VILNIAUS UNIVERSITETAS

Irma Rastenė

AUTOREGRESINIO MODELIO PASIKEITUSIO SEGMENTO TESTAVIMAS IR VERTINIMAS

Daktaro disertacija

Fiziniai mokslai, matematika (01 P)

Vilnius, 2011

Disertacija rengta 2005-2011 metais Vilniaus universitete

Mokslinis vadovas:
Prof. habil. dr. Alfredas Račkauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto Matematikos mokslo krypties taryboje:
Pirmininkas:
Prof. habil. dr. Vygantas Paulauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)
Nariai:
Prof. habil. dr. Algimantas Jonas Bikelis (Vytauto Didžiojo universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)
Prof. habil. dr. Vydas Čekanavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)
Prof. habil. dr. Raimondas Čiegis (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)
Prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)

Oponentai:
Doc. dr. Danutė Krapavickaitė (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)
Prof. habil. dr. Jonas Kazys Sunklodas (Matematikos ir informatikos institutas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2011 m. birželio 22 d. 16 val. 30 min., Matematikos ir informatikos fakulteto Zigmo Žemaičio (101) auditorijoje.
Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2011m. gegužės mėn. …… d.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

Turinys

Įvadas

Tiriamoji problema. Kiekvienam natūriniam skaičiui $n \in \mathbb{N}$ nagrinėkime pirmos eilės autoregresinį modelį su epideminiu pasikeitimu:

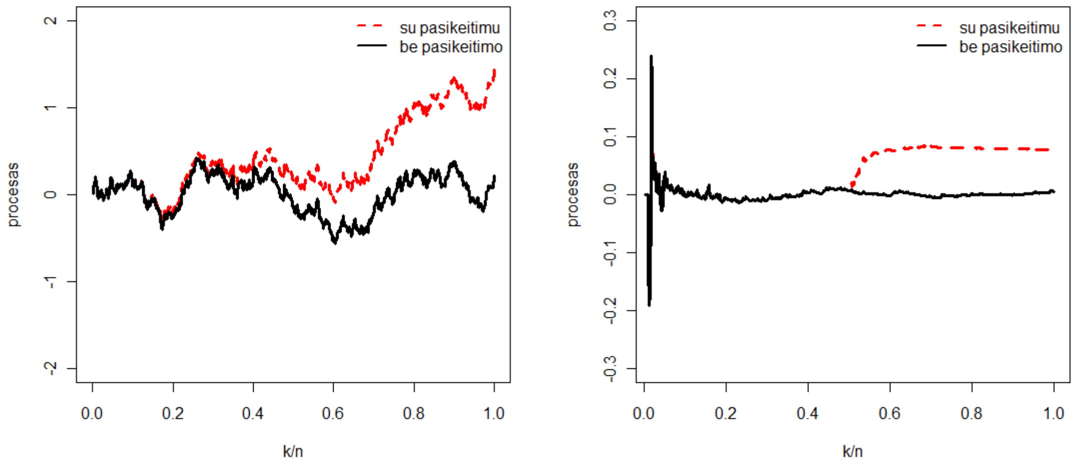
$$y_i = \rho y_{i-1} \mathbf{1}_{I^{*c}}(i) + \rho^* y_{i-1} \mathbf{1}_{I^*}(i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{0.1}$$

čia $\varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, n$ nepriklausomos vienodai pasiskirsčiusios nulinio vidurkio ir baigtinės dispersijos paklaidos. Stebėjimų indeksų poaibis

$$I^* = I^*(n) = \{k^* + 1, \ldots, k^* + \ell^*\}$$

apibrėžia epideminį pasikeitimą su nežinomais pradžia k^* ir ilgiu ℓ^*, epideminio pasikeitimo papildinys $I^{*c} = \{1, 2, \ldots, n\} \backslash I^*$. Disertacijoje nagrinėjami galimi pasikeitimai ne tik iš stacionarios būklės į stacionarią ($|\rho| < 1$, $|\rho^*| < 1$), bet ir iš stacionarios į nestacionarią ($|\rho| < 1$, $|\rho^*| = 1$) ir atvirkščiai ($|\rho| = 1$, $|\rho^*| < 1$). Kaip iš turimų duomenų nuspręsti, ar yra toks segmentas, kuriame modelio parametras įgyja kitą reikšmę, ir jei yra, kaip jį įvertinti? Šiame darbe pateikiami atsakymai būtent į šiuos klausimus.

Siekiant rasti kriterijų pasikeitusio segmento testavimui, nagrinėjami iš autoregresinio modelio paklaidų įvertinių $\widehat{\varepsilon}_k$ dalinių sumų ir modelio parametro dalinių įvertinių $\widehat{\rho}_k$ sudaryti laužčių procesai, kurių tipiškos trajektorijos esant ir nesant pasikeitusiam segmentui pavaizduotos žemiau pateiktuose paveikslėliuose:



0.1 pav.: Normuotas $\widehat{\varepsilon}_k$ dalinių sumų procesas (kairėje) ir $\widehat{\rho}_k - \rho$ procesas (dešinėje).

Kaip matyti, procesų trajektorijos pasikeičia stebint pasikeitusį segmentą (brėžiant aukščiau pateiktas procesų trajektorijas imta $k^*/n = 0,5$, $\ell^* = 0,2$, $\rho = 0,9$, $\rho^* = 1$). Šia procesų savybe ir remiamasi sudarant kriterijus pasikeitusio segmento testavimui. Pritaikius Račkausko ir Suquet [60] Hiolderio erdvių invariantiškumo principą gaunamas minėtų laužčių procesų ribinis elgesys, kai modelio parametras ρ yra pastovus, t.y. nestebimas pasikeitęs segmentas. Parinkus tinkamus funkcionalus ir pritaikius tolydaus atvaizdžio teoremą laužčių procesams, kurių konvergavimas žinomas, sudaromi kriterijai pasikeitusio segmento testavimui. Prie nulinės pastovaus parametro ρ hipotezės kriterijaus statistika konverguoja į tam tikrą ribinį procesą, o esant teisingai pasikeitusio segmento alternatyvai, konverguoja į begalybę. Vertinant pasikeitusį segmentą bei modelio parametrus ρ ir ρ^* svarbu gauti suderintuosius įvertinius. Šiame darbe įrodoma, kad mažiausių kvadratų įvertiniai yra suderintieji ir pateikiamas jų konvergavimo greitis.

Aktualumas. Įvairūs autoregresiniai procesai plačiai naudojami ekonometriniuose modeliuose. Kad prognozės taikant parinktą modelį būtų kaip galima tikslesnės, vertinant modelio parametrus būtina išsiaiškinti, ar esama struktūrinių pasikeitimų, bei mokėti juos įvertinti. Be to, svarbu atsakyti į klausimą, ar autoregresinis procesas yra stacionarus, ar nestacionarus.

Disertacija skirta vienam iš galimų struktūrinių pasikeitimų atvejų - pasikeitusiam segmentui - testuoti ir vertinti. Nagrinėjami pasikeitimai ir iš stacionarios būklės į nestacionarią bei atvirkščiai.

Tikslas ir uždaviniai. Darbe siekiama ištirti pirmos eilės autoregresinį modelį su pasikeitusiu segmentu, kurio pradžia ir ilgis nėra žinomi, atsižvelgiant į tai, kad procesas gali būti ne tik stacionarus, bet ir nestacionarus. Sprendžiami šie uždaviniai:

* laužčių procesų, sudarytų iš modelio paklaidų įvertinių dalinių sumų ir parametro ρ dalinių įvertinių, konvergavimas Hiolderio erdvėse;
* pasikeitusio segmento testavimas naudojant laužčių procesus;
* pasikeitusio segmento ir modelio parametrų įvertinių suderinamumas ir konvergavimo greitis.

Naujumas. Darbe pateikiami kriterijai autoregresinio modelio pasikeitusio segmento testavimui. Jie paremti tam tikrų laužčių procesų konvergavimu Hiolderio erdvėse, kuris įrodomas disertacijoje. Parodoma, kad pasikeitusio segmento ir modelio parametrų mažiausių kvadratų įvertiniai yra suderintieji bei pateikiamas jų konvergavimo greitis.

Ginamieji disertacijos teiginiai. Autoregresinio modelio paklaidų įvertinių dalinių sumų laužčių proceso ir modelio parametro ρ dalinių įvertinių laužčių proceso ribinį elgesį nusako 2.1 ir 2.3 teoremos. Šie ribiniai rezultatai leidžia sudaryti kriterijus autoregresinio modelio pasikeitusiam segmentui testuoti, kurių statistikos apibrėžiamos (3.2) ir (3.4) formulėmis. 3.1 ir 3.2 teiginiuose pateikiamas šių statistikų ribinis elgesys, kai teisinga nulinė pastovaus autoregresinio modelio parametro ρ hipotezė. Esant teisingai pasikeitusio segmento alternatyvai vienos iš statistikų ribinis elgesys nusakomas 3.3 teiginiu. Pasikeitusio segmento pradžios ir ilgio bei modelio parametrų įvertinių suderinamumas ir konvergavimo greičiai pateikiami 4.1, 4.2 ir 4.3 teoremose.

Metodai. Taikomi invariantiškumo principas Hiolderio erdvėse, tolydaus atvaizdžio teorema, mažų rutulių teorema, tikimybių teorijos ir matematinės statistikos rezultatai bei metodai.

Mokslinės publikacijos.

1. I. Rastenė, Testing AR(1) model, *Lietuvos Matematikos Rinkinys*, **47**(spec. nr.), 375–379 (2007).

2. A. Račkauskas, I. Rastenė, Hölder convergence of autoregression residuals partial sum processes, *Lithuanian Mathematical Journal*, **48**(4), 438–450, (2008).

3. A. Račkauskas, I. Rastenė, Estimating changed segment in AR(1) model, *Department of Mathematics and Informatics, Vilnius University*, **preprint** (2011).

4. A. Račkauskas, I. Rastenė, Some asymptotic results for polygonal line processes related to an autoregressive process, *Department of Mathematics and Informatics, Vilnius University*, **preprint** (2011).

Dalyvavimas konferencijose.

1. 2007 m. birželio 27 - 28d. Lietuvos matematikų draugijos XLVIII konferencija. Pranešimas "AR(1) modelio pasikeitimo tyrimas".

2. 2009 m. birželio 18 - 19d. Lietuvos matematikų draugijos L konferencija. Pranešimas "Pasikeitusio segmento parametrų įvertiniai AR(1) modelyje" (stacionarus atvejis).

3. 2010 m. birželio 28 - liepos 2d. 10-oji tarptautinė Vilniaus konferencija „Tikimybių teorija ir matematinė statistika". „Pasikeitusio segmento parametrų įvertiniai AR(1) modelyje" (stacionarus ir nestacionarus atvejai).

4. 2011 m. birželio 7 - 10d. tarptautinė XIV ASMDA (Applied Stochastic Models and Data Analysis International Society) konferencija. "Testing and estimating changed segment in AR(1) model."

Disertacijos 1 skyriuje glaustai apžvelgiami mokslinė literatūra, artima savo problematika ir taikomais metodais šiam darbui. Autoregresinio modeliui sudarytų laužčių procesų ribinis elgesys nagrinėjamas 2 skyriuje.

Sekančiame, 3 skyriuje, pasiūlomi ir empiriškai tiriami kriterijai pasikeitusio segmento testavimui. 4 skyrius skirtas pasikeitusio segmento ir modelio parametrų vertinimui.

1 skyrius

Literatūros apžvalga

Struktūrinio pasikeitimo problema per pastaruosius kelis dešimtmečius sulaukia vis didesnio mokslininkų ir praktikų susidomėjimo.

Pagrindinės tiriamuosiuose darbuose sprendžiamos problemos yra šios:

* struktūrinio pasikeitimo(-ų) testavimas;
* pasikeitimo taškų skaičiaus nustatymas ir šių taškų vertinimas;
* prognozavimas, kai nagrinėjamas modelis turi struktūrinį pasikeitimą(-us).

Nagrinėjami objektai bei modeliai skiriasi savo pobūdžiu - atsitiktinių dydžių sekos, parametriniai/neparametriniai, tiesiniai/netiesiniai modeliai. Tiriami modeliai su vienu ar daugeliu pasikeitimo taškų. Atskiru daugelio pasikeitimo taškų atveju galima laikyti modelius su pasikeitusiu segmentu (arba epideminiu pasikeitimu). Pastaruosiuose modeliuose iš pradžių stebima viena būklė, paskui pereinama į kitą būklę (epidemiją), bei vėl grįžtama į pirmąją. Dalis autorių, tiriančių struktūrinius pasikeitimus, siekia nustatyti struktūrinį pasikeitimą esamuoju laiku (on-line), kita dalis tiria fiksuotą imtį (off-line). Struktūrinio pasikeitimo testavimui dažnai taikomi didžiausio tikėtinumo, informacijos kriterijaus, Bajeso, dalinių sumų (CUSUM) metodai. Plačiau su struktūrinio pasikeitimo problemomis bei joms spręsti naudojamais metodais galima susipažinti Hackl ir Westlund [26], Brodsky ir Darkhovsky [13], Csörgő ir Horváth [20], Maddala ir Kim [47], Chen ir Gupta [18] knygose bei Shaban [62], Zacks [69], Pesaran ir kt.[53], Krishnaiah ir Miao [38], Hackl ir Westlund [25], Basseville ir Nikiforov [9], Bhattacharya

[10], Perron [50], Stock [64], Banerjee ir Urga [8], Perron [49], Sánchez [61] apžvalginiuose straipsniuose.

