VILNIAUS UNIVERSITETAS

Jūratė Petrauskienė

PRIKLAUSOMŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ SUMŲ APROKSIMAVIMAS PUASONO TIPO MATAIS

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2011

Disertacija rengta 2006–2010 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas
Prof. habil. dr. Vydas Čekanavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Disertacija ginama Vilniaus universiteto matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas:
prof. habil. dr. Alfredas Račkauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Nariai:
prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

prof. habil. dr. Mindaugas Bloznelis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

prof. habil. dr. Romanas Januškevičius (Vilniaus pedagoginis universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

doc. dr. Danutė Krapavickaitė (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Oponentai:
prof. habil. dr. Algimantas Bikelis (Vytauto Didžiojo universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

prof. habil. dr. Jonas Kazys Sunklodas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2011 m. vasario mėn. 2 d., 16 val., Matematikos ir informatikos fakulteto Zigmo Žemaičio (101) auditorijoje.
Adresas: Naugarduko 24, 03225 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2011 m. sausio mėn.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

Jūratė Petrauskienė

POISSON TYPE APPROXIMATIONS FOR SUMS OF DEPENDENT VARIABLES

Summary of Doctoral Dissertation
Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2011

The scientific work was carried out in 2006–2010 at Vilnius university.

Scientific supervisor:
Prof. Dr. Habil. Vydas Čekanavičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P)

The thesis is defended in the council of Mathematics of Vilnius University:

Chairman:
Prof. Habil. Dr. Alfredas Račkauskas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).

Members:
Prof. Habil. Dr. Remigijus Leipus (Vilnius Pedagogical University, Physical sciences, Mathematics - 01P).

Prof. Habil. Dr. Mindaugas Bloznelis (Vilnius Pedagogical University, Physical sciences, Mathematics - 01P).

Prof. Habil. Dr. Romanas Januškevičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).

Assoc. Prof. Dr. Danutė Krapavickaitė (Vilnius Gediminas Technical University, Physical sciences, Mathematics - 01P).

Opponents:
Prof. Habil. Dr. Algimantas Bikelis (Vytautas Magnus University, Physical sciences, Mathematics - 01P).

Prof. Habil. Dr. Jonas Kazys Sunklodas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on 2 February, 2011, in Zigmo Žemaičio (101) auditorium of the faculty of Mathematics and Informatics of Vilnius University at 4 pm.
Address: Naugarduko 24, 03225 Vilnius, Lithuania.

The summary of dissertation was distributed on January, 2011.
The dissertation is available at the Library of Vilnius University.

Mokslinė problema ir tyrimo objektas.

Disertacijoje tiriamas diskrečių m-priklausomų atsitiktinių dydžių aproksimavimo Puasono tipo matais tikslumas. Silpnai priklausomų atsitiktinių dydžių sumos yra natūralus nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumų apibendrinimas. Vis dėlto atsitiktinių dydžių priklausomybė žymiai pasunkina tokių sumų tyrimą. Kalbant apie priklausomų atsitiktinių dydžių sumų aproksimavimą, galima konstatuoti, kad a) gausu darbų, kuriuose giliai išnagrinėtas normaliosios aproksimacijos tikslumas; b) yra nemažai darbų, skirtų Puasono aproksimacijai; c) praktiškai nėra darbų, kuriuose tirtos dviparametrės ar daugiaparametrės diskrečiosios aproksimacijos. Pastaruoju aspektu situacija radikaliai skiriasi nuo nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumų atvejo. Disertacijoje pagrindinis dėmesys skiriamas būtent dviparametrėms ir triparametrėms diskrečiosioms aproksimacijoms.

Normalioji aproksimacija yra pati universaliausia ir plačiausiai taikoma ribinių teoremų aproksimacija. Plačiai ji taikoma ir priklausomų dydžių sumoms, žr. [17, 28, 29, 30, 32] . Vis dėlto, normalioji aproksimacija yra ne visada pakankamai tiksli, kai aproksimuojami gardeliniai dydžiai serijų schemoje. Be to struktūros skirtumai (diskretų atsitiktinį dydį aproksimuojame tolydžiuoju) leidžia naudoti tik Kolmogorovo, bet ne pilnosios variacijos metriką. Dar daugiau, net ir trumpam asimptotiniam Edžvorto skleidiniui prireikia papildomų narių, kompensuojančių šiuos struktūrų skirtumus. Todėl diskrečiųjų atsitiktinių dydžių sumas natūraliau aproksimuoti diskrečiais skirstiniais.

Pati populiariausia diskrečioji aproksimacija yra Puasono skirstinys. Nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumų aproksimavimas Puasono dėsniu turi ilgą istoriją, žr. [14, 15, 20, 23, 25] ir [5] įžangą. Daug darbų yra skirta ir priklausomų atsitiktinių dydžių (ypač Bernulio dydžių) sumų puasoninėms aproksimacijoms, žr. [1, 5, 11, 27] ir ten pateiktas nuorodas. Dažniausiai joms gauti naudota Čeno pasiūlyta Steino metodo adaptacija. Suformuluosime tipinį Puasono aproksimacijos pavyzdį iš Arratia ir kt. straipsnio [1].

Tegul $X_i \sim Be(p_i)$, $(i = 1, \dots, n)$ yra Bernulio dydžiai, $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Tarsime, kad X_i yra priklausomi tik tam tikroje indeksų aplinkoje

$$N_i := \{X_j : j \neq i, X_j \text{ ir } X_i \text{ yra priklausomi}\}. \tag{1}$$

Be to X_i ir X_j yra (beveik) nepriklausomi, kai $j \notin N_i$. Tegul $n\bar{p} = \sum_{i=1}^n$. Puasono skirstinį su vidurkiu $n\bar{p}$ pažymėsime $\mathrm{Pois}(n\bar{p})$, o pilnosios variacijos metriką simboliu $\|\cdot\|$. Tegul

$$\begin{aligned} b_1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j\in N_i\cup\{i\}} p_i p_j, \\ b_2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j\in N_i} \mathbb{E}(X_i X_j), \\ b_3 &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}|\mathbb{E}(X_j - p_j|S_i)|. \end{aligned}$$

Čia $S_i = S - X_i$. Tada

$$\|\mathcal{L}(S) - \mathrm{Pois}(n\bar{p})\| \leqslant 2\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-n\bar{p}}}{n\bar{p}}(b_1+b_2) + b_3\left(1 \wedge \frac{1.4}{\sqrt{n\bar{p}}}\right)\right]. \tag{2}$$

Pacituotas rezultatas atsleidžia puasoninės aproksimacijos privalumus ir trūkumus. Viena vertus, aproksimacijos tikslumas įvertintas pilnosios variacijos metrikoje (t.y. visoms Borelio aibėms). Kita vertus, tikslumas labai priklauso nuo p_i mažumo. Faktiškai Puasono aproksimacija tinka tik serijų schemoje, kai $p_i = o(1)$. Net ir tuo atveju ji nelabai tiksli, jei p_i artės prie 0 lėtai.

Puasono dėsnis turi tik vieną parametrą (yra vienparametrė aproksimacija), tuo tarpu normalioji aproksimacija yra dviparametrė. Taigi, aproksimuodami Puasono dėsniu, galime jį taip parinkti, kad turėtų tą patį vidurkį, kaip ir aproksimuojamoji atsitiktinių dydžių suma, o, aproksimuojant normaliuoju dėsniu, - kad turėtų tokius pat vidurkį ir dispersiją. Natūralus sekantis žingsnis yra diskrečiųjų dviparametrių (bendresniu atveju, daugiaparametrių) aproksimacijų paieška. Kaip tokios aproksimacijos gali būti naudojami sudėtiniai Puasono skirstiniai ir ženklą keičiantys sudėtiniai Puasono matai.

Skirstinį sukoncentruotą taške a žymėsime I_a, $I = I_0$. Siekdami trumpesnių išraiškų rašysime $U = I_1 - I$. Visos matų sandaugos ir laipsniai suprantami, kaip sąsūkos: $VM\{A\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V\{A-k\}\,M\{k\}$, $A \subseteq \mathbb{Z}$; $M^0 = I$. Sudėtiniu Puasono skirstiniu vadiname tikimybinį matą

$$\exp\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j U^j\Big\}, \qquad \lambda_j \geqslant 0.$$

Jeigu dalis $\lambda_j < 0$, sakykime, kad turime ženklą keičiančią sudėtinę Puasono aproksimaciją.

Nepriklausomų atsitiktinių dydžių atveju sudėtinės (ženklą keičiančios) Puasono aproksimacijos nagrinėtos [2, 3, 6, 8, 10, 14, 18, 19, 22, 26, 31], žr. ir ten cituojamą literatūrą. Pažymėtina, kad ženklą keičiančios aproksimacijos taikomos ir draudimo matematikoje, žr. [12, 16].

