(3), 611–641 (2004).
2. A. Kamara, Liquidity, Taxes and Short-Term Treasury Yields, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **29**, 403–417 (1994).
3. M. Loewenstein, G. Willard, Local Martingales, Arbitrage, and Viability: Free Snacks and Cheap Thrills, *Economic Theory*, **16**, 135-161 (2000).
4. F. Stefanini, *Investment Strategies of Hedge Funds*, John Wiley & Sons Inc., (2006).
5. R.A. Jaeger, *All About Hedge Funds*, McGraw-Hill Inc. (2003).