Laiko eilučių modelių stabilumas yra svarbus klausimas ekonometrijoje. Įvertiniai, gauti vertinant nestabilų procesą gali būti paslinkti, dėl to prognozė praranda tikslumą. Taigi reikalingi testai, skirti struktūrinio pasikeitimo testavimui. Laiko eilučių modelių stabilumą tyrė Wichern ir kt. [67], Bagshaw ir Johnson [2], Pickard [54], Krämer ir kt. [37], Tang ir MacNeil [66], Davies ir kt. [21] Kim ir kt. [36], Lee ir Park [45], Lee [44], Gombay ir Serban [24], Gombay [23] bei daugelis kitų autorių.

Disertacijoje nagrinėjamas pirmos eilės autoregresinio modelio AR(1) pasikeitusio segmento modelis. Tiriama fiksuota imtis (off-line). Pasikeitusio segmento testavimui taikomas dalinių sumų (CUSUM) metodas. Šis metodas naudojamas vidurkio, dispersijos ir kitų regresijos tipo modelių parametrų pasikeitimo testavimui. Paprastai iš pradžių procesui, sudarytam iš paklaidų dalinių sumų, įrodomos funkcinės ribinės teoremos. Tada šių procesų trajektorijų funkcionalai naudojami kaip statistikos modelio struktūriniam pasikeitimui testuoti. Regresijos modelio paklaidų dalinių sumų proceso ribinį elgesį tyrė MacNeil ir Jandhyala [32], Tang ir MacNeil [66]. Kulperger [39] ir Bai [3], nagrinėjo AR ir ARMA modelius atitinkamai. Horvath [29] ir Bai [3] pasiūlė keletą taikymų struktūrinio pasikeitimo problemoms spręsti. Laukaitis ir Račkauskas [43] tyrė autoregresinio modelio, įgyjančio reikšmes Hiolderio erdvėje, paklaidų dalinių sumų laužčių proceso ribinį elgesį bei taikymus testuojant struktūrinius pasikeitimus. Kai kurie autoriai nagrinėjo bendresnio pobūdžio paklaidų procesų ribinį elgesį. Pavyzdžiui, Jandhyala ir MacNeil [31] tyrė regresijos modelio paklaidų kartotines dalinių sumų sekas, Yu [68] bei Kulperger ir Yu [40] nagrinėjo aukštesnių momentų paklaidų dalinių sumų procesus ARMA ir GARCH modeliams atitinkamai. Minėti darbai yra skirti stacionariems procesams.

Nestacionarius modelius nagrinėjo Shin [63]. Jis įrodė, kad AR(1) modelio $y_k = \rho y_{k-1} + e_k$, $k = 1,\ 2,\ ...,\ n$, su nepriklausomomis vienodai pasiskirsčiusiomis baigtinės dispersijos paklaidomis paklaidų dalinių sumų procesas konverguoja Skorochodo erdvėje D[0, 1]. Kai autoregresinio modelio parametras $|\rho| < 1$, ribinis procesas yra standartinis Vynerio procesas, o kai parametras $|\rho| = 1$, ribinis porocesas yra paslinktas standartinis Vynerio procesas. Disertacijos 2.1 skyriuje pritaikius Račkausko ir Suquet [60] įrodytą funkcinę centrinę ribinę teoremą Hiolderio erdvėse apibendrinamas Shin rezultatas ir įrodomas autoregresinio modelio paklaidų dalinių sumų laužčių proceso konvergavimas Hiolderio erdvėse. Šio darbo 2.2 skyriuje nagrinėjamas autoregresinio modelio parametro ρ dalinių įvertinių laužčių proceso ribinis elgesys Hiolderio erdvėse. Tai leidžia pasirinkti statistiką pasikeitusio segmento testavimui iš platesnės funkcionalų klasės. Disertacijos 3 skyriuje siūlomi kriterijai tinka testuoti ne tik pasikeitimus iš stacionarios būklės į stacionarią, bet ir aptikti pasikeitusį segmentą su vienetine šaknimi.

Stacionarumo testavimo uždavinys sutinkamas ir nagrinėjant $y_t = \mu + \beta t + u_t$ modelį su autokoreliuotomis paklaidomis $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$. Vienas iš nagrinėjamų ir praktikoje aktualių uždavinių yra autokoreliuotų paklaidų pasikeitimas tam tikru momentu iš stacionarios būklės į nestacionarią ar atvirkščiai. Šį uždavinį su žinomu pasikeitimo momentu postūmio ar trendo komponentėje nagrinėjo Kim [35], Busetti ir Taylor [15]. Vėliau panašūs uždaviniai su pasikeitimais iš stacionarios būklės į nestacionarią ar atvirkščiai buvo nagrinėjami ir kitų autorių darbuose: Leybourne ir kt. [46], Busetti ir Taylor [16], Kurozumi [41], Harvey ir kt. [28], Cavaliere ir Taylor [17], Busetti [14]. Dalies minėtų straipsnių platesnę apžvalgą galima rasti [49].

Struktūrinio pasikeitimo vertinimui skirtos literatūros palyginti su struktūrinio pasikeitimo testavimu yra kur kas mažiau. Bai [4] pasiūlė tiesinio proceso vidurkio pasikeitimo taško mažiausių kvadratų įvertinį, kai tenkinamos silpnos reguliarumo sąlygos. Naudojant mažiausių kvadratų metodą (priešingai nei taikant didžiausio tikėtinumo metodą) nebūtina žinoti paklaidų proceso skirstinį. Be to, šis metodas patogesnis realizuojant skaičiavimus. Taigi šis metodas tapo vis plačiau naudojamas. Tiesinius regresijos modelius su daugeliu pasikeitimo taškų tyrinėjo Bai ir Perron [6], [7], Perron ir Qu [52], Kejriwal ir Perron [34], Bai ir kt. [5]. Lavielle ir Moulines [42] pasiūlė daugelio pasikeitimo taškų vertinimo procedūrą, kurią galima taikyti priklausomiems procesams. Qu ir Perron [51] nagrinėjo bendresnį daugelio struktūrinių pasikeitimų atvejį daugialypės regresijos modeliui.

Specialaus daugelio pasikeitimų atvejo - pasikeitusio segmento vertinimui skirti straipsniai dažniausiai nagrinėja nepriklausomus stebėjimus, pavyzdžiui Fu ir Curnow [22], Hušková [30], Račkausko ir Suquet [56], [57]) darbai.

Jouini ir Boutahar [12] atkreipia dėmesį, kad esama nedaug tyrimų, skirtų struktūriniams pasikeitimams nestacionarioms laiko eilutėms. Chong [19] tyrė autoregresinį pirmos eilės modelį AR(1) su vienu pasikeitimo tašku. Jis nagrinėjo ne tik pasikeitimą iš stacionarios būklės į stacionarią, bet ir iš stacionarios į nestacionarią bei atvirkščiai. Chong darbe įrodoma, kad mažiausių kvadratų įvertiniai yra suderinti bei pateikiamas jų konvergavimo greitis. Disertacijos 4 skyriuje praplečiami Chong rezultatai pirmos eilės autoregresiniam modeliui su pasikeitusiu segmentu.

2 skyrius

Ribinės teoremos laužčių procesams, sudarytiems AR(1) modeliui

2.1 Paklaidų dalinių sumų laužčių proceso ribinis elgesys Hiolderio erdvėje

Šiame skyrelyje nagrinėjamas pirmos eilės autroregresinis modelis:

$$y_k = \rho y_{k-1} + \varepsilon_k, \tag{2.1}$$

čia $k = 1, 2, \dots, n$.

(2.1) modelis turi tenkinti šias prielaidas:

(A1) paklaidos $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su vidurkiu $E\varepsilon_1 = 0$ ir baigtine dispersija $\sigma^2 = E(\varepsilon_1)^2 < \infty$;

(A2) $y_0 = 0$.

(2.1) modelio paklaidų įvertiniai $(\widehat{\varepsilon}_k, k = 1, \dots, n)$ apibrėžiami tokiu būdu:

$$\widehat{\varepsilon}_k = y_k - \widehat{\rho}\, y_{k-1} = (\rho - \widehat{\rho}\,)\, y_{k-1} + \varepsilon_k, \tag{2.2}$$

$k = 1, 2, \dots, n$, čia $\widehat{\rho}$ yra parametro ρ mažiausių kvadratų įvertinys:

$$\widehat{\rho} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k y_{k-1}}{\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}^2}. \tag{2.3}$$

Shin [63] įrodė, kad paklaidų įvertinių dalinių sumų procesas

$$\widehat{W}_n(t) = \sum_{k=1}^{[nt]} \widehat{\varepsilon}_k, \quad t \in [0,\ 1],$$

$n = 1, 2, \ldots$, padaugintas iš daugiklio $n^{-1/2}\sigma^{-1}$ konverguoja Skorochodo erdvėje $D[0, 1]$, kai $n \to \infty$. Jei $|\rho| \neq 1$, procesas $(\sigma^{-1}n^{-1/2}\widehat{W}_n)$ konverguoja pagal pasiskirstymą į standartinį Vynerio procesą intervale $[0,\ 1]$. Jei $|\rho| = 1$, riba yra paslinktas Vynerio procesas.

Separabiliose Hiolderio erdvėse

$$H_\alpha^o[0,\ 1] := \{f \in C[0,\ 1] : \lim_{\delta\to 0} \omega_\alpha(f,\ \delta) = 0\},\ (0 < \alpha < 1)$$

su norma

$$\|f\|_\alpha := |f(0)| + \omega_\alpha(f,\ 1), \tag{2.4}$$

čia

$$\omega_\alpha(f,\ \delta) := \sup_{\substack{s,t\in[0,1]\\ 0<t-s<\delta}} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha},$$

tirsime laužčių procesą

$$\widehat{V}_n(t) = \sum_{k=1}^{[nt]} \widehat{\varepsilon}_k + (nt - [nt])\widehat{\varepsilon}_{[nt]+1}, \quad t \in [0,\ 1], \tag{2.5}$$

$n = 1, 2, \ldots$

Kiekvienam $0 < \alpha < 1$ ir kiekvienam $n \geq 1$ procesas $\widehat{V}_n$ priklauso erdvei $H_\alpha^o[0, 1]$, tačiau ribinis procesas erdvei $H_\alpha^o[0, 1]$ priklauso tik tada, kai $0 < \alpha < 1/2$ (žr. 2.1 pastabą žemiau).

Tegu $W = (W(t), t \in [0, 1])$ žymi standartinį Vynerio procesą. Šiame skyrelyje įrodysime žemiau pateiktą ribinę teoremą.

2.1 teorema. *Tarkime,* $0 < \alpha < 1/2$ *ir*

$$\lim_{t\to\infty} tP(|\varepsilon_1| \geq t^{1/2-\alpha}) = 0. \tag{2.6}$$

Tada Hiolderio erdvėje $H_\alpha^o[0, 1]$ *teisinga:*

(*a*) *jei* $|\rho| \neq 1$, *tada*

$$n^{-1/2}\sigma^{-1}\widehat{V}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} W,$$

(*b*) *jei* $\rho = 1$, *tada*

$$n^{-1/2}\sigma^{-1}\widehat{V}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} W - A^{-1}BD,$$

(*c*) *jei* $\rho = -1$, *tada*

$$n^{-1/2}\sigma^{-1}\widehat{V}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} W + \tilde{A}^{-1}\tilde{B}\tilde{D},$$

čia

$$A = 2\int_0^1 W^2(r)dr, \ B = W^2(1) - 1, \ D(t) = \int_0^t W(r)dr, \ t \in [0,1],$$

ir atsitiktinis vektoriai $(\tilde{A}, \ \tilde{B}, \ (\tilde{D}(t), t \in [0,1]))$ *ir* $(A, \ B, \ (D(t), t \in [0,1]))$ *yra vienodai pasiskirstę bei vektorius* $(\tilde{A}, \ \tilde{B}, \ (\tilde{D}(t), t \in [0,1]))$ *nepriklauso nuo* W.

2.1 pastaba. Remiantis Lévy teorema 2.1 teoremoje apibrėžtas ribinis procesas priklauso Hiolderio erdvei $H_\alpha^o[0,1]$, kai $0 < \alpha < 1/2$.

2.2 pastaba. Remiantis Sluckio teorema, (2.1) teoremoje dispersija σ^2 gali būti pakeista įvertiniu

$$\widehat{\sigma}^{\,2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\widehat{\varepsilon}_k^{\,2}.$$

2.3 pastaba. Remiantis tolydaus atvaizdžio teorema ir 2.1 teorema gauname, kad kiekvienai tolydžiai funkcijai $F : H_\alpha^o[0,1] \to R$, teisinga:

$$F(n^{-1/2}\widehat{\sigma}^{\,-1}\widehat{V}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \begin{cases} F(W), & \text{jei} \ \ |\rho| \neq 1, \\ F(W - A^{-1}BD), & \text{jei} \ \ \rho = 1, \\ F(W + \tilde{A}^{-1}\tilde{B}\tilde{D}), & \text{jei} \ \ \rho = -1 \end{cases}$$

2.1 išvada. *Tarkime,* $0 < \alpha < 1/2$ *ir teisinga (2.6) sąlyga. Tada*

$$n^{-1/2+\alpha}\widehat{\sigma}^{\,-1} \max_{1\le k<j\le n} \frac{\left|\sum_{i=k+1}^{j}\widehat{\varepsilon}_i\right|}{(j-k)^{\alpha}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \begin{cases} ||W||_{\alpha}, & \text{if } |\rho|\neq 1,\\ ||W-A^{-1}BD||_{\alpha}, & \text{if } \rho=1,\\ ||W+\tilde{A}^{-1}\tilde{B}\tilde{D}||_{\alpha}, & \text{if } \rho=-1. \end{cases}$$

2.1.1 Pagalbiniai rezultatai

Pateikiame keletą faktų apie skirtumą $\widehat{\rho}-\rho$ (žr. [63]):

2.1 lema. *Tarkime, turime (2.1) modelį. Tada parametrui* ρ *ir jo 2.3 įvertiniui teisinga:*

a) *jei* $|\rho|<1$, *tada* $n^{1/2}(\widehat{\rho}-\rho)=O_P(1)$;

b) *jei* $|\rho|=1$, *tada* $n(\widehat{\rho}-\rho)=O_P(1)$;

c) *jei* $|\rho|>1$, *tada* $|\rho|^n(\widehat{\rho}-\rho)=O_P(1)$.