Kalbant apie sudėtinių Puasono aproksimacijų taikymą, visus rezultatus galima dalinti į dvi dalis. Yra ne tiek mažai sudėtinių Puasono aproksimacijų taikymų priklausomų atsitiktinių dydžių sumoms, kai faktiškai turime vienparametrinę aproksimaciją ir užtikrinamas aproksimuojamojo ir aproksimuojančiojo dėsnių vidurkių sutapimas. Tokie rezultatai labai panašūs į būdingus Puasono aproksimacijoms – galioja tik serijų schemoje ir tikslumo prasme gali būti žymiai blogesni nei normalioji aproksimacija. Kituose tyrimuose sudėtinės ir ženklą keičiančios sudėtinės Puasono aproksimacijos parenkamos taip kad sutaptų kuo daugiau jų ir aproksimuojamojo skirstinio faktorialinių kumuliantų. Tipinis tokios ženklą keičiančios Puasono aproksimacijos rezultatas nepriklausomoms Bernulio dyžių sumoms (vadinamajam puasoniškai binominiam skirstiniui) atrodo taip: jeigu $p_j < 1/2$, $(j = 1, \dots, n)$ tai

$$\Big\|\prod_{j=1}^{n}(1+p_jU) - \exp\Big\{n\bar{p}U - \frac{1}{2}\sum_{j-1}^{n}p_j^2U^2\Big\}\Big\| \leqslant C\sum_{j=1}^{n}p_j^3\min\Big(1, (n\bar{p})^{-3/2}\Big), \tag{3}$$

žr. [18, 4]. Pacituotas rezultatas turi visus pranašumus, būdingus ir kitoms sudėtinėms ženklą keičiančioms Puasono aproksimacijoms:

1) Aproksimacijos tikslumas yra tos pačios arba geresnės eilės, už gautą naudojant normaliąją ar Puasono aproksimaciją;

2) Aproksimacija gauta pilnosios variacijos metrikoje.

Priklausomų atsitiktinių dydžių sumoms rezultatų, kurie būtų panašūs į (3) yra gauta labai nedaug. Bene geriausiai išnagrinėtas markoviškai binominis skirstinys, žr. [9, 34] ir ten cituojamą literatūrą. Tuo tarpu m-priklausomų atsitiktinių dydžių atveju kiek išsamiau nagrinėta tik k-serijų statistika. Serijų statistika pirmąkart buvo apibrėžta Mood darbe [21]. Neigiamai binominė serijų statistikos aproksimacija tirta [33, 13]. Jos centruotoji Puasono aproksimacija nagrinėta [24]. Sudėtinė dviparametrinė Puasono aproksimacija taikyta Barbour ir Xia [4] darbe. Serijų statistika užima svarbią vietą ir mūsų disertacijoje, todėl pacituosime vieną rezultatą iš [4].

Tegul $\xi_j \sim Be(p_i)$ yra nepriklausomi, $j = 0, 1, 2, \dots, n$, $\eta_j = \xi_j\xi_{j-1}$, $S = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n$. Laikoma, kad ξ_n priklauso nuo ξ_1 (t. y. ξ_n traktuojamas, kaip ξ_0). Tegul

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_2 &= \exp\{bU + aU^2/2\}, \quad b = \sum_{i=1}^{n}p_{i-1}p_i, \qquad (4)\\
a &= \sum_{i=1}^{n}p_{i-1}p_i\big[(1-p_{i-1})p_{i-2} - (1-p_i)p_{i+1} + p_{i-1}p_i\big],\\
\gamma &= \sum_{i=1}^{n}(1+p_{i+1})^2p_i(1-p_i)p_{i-1} - 6\max_{1\le j\le n}(1-p_{j+1})^2p_j(1-p_j)p_{j-1}.
\end{aligned}$$

Jeigu $|a|/b < 1/2$, tai

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}(S) - \tilde{G}_2\| &\leqslant \frac{9.2}{(b-2|a|)\sqrt{\gamma}}\\
&\times\sum_{i=1}^{n}\big[3p_{i-2}p_{i-1}p_ip_{i+1} + p_{i-1}^3p_i^3 + 4p_{i-1}^2p_i^2p_{i+1} + 4p_{i-2}p_{i-1}^2p_i^2 + 7p_{i-3}p_{i-2}^2p_{i-1}^2p_i\big].
\end{aligned}$$

Atskiru atveju, kai $p_i = p < 1/4$, $n > 7$, tai

$$\|\mathcal{L}(S) - \tilde{G}_2\| \leqslant \frac{27.6p + 73.6(p^2 + p^3)}{(1 - 2p(2 - 3p))\sqrt{(n-6)(1-p)^3}}. \tag{5}$$

Mažoms p reikšmėms aproksimacijos tikslumas yra $Cpn^{-1/2}$. Aproksimacijos tikslumas yra neblogesnis, nei aproksimuojant normaliuoju arba Puasono dėsniais. Taigi, turime visišką (3) analogą.

Šioje disertacijoje nagrinėjamos m-priklausomų gardelinių atsitiktinių dydžių dviparametrės ir triparametrės sudėtinės Puasono aproksimacijos, apibendrinančios ir išplėtojančios (5).

Tikslai ir uždaviniai.

Pagrindiniai darbo tikslai ir uždaviniai yra:
1. Aproksimuoti dviejų narių serijų statistiką įvairiais sudėtiniais Puasono skirstiniais ir trumpais asimptotiniais skleidiniais pilnosios variacijos, lokalioje ir Vaseršteino metrikose;
2. Gauti tokių aproksimacijų įverčius iš apačios;
3. Apskaičiuoti asimptotiškai tikslias konstantas įverčiams iš viršaus;
4. Gauti netolygius įverčius iš viršaus;
5. Aproksimuoti 1-priklausomų sveikaskaičių atsitiktinių dyžių, tenkinančių Frankeno sąlygą, sumų skirstinius ženklą keičiančiais sudėtiniais Puasono matais;
6. Aproksimuoti 1-priklausomų simetrinių atsititinių dydžių sumų skirstinius Puasono tipo aproksimacijomis;
7. Ištirti 1-priklausomų nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumų aproksimavimo galimybę.

Tyrimų metodika.

Disertacijos rezultatų įrodymuose naudojamas charakteringųjų funkcijų metodas (Heinricho metodas).

Darbo struktūra.

Disertacija parašyta anglų kalba. Ją sudaro įvadas, rezultatai, įrodymai, mokslinių publikacijų disertacijos tema sąrašas bei žymenys. Bendra darbo apimtis – 72 puslapiai.

Svarbiausi rezultatai.

Kaip jau išplaukia iš disertacijos pavadinimo, mūsų tikslas buvo ištirti Puasono tipo aproksimacijų priklausomų sveikaskaičių atsitiktinių dydžių sumoms tikslumą. Šioje daktaro disertacijoje, nagrinėjome tik m-priklausomus atsitiktinius dydžius. Atsitiktiniai dydžiai (X_k), $k = 1, \dots$ yra m-priklausomi, jeigu visiems $1 < s < t < \infty$, $t - s > m$, σ-algebros generuotos $X_1, \dots, X_s$ ir $X_t, X_{t+1} \dots$ yra nepriklausomos.

Be pilnosios variacijos metrikos

$$\|M\| := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |M\{k\}|$$

dar naudojame lokaliąją , tolygiąją ir Vaseršteino metrikas:

$$\|M\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{Z}} |M\{k\}|, \quad |M| := \sup_{k\in\mathbb{Z}} |M\{(-\infty, k]\}|,$$

$$\|M\|_{\mathrm{W}} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |M\{(-\infty, k]\}|.$$

1. Sudėtinės Puasono aproksimacijos dviejų narių serijų statistikoms.

Tegul ξ_j, $j = 0, 1, 2, \dots, n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę Bernulio dydžiai, $P(\xi_1 = 1) = p$, $P(\xi_1 = 0) = 1 - p$. Tegul $\eta_j = \xi_j\xi_{j-1}$, $S = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n$. Akivaizdu, kad η_j yra 1-priklausomi atsitiktiniai dydžiai. Atsitiktinių dydžių priklausomybė iš esmės keičia S savybes. Pavyzdžiui, $\mathrm{E}S < \mathrm{Var}S$. Tarkime, kad $\mathcal{L}(S)$ yra S skirstinys; $C_1, C_2, \dots$ absoliutinės teigiamos konstantos. Primename, kad I_a yra skirstinys, sukoncentruotas ant realaus a, $I = I_0$, $U = I_1 - I$. Visas matų sandaugas reikia suprasti, kaip sąsūkas.

Aproksimacijoms naudojame tokius skirstinius ir matus:

$$G_1 = \mathrm{Pois}(\gamma_1) = \exp\{\gamma_1 U\}, \quad G_2 := \exp\{\gamma_1 U + \gamma_2 U^2\}, \quad G_3 := \exp\{\gamma_1 U + \gamma_2 U^2 + \gamma_3 U^3\}.$$

Čia

$$\gamma_1 = np^2,\ \gamma_2 = \frac{np^3(2-3p) - 2p^3(1-p)}{2},\ \gamma_3 = \frac{np^4(3-12p+10p^2) - 6p^4(1-p)(1-2p)}{3}.$$

Mūsų tiriamu atveju, visi atsitiktiniai dydžiai η_j ($j = 2, 3, \ldots, n-1$) priklauso nuo dviejų gretimų atsitiktinių dydžių (η_{j-1} ir η_{j+1}). Tačiau η_1 ir η_n priklauso tik nuo vieno šalia esančio atsitiktinio dydžio.

Visų pirma pastebėsime, kad negalima tikėtis esminio aproksimacijos tikslumo pagerėjimo, keičiant Puasono skirstinį asimptotiniu skleidiniu.

1 teorema. *Tegul* $p \leqslant 1/5$, $n \geqslant 3$. *Tada*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(S) - G_1(I + \gamma_2 U^2)\| &\leqslant C_1 \min(np^4, p^2), \\ \|\mathcal{L}(S) - G_1(I + \gamma_2 U^2)\|_\infty &\leqslant C_2 \min\left(np^4, \frac{p}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Aproksimacijos tikslumas 1 teoremoje iš esmės priklauso nuo p mažumo ir yra trivialus ne serijų schemoje, kai $p = Const$. Tikslumas žymiai padidėja, kai taikome sudėtinę Puasono aproksimaciją, užtikrinančią dviejų momentų sutapimą.

2 teorema. *Tegul* $p \leqslant 1/5$, $n \geqslant 3$. *Tada*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(S) - G_2\| &\leqslant C_3 \min\left(np^4, \frac{p}{\sqrt{n}}\right), \\ \|\mathcal{L}(S) - G_2\|_\infty &\leqslant C_4 \min\left(np^4, \frac{1}{n}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Akivaizdu, kad (7) yra (5) variantas atvejui, kai atsisakoma nenatūralaus reikalavimo $\xi_n = \xi_0$. Kai $p = Const$, tuomet (7) yra $O(n^{-1/2})$ eilės, t.y. elgiasi analogiškai normaliajai aproksimacijai.

Rezultatų skaičiavimams mes taikome charakteringų funkcijų metodą (Heinricho metodą). Todėl tenka priimti apribojimą $p \leqslant 1/5$, be to konstantų reikšmės nėra pakankamai mažos. Vis dėlto atskiru atveju pavyksta suskaičiuoti asimptotiškai tikslias konstantas. Tegul

$$\tilde{C}_1 = \frac{4}{\sqrt{2\pi \mathrm{e}}} = 0,967883, \quad \tilde{C}_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0,398942, \quad \tilde{C}_3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1 + 4\mathrm{e}^{-3/2}) = 1,51,$$

$$\tilde{C}_4 = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \exp\left\{\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\right\} \sqrt{3 - \sqrt{6}} = 0,550588.$$

3 teorema. *Tegul* $p \leqslant 1/5$, $np^2 \geqslant 1$. *Tada*

$$\begin{aligned} \Big| \|\mathcal{L}(S) - G_1\| - \tilde{C}_1 p \Big| &\leqslant C\left(p^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \\ \Big| \|\mathcal{L}(S) - G_1\|_\infty - \frac{\tilde{C}_2}{\sqrt{n}} \Big| &\leqslant C\left(\frac{p}{\sqrt{n}} + \frac{1}{np}\right), \\ \Big| \|\mathcal{L}(S) - G_2\| - \tilde{C}_3 \frac{p}{\sqrt{n}} \Big| &\leqslant C\left(\frac{p^2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right), \\ \Big| \|\mathcal{L}(S) - G_2\|_\infty - \frac{\tilde{C}_4}{n} \Big| &\leqslant C\left(\frac{p}{n} + \frac{1}{n\sqrt{np^2}}\right). \end{aligned}$$

Aproksimacijos tikslumas gali būti pagerintas asimptotiniais skleidiniais. Žemiau pateikiame skleidinio eksponentėje pavyzdį.

4 teorema. *Tegul* $p \leqslant 1/5$, $n \geqslant 3$. *Tada*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(S) - G_3\| &\leqslant C_5 \min\left(np^5, \frac{p}{n}\right), \\ \|\mathcal{L}(S) - G_3\|_\infty &\leqslant C_6 \min\left(np^5, \frac{1}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

G_3 yra sudėtinis Puasono skirstinys, t.y. tikimybinis, o ne ženklą keičiantis, matas. Todėl, galima sakyti, kad tai nėra asimptotinis skleidinys, jau greičiau gana tiksli tikimybinė aproksimacija. Tačiau, sudėtinga apskaičiuoti sudėtinių Puasono matų su sudėtingais sudėtiniais pasiskirstymais tikimybes. Todėl, pateiksime antros eilės G_2 asimptotinį skleidinį, turintį skaičiavimams daug patogesnį pavidalą.

5 teorema. *Tegul* $p \leqslant 1/5$, $n \geqslant 3$. *Tada*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(S) - G_2(I + \gamma_3 U^3)\| &\leqslant C_7 \min\left(np^5, \frac{p}{n}\right), \\ \|\mathcal{L}(S) - G_2(I + \gamma_3 U^3)\|_\infty &\leqslant C_8 \min\left(np^5, \frac{1}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Jeigu $p = Const$, tada (9) yra $O(n^{-1})$ eilės. Tokios pačios eilės galima tikėtis ir pritaikius Edžvorto asimptotinį skleidinį. Tačiau yra vienas svarbus skirtumas. Kaip taisyklė, Edžvorto skleidiniai gardeliniams dydžiams turi papildomą narį, atsirandantį dėl to, kad normalusis dydis yra tolydus. Tokios nario (9) nėra, nes *abudu* skirstiniai yra sveikaskaičiai.

Kiek mums žinoma, iki šiol Puasono tipo m-priklausomų atsitiktinių dydžių aproksimacijoms buvo gauti įverčiai tik iš viršaus. Pateiksime įverčius iš apačios Puasono aproksimacijai, antros eilės asimptotiniui skleidiniui ir dviejų parametrų sudėtinei Puasono aproksimacijai. Gauti tolygios ir lokalios metrikų įverčiai.

6 teorema. *Tegul* $p \leqslant 1/5$, $n \geqslant 3$. *Tada*

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(S) - G_1| &\geqslant C_9 \min(np^3, p), \\ \|\mathcal{L}(S) - G_1\|_\infty &\geqslant C_{10} \min\left(np^3, \frac{1}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

7 teorema. *Tegul* $p \leqslant 1/5$, $n \geqslant 3$. *Tada*

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(S) - G_1(I + \gamma_2 U^2)| &\geqslant C_{11} \min(np^4, p^2), \\ \|\mathcal{L}(S) - G_1(I + \gamma_2 U^2)\|_\infty &\geqslant C_{12} \min\left(np^4, \frac{p}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

8 teorema. *Tegul* $p \leqslant 1/5$, $n \geqslant 3$. *Tada*

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(S) - G_2| &\geqslant C_{13} \min\left(np^4, \frac{p}{\sqrt{n}}\right), \\ \|\mathcal{L}(S) - G_2\|_\infty &\geqslant C_{14} \min\left(np^4, \frac{1}{n}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Kadangi $|M| \leqslant \|M\|$, tai įverčiai pilnai variacijai automatiškai išplaukia iš (10)-(12) ir gauname, kad aukščiau suformuluotieji pilnos variacijos viršutiniai rėžiai yra tikslios eilės. Be to, aproksimacijos tikslumas nebus pagerintas, jeigu pilnos variacijos norma bus naudojama vietoj tolygios Kolmogorovo metrikos. Taip pat galima daryti išvadą, kad aproksimacijos tikslumas labai priklauso nuo pasirinktos skleidinio formos. Eksponentinis skleidinys žymiai tikslesnis.

Pabaigai suformuluosime netolygius įverčius. Kiek mums žinoma, tokių įverčių 1-priklausomiems atsitiktiniams dydžiams iki šiol nebuvo gauta.

9 teorema. *Tegul* $p \leqslant 1/5$, $np^2 \geqslant 1$. *Tada, visiems* $k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\begin{aligned} \Big|(\mathcal{L}(S) - G_1)\{[0,k)\}\Big|\left(1 + \frac{|k - np^2|}{\sqrt{np}}\right) &\leqslant C_9 p, \\ \Big|(\mathcal{L}(S) - G_2)\{[0,k)\}\Big|\left(1 + \frac{(k - np^2)^2}{np^2}\right) &\leqslant C_{10} \frac{p}{\sqrt{n}}, \\ \Big|(\mathcal{L}(S) - G_3)\{[0,k)\}\Big|\left(1 + \frac{(k - np^2)^2}{np^2}\right) &\leqslant C_{11} \frac{p}{n}. \end{aligned}$$

Akivaizdu, kad aproksimacijų tikslumas yra toks pats, kaip pilnos variacijos metrikoje, kai $|k - np^2| \leqslant \sqrt{np}$. Kai k yra toli nuo vidurkio, rezultatai nebus labai tikslūs. Tam reikėtų didelių nuokrypių teoremų.