Apibrėžkime erdvę

$$\mathcal{H}_{\alpha}^{d}=\underbrace{H_{\alpha}^{o}[0,1]\times\cdots\times H_{\alpha}^{o}[0,1]}_{d},\qquad \alpha\in(0,1),$$

su norma

$$||(x_1,\ldots,x_d)||=||x_1||_{\alpha}+\cdots+||x_d||_{\alpha}.$$

2.1 teiginys. *Tarkime,* $\alpha\in(0,1)$ *ir* (X_n) *yra atsitiktinių vektorių* $\boldsymbol{X}_n=(X_{n1},\ldots,X_{nd})\in\mathcal{H}_{\alpha}^{d}$ *seka. Tegu* $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_d)$ *- atsitiktinis vektorius erdvėje* $\mathcal{H}_{\alpha}^{d}$*. Tada*

$$\boldsymbol{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \boldsymbol{X} \quad \text{erdvėje} \quad \mathcal{H}_{\alpha}^{d} \tag{2.7}$$

tada ir tik tada, jei kiekvienam vektoriui $(\lambda_1,\ldots,\lambda_d):\ \sum_{i=1}^{d}\lambda_i^2=1$ *teisinga*

$$\sum_{j=1}^{d}\lambda_j X_{nj} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^{d}\lambda_j X_j \quad \text{erdvėje} \quad H_{\alpha}^{o}[0,1]. \tag{2.8}$$

Įrodymas. $\sum_{j=1}^{d}\lambda_j X_{nj},\sum_{j=1}^{d}\lambda_j X_j, n=1,2,\ldots$ yra atsitiktiniai dydžiai erdvėje $H_{\alpha}^{o}[0,1]$. Tarkime, kad teisinga (2.8). Tada visiems $t_1,\ldots,t_k\in[0,1]$

turime

$$\Big(\sum_{j=1}^{d}\lambda_j X_{nj}(t_i), i=1,\dots,k\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \Big(\sum_{j=1}^{d}\lambda_j X_j(t_i), i=1,\dots,k\Big)$$

Kadangi $t_1,\dots,t_k$ pasirinkti laisvai, remiantis Cramér–Wold taisykle baigtiniamačiai $\boldsymbol{X}_n$ skirstiniai konverguoja. Siekdami įrodyti tirštumą, parinkime $\lambda_j = 1$ ir $\lambda_i = 0$, kai $j \neq i$. Tada remiantis (2.8) gauname, kad $X_{nj} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X_j$. Taigi $\forall\varepsilon > 0$ egzistuoja toks kompaktas $K_{j\varepsilon} \subset H^o_\alpha$, kad

$$P(X_{nj} \in K^c_{j\varepsilon}) < \varepsilon/(2d).$$

Nagrinėkime kompaktą $K_\varepsilon = K_{1\varepsilon} \times ... \times K_{d\varepsilon} \in \mathcal{H}^d_\alpha$. Tada

$$P((X_{n1},\dots,X_{nd}) \in K^c_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Pakanka įsitikinkime, kad teiginys teisingas, kai $d = 2$ (kai d>2 įrodymas analogiškas). Turime, kad

$$\begin{aligned}
P((X_{n1}, X_{n2}) \in K^c_\varepsilon) &\le P(X_{n1} \in K_{1\varepsilon}, X_{n2} \in K^c_{2\varepsilon}) \\
&\quad + P(X_{n1} \in K^c_{1\varepsilon}, X_{n2} \in K_{2\varepsilon}) \\
&\quad + P(X_{n1} \in K^c_{1\varepsilon}, X_{n2} \in K^c_{2\varepsilon}) \\
&\le P(X_{n2} \in K^c_{2\varepsilon}) + P(X_{n1} \in K^c_{1\varepsilon}) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Būtinumas įrodomas pritaikius tolydaus atvaizdžio teoremą tolydžiajam funkcionalui $T\colon \mathcal{H}^d_\alpha \to H^o_\alpha[0,1]$, apibrėžtam šia tapatybe:

$$T((x_1,\dots,x_d)) = \sum_{j=1}^{d}\lambda_j x_j.$$

■

Tegul X būna centruotas atsitiktinis dydis ir (X_k) tokia centruotų nepriklausomų atsitiktinių dydžių seką su dispersijomis $EX_k^2 = \sigma_k^2$, $k \ge 1$, kad kiekvienam $k \geq 1$, teisinga

$$P(|X_k| > t) \leq P(|X| > t),$$

kai $t > 0$.

Kiekvienam $n = 1, 2, \dots$ nagrinėkime laužčių procesą $\zeta_n = (\zeta_n(t), t \in [0, 1])$, jungiantį taškus $\left(\frac{k}{n}, \sum_{i=1}^{k} X_i\right)$,, $k = 0, 1, \dots, n$:

$$\zeta_n(t) = \sum_{j=1}^{[nt]} X_j + (nt - [nt])X_{[nt]+1}, \quad t \in [0, 1].$$

2.2 teiginys. *Tarkime* $0 < \alpha < 1/2$, $p(\alpha) = 1/(1/2 - \alpha)$. *Jei*

$$\lim_{t\to\infty} t^{p(\alpha)} P(|X| > t) = 0, \tag{2.9}$$

tada

$$n^{-1/2}\zeta_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} W \quad \text{erdvėje} \quad H_\alpha^o[0, 1]. \tag{2.10}$$

Įrodymas. (2.10) konvergavimas įrodomas naudojant tą pačią techniką kaip ir [58] straipsnyje. Čia pateiksime tik įrodymo metmenis. Pastebėkime, kad (2.9) sąlyga reiškia, jog $(n^{-1/2}X_k)$ yra be galo mažas dydis. ζ_n baigtiniamačių skirstinių konvergavimas gaunamas remiantis Lindebergo centrine ribine teorema.

Remiantis Račkausko ir Suquet (žr. [58]) gautais rezultatais $(\zeta_n)_{n\geq1}$ tirštumui $H_\alpha^o[0, 1]$ erdvėje įrodyti pakanka įsitikinti, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$ teisinga

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(J, n, \varepsilon) = 0, \tag{2.11}$$

čia

$$P(J, n, \varepsilon) := P\left\{\sup_{j\geq J} 2^{\alpha j} \max_{r\in D_j} |\zeta_n(r) - \zeta_n(r^-)| \geq \varepsilon n^{1/2}\right\}.$$

Apibrėžkime diadinių skaičių, priklausančių intervalui $[0, 1]$, aibes D_j tokiu būdu:

$$D_0 = \{0, 1\}, \quad D_j = \left\{(2l - 1)2^{-j};\ 1 \leq l \leq 2^{j-1}\right\}, \quad j \geq 1$$

Elementams $r \in D_j$, $j \geq 0$, apibrėžkime

$$r^- := r - 2^{-j}, \quad r^+ := r + 2^{-j}. \tag{2.12}$$

Vertinant $\zeta_n(r) - \zeta_n(r^-)$ nagrinėjamos trys galimos dydžių r^- ir r konfigūracijos intervalų $[(k-1)/n, k/n]$ atžvilgiu: taškai r^- ir r yra arba tame pačiame intervale, arba gretimuose intervaluose, arba nesiribojančiuose intervaluose. Visais trim atvejais, tardami, kad $\sum_{k\in\emptyset} \equiv 0$, kiekvienam $r \in D_j$ gauname:

$$|\zeta_n(r) - \zeta_n(r^-)| \leq \Big| \sum_{k=[nr^-]+2}^{[nr]} X_k \Big| + 2^{1-j\alpha} Y_n, \tag{2.13}$$

čia

$$Y_n := \max_{1\leq k\leq n} |X_k|.$$

Tada

$$P(J,n,\varepsilon) \leq P_1(J,n,\varepsilon) + P_2(n,\varepsilon),$$

čia

$$P_1(J,n,\varepsilon) := P\Big\{ \sup_{j\geq J} 2^{\alpha j} \max_{r\in D_j} \Big| \sum_{k=[nr^-]+2}^{[nr]} X_k \Big| > (\varepsilon/2) n^{1/2} \Big\}, \tag{2.14}$$

$$P_2(n,\varepsilon) := P\big\{ |Y_n| \geq (\varepsilon/4) n^{1/2} \big\}. \tag{2.15}$$

Pastebėjus, kad iš (2.9) sąlygos gaunamas Y_n konvergaviumas pagal tikimybę į 0, (2.11) įrodymas supaprastėja iki

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P_1(J,n,\varepsilon) = 0 \tag{2.16}$$

įrodymo. Kiekvienam $\tau > 0$ apibrėžkime

$$X_{k,\tau} := X_k \mathbf{1}\{|X_k| \leq \tau n^{1/2-\alpha}\}, \quad k = 1,\ldots,n; n = 1,2,\ldots$$

Dideliems n teisinga:

$$P_1(J,n,\varepsilon) \leq P_{1,\tau}(J,n,\varepsilon) + P(\max_{1\leq k\leq n} |X_k| \geq \tau n^{1/2-\alpha}),$$

čia

$$P_{1,\tau}(J,n,\varepsilon) = P\Big\{\sup_{j\geq J} 2^{\alpha j} \max_{r\in D_j}\Big|\sum_{k=[nr^-]+2}^{[nr]} (X_{k,\tau} - EX_{k,\tau})\Big| > (\varepsilon/4)n^{1/2}\Big\}.$$

Pritaikius Rozentalio nelygybę gaunama

$$\lim_{J\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P_1(J,n,\varepsilon) \leq c\tau.$$

Kadangi $\tau > 0$ buvo parinktas laisvai, gauname (2.16). ■

2.3 teiginys. *Tarkime,* $0 < \alpha < 1/2$. *Procesas* $n^{-1/2}W_n, n \geq 1$, *apibrėžtas* (2.18) *tapatybe, konverguoja pagal pasiskirstymą į standartinį Vynerio procesą* W *Hiolderio erdvėje* $H_\alpha^o[0,1]$ *tada ir tik tada, jei*

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/(1/2-\alpha)} P(|\varepsilon_1| > t) = 0.$$

Įrodymas. žr. [60]. ■

2.1.2 2.1 teoremos įrodymas

Paprastumo dėlei tarkime, kad $\sigma^2 = 1$. Kiekvienam $n \geq 1$ ir kiekvienam $t \in [0,1]$ turime

$$\widehat{V}_n(t) = W_n(t) - (\widehat{\rho} - \rho)Z_n(t), \tag{2.17}$$

čia

$$W_n(t) = \sum_{k=1}^{[nt]} \varepsilon_k + (nt - [nt])\varepsilon_{[nt]+1} \tag{2.18}$$

ir

$$Z_n(t) = \sum_{k=1}^{[nt]} y_{k-1} + (nt - [nt])y_{[nt]}.$$

Jei $\rho \neq 1$, tada teisinga nelygybė

$$||Z_n||_\alpha \leq |1-\rho|^{-1}\big[||W_n||_\alpha + 2n^\alpha \max_{1\leq k\leq n} |y_k|\big]. \tag{2.19}$$

Tikrai, kiekvienam $m \geq 1$ remiantis (2.1) turime:

$$\sum_{k=1}^{m} y_k = \rho \sum_{k=1}^{m} y_{k-1} + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k.$$

Taigi kai $\rho \neq 1$, kiekvienam $m = 1, \ldots, n$

$$\sum_{k=1}^{m} y_{k-1} = (1-\rho)^{-1} \Big(\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k - y_m \Big).$$

Iš čia visiems $0 \leq k, j \leq n$ gauname

$$Z_n(k/n) - Z_n(j/n) = (1-\rho)^{-1} [(W_n(k/n) - W_n(j/n)) - (y_k - y_j)]. \quad (2.20)$$

Kadangi laužčių proceso Hiolderio erdvės norma visada įgyja reikšmes laužčių proceso lūžio taškuose, turime

$$||Z_n||_\alpha = \max_{1 \leq j < k \leq n} |(k-j)/n|^{-\alpha} |Z_n(k/n) - Z_n(j/n)|. \quad (2.21)$$

Taigi iš to, kad

$$\max_{k>j} |(k-j)/n|^{-\alpha} |y_k - y_j| \leq 2n^\alpha \max_{1 \leq k \leq n} |y_k|,$$

ir (2.20) bei (2.21), gauname (2.19). Toliau atskirai išnagrinėsime šiuos atvejus: $|\rho| < 1, |\rho| = 1$ ir $|\rho| > 1$.