Iš gautųjų netolygių įverčių lengvai išplaukia įverčiai Vaseršteino metrikoje.

1 išvada. *Jeigu* $p \leqslant 1/5$ *ir* $np^2 \geqslant 1$, *tada*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(S) - G_2\|_{\mathrm{W}} &\leqslant C_{12}p^2, \\ \|\mathcal{L}(S) - G_3\|_{\mathrm{W}} &\leqslant C_{13}\frac{p^2}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Kaip ir galima tikėtis, tikslumas yra visa eile blogesnis, nei pilnos variacijos metrikai.

2. Sudėtinės Puasono aproksimacijos 1-priklausomų sveikaskaičių atsitiktinių dydžių sumoms, kai tenkinamas Frankeno sąlygos analogas.

Dviejų narių serijų statistikoje atsitiktiniai dydžiai η_j turėjo labai aiškiai apibrėžtą 1-priklausomybę ir prie jokių p reikšmių negalėjo virsti nepriklausomais. Šioje dalyje nagrinėjame daug bendresnį 1-priklausomų sveikaskaičių atsitiktinių dydžių atvejį, apimantį nepriklausomus atsitiktinius dydžius. Viena vertus, šio skyrelio rezultatai yra palyginami su ankstesnio skyrelio rezultatais, kita vertus, juos galima lyginti ir su rezultatais, žinomais iš nepriklausomų dydžių aproksimacijų Puasono tipo matais.

Tegul X yra atsitiktinis dydis sukoncentruotas ant neneigiamų sveikų skaičių. Tuomet, k-asis jo faktorialinis momentas yra apibrėžiamas taip:

$$\nu_k = \mathrm{E}X(X-1)\cdots(X-k+1).$$

Frankenas [14] nagrinėjo Puasono aproksimaciją, esant sąlygai $\nu_1 - \nu_2 - \nu_1^2 > 0$. Dviparametrė ženklą keičianti Puasono aproksimacija, esant Frankeno sąlygai, buvo tirta J. Kruopio [19]. J. Kruopis gavo įverčius, apibendrinančius (3). Žemiau pateikiami rezultatai gauti prie kiek griežtesnių sąlygų, nei Frankeno sąlyga, yra J. Kruopio rezultatų 1-priklausomų dydžių sumoms analogas.

Tegul $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra vienodai pasiskirstę 1-priklausomi neneigiami sveikaskaičiai atsitiktiniai dydžiai. Tegul $m = 1, 2, \ldots;\ i_j = 1, 2, \ldots;\ j = 1, \ldots, m$,

$$a(i_1, i_2, \ldots, i_m) = \frac{\mathrm{E}X_1(X_1-1)\cdots(X_1-i_1+1)\cdots X_m(X_m-1)\cdots(X_m-i_m+1)}{i_1! i_2! \cdots i_m!},$$

$$\Gamma_1 = n\nu_1, \quad \Gamma_2 = \frac{n(\nu_2 - \nu_1^2)}{2} + (n-1)(a(1,1) - \nu_1^2),$$

$$\begin{aligned} \Gamma_3 &= n\bigg(\frac{\nu_3}{6} - \frac{\nu_1\nu_2}{2} + \frac{\nu_1^3}{3}\bigg) + (n-1)\Big(a(1,2) + a(2,1) - \nu_1\nu_2 + 2\nu_1(\nu_1^2 - a(1,1))\Big) \\ &\quad + (n-2)(a(1,1,1) - 2\nu_1 a(1,1) + \nu_1^3), \\ r_1 &= \nu_3 + \nu_1\nu_2 + \nu_1^3 + a(1,2) + a(2,1) + \nu_1 a(1,1) + a(1,1,1), && (13) \\ r &= a(3,1) + a(2,2) + a(1,3) + a(1,1,1,1) + a^2(1,1) + a(2,1,1) + a(1,2,1) \\ &\quad + a(1,1,2) + \nu_1 a(2,1) + \nu_1 a(1,2) + \nu_1 a(1,1,1) + \nu_4 + \nu_1\nu_3 + \nu_2^2 + \nu_1^4. && (14) \end{aligned}$$

Sumos $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ skirstinį žymėsime F_n. Prisiminę faktorialinių momentų apibrėžimą matome, kad

$$a(1) = \nu_1, \quad a(2) = \frac{\nu_2}{2}, \quad a(3) = \frac{\nu_3}{3!}, \quad a(1,1) = \mathrm{E}X_1X_2.$$

Toliau žymėjimą $a(i,j)$ naudosime tiktai mišriems momentams.

Tarkime, kad $|X_1| \leqslant C_{14}$ ir kai $n \to \infty$,

$$\nu_1 = o(1), \quad \nu_2 = o(\nu_1), \quad a(1,1) = o(\nu_1), \quad n\nu_1 \to \infty. \tag{15}$$

Tariame, kad $C_{14} \geqslant 1$. Lengva patikrinti, kad sąlyga (15) yra stipresnė už Frankeno sąlygą $\nu_1 - \nu_2 - \nu_1^2 > 0$. Vis dėlto dydžių, tenkinančių (15) sąlygą, yra labai nedaug. Lengva patikrinti, kad dviejų narių serijų statistika tenkina (15) sąlygą, jeigu $p \to 0$. Vis dėlto, manome, kad (15) sąlyga yra daug natūralesnė kitokiame kontekste. Nagrinėkime *m*-priklausomų Bernulio dydžių sumą. Laikydami *m* dydžių dalines sumas naujais atsitiktiniais dydžiais, nesunkiai pereiname nuo *m*-priklausomų prie 1-priklausomų atsitiktinių dydžių. Naujieji atsitiktiniai dydžiai jau nebėra Bernulio dydžiai. Galima tikėtis, kad esant ganėtinai švelnioms pradinėms prielaidoms, jie tenkins Frankeno sąlygos analogą. Pavyzdžiui, nagrinėkime trijų narių serijų statistiką, kur $\xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_2\xi_3\xi_4 + \xi_3\xi_4\xi_5 + \cdots$ ir ξ_j yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę

Bernulio dydžiai, $P(\xi_1 = 1) = p = 1 - P(\xi_1 = 0)$. Tegul $\tilde{\eta}_1 = \xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_2\xi_3\xi_4$, $\tilde{\eta}_2 = \xi_3\xi_4\xi_5 + \xi_4\xi_5\xi_6$, ir t.t. Lengva patikrinti, kad $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \tilde{\eta}_3, \dots$ yra 1-priklausomi atsitiktiniai dydžiai, kurie tenkina (15) sąlygą, jei tik $p \to 0$.

Taip pat verta paminėti, kad (15) sąlygą galima pakeisti silpnesne sąlyga: $\nu_2 < \tilde{C}\nu_1$, $|a(1,1)| \leqslant \tilde{C}\nu_1$, kur $\tilde{C}$ yra labai maža absoliutinė konstanta. Tačiau, tuomet labai pailgėja visų rezultatų įrodymai.

Skirstinių, tenkinantčių (15) sąlygą, tikimybės sukoncentruotos netoli nulio. Ši sąlyga yra natūrali draudimo matematikoje, vadinamuosiuose agreguotuose išmokų (aggregate claim) skirstiniuose. Tiksliau kalbant, tegul $X_i = \bar{\xi}_i\bar{\eta}_i$, kur $\bar{\xi}_i$ ir $\bar{\eta}_i$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, $\bar{\xi}_i$ yra Bernulio atsitiktinis dydis (rodantis, ar reikės išmokos), o $\bar{\eta}_i$ yra teigiamas sveikaskaitis atsitiktinis dydis (išmokos didumas). Išmokos gali būti didelės, taigi ir $\bar{\eta}_i$ faktorialiniai momentai gali būti dideli. Vis dėlto, pačios išmokos tikimybė yra maža (priešingu atveju draudimo firma bankrutuotų) todėl ir X_i faktorialiniai momentai yra maži.

Apbrėžkime matus, naudojamus F_n aproksimuoti:

$$D_1 = \exp\{\Gamma_1 U\}, \quad D_2 = \exp\{\Gamma_1 U + \Gamma_2 U^2\}, \quad D_3 = \exp\{\Gamma_1 U + \Gamma_2 U^2 + \Gamma_3 U^3\}.$$

Atkreipiame dėmesį, kad taikome ženklą keičiančias aproksimacijas, kadangi Γ_2 ir Γ_3 gali įgyti neigiamas reikšmes. Pradėsime nuo Puasono aproksimacijos.

10 teorema. *Tegul tenkinama (15) sąlyga. Tada*

$$\begin{aligned} \|F_n - D_1\| &= O\left(\frac{\nu_2 + a(1,1) + \nu_1^2}{\nu_1}\right), \\ \|F_n - D_1\|_\infty &= O\left(\frac{\nu_2 + a(1,1) + \nu_1^2}{\nu_1\sqrt{n\nu_1}}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Aproksimacijos tikslumas (16) ne geresnis už $O(\nu_1)$. Nors žinome, kad dėl (15) sąlygos $\nu_1 = o(1)$, vis dėl to ν_1 konvergavimas į nulį gali būti labai lėtas. Sekanti teorema rodo, kad situacija negali būti labai pagerinta asimptotiniu standartiniu Puasono skleidiniu.

11 teorema. *Tegul tenkinama (15) sąlyga. Tada*

$$\begin{aligned} \|F_n - D_1(I + \Gamma_2 U^2)\| &= O\left(\frac{(\nu_2 + a(1,1) + \nu_1^2)^2}{\nu_1^2} + \frac{r_1}{\nu_1\sqrt{n\nu_1}}\right), \\ \|F_n - D_1(I + \Gamma_2 U^2)\|_\infty &= O\left(\frac{(\nu_2 + a(1,1) + \nu_1^2)^2}{\nu_1^2\sqrt{n\nu_1}} + \frac{r_1}{n\nu_1^2}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Matome, kad trumpas Puasono asimptotinis skleidinys kiek pagerina aproksimacijos tikslumą. Tačiau, nedaugiau, kaip iki $O(\nu_1^2)$, o ν_1^2 irgi gali artėti prie 0 labai lėtai. Aproksimacijos tikslumas žymiai pagerėja, kai pritaikoma sudėtinė ženklą keičianti Puasono aproksimacija.

12 teorema. *Tegul tenkinama (15) sąlyga. Tada*

$$\begin{aligned} \|F_n - D_2\| &= O\left(\frac{r_1}{\nu_1\sqrt{n\nu_1}}\right), \\ \|F_n - D_2\|_\infty &= O\left(\frac{r_1}{n\nu_1^2}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Aproksimacijos (18) tikslumas yra ne blogesnis, nei $O((n\nu_1)^{-1/2})$. Šis rezultatas yra J. Kruopio rezultato gauto [19] analogas. Jeigu dydžiai nepriklausomi, tai (18) ir J. Kruopio rezultato eilė sutampa.

13 teorema. *Tegul tenkinama (15) sąlyga. Tada*

$$\begin{aligned} \|F_n - D_3\| &= O\left(\frac{r}{n\nu_1^2}\right), \\ \|F_n - D_3\|_\infty &= O\left(\frac{r}{n\nu_1^2\sqrt{n\nu_1}}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

13 teoremoje taikėme aproksimaciją su trijų narių asimptotiniu skleidiniu eksponentėje. Galima naudoti ir įprastesnę asimptotinio skleidinio formą.

14 teorema. *Tegul tenkinama (15) sąlyga. Tada*

$$\begin{aligned} \|F_n - D_2(I + \Gamma_3 U^3)\| &= O\bigg(\frac{r}{n\nu_1^2} + \frac{r_1^2}{n\nu_1^3}\bigg), \\ \|F_n - D_2(I + \Gamma_3 U^3)\|_\infty &= O\bigg(\frac{r}{n\nu_1^2\sqrt{n\nu_1}} + \frac{r_1^2}{n\nu_1^3\sqrt{n\nu_1}}\bigg). \end{aligned} \tag{20}$$

Praktiniams skaičiavimams išraiška $D_2(I + \Gamma_3 U^3)$ yra patogesnė, nei D_3, kadangi sąsūka su U^3 reiškia tik trečios eilės D_2 "tikimybės" skirtumą.

Kaip buvo paminėta aukščiau, jeigu $p = o(1)$ ir $np^2 \to \infty$, tuomet dviejų narių serijų statistika, nagrinėta disertacijos pirmoje dalyje, tenkina (15) sąlygą. Dviejų narių serijų statistikos atveju $\nu_1 = p^2$, $a(1,1) = p^3$, $a(1,1,1) = p^4$, $a(1,1,1,1) = p^5$, o visi kiti dydžiai $(\nu_2, \nu_3, a(2,1)\dots)$ lygūs nuliui. Todėl, nėra sunku patikrinti, kad (16) – (20) turi atitinkamai tą pačią tikslumo eilę, kaip ir pirmoje dalyje esantys įverčiai su absoliučiomis konstantomis perrašytomis $O(\cdot)$ simboliu.

3. Puasono tipo aproksimacijos 1-priklausomų simetrinių trijų taškų skirstinių sumoms.

Kiek mums žinoma, taikant Puasono tipo aproksimacijas silpnai priklausomų atsitiktinių dydžių sumoms, iki šiol į galimą dydžio simetriškumą nebuvo atsižvelgta. Reikia pažymėti, kad simetriniams dydžiams nagrinėti, Steino metodas iš principo negali būti pritaikytas. Todėl šio skyrelio rezultatai disertacijoje užima išskirtinę vietą. Įverčiai gauti tik tolygiojoje ir lokaliojoje metrikose.

Tegul $\hat{X}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ yra 1-priklausomi vienodai pasiskirstę tritaškiai atsitiktiniai dydžiai, $P(\hat{X}_j = 1) = p_1$, $P(\hat{X}_j = -1) = p_{-1}$, $P(\hat{X}_j = 0) = 1 - p_1 - p_{-1}$. Sumos $S_n = \hat{X}_1 + \hat{X}_2 + \dots + \hat{X}_n$ skirstinį pažymėkime P_n. Tegul $\bar{p} := p_{-1} + p_1$,

$$\begin{aligned} &h(j_1, j_2) = P(\hat{X}_1 = j_1, \hat{X}_2 = j_2) - P(\hat{X}_1 = j_1)P(\hat{X}_2 = j_2), \\ &h(j_1, j_2, j_3) = P(\hat{X}_1 = j_1, \hat{X}_2 = j_2, \hat{X}_3 = j_3) - P(\hat{X}_1 = j_1)P(\hat{X}_2 = j_2)P(\hat{X}_3 = j_3), \\ &b_j = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\hat{X}_1} - 1)\cdots(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\hat{X}_j} - 1), \\ &H_j := b_j - \sum_{k=1}^{j-1} H_k b_{j-k}, \quad H_1 = p_1 z + p_{-1}\bar{z}, \quad z = e^{it} - 1, \quad \bar{z} = e^{-it} - 1 \\ &K_1 = |h(-1,-1) - h(-1,1) - h(1,-1) + h(1,1)| + \bar{p}|p_1 - p_{-1}|, \\ &K_2 = |h(-1,1) - 2h(1,1) + h(1,-1)| + \sum_{j,k\in\{-1,1\}} |h(j,k,-1) - h(j,k,1)|, \\ &K_3 = \sum_{j,k\in\{-1,1\}} |h(j,k)| + \bar{p}^2. \end{aligned}$$

Mūsų tikslas įvertinti P_n į jo lydinčio sudėtinio Puasono skirstinio artumą. Tegul B^n yra sudėtinis Puasono skirstinys su charakteringąja funkcija:

$$\widehat{B}^n(t) = \exp\{nH_1\} = \exp\{np_1 z + np_{-1}\bar{z}\}.$$

Artumą įvertinsime tolygiojoje Kolmogorovo ir lokalioje metrikose.

15 teorema. *Tegul*

$$\sum_{j,k\in\{-1,1\}} |h(j,k)|/\bar{p} + 90\sqrt{\bar{p}} \leqslant 1/3. \tag{21}$$

Tada, visiems $n = 1, 2, \dots,$

$$\begin{aligned} \sup_x |P_n\{(-\infty, x]\} - B^n\{(-\infty, x]\}| \leqslant C_{15} n K_1 \min\left(1, \frac{1}{n\bar{p}}\right) + \\ + C_{16} n K_2 \min\left(1, \frac{1}{n\bar{p}\sqrt{n\bar{p}}}\right) + C_{17} n K_3 \min\left(1, \frac{1}{(n\bar{p})^2}\right) \end{aligned} \tag{22}$$

ir

$$\sup_x |P_n\{x\} - B^n\{x\}| \leqslant C_{18} n K_1 \min\left(1, \frac{1}{n\bar{p}\sqrt{n\bar{p}}}\right) + $$
$$+ C_{19} n K_2 \min\left(1, \frac{1}{(n\bar{p})^2}\right) + C_{20} n K_3 \min\left(1, \frac{1}{(n\bar{p})^2\sqrt{n\bar{p}}}\right). \tag{23}$$

Sąlyga (21) yra padiktuota taikomo įrodymo metodo ir tikriausiai gali būti sušvelninta. Ji tik truputį švelnesnė, nei reikalavimas $p = o(1)$, $a(j,k) = o(p)$. Formaliai p gali būti (labai) maža absoliutinė konstanta. Jeigu $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \ldots, \hat{X}_n$ yra simetriniai nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, tuomet dešinė (22) pusė virsta $C_{21} n^{-1}$. Nėra sunku sukonstruoti priklausomų dydžių sekos pavyzdį, tenkinantį (21) sąlygą. Tegul $\xi_1, \xi_2, \ldots$ simetriniai nepriklausomi vienodai pasiskirsę atsitiktiniai dydžiai, $P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = -1) = \alpha$, $P(\xi_1 = 0) = 1 - 2\alpha$. Tegul $X_1 = \xi_1\xi_2$, $X_2 = \xi_2\xi_3$ ir t.t. Jei $\alpha = o(1)$, tuomet (21) galios, o aproksimacijos (22) tikslumas bus $O(n\alpha^3 \wedge (n\alpha)^{-1})$.