1 atvejis. Tarkime, kad $|\rho| < 1$. Remiantis (2.17) skaidiniu ir (2.19) nelygybe, gauname

$$\begin{aligned} ||n^{-1/2} \widehat{V}_n - n^{-1/2} W_n||_\alpha &\leq |n^{1/2}(\widehat{\rho} - \rho)| \, ||n^{-1} Z_n||_\alpha \\ &\leq |n^{1/2}(\widehat{\rho} - \rho)| |1-\rho|^{-1} \big[||n^{-1} W_n||_\alpha + 2n^{-1/2+\alpha} \max_{1 \leq k \leq n} |y_k| \big]. \quad (2.22) \end{aligned}$$

Kadangi kiekvienam $1 \leq k \leq n$

$$y_k = \sum_{i=1}^{k} \rho^{k-i} \varepsilon_i, \quad (2.23)$$

turime

$$\max_{1\le k\le n}|y_k| \le \max_{1\le k\le n}|\varepsilon_k|\sum_{i=1}^{n}|\rho|^i \le (1-|\rho|)^{-1}\max_{1\le k\le n}|\varepsilon_k|. \tag{2.24}$$

Kadangi atsitiktiniai dydžiai $\varepsilon_k, k = 1, 2, \dots, n$ yra nepriklausomi, (2.6) sąlyga yra ekvivalenti

$$n^{\alpha-1/2}\max_{1\le k\le n}|\varepsilon_k| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0.$$

Taigi remiantis (2.22) ir (2.24) nelygybėmis bei 2.3 teiginiu ir 2.1 lema (žr. 2.1.1 skyrelį), gauname

$$||n^{-1/2}\widehat{V}_n - n^{-1/2}W_n||_\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0.$$

Taigi jei Hiolderio erdvėje $H^o_\alpha[0,1]$ egzistuoja $(n^{-1/2}\widehat{V}_n, n \ge 1)$ ir $(n^{-1/2}W_n, n \ge 1)$ sekų ribos, jos pasiskirsčiusios vienodai. Remiantis 2.3 teiginiu Hiolderio erdvėje $H^o_\alpha[0,1]$ $n^{-1/2}W_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} W$.

2 atvejis. Tarkime, $|\rho| > 1$. Remiantis (2.23) tapatybe

$$\max_{1\le k\le n}|y_k| \le |\rho|^n\max_{1\le k\le n}|\varepsilon_k|\sum_{i=1}^{n}|\rho|^{-i} \le |\rho|^{n+1}(|\rho|-1)^{-1}\max_{1\le k\le n}|\varepsilon_k|. \tag{2.25}$$

Taigi remiantis (2.17), (2.19) ir (2.25) gauname, kad

$$\begin{aligned}||n^{-1/2}\widehat{V}_n - n^{-1/2}W_n||_\alpha &\le |\widehat{\rho}-\rho|\,||n^{-1/2}Z_n||_\alpha\\ &\le |\rho|^n|\widehat{\rho}-\rho|\big[|\rho|^{-n}n^{-1/2}||W_n||_\alpha + 2|\rho|(|\rho|-1)^{-1}n^{\alpha-1/2}\max_{1\le k\le n}|\varepsilon_k|\big].\end{aligned}$$

Vėlgi gauname, kad $n^{-1/2}\widehat{V}_n$ ir $n^{-1/2}W_n$ pasiskirstę vienodai Hiolderio erdvėje $H^o_\alpha[0,1]$. Taigi įrodėme 2.1 teoremos (a) dalį.

3 atvejis. Tarkime, $\rho = 1$. Nagrinėkime funkciją F, apibrėžtą Hiolderio erdvėje

$$F(x)(t) = x(t) - \frac{x^2(1)-1}{\int_0^1 x^2(s)ds}\int_0^t x(s)ds, \quad t\in[0,1],$$

čia $x \in H^o_\alpha[0,1], x \ne 0$. Apibrėžkime, $F(0) = 0$. Jei $x \in H^o_\alpha[0,1]$, tai ir $F(x) \in H^o_\alpha[0,1]$. Turime įrodyti, kad

$$||n^{-1/2}\widehat{V}_n - F(n^{-1/2}W_n)||_\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0. \tag{2.26}$$

Kadangi funkcija $F : H^o_\alpha[0,1] \to H^o_\alpha[0,1]$ yra tolydi kiekviename taške $x \neq 0$, funkcijos F netolydumo taškų aibės Vynerio matas yra lygus nuliui. Taigi remiantis tolydaus atvaizdžio teorema (žr. [11] 1 išvadą psl. 31) ir 2.3 teiginiu, gauname

$$F(n^{-1/2}W_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} F(W) \qquad \text{erdvėje} \quad H^o_\alpha[0,1].$$

Remiantis (2.26) gauname, kad $H^o_\alpha[0,1]$ erdvėje $n^{-1/2}\widehat{V}_n$ ir $F(n^{-1/2}W_n)$ ribos turi tą patį skirstinį. Taigi teoremos (b) dalies įrodymas supaprastėja iki (2.26) įrodymo.

Jei $\rho = 1$, tada

$$y_k = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i = W_n(k/n), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.27}$$

Pastebėję, kad remiantis (2.3)ir (2.27)

$$(\hat{\rho} - 1)\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2 = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\varepsilon_i = \frac{1}{2}\Big(W_n^2(1) - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2\Big),$$

galime užrašyti

$$\widehat{V}_n = V_n^{(1)} + V_n^{(2)},$$

čia

$$V_n^{(1)}(t) = W_n(t) - \frac{W_n^2(1) - n}{2\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}^2} Z_n(t), \quad t \in [0,1],$$

ir

$$V_n^{(2)}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 - n}{2\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}^2} Z_n(t), \quad t \in [0,1].$$

Įvertinkime proceso Z_n normą. Remiantis (2.27), turime

$$\begin{aligned} n^{-3/2}||Z_n||_\alpha &= n^{-3/2} \max_{0\le j<k\le n} |k/n - j/n|^{-\alpha} \Big| \sum_{i=j+1}^{k} y_{i-1} \Big| \\ &\le n^{-3/2+\alpha} \max_{1\le k\le n} |y_k| \max_{0\le j<k\le n} |k-j|^{1-\alpha} \\ &\le n^{-1/2} \max_{1\le k\le n} |y_k| = n^{-1/2} \max_{t\in[0,1]} |W_n(t)|. \end{aligned}$$

Taigi remiantis Donskerio-Prochorovo invariantiškumo principu gauname, kad $n^{-3/2}||Z_n||_\alpha = O_P(1)$. Kadangi

$$n^{-2}\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}^2 \le n^{-1}\max_{1\le k\le n} y_k^2 = n^{-1}\max_{t\in[0,1]} W_n^2(t),$$

gauname, kad $n^{-2}\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}^2 = O_P(1)$. Remiantis didžiųjų skaičių dėsniu gauname

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0.$$

Taigi

$$||n^{-1/2}V_n^{(2)}||_\alpha = \frac{\left|n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k^2 - 1\right|}{2n^{-2}\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}^2}||n^{-3/2}S_n||_\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0.$$

(2.26) įrodymas supaprastėja iki

$$||n^{-1/2}V_n^{(1)} - F(n^{-1/2}W_n)||_\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0 \tag{2.28}$$

įrodymo. Paprastumo dėlei naudosime šiuos žymėjimus:

$$\begin{aligned}
S_n(t) &= \int_0^t n^{-1/2}W_n(s)ds, \quad t\in[0,1];\\
\tau_n &= n^{-1}W_n^2(1) - 1;\\
\mu_n &= n^{-1}\int_0^1 W_n^2(t)dt;\\
\widehat{\mu}_n &= n^{-1}\int_0^1 y_{[nt]}^2 dt.
\end{aligned}$$

Turime, kad

$$n^{-1/2}V_n^{(1)}(t) = n^{-1/2}W_n(t) - \frac{\tau_n}{2\widehat{\mu}_n}n^{-3/2}Z_n(t), \quad t\in[0,1].$$

Be to,

$$F(n^{-1/2}W_n) = n^{-1/2}W_n(t) - \frac{\tau_n}{2\mu_n}S_n(t), \quad t\in[0,1].$$

Taigi

$$\begin{aligned}
||n^{-1/2}V_n^{(1)} - F(n^{-1/2}W_n)||_\alpha &\le |\tau_n|\left\|\frac{Z_n}{\widehat{\mu}_n} - \frac{S_n}{\mu_n}\right\|_\alpha\\
&\le |\tau_n|\frac{|\widehat{\mu}_n - \mu_n|}{\widehat{\mu}_n\mu_n}||Z_n||_\alpha + |\tau_n|\frac{1}{\mu_n}||Z_n - S_n||_\alpha.
\end{aligned}$$

Kadangi $\max_{0\le t\le 1}|y_{[nt]} - W_n(t)| = \max_{1\le k\le n}|\varepsilon_k|$ ir tenkinama (2.6) sąlyga, remdamiesi Donskerio-Prochorovo invariantiškumo principu gauname

$$|\widehat{\mu}_n - \mu_n| \le 2n^{-1/2} \max_{1\le k\le n}|\varepsilon_k| \max_{t\in[0,1]}|n^{-1/2}W_n(t)| = o_P(1).$$

Pastebėję, kad $n^{-1}S_n(t) = \int_0^t y_{[nt]}dt$, $t \in [0,1]$, ir tenkinama (2.6) sąlyga, gauname

$$n^{-3/2}||S_n - Z_n||_\alpha \le n^{-1/2} \max_{0\le t\le 1}|y_{[nt]} - W_n(t)| = n^{-1/2} \max_{1\le k\le n}|\varepsilon_k| = o_P(1).$$

Taigi įrodėme (2.28).

4 atvejis. Tarkime, kad $\rho = -1$. Tada

$$y_k = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\varepsilon_i, \quad k = 1,\ldots,n.$$

Taigi

$$\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k y_{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\varepsilon_i = -\sum_{k=1}^{n}e_k\sum_{i=1}^{k-1}e_i,$$

čia

$$e_i = (-1)^i\varepsilon_i, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Pažymėkime

$$\widetilde{W}_n(t) = \sum_{k=1}^{[nt]}\tilde{e}_k + (nt - [nt])\tilde{e}_{[nt]+1}, \quad t \in [0,1].$$

Panašiai kaip ir 3 atveju įsitikiname, kad

$$||n^{-1/2}\widehat{V}_n - [n^{-1/2}W_n + G(n^{-1/2}\widetilde{W}_n)]||_\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0, \tag{2.29}$$

čia funkcija

$$G(y)(t) = \frac{y^2(1) - 1}{2\int_0^1 y^2(s)ds}\int_0^t y(s)ds, \quad t \in [0,1], \quad y \in H_\alpha^o[0,1], \quad y \ne 0.$$

Kadangi teisinga (2.29), belieka įrodyti, kad erdvėje $H^o_\alpha[0,1]$

$$n^{-1/2}W_n + G(n^{-1/2}\widetilde{W}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} W + g(\widetilde{W}), \tag{2.30}$$

čia W ir $\widetilde{W}$ yra nepriklausomi standartiniai Vynerio procesai. Įrodę, kad $\big(n^{-1/2}(W_n, \widetilde{W}_n)\big)$ konverguoja poagal pasiskirstymą į $(W, \widetilde{W})$ erdvėje $H^o_\alpha[0,1]\times H^o_\alpha[0,1]$, remiantis tolydaus atvaizdžio teorema gautume (2.30). Taigi remiantis 2.1 teiginiu belieka įrodyti, kad visiems $\lambda_1, \lambda_2 : \quad \lambda_1^2+\lambda_2^2 = 1$ teisinga

$$\lambda_1 n^{-1/2}W_n + \lambda_2 n^{-1/2}\widetilde{W}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \lambda_1 W + \lambda_2\widetilde{W} \quad \text{erdvėje} \quad H^o_\alpha[0,1]. \tag{2.31}$$

Užrašykime $\lambda_1 W_n + \lambda_2\widetilde{W}_n = \sum_{k=1}^{[nt]} X_i + (nt-[nt])X_{[nt]+1}, \quad t \in [0,1]$, čia $X_k = (\lambda_1 + \lambda_2(-1)^k)\varepsilon_k, \quad k = 1,\dots,n$ ir pritaikykime 2.2 teiginį. Iš tikrųjų, kadangi $|\lambda_1 + (-1)^k\lambda_2| \le 2$, gauname $P(|X_k| > t) \le P(|2\varepsilon_k| > t), \quad t \ge 0, \quad k = 1,\dots,n$. Taigi remiantis 2.2 teiginiu $\big(n^{-1/2}(W_n, \widetilde{W}_n)\big)$ konverguoja pagal pasiskirstymą erdvėje $H^o_\alpha[0,1]\times H^o_\alpha[0,1]$. Remdamiesi atitinkamų baigtiniamačių skirstinių konvergavimu gauname, kad $n^{-1/2}(W_n, \widetilde{W}_n)$ riba yra $(W, \widetilde{W})$, čia W ir $\widetilde{W}$ yra standartiniai Vynerio procesai. Pastebime, kad kiekvienam $t \ge s$,

$$EW_n(t)\tilde{W}_n(s) = \sigma^2\sum_{k=1}^{[ns]}(-1)^k + \sigma^2(ns-[ns])(-1)^{[ns]+1}.$$

Iš čia $En^{-1/2}\tilde{W}_n(t)\ n^{-1/2}W_n(s) \to 0$, kai $n\to\infty$. Taigi procesai $\tilde{W}$ ir W yra nepriklausomi.

2.2 Kitų laužčių procesų ribinis elgesys tolydžiųjų funkcijų ir Hiolderio erdvėse

Šiame skyrelyje nagrinėjamas pirmos eilės autroregresinis modelis:

$$y_k = \rho y_{k-1} + \varepsilon_k, \tag{2.32}$$

čia $k = 1,2,\dots,n$.

(2.32) modelis turi tenkinti šias prielaidas:

(A1) paklaidos $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su vidurkiu $E\varepsilon_1 = 0$ ir baigtine dispersija $\sigma^2 = E(\varepsilon_1)^2 < \infty$;

(A2) $y_0 = 0$;

(A3) $|\rho| < 1$.

Šis modelis nuo 2.1 skyrelyje nagrinėto modelio skiriasi stacionarumo prielaida (A3). Nagrinėsime du laužčių procesus - vieną sudarysime iš parametro ρ dalinių įvertinių, kitą iš stebėjimų ir paklaidų sandaugų $(y_{k-1}\varepsilon_k)$ dalinių sumų. Tegu $\widehat{\rho}_k$ žymi iš pirmų k stebėjimų $y_1, \dots, y_k$ sudarytą parametro ρ mažiausių kvadratų įvertinį:

$$\widehat{\rho}_k = \frac{\sum_{j=1}^{k} y_j y_{j-1}}{\sum_{j=1}^{k} y_{j-1}^2}, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Apibrėžkime parametro ρ dalinių įvertinių procesą:

$$r_n(t) = \begin{cases} \widehat{\rho}_k + (nt - k)(\widehat{\rho}_{k+1} - \widehat{\rho}_k), & \text{kai } k/n \le t < (k+1)/n, \quad k = \overline{2, n-1} \\ 0, & \text{kai } 0 \le t < 2/n, \end{cases}$$

čia $t \in [0, 1]$ ir $n \ge 1$. Stebėjimų ir paklaidų sandaugų $(y_{k-1}\varepsilon_k)$ dalinių sumų procesas apibrėžiamas taip:

$$\xi_n(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{[nt]} y_{j-1}\varepsilon_j + (nt - [nt]) y_{[nt]}\varepsilon_{[nt]+1}, & \text{jei} \quad 1/n \le t \le 1 \\ 0, & \text{jei} \quad 0 \le t < 1/n. \end{cases}$$

Šiame skyrelyje ištirsime procesų (ξ_n) ir (r_n) ribinį elgesį tolydžiųjų funkcijų ir Hiolderio erdvėse. Toliau darbe $C[a, b]$ žymėsime tolydžiųjų funkcijų $f : [a, b] \to R$ Banacho erdvę su norma $||f|| = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$, $f \in C[a, b]$. Kaip ir 2.1 skyrelyje $(W(t), t \in [a, b])$ žymėsime standartinį Vynerio procesą. Suformuluokime ribines teoremas (ζ_n) ir (r_n) procesams:

2.2 teorema. *Erdvėje* $C[0, 1]$

$$n^{-1/2}(1 - \rho^2)^{1/2}\sigma^{-1}\xi_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{D}} W. \tag{2.33}$$

Jei $0 < \alpha < 1/2$ *ir*

$$E|\varepsilon_1|^{p(\alpha)} < \infty, \quad \textit{čia} \quad p(\alpha) = \frac{1}{0.5 - \alpha}, \tag{2.34}$$

tada (2.33) *teisinga ir* $H^o_\alpha[0,1]$ *erdvėje.*

Pagal klasikinius Mann ir Wald [48] bei Anderson [1] rezultatus

$$\sqrt{n}(1-\rho^2)^{-1/2}(\widehat{\rho}_{[nt]} - \rho) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} t^{-1/2}\mathcal{N}(0,1).$$

Taigi mažiems $t \in (0,1)$ mažiausių kvadratų $\widehat{\rho}_{[nt]}$ įvertinys nėra tikslus. Dėl šios priežasties proceso r_n ribinį elgesį nagrinėsime intervale $[\delta, 1], \delta \in (0,1)$.

2.3 teorema. *Kiekvienam* $\delta \in (0,1)$ *tolydžiųjų funkcijų* $C[\delta, 1]$ *erdvėje*

$$\sqrt{n}(1-\rho^2)^{-1/2}(r_n - \rho) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \{W(t)/t, \delta \le t \le 1\}. \tag{2.35}$$

Jei $0 < \alpha < 1/2$ *ir išpildyta* (2.34) *sąlyga, tada* (2.35) *teisinga ir* $H^o_\alpha[\delta,1]$ *erdvėje.*

(2.35) konvergavimas praktiniuose taikymuose nepanaudojamas, kadangi ρ yra nežinomas. Suformuluokime teoremas, kuriose pateiktus rezultatus būtų galima taikyti praktiniuose skaičiavimuose.

2.4 teorema. *Erdvėje* $C[0,1]$

$$\Big(\sum_{k=1}^n y_{k-1}^2\Big)^{1/2} \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} W. \tag{2.36}$$

Jei $0 < \alpha < 1/2$ *ir išpildyta* (2.34) *sąlyga, tada* (2.36) *teisinga ir* $H^o_\alpha[0,1]$ *erdvėje.*

2.5 teorema. *Kiekvienam* $\delta \in (0,1)$ *tolydžiųjų funkcijų erdvėje* $C[\delta, 1]$

$$\Big(\sum_{k=1}^n y_{k-1}^2\Big)^{1/2} (r_n - \rho) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \Big\{\frac{W(t)}{t}, \quad \delta \le t \le 1\Big\}. \tag{2.37}$$

Jei $0 < \alpha < 1/2$ *ir išpildyta* (2.34) *sąlyga, tada* (2.37) *teisinga ir* $H^o_\alpha[\delta,1]$ *erdvėje.*

2.2.1 Pagalbiniai rezultatai

Hiolderio erdvėje galime apibrėžti (2.4) normai ekvivalenčią normą:

$$||f||^{seq} = \sup_j 2^{\alpha j} \max_{r \in D_j} |f(r^+) + f(r^-) - 2f(r)|, \quad f \in H^o_\alpha[0,1], \tag{2.38}$$

čia D_j diadinių skaičių aibės intervale $[0,1]$ ir r^-, r^+ apibrėžti 2.12 tapatybėmis. Erdvę $H^o_0[0,1]$ suprasime kaip $C[0,1]$ erdvę.

Bendrosios atsitiktinių dydžių sekos tirštumo sąlygos Hiolderio erdvėje pateikiamos [65], [59] (žr. 2 teoremą ir 1 pastabą atitinkamai). Žemiau pateikiame dalinių sumų procesui [33] straipsnyje suformuluotas šias sąlygas:

2.2 lema. *Tarkime, $\alpha \in [0,1)$ ir $\xi_n(t), t \in [0,1]$ yra iš $(X_k)_{k\geq 0}$ atsitiktinių dydžių sudarytas laužčių procesas. Tada $(b_n^{-1}\xi_n)_{n\geq 1}$ yra tiršta erdvėje $H^o_\alpha[0,1]$, jei:*

1. *kiekvienam $t \in [0,1]$, $(b_n^{-1}\xi_n(t))_{n\geq 1}$ yra tiršta realiųjų skaičių tiesėje R;*
2. $\dfrac{n^\alpha}{b_n} \max\limits_{1\leq i\leq n} |X_i|$ *konverguoja pagal tikimybę į 0;*
3. *kiekvienam teigiamam ε,*

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\Big\{ \max_{J\leq j\leq \log n} 2^{\alpha j} \max_{r\in D_j} \Big| \sum_{k=nr+1}^{nr^+} X_k \Big| \geq \varepsilon b_n \Big\} = 0.$$

2.3 lema. *Tarkime $\alpha \in [0,1)$ ir $\eta_1, \eta_2, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su vidurkiu 0. $T_n(t) = \sum_{k=1}^{[nt]} \eta_k + (nt - [nt])\eta_{[nt]+1}$, $t \in [0,1]$ - iš šių atsitiktinių dydžių sudarytas laužčių procesas. Jei*

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/(1-\alpha)} P(|\eta| > t) = 0, \tag{2.39}$$

tada

$$n^{-1}T_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{P}} 0 \quad \textit{erdvėje} \quad H^o_\alpha[0,1]. \tag{2.40}$$

Įrodymas. Iš pradžių įrodykime $n^{-1}T_n$ tirštumą erdvėje $H^0_\alpha[0,1]$, $\alpha \in [0,1)$. Remiantis disdžiųjų skaičių dėsniu ir 2.2 lema pakanka įsitikinti, kad kiekvienam $\delta > 0$

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(J, n, \delta) = 0, \tag{2.41}$$

čia

$$P(J,n,\delta) := \Big\{ \sup_{J\le j\le \log n} 2^{\alpha j} \max_{r\in D_j} \Big| \sum_{k=[nr^-]+2}^{[nr]} \eta_k \Big| > \delta n \Big\}.$$

Kadangi $E\eta_i = 0$ galime išskaidyti $\eta_i = \eta_i' + \eta_i''$, čia

$$\eta_i' = \eta_i \mathbf{1}_{\{|\eta_i|\le \delta n^{1-\alpha}\}} - E\eta_i \mathbf{1}_{\{|\eta_i|\le \delta n^{1-\alpha}\}}, \quad \eta_i'' = \eta_i \mathbf{1}_{\{|\eta_i|> \delta n^{1-\alpha}\}} - E\eta_i \mathbf{1}_{\{|\eta_i|> \delta n^{1-\alpha}\}}.$$

Galime įvertinti $P_1(J,n,\delta) \le P_1'(J,n,\delta/2) + P_2'(J,n,\delta/2)$, čia $P_1'(J,n,\delta)$ ir $P_1''(J,n,\delta)$ apibrėžiama analogiškai kaip ir $P_1(J,n,\delta)$, tik vietoje η_i imame η_j' ir η_i'' atitinkamai. Įveretinkime $P_1''(J,n,\delta)$. Remiantis Čebyšovo nelygybe turime

$$\begin{aligned} P_1''(J,n,\delta) &\le \delta^{-2} n^{-1+\alpha} \sum_{1\le j\le \log n} (n^{-1}2^j)^\alpha \sum_{1\le i<2^j} E \max_{r\in D_j} \Big| \sum_{k=[nr^-]+2}^{[nr]} \eta_k \Big| \\ &\le c\delta^{-2} n^{-1} \sum_{j=1}^{\log n} (n^{-1}2^j)^{\alpha-1} 2^j E|\eta_1''|. \end{aligned}$$

Kadangi

$$\begin{aligned} E|\eta_1''| &\le 2E|\eta_1| \mathbf{1}_{\{|\eta_1|>\delta n^{1-\alpha}\}} \\ &= 4\int_{\delta n^{1-\alpha}} zP(|\eta_1|>z)dz \le 4\int_{n^{1-\alpha}} z^{1-1/(1-\alpha)} dz \sup_{t>\delta n^{1-\alpha}} t^{1/(1-\alpha)} P(|\eta_1|>t) \\ &\le Cn^{-\alpha} \sup_{t>\delta n^{1-\alpha}} t^{1/(1-\alpha)} P(|\eta_1|>t), \end{aligned}$$

gauname $P_1''(J,n,\delta) \le c\delta^{-1} \sup_{t>\delta n^{1-\alpha}} t^{1/(1-\alpha)} P(|\eta_1|>t)$. Taigi remiantis (2.39) sąlyga, $\lim_{n\to\infty} P_1''(J,n,\delta) = 0$.

Pritaikę Dubo ir Rozentalio nelygybes, kai $q > 2$, gauname

$$\begin{aligned} P_1'(J,n,\delta) &\le \delta^{-q} n^{-q+q\alpha} \sum_{J\le j\le \log n} (n^{-1}2^j)^{q\alpha} \sum_{r\in D_j} E \max_{nr^+<u<nr^-} \Big| \sum_{k=nr^-+1}^{u} \eta_k' \Big|^q \\ &\le c\delta^{-q} n^{-q+q\alpha} \sum_{j=1}^{\log n} (n^{-1}2^j)^{q\alpha} 2^j \Big[(n2^{-j})^q [(E|\eta_j'|)^q + n2^{-j} E|\eta_j'|^q] \Big] \\ &\le C(q,D)\delta^{-q} D(J), \end{aligned}$$

čia $D(J) = \sum_{j>J} 2^{-(q-q\alpha-1)j}$. Pasirinkę $q > 1/(1-\alpha)$ ir pritaikę

$$\begin{aligned} E|\eta_j'|^q &= q \int_0^{n^{1/2-\alpha}} z^{q-1} P(|Z_j| > z) dz \\ &\le c(q) D \int_0^{n^{1/2-\alpha}} z^{q-1-p(\alpha)} dz \le c(q) D n^{(q-p(\alpha))(1/2-\alpha)} \end{aligned}$$

įrodome tirštumą. Remiantis didžiųjų skaičių dėsniu $n^{-1}T_n$ baigtiniamačiai skirstiniai konverguoja pagal pasiskirstymą į nulį. Taigi $n^{-1}T_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} o$ erdvėje $H_\alpha^o[0,1]$. Taigi įrodėme (2.40). ■

2.4 lema. (2.32) *modeliui teisinga*

(i) $n^{-1/2} \max_{1\le i\le n} |y_i| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0$;

(ii) jei $\lim_{t\to\infty} t^{p(\alpha)} P(|\varepsilon_1| > t) = 0$, *tada* $n^{-1/2+\alpha} \max_{1\le k\le n} |y_k| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0$.

(iii) jei išpildyta (2.34) *sąlyga, tada* $n^{-1/2+\alpha} \max_{1\le k\le n} |y_{k-1}\varepsilon_k| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0$.

Įrodymas. Kiekvienam $\varepsilon > 0$ turime

$$P(\max_{1\le i\le n} |y_i| > \varepsilon n^{1/2}) \le nP(|y_1| > \varepsilon n^{1/2}) \le E y_1^2 \mathbf{1}_{\{|y_1| > \varepsilon n^{1/2}\}}.$$

Iš to, kad $Ey_k^2 = (1-\rho^2)^{-1} < \infty$, gauname teoremos (i) tvirtinimą.

(ii) įrodyta [33] (žr. 9 lemą).