4. Puasono tipo aproksimacijos 1-priklausomų nevienodai pasiskirsčiusių Bernulio dydžių sumoms.

Iki šiol nagrinėjome vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių sumas. Nors taikomas įrodymo metodas (Heinricho metodas) iš principo tinka ir bendrajam nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių atvejui, liekamųjų narių išraiškos tampa labai sudėtingomis (užima po kelis lapus). Todėl disertacijoje apsiribojome tik nevienodai pasiskirsčiusių Bernulio atsitiktinių dydžių atveju. Tegul $\tilde{X}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ yra 1-priklausomi nevienodai pasiskirstę Bernulio dydžiai, $P(\tilde{X}_j = 1) = p_j = 1 - P(\tilde{X}_j = 0)$. Sumos $\tilde{S} = \tilde{X}_j + \tilde{X}_{j+1} + \cdots + \tilde{X}_{j+n-1}$ skirstinį pažymime $\mathcal{L}(\tilde{S})$ Tegul, $\lambda_i = \sum_{k=1}^n p_k^i$, $(i = 1, 2)$, trumpumo dėlei žymime $\lambda = \lambda_1$.

Be to, tegul

$$\tilde{p}_{i,j} = P(\tilde{X}_j = 1, \tilde{X}_{j+1} = 1, \ldots, \tilde{X}_{j+i-1} = 1),$$

ir tegul

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \widehat{\mathrm{E}}\tilde{X}_j\tilde{X}_{j+1}\ldots\tilde{X}_{j+i-1} := \\ &:= \sum_{l=1}^{i}(-1)^{l-1}\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_l=i\\ i_m\geqslant 1}} E\tilde{X}_j\ldots\tilde{X}_{j+i_1-1}E\tilde{X}_{j+i_1}\ldots\tilde{X}_{j+i_1+i_2-1}\ldots E\tilde{X}_{j+i_1+\cdots+i_{l-1}}\ldots\tilde{X}_{j+i-1}. \end{aligned}$$

Pastebėsime, kad iš 1-priklausomumo ir Holderio nelygybės išplaukia:

$$\tilde{p}_{i,j} = \begin{cases} \mathrm{E}\tilde{X}_1\ldots\tilde{X}_j \leqslant \sqrt{\mathrm{E}\tilde{X}_1^2\tilde{X}_3^2\ldots\tilde{X}_{j+i-2}^2\mathrm{E}\tilde{X}_2^2\ldots\tilde{X}_{j+i-1}^2} \\ \quad = \sqrt{p_j p_{j+1}\ldots p_{j+i-1}} & \text{jei } j+i-1 \text{ - lyginis skaičius,} \\ \mathrm{E}\tilde{X}_1\ldots\tilde{X}_j \leqslant \sqrt{\mathrm{E}\tilde{X}_1^2\tilde{X}_3^2\ldots\tilde{X}_{j+i-1}^2\mathrm{E}\tilde{X}_2^2\ldots\tilde{X}_{j+i-2}^2} \\ \quad = \sqrt{p_j p_{j+1}\ldots p_{j+i-1}} & \text{jei } j+i-1 \text{ - nelyginis skaičius.} \end{cases} \tag{24}$$

Todėl,

$$a_{i,j} \leqslant C\sqrt{p_j p_{j+1}\ldots p_{j+i-1}}. \tag{25}$$

Jeigu atsitiktiniai dydžiai yra nepriklausomi, tuomet $a_{i,j} = 0$. Kiekvienam realiajam t ir $k \geqslant j$ galioja lygybė

$$a_{i,j}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1)^i = \widehat{\mathrm{E}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\tilde{X}_{j-i+1}} - 1)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\tilde{X}_{j-i+2}} - 1)\ldots(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\tilde{X}_j} - 1).$$

Aproksimacijai $\mathcal{L}(\tilde{S})$ naudosime ženklą keičiančius sudėtinius Puasono matus M_i, $i = 1, 2, 3$:

$$M_1 = \mathrm{e}^{\lambda U}, \quad M_2 = \exp\Big\{\lambda U + \Big(\sum_{k=2}^{n} a_{2,k} - \frac{1}{2}\lambda_2\Big)U^2\Big\},$$

$$\begin{aligned} M_3 &= \exp\Big\{\lambda U + \Big(\sum_{k=2}^{n} a_{2,k} - \frac{1}{2}\lambda_2\Big)U^2 \\ &\quad + \Big(\sum_{k=3}^{n} a_{3,k} - \sum_{k=2}^{n} a_{2,k}(p_k + p_{k-1}) + \frac{1}{3}\lambda_3\Big)U^3\Big\}. \end{aligned}$$

Be to, tegul

$$\begin{aligned} M_{11} &= \Big(\sum_{k=2}^{n} a_{2,k} - \frac{1}{2}\lambda_2\Big), \\ M_{21} &= \sum_{k=3}^{n} a_{3,k} - \sum_{k=2}^{n} a_{2,k}(p_k + p_{k-1}) + \frac{1}{3}\lambda_3. \end{aligned}$$

Šios dalies rezultatai gauti naudojant sąlygą:

$$\max_{1\le j\le n} p_j = o(1), \quad \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} = o(\lambda_1). \tag{26}$$

Iš principo, pirma sąlyga (26) gali būti pakeista silpnesne, reikalaujant, kad tikimybė $\max p_j$ būtų mažesnė už kažkokią labai mažą absoliutinę konstantą. Nesunku pastebėti, kad žemiau pateiktieji rezultatai apibendrina dviejų narių serijų schemos rezultatus. Vis dėlto jie gauti prie griežtesnių sąlygų ir suformuluoti,naudojant simbolį $O(\cdot)$ terminais. Pradžioje vertiname Puasono aproksimacijos tikslumą.

16 teorema. *Tegul tenkinama (26) sąlyga. Tada, su visais* $n = 1, 2, \ldots,$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(\tilde S) - M_1\|_\infty &= O\Big\{\sum_{k=1}^{n} \big(p_k^2 + |2a_{2,k}|\big)\min\Big(1, \frac{1}{\lambda^{3/2}}\Big) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \big(|a_{3,k}|\big)\min\Big(1, \frac{1}{\lambda^2}\Big)\Big\}, \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(\tilde S) - M_1\| &= O\Big\{\sum_{k=1}^{n} \big(p_k^2 + |2a_{2,k}|\big)\min\Big(1, \frac{1}{\lambda}\Big) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \big(|a_{3,k}|\big)\min\Big(1, \frac{1}{\lambda^{3/2}}\Big)\Big\}, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(\tilde S) - M_1\|_{\mathrm{W}} &= O\Big\{\sum_{k=1}^{n} \big(p_k^2 + |2a_{2,k}|\big)\min\Big(1, \frac{1}{\lambda^{1/2}}\Big) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \big(|a_{3,k}|\big)\min\Big(1, \frac{1}{\lambda}\Big)\Big\}. \end{aligned} \tag{29}$$

Dabar suformuluosime 2 teoremos analogą.