(iii) reikia įsitikinti, kad kiekvienam $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} nP(|y_0\varepsilon_1| \ge \delta n^{1/2-\alpha}) = 0. \tag{2.42}$$

Akivaizdu, kad $E|y_0|^{p(\alpha)} < \infty$. Kadangi y_0 ir ε_1 yra nepriklausomi, gauname $E|y_0\varepsilon_1|^{p(\alpha)} < \infty$ ir

$$nP(|y_0\varepsilon_1| > \delta n^{1/2-\alpha}) \le \delta^{-p(\alpha)} E|y_0\varepsilon_1|^{p(\alpha)} \mathbf{1}\{|y_0\varepsilon_1| > \delta n^{1/2-\alpha}\} \to 0,$$

kai $n \to \infty$. Iš čia gaunamas lemos (iii) tvirtinimas. ■

2.5 lema. (2.32) *modeliui teisinga*

$$\sup_{t\in[0,1]}\Big|n^{-1}\sum_{k=1}^{[nt]} y_{k-1}^2 - \frac{t\sigma^2}{1-\rho^2}\Big| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0.$$

Įrodymas. Turime

$$y_i^2 = \rho^2 y_{i-1}^2 + 2\rho y_{i-1}\varepsilon_i + \varepsilon_i^2.$$

Susumavę pagal indeksą $i = 1, \dots, m$ gauname

$$\rho^2 \sum_{i=1}^m y_{i-1}^2 = \sum_{i=1}^m y_i^2 - 2\rho\sum_{i=1}^m y_{i-1}\varepsilon_i - \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2.$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned}
&(1-\rho^2)\max_{0\le t\le 1}\Big|n^{-1}\sum_{i=1}^{[nt]} y_{i-1}^2 - \frac{t}{1-\rho^2}\Big| \le \\
&\le 2n^{-1}\max_{1\le k\le n} y_k^2 + 2\rho n^{-1}\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^k y_{i-1}\varepsilon_i\Big| \\
&+ n^{-1}\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^m[\varepsilon_i^2 - 1]\Big| + n^{-1}. \qquad (2.43)
\end{aligned}$$

Remiantis 2.4 lema pirmasis dėmuo dešinėje nelygybės pusėje yra $o_P(1)$. Pastebime, kad $(\sum_{i=1}^k y_{i-1}\varepsilon_i, k \ge 1)$ yra martingalas $\mathcal{F}_k = \sigma(\varepsilon_j, j = 1, \dots, k)$, $k \ge 1$ σ-algebros atžvilgiu. Iš tikrųjų, kadangi ε_k nepriklauso nuo $\mathcal{F}_{k-1}$, turime

$$E\Big(\sum_{i=1}^k y_{i-1}\varepsilon_i\Big|\mathcal{F}_{k-1}\Big) = \sum_{i=1}^{k-1} y_{i-1}\varepsilon_i + E(y_{k-1}\varepsilon_k|\mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} y_{i-1}\varepsilon_i.$$

Taigi $\big(\big|\sum_{i=1}^k y_{i-1}\varepsilon_i\big|, k \ge 1\big)$ yra submartingalas ir remiantis Doob'o nelygybe gauname

$$E\max_{1\le k\le n}\Big(\sum_{i=1}^k y_{i-1}\varepsilon_i\Big)^2 \le cE\Big(\sum_{i=1}^n y_{i-1}\varepsilon_i\Big)^2 = c\sum_{i=1}^n Ey_{i-1}^2\varepsilon_i^2 = c\sigma^2\sum_{i=1}^n Ey_{i-1}^2.$$

Kadangi $Ey_i^2 = 1/(1-\rho^2)$, turime $E\max_{1\le k\le n}\big(\sum_{i=1}^k y_{i-1}\varepsilon_i\big)^2 \le c\sigma^4 n/(1-\rho^2)$.

Taigi antrasis dešiniojoje (2.43) nelygybės pusėje esantis dėmuo yra $o_P(1)$. Be to, trečiasis dėmuo yra $o_P(1)$ remiantis didžiųjų skaičių dėsniu. ∎

2.2.2 2.2 teoremos įrodymas

Pritaikę Brauno invariantiškumo principą $(y_{i-1}\varepsilon_i, \mathcal{F}_i, i \geq 1)$ martingaliniams skirtumams ($\mathcal{F}_i = \sigma(\varepsilon_j, j \leq i), i \geq 1$ σ-algebrų atžvilgiu), gauname (2.33) konvergavimą $C[0,1]$ erdvėje. Taigi turime įrodyti antrąją teoremos dalį. $(n^{-1/2}\xi_n)$ baigtiniamačių skirstinių konvergavimas gaunamas iš (2.33) konvergavimo $C[0,1]$ erdvėje. Vadinasi, belieka įsitikinti $(n^{-1/2}\xi_n)$ in $H_\alpha^o[0,1]$ tirštumu. Remiantis 2.2 lema turime įrodyti, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P_1(J, n, \varepsilon) = 0, \tag{2.44}$$

ir

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P_2(n, \varepsilon) = 0, \tag{2.45}$$

čia

$$P_1(J, n, \varepsilon) := P\Big\{ \sup_{J\leq j\leq \log n} 2^{\alpha j} \max_{r\in D_j} \Big| \sum_{k=[nr^-]+2}^{[nr]} y_{k-1}\varepsilon_k \Big| > (\varepsilon/2) n^{1/2} \Big\}, \tag{2.46}$$

$$P_2(n, \varepsilon) := P\big\{ \max_{1\leq k\leq n} |y_{k-1}\varepsilon_k| \geq (\varepsilon/4) n^{1/2} \big\}. \tag{2.47}$$

(2.45) teisinga remiantis 2.4 lema. Belieka patikrinti (2.44).

Tegu $z_i = y_{i-1}\varepsilon_i, i \geq 1$. Kadangi $Ez_i = 0$ galime užrašyti $z_i = z_i' + z_i''$, čia

$$z_i' = z_i \mathbf{1}_{\{|z_i|\leq \delta n^{1/2-\alpha}\}} - E z_i \mathbf{1}_{\{|z_i|\leq \delta n^{1/2-\alpha}\}}, \quad z_i'' = z_i \mathbf{1}_{\{|z_i|> \delta n^{1/2-\alpha}\}} - E z_i \mathbf{1}_{\{|z_i|> \delta n^{1/2-\alpha}\}},$$

o $\delta > 0$ bet koks teigiamas skaičius. Turime

$$P_1(J, n, \varepsilon) \leq P_1'(J, n, \varepsilon/2) + P_1''(J, n, \varepsilon/2),$$

čia P_1' ir P_2'' apibrėžiama analogiškai kaip ir P_1, tik vietoje z_k imame z_k' ir

z''_k atitinkamai. Taigi teigiamai konstantai $c > 0$ turime

$$\begin{aligned} P''_1(J,n,\varepsilon) &\le \frac{4}{n\varepsilon^2} \sum_{j=J}^{\log n} 2^{2\alpha j + j} \max_{r \in D_j} E\Big(\sum_{k=[nr^-]+2}^{[nr]} z''_k \Big)^2 \\ &\le \frac{8n^{2\alpha}}{\varepsilon^2} E z_1^2 \mathbf{1}\{|z_1| \ge \delta n^{1/2-\alpha}\} \\ &\le c n^{2\alpha} \int_{n^{1/2-\alpha}}^{\infty} x P(|y_0 \varepsilon_1| \ge x) dx. \end{aligned}$$

Remiantis (2.34) sąlyga gauname $\lim_{n\to\infty} P''_1(J,n,\varepsilon) = 0$. Vertindami pirmąją tikimybę taikome Rozentalio nelygybę, kai $q > 2$:

$$\begin{aligned} P'_1(J,n,\varepsilon) &\le c n^{-q/2} \sum_{j=J}^{\log n} 2^{j+q\alpha j} \Big[(n 2^{-j} E(z''_1)^2)^{q/2} + n 2^{-j} E|z''_1|^q \Big] \\ &\le c n^{-q/2} \sum_{j=J}^{\log n} 2^{j+q\alpha j} \Big[(n 2^{-j} E(z_1)^2)^{q/2} + n 2^{-j} E|z_1|^q \mathbf{1}\{|z_1| \le \delta n^{1/2-\alpha}\} \Big] \\ &\le c (E z_1^2)^{q/2} \sum_{j=J}^{\log n} 2^{-(q/2 - q\alpha - 1)j} + c\delta, \end{aligned}$$

čia konstanta $c > 0$ priklauso tik nuo q. Iš čia $\lim_{J\to\infty} P'_1(J,n,\varepsilon) \le c\delta$. Kadangi $\delta > 0$ buvo pasirinktas laisvai, riba iš tiesų yra lygi nuliui.

2.2.3 2.3 teoremos įrodymas

Visų pirma įrodysime, kad $\sqrt{n}(1-\rho^2)^{-1/2}(r_n(t) - \rho), t \in [\delta, 1])$ proceso baigtiniamačiai skirstiniai konverguoja į $(W_t/t, t \in [\delta, 1])$ proceso baigtiniamačius skirstinius. Nagrinėkime $t_1, \dots, t_d \in [\delta, 1]$ ir pažymėkime

$$Z_{ni} := \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1-\rho^2}} (r_n(t_i) - \rho), \quad i = 1, \dots, d,$$

$$V_{ni}(k) := \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{n} t_i} \sum_{j=1}^{k} y_{j-1} \varepsilon_j, \quad i = 1, \dots, d$$

ir

$$T_{ni}(k) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{k} y_{j-1} \varepsilon_j \Big(t_i^{-1} - \Big((1-\rho^2) n^{-1} \sum_{j=1}^{k} y_{j-1}^2 \Big)^{-1} \Big), \quad i = 1, \dots, d.$$

Atlikę algebrinius pertvarkymus, gauname

$$\max_{1\le i\le d}|Z_{ni}-V_{ni}([nt_i])| \le 2\max_{1\le i\le d}|T_n([nt_i])|+\max_{1\le i\le d}|T_{ni}([nt_i]+1)| + \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{n}}\max_{1\le i\le d}|y_{[nt_i]}\varepsilon_{[nt_i]+1}|.$$

Remiantis 2.2 teorema

$$(V_{ni}, i=1,\dots,d) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} (W_{t_i}/t_i, i=1,\dots,d) \quad \text{erdvėje} \quad R^d$$

ir $\max_{1\le k\le d}|\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{k} y_{j-1}\varepsilon_j| = O_P(1)$. Remiantis 2.5 lema gauname

$$\max_{1\le i\le d}\left|t_i^{-1}-\left(n^{-1}\sum_{j=1}^{[nt_i]} y_{j-1}^2\right)^{-1}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0.$$

Taigi $\max_{1\le i\le d}|T_n([nt_i])| = o_P(1)$ ir $\max_{1\le i\le d}|T_n([nt_i]+1)| = o_P(1)$.

Neabejotinai, $\max_{1\le i\le d}|y_{[nt_i]}\varepsilon_{[nt_i]+1}| = o_P(\sqrt{n})$. Be to, $\max_{1\le i\le d}|Z_{ni}-V_{ni}([nt_i])| = o_P(1)$, kai $n\to\infty$. Taigi įrodėme $\sqrt{n}(1-\rho^2)^{-1/2}(r_n(t)-\rho), t\in[\delta,1])$ baigtiniamačių skirstinių konvergavimą.

Dabar įrodykime $T_n := \sqrt{n}(r_n(t)-\rho, t\in[\delta,1]), n\ge 1$ tirštumą. Tegu

$$\nu_0 = 0, \quad \nu_i = \frac{\sum_{j=1}^{i}\varepsilon_j y_{j-1}}{\sum_{j=1}^{i} y_{j-1}^2}, \quad i=1,\dots,n.$$

Turime, kad

$$r_n(t)-\rho = \nu_{[nt]} + (nt-[nt])(\nu_{[nt]+1}-\nu_{[nt]}).$$

Taigi $r_n(t)-\rho, t\in[\delta,1]$ yra laužčių procesas, sukonstruotas iš $X_k=\nu_k-\nu_{k-1}$ atsitiktinių dydžių. Remiantis 2.2 lema, reikia įrodyti, kad:

(a) kiekvienam $t\in[\delta,1]$ seka $\sqrt{n}(r_n(t)-\rho, n\ge 1)$ yra tiršta;

(b) $n^{\alpha+1/2}\max_{\delta n\le i\le n}|\nu_i-\nu_{i-1}| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0$;

(c) kiekevienam $\varepsilon>0$

$$\lim_{J\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P(\max_{J\le j\le \log n} 2^{\alpha j}\max_{r\in D_j\cap[\delta,1]}|\nu_{[nr^+]}-\nu_{[nr]}| > \varepsilon n^{-1/2}) = 0.$$

Pastebime, kad (a) gaunamas iš (T_n) baigtiniamačių skirstinių konvergavimo.

Pereikime prie (b). Turime, kad

$$n^{\alpha+1/2} \max_{\delta n \le i \le n} |\nu_i - \nu_{i-1}| \le U_{n1} + U_{n2},$$

čia

$$U_{n1} := n^{\alpha+0.5} \max_{1\le k\le n} |\varepsilon_k y_{k-1}| \Big(\sum_{j=1}^{\delta n} y_{j-1}^2 \Big)^{-1}$$

ir

$$U_{n2} := n^{\alpha+0.5} \max_{1\le k\le n} y_k^2 \max_{1\le k\le n} \Big| \sum_{j=1}^{k} y_{j-1}\varepsilon_j \Big| \Big(\sum_{j=1}^{n\delta} y_{j-1}^2 \Big)^{-2}.$$

Remiantis 2.2 teorema

$$n^{-1/2} \max_{1\le k\le n} \Big| \sum_{j=1}^{k} y_{j-1}\varepsilon_j \Big| = O_P(1).$$

Pagal 2.4 lemą $n^{-1+2\alpha} \max_{1\le k\le n} y_k^2 = o_P(1)$. Pastebėję, kad remiantis 2.5 lema $n^{-1}\sum_{k=1}^{n\delta} y_{k-1}^2 = O_P(1)$, gauname $U_{n2} = o_P(1)$. Kadangi teisinga (2.34) sąlyga, turime

$$n^{\alpha-1/2} \max_{1\le k\le n} |\varepsilon_k y_{k-1}| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0.$$

Taigi ir $U_{n1} = o_P(1)$.