17 teorema. *Tegul tenkinama (26) sąlyga. Tada, su visais* $n = 1, 2, \ldots,$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(\tilde S) - M_2\|_\infty &= O\Big\{\sum_{k=1}^{n} \big(p_k^3 + |a_{3,k}| + |a_{2,k}|p_k\big)\min\Big(1, \frac{1}{\lambda^2}\Big) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \big(|a_{4,k}| + a_{2,k}^2 + |a_{3,k}|p_k\big)\min\Big(1, \frac{1}{\lambda^{5/2}}\Big) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \big(|a_{5,k}| + |a_{2,k}a_{3,k}|\big)\min\Big(1, \frac{1}{\lambda^3}\Big)\Big\}, \end{aligned} \tag{30}$$

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{L}(\tilde{S})-M_2\| &= O\Big\{\sum_{k=1}^{n}\big(p_k^3+|a_{3,k}|+|a_{2,k}|p_k\big)\min\Big(1,\frac{1}{\lambda^{3/2}}\Big)\\
&+ \sum_{k=1}^{n}\big(|a_{4,k}|+a_{2,k}^2+|a_{3,k}|p_k\big)\min\Big(1,\frac{1}{\lambda^{2}}\Big)\\
&+ \sum_{k=1}^{n}\big(|a_{5,k}|+|a_{2,k}a_{3,k}|\big)\min\Big(1,\frac{1}{\lambda^{5/2}}\Big)\Big\}, \qquad (31)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{L}(\tilde{S})-M_2\|_{\mathrm{W}} &= O\Big\{\sum_{k=1}^{n}\big(p_k^3+|a_{3,k}|+|a_{2,k}|p_k\big)\min\Big(1,\frac{1}{\lambda}\Big)\\
&+ \sum_{k=1}^{n}\big(|a_{4,k}|+a_{2,k}^2+|a_{3,k}|p_k\big)\min\Big(1,\frac{1}{\lambda^{3/2}}\Big)\\
&+ \sum_{k=1}^{n}\big(|a_{5,k}|+|a_{2,k}a_{3,k}|\big)\min\Big(1,\frac{1}{\lambda^{2}}\Big)\Big\}. \qquad (32)
\end{aligned}
$$

Asimptotiką galima konstruoti eksponentėje.

18 teorema. *Tegul tenkinama (26) sąlyga. Tada, su visais* $n=1,2,\dots,$

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{L}(\tilde{S})-M_3\|_\infty &= O\Big\{R_4\min\Big(1,\frac{1}{\lambda_1^{5/2}}\Big)+R_5\min\Big(1,\frac{1}{\lambda^{3}}\Big)\\
&+ R_6\min\Big(1,\frac{1}{\lambda^{7/2}}\Big)+R_7\min\Big(1,\frac{1}{\lambda^{4}}\Big)\Big\}, \qquad (33)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{L}(\tilde{S})-M_3\| &= O\Big\{R_4\min\Big(1,\frac{1}{\lambda^{2}}\Big)+R_5\min\Big(1,\frac{1}{\lambda^{5/2}}\Big)\\
&+ R_6\min\Big(1,\frac{1}{\lambda^{3}}\Big)+R_7\min\Big(1,\frac{1}{\lambda^{7/2}}\Big)\Big\}, \qquad (34)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{L}(\tilde{S})-M_3\|_{\mathrm{W}} &= O\Big\{R_4\min\Big(1,\frac{1}{\lambda^{3/2}}\Big)+R_5\min\Big(1,\frac{1}{\lambda^{2}}\Big)\\
&+ R_6\min\Big(1,\frac{1}{\lambda^{5/2}}\Big)+R_7\min\Big(1,\frac{1}{\lambda^{3}}\Big)\Big\}. \qquad (35)
\end{aligned}
$$

Čia

$$
\begin{aligned}
R_4 &= \sum_{k=1}^{n}\big(p_k^4+|a_{2,k}|(p_k^2+|a_{2,k}|)+|a_{3,k}|p_k+|a_{4,k}|\big),\\
R_5 &= \sum_{k=1}^{n}\big(p_k a_{2,k}^2+|a_{2,k}a_{3,k}|+|a_{3,k}|p_k^2+|a_{4,k}|p_k+|a_{5,k}|\big),\\
R_6 &= \sum_{k=1}^{n}\big(|a_{2,k}a_{3,k}|p_k+a_{3,k}^2+|a_{2,k}a_{4,k}|+|a_{2,k}|^3+|a_{5,k}|p_k+|a_{6,k}|\big),\\
R_7 &= \sum_{k=1}^{n}\big(a_{2,k}^2|a_{3,k}|+|a_{3,k}a_{4,k}|+|a_{2,k}a_{5,k}|+|a_{7,k}|\big).
\end{aligned}
$$

Vis dėlto įprasčiau asimptotiką konstruoti ne eksponentėje, o kaip papildomų narių sumą.

19 teorema. *Tegul tenkinama (26) sąlyga. Tada, su visais* $n=1,2,\dots,$

$$
\|\mathcal{L}(\tilde{S})-M_1(I+M_{11})\| = O\Big\{\Big(\sum_{k=1}^{n}\big(p_k^2+|2a_{2,k}|\big)\Big)^2\min\Big(1,\frac{1}{\lambda^{2}}\Big)\Big\}. \qquad (36)
$$

20 teorema. *Tegul tenkinama (26) sąlyga. Tada, su visais* $n = 1, 2, \ldots,$

$$\|\mathcal{L}(\tilde{S}) - M_2(1 + M_{21})\| \;=\; O\Big\{\Big(\sum_{k=1}^{n}\big(p_k^3 + |a_{3,k}| + |a_{2,k}|p_k\big)\Big)^2 \min\Big(1, \frac{1}{\lambda^3}\Big)\Big\}. \tag{37}$$

Matome, kad tradicinė Puasono dėsnio asimptotika yra blogesnė, nei aproksimacija matu M_2. Tuo tarpu M_2 su vienu asimptotikos nariu yra palyginama su M_3.

Išvados.

1. Nagrinėjant dviejų narių serijų statistikos aproksimaciją Puasono ir sudėtiniais Puasono skirstiniais nustatyta, kad dviparametrė sudėtinė Puasono aproksimacija yra tikslesnė už Puasono dėsnio asimptotinį skleidinį su vienu asimptotikos nariu. Aproksimacijos tikslumas įvertintas pilnosios variacijos ir lokalioje metrikoje. Specialiu atveju apskaičiuotos asimptotiškai tikslios konstantos.
2. Gautieji įverčiai iš apačios yra tos pačios eilės, kaip ir įverčiai iš viršaus.
3. Sveikaskaičiai atsitiktiniai dydžiai, tenkinantys Frankeno sąlygos analogą, gali būti naudojami perėjimui nuo m-priklausomų prie 1-priklausomų atsitiktinių dydžių. Ženklą keičiančios sudėtinės Puasono aproksimacijos yra tokios pačios tikslumo eilės, kaip žinomi rezultatai nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumoms.
4. Kai atsitiktiniai dydžiai yra simetriniai, tuomet sudėtinio Puasono aproksimacijos tikslumas yra daug geresnis nei nesimetriniu atveju.
5. 1-priklausomų nevienodai pasiskirsčiusių Bernulio dydžių suma yra tiosioginis Puasono binominio skirstinio apibendrinimas. Jo dviparametrės Puasono aproksimacijos tikslumas yra analogiškas nepriklausomų dėmenų atvejui. Tai galima pasakyti apie įverčius lokalioje, pilnos variacijos ir Vaseršteino metrikose.

Aprobacija

Disertacijos rezultatai pristatyti:

1. 2010 m. birželio 17-18d. Lietuvos matematikų draugijos XLXI konferencija. Pranešimas "Puasono aproksimacijų apatiniai rėžiai dviejų narių serijų statistikoms".
2. 2009 m. birželio 18-19d. Lietuvos matematikų draugijos XLX konferencija. Pranešimas "Priklausomų simetrinių atsitiktinių dydžių sumų aproksimavimas Puasono tipo matais".
3. 2008 m. birželio 25-26d. Lietuvos matematikų draugijos XLIX konferencija. Pranešimas "Priklausomų atsitiktinių dydžių sumų aproksimavimas Puasono tipo matais".
4. Dalyvavimas Doktorantų vasaros "Skaičių teorija ir Tikimybių teorija" mokykloje 2007. Druskininkai, Lietuva 2007. Pranešimas "Priklausomų atsitiktinių dydžių aproksimavimas Puasono tipo matais"

Padėka
Dėkoju moksliniam vadovui prof. habil. dr. V. Čekanavičiui už paramą ruošiant disertaciją. Esu dėkinga Vilniaus universiteto ekonometrinės analizės katedros nariams už dėmesį ir konsultacijas doktorantūros studijų metu.

Cituota literatūra

1. R. Arratia, L. Goldstein, and L. Gordon, Poisson approximation and the Chen-Stein method, *Statist. Sci.,* **5:** 403–434, 1990.

2. A.D. Barbour and V. Čekanavičius, Total variation asymptotics for sums of independent integer random variables, *Ann. Probab.,* **30:** 509–545, 2002.

3. A.D. Barbour and O. Chryssaphinon, Compound Poisson approximation: a user's guide. *Ann. Appl. Probab.,* **11:** 964–1002, 2001.

4. A.D. Barbour and A. Xia, Poisson perturbations, *ESAIM: Probab. Statist.,* **3:** 131–150, 1999.

5. A.D. Barbour, L. Holst, and S. Janson, *Poisson Approximation,* Oxford Clarendon Press, 1992.

6. A. Bikelis, Asymptotic expansions for distributions of statistics, in *Proc. 36th Conf. Lith. Math. Soc., Vilnius, June 22–23, 1995*, R. Kudžma, V. Mackevičius (Eds.), Vilnius University Press, (1996), pp. 5–28 (rusiškai).