Nagrinėkime (c). Turime,

$$|\nu_{[nr^+]} - \nu_{[nr]}| \le V_{n1}(r,j) + V_{n2}(r,j),$$

čia

$$V_{n1}(r,j) = \Big| \sum_{j=[nr]+1}^{[nr^+]} \varepsilon_j y_{j-1} \Big| \Big(\sum_{j=1}^{\delta n} y_{j-1}^2 \Big)^{-1},$$

ir

$$V_{n2}(r,j) = \sum_{j=[nr]+1}^{[nr^+]} y_{j-1}^2 \Big| \sum_{j=1}^{[nr^+]} \varepsilon_j y_{j-1} \Big| \Big(\sum_{j=1}^{\delta n} y_{j-1}^2 \Big)^{-2}.$$

Kadangi $\sum_{j=1}^{n\delta} y_{j-1}^2 = O_P(n)$, (c) galima perrašyti kaip

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(\max_{J\le j\le \log n} 2^{\alpha j} \max_{r\in D_j} \Big| \sum_{j=[nr]+1}^{[nr^+]} \varepsilon_j y_{j-1} \Big| > \varepsilon n^{0.5}) = 0 \tag{2.48}$$

ir

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(\max_{J\le j\le \log n} 2^{\alpha j} \max_{r\in D_j} \sum_{j=[nr]+1}^{[nr^+]} y_{j-1}^2 \Big| \sum_{j=1}^{[nr^+]} \varepsilon_j y_{j-1} \Big| > \varepsilon n^{3/2}) = 0. \tag{2.49}$$

Kadangi (2.48) gavome įrodydami 2.2 teoremą, belieka įrodyti tik (2.49). Vėl remdamiesi 2.2 teorema turime, kad $\max_{1\le k\le n} \Big| \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j y_{j-1} \Big| = O_P(n^{1/2})$, ir (2.49) supaprastėja iki

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(\max_{J\le j\le \log n} 2^{\alpha j} \max_{r\in D_j} \sum_{j=[nr]+1}^{[nr^+]} y_{j-1}^2 > \varepsilon n) = 0. \tag{2.50}$$

Kadangi

$$\sum_{j=[nr]+1}^{[nr^+]} y_{j-1}^2 = \frac{1}{1-\rho^2} \sum_{j=[nr]+1}^{[nr^+]} \varepsilon_j^2 + \frac{2\rho}{1-\rho^2} \sum_{j=[nr]+1}^{[nr^+]} \varepsilon_j y_{j-1} + \frac{1}{1-\rho^2} [y_{[nr^+]}^2 - y_{[nr]}^2],$$

norint įrodyti (2.50), reikia įrodyti, kad

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(\max_{J\le j\le \log n} 2^{\alpha j} \max_{r\in D_j} \Big| \sum_{j=[nr]+1}^{[nr^+]} \varepsilon_j y_{j-1} \Big| > \varepsilon n) = 0, \tag{2.51}$$

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(\max_{J\le j\le \log n} 2^{\alpha j} \max_{r\in D_j} \sum_{j=[nr]+1}^{[nr^+]} \varepsilon_j^2 > \varepsilon n) = 0, \tag{2.52}$$

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P(\max_{J\le j\le \log n} 2^{\alpha j} \max_{r\in D_j} [y_{[nr^+]}^2 - y_{[nr]}^2] > \varepsilon n) = 0. \tag{2.53}$$

Pastebėjus, kad (2.51) jau buvo įrodytas anksčiau, turime patikrinti (2.52) ir (2.53). Pakankamai dideliems J turime

$$P(\max_{J\le j\le \log n} 2^{\alpha j}\max_{r\in D_j}\sum_{j=[nr]+1}^{[nr^+]}\varepsilon_j^2>\varepsilon n)\le$$
$$\le P(\max_{J\le j\le \log n} 2^{\alpha j}\max_{r\in D_j}\Big|\sum_{j=[nr]+1}^{[nr^+]}[\varepsilon_j^2-1]\Big|>\varepsilon n/2).$$

Kadangi

$$\max_{J\le j\le \log n} 2^{\alpha j}\max_{r\in D_j}\Big|\sum_{j=[nr]+1}^{[nr^+]}[\varepsilon_j^2-1]\Big|\le ||\nu_n||_\alpha,$$

čia $\nu_n(t), t\in[0,1]$ yra laužčių procesas, sukonstruotas $\varepsilon_k^2-1, k=1,\dots,n$ atsitiktiniams dydžiams, (2.52) gaunamas pritaikius 2.3 lemą $\eta_k=\varepsilon_k^2-1, k\ge 1$ atsitiktiniams dydžiams.

Galiausiai pastebime, kad (2.53) yra 2.3 lemos išvada. Taigi įrodymas baigtas.

2.2.4 2.4 ir 2.5 teoremų įrodymas.

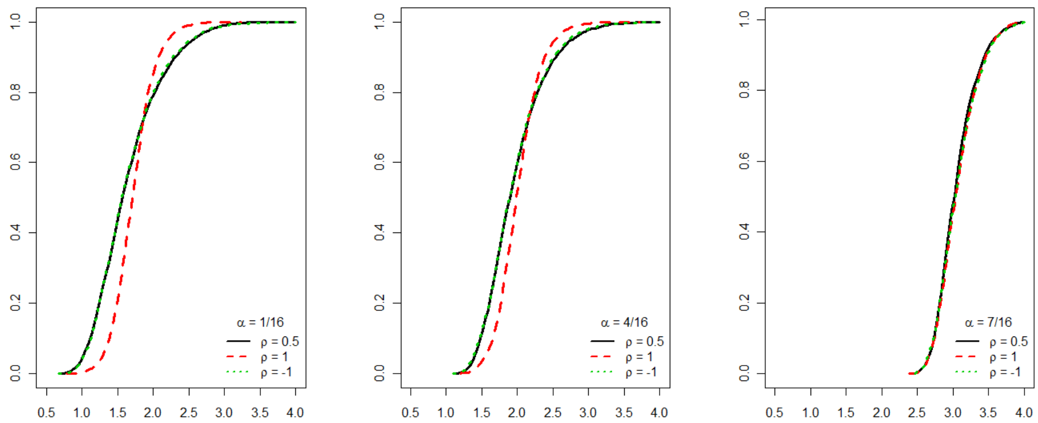
Šių teoremų tvirtinimai gaunami remiantis 2.2, 2.3 ir Sluckio teoremomis, bei 2.5 lema.

3 skyrius

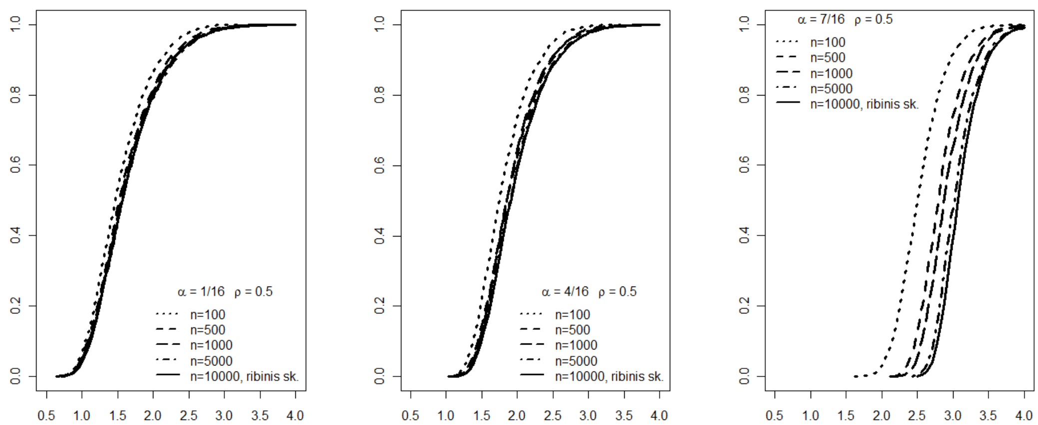
AR(1) modelio pasikeitusio segmento testavimas

3.1 Kriterijus, pagrįstas modelio paklaidų įvertinių dalinių sumų procesu

Remiantis 2.3 pastaba iš 2.1 skyrelio statistika $T_n = F(n^{-1/2}\widehat{\sigma}^{-1}\widehat{V}_n)$, parinkus tolydžią funkciją $F : H_\alpha^o[0,1] \to R$, gali būti naudojama AR(1) modelio stabilumo testavimui. Keletą funkcijos F pavyzdžių galima rasti [27]. Remiantis 2.1 teorema iš 2.1 skyrelio matome, kad proceso $(\widehat{V}_n, n \in N)$ ribinis skirstinys taškuose $|\rho| = 1$ nėra tolydus. Taigi statistika, sukonstruota naudojant šį procesą, gali būti paslinkta, kai parametras $|\rho|$ yra arti 1. Shin (1998) (žr. [63]) pastebėjo tai empiriškai tirdamas statistikas, skirtas pasikeitusio segmento testavimui. Jis nustatė, kad empirinis 5% percentilis žymiai skiriasi nuo teorinio, kai parametras ρ yra arti 1 ir skiriasi nežymiai, kai parametras ρ yra arti -1. Taigi statistikų galia gali būti mažesnė, kai ρ arti 1.



Aukščiau esančiame paveikslėlyje pateiktos dydžio $n^{-1/2}\|\widehat{V}_n\|_\alpha$ ($n = 5000$) pasiskirstymo funkcijos skirtingoms α reikšmėms. Autoregresinio modelio paklaidos generuotos kaip standartiniai normalieji atsitiktiniai dydžiai, skaičiuota 4000 dydžio $n^{-1/2}\|\widehat{V}_n\|_\alpha$ reikšmių. Taigi matome, kad Shin (1998) aprašytoji problema tampa ne tokia stipri, kai α artėja link 1/2. Tačiau dydžio $n^{-1/2}\|\widehat{V}_n\|_\alpha$ skirstinys konverguoja į ribinį skirstinį tuo lėčiau, kuo parametras α arčiau 1/2:



Nagrinėkime autoregresinį modelį su pasikeitusiu segmentu

$$y_k = \rho^* y_{k-1}\mathbf{1}_{I^*}(k) + \rho y_{k-1}\mathbf{1}_{I^{*c}}(k) + \varepsilon_k, k = 1, \dots, n, \tag{3.1}$$

čia $I^* = k^* + 1, \dots, k^* + \ell^*$ ir $I^{*c} = \{1, \dots, n\} \setminus I^*$. Tegu (3.1) tenkina šias prielaidas:

(A1) paklaidos $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su vidurkiu $E\varepsilon_1 = 0$ ir baigtine dispersija $\sigma^2 = E(\varepsilon_1)^2 < \infty$;

(A2) $y_0 = 0$;

(A3) $|\rho| < 1$;

Dydis k_n^* vadinamas pasikeitusio segmento pradžia, o dydis ℓ^* pasikeitusio segmento ilgiu. Tariame, kad k^* ir ℓ^* nėra žinomi. Norime patikrinti nulinę pastovaus autoregresinio proceso hipotezę:

$$H_0: \quad \ell^* = 0.$$

Alternatyvioji pasikeitusio segmento hipotezė nusakoma taip:

$$H_A: \quad \ell^* > 0.$$

Tegu $(\hat{\varepsilon}_k, k = 1, \dots, n)$ žymi (3.1) modelio paklaidas, esant teisingai nulinei hipotezei ir $\hat{S}_0 = 0$, $\hat{S}_k = \hat{\varepsilon}_1 + \dots + \hat{\varepsilon}_k$, $k = 1, \dots, n$. Apibrėžkime statistiką

$$T(n; \alpha) = \max_{1<l<n} \frac{1}{l^\alpha} \max_{0 \leqslant k \leqslant n-l} \left| \hat{S}(k+l) - \hat{S}(k) - \frac{l}{n} \hat{S}(n) \right|, \tag{3.2}$$

čia $0 \leqslant \alpha < 1/2$.

3.1 teiginys. *Tarkime, (3.1) modelis tenkina (A1)-(A3) sąlygas,* $0 < \alpha < 1/2$, $\lim_{t\to\infty} t^{1/(0.5-\alpha)} P(|\varepsilon_1| > t) = 0$ *ir galioja* H_0. *Tada*

$$n^{-1/2+\alpha} \sigma^{-1} T(n; \alpha) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \max_{0<h<1} h^{-\alpha} \max_{0<t<1-h} |W(t+h) - W(t) - hW(1)|$$

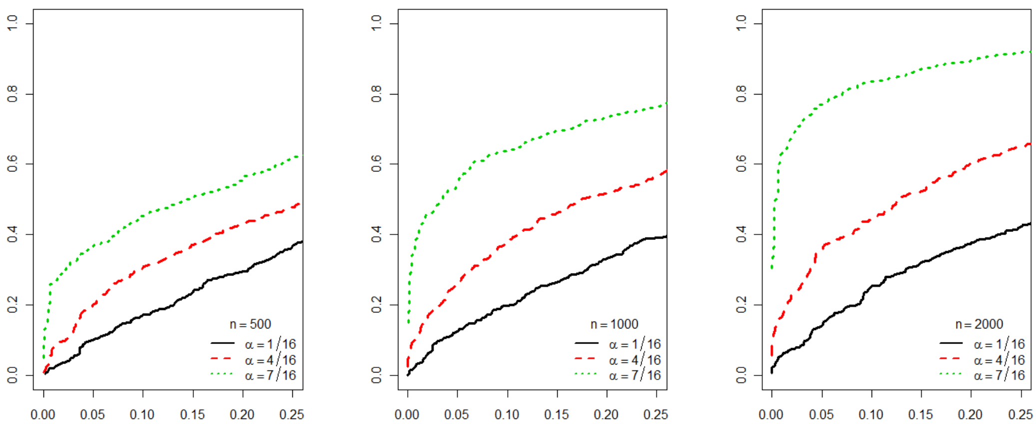
Įrodymas. Teiginys gaunamas iš 2.1 teoremos ir 2.3 pastabos. ∎

Statistikos $T(n; \alpha)$ elgesį esant teisingai alternatyviajai hipotezei H_A ištirsime empiriškai.