7. T.C. Brown and A. Xia, Stein's method and birth-death processes, *Ann. Probab.,* **29:** 1373–1403, 2001.

8. V. Čekanavičius, Non-uniform theorems for discrete measures, *Lithuanian Math. J.,***33:** 114–126, 1993.

9. V. Čekanavičius, B. Roos, Poisson type approximations for the Markov binomial distribution, *Stochastic. Proc. Appl.*, **119**, 190–207, 2009.

10. V. Čekanavičius and B. Roos, An Expansion in the Exponent for Compound Binomial Approximations, *Liet. Mat. Rink.*, **46**(1): 67–110, 2006.

11. L.H.Y. Chen, Poisson approximation for dependent trials, *Ann. Probab.*, **3**(3): 534–545, 1975.

12. J. Dhaene and N. De Pril, On a class of approximative computation methods in individual risk model, *Insurance Math. Econom.,* **14**: 181–196, 1994.

13. P. Eichelsbacher and M. Roos, Compound Poisson approximation for dissociated random variables via Stein's method, *Combin. Probab. Comput.,* **8**: 335–346, 1999.

14. P. Franken, Approximation der Verteilungen von Summen unabhangiger nichtnegativer ganzzahliger Zufallsgrossen durch Poissonsche Verteilungen, *Math. Nachr.,* **6**: 303–340, 1964.

15. B. Grigelionis, On asymptotic expansion of the reminder term in the case of convergence to a Poisson law, *Litovsk. Matem. Sb.,* **2**: 35–48, 1962, (Russian).

16. C. Hipp, Improved approximations for the aggregate claims distribution in the individual model, *Astin Bull.,* **16**: 89–100, 1986.

17. L. Heinrich, A Method for the Derivation of Limit Theorems for Sums of m-dependent Random Variables, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete,* **60:** 501–515, 1982.

18. J. Kruopis, Precision of approximation of the generalized binomial distribution by convolutions of Poisson measures, *Lithuanian Math. J.,* **26**: 37–49, 1986.

19. J. Kruopis, Approximation of distributions of sums of lattice random variables I, *Lithuanian Math. J.,* **26**: 234–244, 1986.

20. L. Le Cam, An approximation theorem for Poisson binomial distribution, *Pacific J. Math.,* **10**: 1181–1197, 1960.

21. A. M. Mood, The distribution theory of runs, *Ann. of Math. Stat.,* **11**: 367–392, 1940.

22. E.L. Presman, Approximation of binomial distributions by infinitely divisible ones, *Theory Prob. Applic.,* **28(2)**: 393–403, (1984).

23. Yu.V. Prokhorov, Asymptotic behavior of the binomial distribution, *Uspekhi Mat. Nauk.,* **8**: 135–142, 1953, (Russian).

24. A. Röllin, Approximation of sums of conditionally independent variables by the translated Poisson distribution, *Bernoulli,* **11**: 1115–1128, 2005.

25. B. Roos, Sharp constants in the Poisson approximation, *Statist. Probab. Lett.,* **52**: 155–168, 2001.

26. B. Roos, Poisson approximation via the convolution with Kornya-Presman signed measures, *Theory Probab. Appl.,* **48**: 555–560, 2003.

27. R.J. Serfling, A general Poisson approximation theorem, *Ann. Probab.,* **3**: 726–731, 1975.

28. V.V. Shergin, On the convergence rate in the Central Limit Theorem for m-dependent random variables, *Teor. Veroyatn. i Primen.,* **24**: 781–794, 1979, Russian.

29. J. Sunklodas, Rate of convergence in the central limit theorem for random variables with strong mixing, *Lith. Math. J.,* **24**: 182–190, 1984.

30. J. Sunklodas, On a lower bound of the rate of convergence in the central limit theorem for m -dependent random variables, *Lith. Math. J.,* **37**: 291–299, 1997.

31. J. Šiaulys and V. Čekanavičius, Approximation of distributions of integer additive functions by discrete charges I, *Lith. Math. J.,* **28**: 392–401, 1988.

32. A.N. Tichomirov, On the convergence rate in the central limit theorem for weakly dependent random variables, *Teor. Veroyatn. i Primen.,* **25**: 800–818, 1980, Russian.

33. Wang Xiaoxin and A. Xia, On negative binomial approximation to k-runs, *J. Appl. Probab.,* **45**: 456-471, 2008.

34. A. Xia and Mei Zhang, On approximation of Markov binomial distributions, *Bernoulli*, **15**: 1335-1350, 2009.

Pagrindinių publikacijų sąrašas.

Pagrindiniai darbo rezultatai yra publikuoti sekančiuose leidiniuose:
1. J. Kelmelytė ir V. Čekanavičius, Poisson-type approximation for sums of 1-dependent indicators, *Lith. Math. J. 48/49*, (spec. nr.), 395–400, 2008.
2. J. Petrauskienė ir V. Čekanavičius, Poisson-type approximation for sums of 1-dependent indicators, *Lith. Math. J. 50*, (spec. nr.), 431–436, 2009.
3. J. Petrauskienė and V. Čekanavičius, On lower bounds for Poisson approximation to 2-runs statistic. *Lith. Math. J. 51*, (spec. nr.), 470–474, 2010.
4. J. Petrauskienė ir V. Čekanavičius, Compound Poisson approximations for sums of 1-dependent random variables I, *Lith. Math. J. 50(3)*, 323–336, 2010.
5. J. Petrauskienė ir V. Čekanavičius, Compound Poisson approximations for sums of 1-dependent random variables II, *priimtas į Lith. Math. J.*, 2010.

Summary.
Our aim is to investigate Poisson type approximations to the sums of dependent integer-valued random variables. In this thesis, only one type of dependence is considered, namely m-dependent random variables. The accuracy of approximation is measured in the total variation, local, uniform (Kolmogorov) and Wasserstein metrics.

All results are new and usually first of the kind. Considering Poisson and (signed) compound Poisson approximations to the sum of 1-dependent random variables, we obtained first lower bound estimates, calculated first asymptotically sharp constants, proved first non-uniform estimates and obtained first results, when symmetry of distribution is taken into account.

Results can be divided into four parts. The first part is devoted to 2-runs, when $p_i = p$. We generalize Theorem 5.2 from [4] in two directions: by estimating the second order asymptotic expansion and asymptotic expansion in the exponent. Moreover, lower bound estimates are established, proving the optimality of upper bound estimates. Since, the method of proof does not allow to get small constants, in certain cases, we calculate asymptotically sharp constants.

In the second part, we consider sums of 1-dependent random variables, concentrated on nonnegative integers and satisfying analogue of Franken's condition. This case is more general than approximation of 2-runs statistic, since the case of independent random variables is also included. All results of this part are comparable to the known results for independent summands.

In the third part, we consider Poisson type approximations for sums of 1-dependent symmetric three-point distributions. We are unaware about any Poisson-type approximation result for dependent random variables, when symmetry of the distribution is taken into account. We known about numerous Poisson-type approximations that are obtained via the Stein method. However, the Stein method is applicable to non-negative random variables only. Thus, it can not be applied in our case.

In the last part, we consider 1-dependent non-identically distributed Bernoulli random variables. It is shown, that even for this simple generalization of the Poisson binomial model, very elaborative calculations are needed.

For the proofs, we use Heinrich's method, which is a version of the characteristic function method.

Trumpos žinios apie autorių

Gimimo data ir vieta
1981 m. liepos 22 d., Vilnius.
Išsilavinimas ir kvalifikacija
1999 m. Salininkų vidurinė mokykla.
2003 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, statistikos bakalauras.
2005 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, statistikos magistras.
Darbo patirtis
2002-02-19 - 2002-04-30 Lietuvos tarptautinių, politinių ir ekonominių santykių institutas, projektų koordinatorė.
2003-03-01 - 2003-05-31 Praktika atlikta AB "Snaigė" .
2004-01-26 - 2005-05-09 Statistikos departamentas, kainų statistikos skyrius, vyresnioji specialistė.
2005-05-10 - 2007-09-01 Statistikos departamentas, kainų statistikos skyrius, vyriausioji specialistė.
2007-09-02 - Statistikos departamentas, metodologijos ir kokybės skyrius, vyriausia specialistė.

Short information about the author

Birth date and place
1981 22 of July, Vilnius.
Education
1999 Salininkų High School.
2003 Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, bachelor of statistics.
2005 Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, master of statistics.
Work experience
2002-02-19 - 2002-04-30 "International and political relationship institution of Lithuania", project manager.
2003-03-01 - 2003-05-31 Practice in corporation "Snaigė" .
2004-01-26 - 2005-05-09 Statisctis Lithuania, price statistic devision, senior specialist.
2005-05-10 - 2007-09-01 Statisctis Lithuania, price statistic devision, chief specialist.
2007-09-02 - Statisctis Lithuania, methodology and quality division, chief specialist.