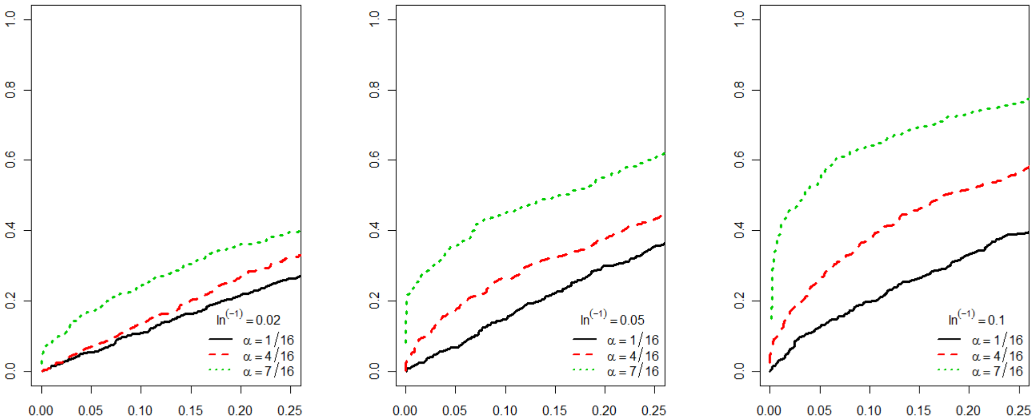
3.1.1 Kriterijaus galios empirinis tyrimas

Šiame skyrelyje tirsime, kokie dydžiai ir kaip įtakoja pasiūlyto kriterijaus galią. Naudosime galios grafikus, kurių x-ašyje atidėtos p-reikšmių empirinės pasiskirstymo funkcijos reikšmės, kai teisinga nulinė hipotezė, o y-ašyje atidėtos p-reikšmių empirinės pasiskirstymo funkcijos reikšmės, kai teisinga alternatyvioji hipotezė. Skirtingiems parametrų n, α, k^*, ℓ^*, ρ, ρ^* rinkiniams suskaičiuota po 1000 statistikos reikšmių. Autoregresinio modelio paklaidos generuotos kaip pagal standartinį normalųjį dėsnį pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Ribinė statistika aproksimuota suskaičiavus 10.000 jos reikšmių.

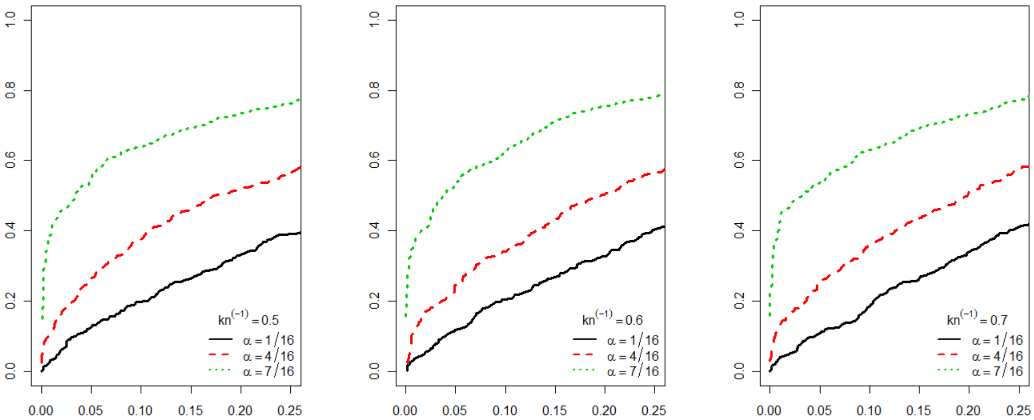
Parametro n įtaka. Kuo daugiau stebėjimų turime, tuo didesnė kriterijaus galia ($k^*n^{-1} = 0.5$, $\ell^*n^{-1} = 0.1$, $\rho = 0.5$, $\rho^* = 0.8$):



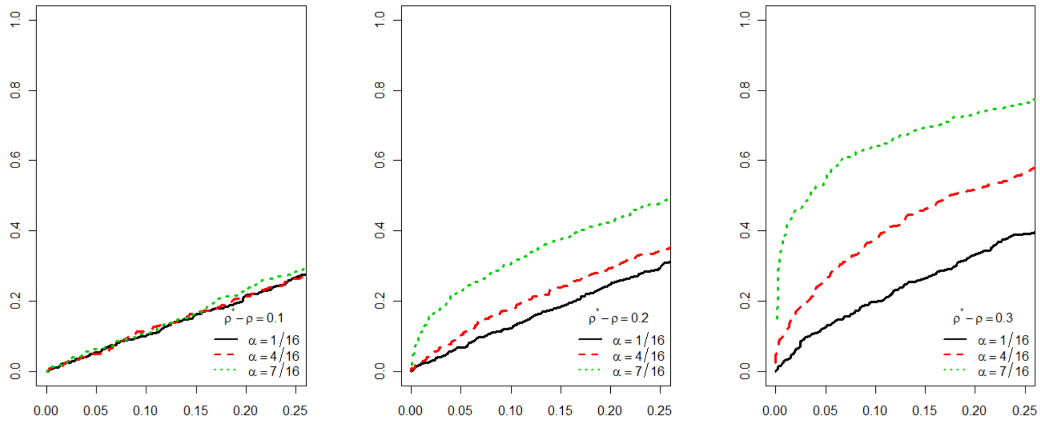
Pasikeitusio segmento ilgio ir pradžios įtaka. Kuo trumpesnis pasikeitęs segmentas, tuo mažesnė kriterijaus galia. Žemiau pateikti galios grafikai, kai pasikeitęs segmentas sudaro 2%, 5% ir 10% visų stebėjimų ($n = 1000$, $k^*n^{-1} = 0.5$, $\rho = 0.5$, $\rho^* = 0.8$):



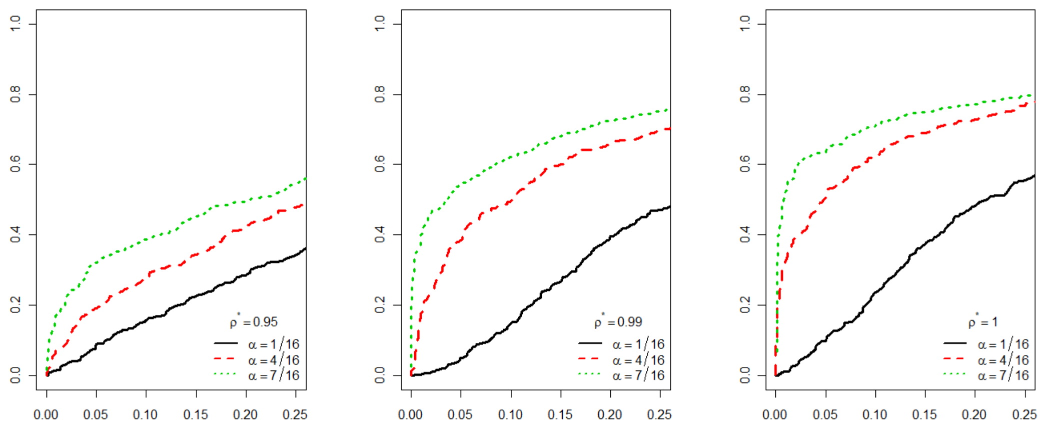
Kriterijaus galiai pasikeitusio segmento pradžios pozicija pastebimos įtakos neturi ($n = 1000,\ \ell^* n^{-1} = 0.1,\ \rho = 0.5,\ \rho^* = 0.8$):



Parametrų ρ ir ρ^* įtaka. Kriterijaus galia mažėja mažėjant skirtumui $\rho * - \rho$ ($n = 1000,\ k^* n^{-1} = 0.5,\ \ell^* n^{-1} = 0.1,\ \rho = 0.5$):



Iš pirmojo grafiko matome, kad kriterijaus galia yra nedidelė, kai $\rho^* - \rho = 0.1$. Toliau nubrėžkime galios grafikus, išlaikydami tą patį skirtumą $\rho^* - \rho = 0.1$, tačiau keisdami parametrų ρ ir ρ^* reikšmes. Matome, kad kriterijaus galia žymiai išauga, didinant šių parametrų reikšmes ($n = 1000$, $k^* n^{-1} = 0.5$, $\ell^* n^{-1} = 0.1$):



Palyginus du paskutinius paveikslėlius matyti, kad kai autoregresinis procesas keičiasi iš stacionarios būklės į nestacionarią, galia pastebimai išauga esant nedidelėsms p-reikšmių empirinės pasiskirstymo funkcijos reikšmėms, kai teisinga nulinė hipotezė (x-ašis). Taigi pasiūlytas kriterijus galingiausias aptinkant pasikeitimus iš stacionarios būklės į nestacionarią ir pasikeitimus, kai parametro ρ reikšmės yra ganėtinai didelės.

Parametro α įtaka. Kaip matyti iš aukščiau pateiktų grafikų, didžiausia kriterijaus galia gauta, kai $\alpha = 7/16$, t.y. reikšmė artima 1/2. Be to, galios atotrūkis nuo kriterijų su mažesnėmis parametro α reikšmėmis didėja ilgėjant pasikeitusiam segmentui, didėjant parametro n reikšmėms bei skirtumui tarp parametrų ρ ir ρ^*.

3.2 Kriterijus, pagrįstas modelio parametro dalinių įvertinių procesu

Nagrinėkime autoregresinį modelį su pasikeitusiu segmentu

$$y_k = \rho^* y_{k-1}\mathbf{1}_{I^*}(k) + \rho y_{k-1}\mathbf{1}_{I^{*c}}(k) + \varepsilon_k, k = 1, \dots, n, \tag{3.3}$$

čia $I^* = k^* + 1, \dots, k^* + \ell^*$ ir $I^{*c} = \{1, \dots, n\} \setminus I^*$. Tegu (3.3) tenkina šias prielaidas:

(A1) paklaidos $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su vidurkiu $E\varepsilon_1 = 0$ ir baigtine dispersija $\sigma^2 = E(\varepsilon_1)^2 < \infty$;

(A2) $y_0 = 0$;

(A3) $|\rho| < 1$.

Dydis k_n^* vadinamas pasikeitusio segmento pradžia, o dydis ℓ^* pasikeitusio segmento ilgiu. Tariame, kad k_n^* ir ℓ_n^* nėra žinomi. Norime patikrinti nulinę pastovaus autoregresinio proceso hipotezę:

$$H_0: \quad \ell^* = 0.$$

Alternatyvioji pasikeitusio segmento hipotezė nusakoma taip:

$$H_A: \quad \ell^* > 0.$$

Nagrinėkime statistiką, apibrėžtą fiksuotam dydžiui $\delta \in (0,1)$:

$$T_n := T_n^{(\delta)} := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2} \max_{1 \le \ell \le (1-\delta)n} \ell^{-\alpha} \max_{\delta n \le k \le n} |\widehat{\rho}_{k+\ell} - \widehat{\rho}_k|. \tag{3.4}$$

3.2 teiginys. *Tarkime, (3.3) modelis tenkina (A1)-(A3) sąlygas,* $0 < \alpha < 1/2$,

$$E|\varepsilon_1|^{p(\alpha)} < \infty, \quad \textit{čia} \quad p(\alpha) = \frac{1}{0.5 - \alpha}, \tag{3.5}$$

ir galioja H_0. *Tada*

$$n^\alpha T_n^{(\delta)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \max_{0<h<1-\delta} h^{-\alpha} \max_{\delta \le t \le 1} \left| \frac{W(t+h)}{t+h} - \frac{W(t)}{t} \right|.$$

Įrodymas. Teiginys gaunamas remiantis 2.3 teorema ir 2.5 lema. ∎

3.3 teiginys. *Tarkime, (3.3) modelis tenkina (A1)-(A3) sąlygas,* $k^* \ge \delta n$ *kuriam nors* $\delta \in (0,1)$, $\ell^* \to \infty, \ell^*/n \to 0$, *kai* $n \to \infty$, *ir galioja* H_A. *Tada*

$$n^\alpha T_n^{(\delta)} \to \infty,$$

jei tik

$$\left(\frac{\ell^*}{n}\right)^{1-\alpha} \sqrt{n} |\rho - \rho^*| \to \infty, \quad \textit{kai} \quad n \to \infty.$$

.

Įrodymas. Turime, kad

$$T_n \ge \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}^2} (\ell^*)^{-\alpha} |\widehat{\rho}_{k^*+\ell^*} - \widehat{\rho}_{k^*}|.$$

Kadangi

$$\widehat{\rho}_{k^*} = \rho + \frac{\sum_{j=1}^{k^*} y_{j-1}\varepsilon_j}{\sum_{j=1}^{k^*} y_{j-1}^2}$$

ir

$$\widehat{\rho}_{k^*+\ell^*} = \frac{\rho \sum_{j=1}^{k^*} y_{j-1}^2 + \rho^* \sum_{j=k^*+1}^{k^*+\ell^*} y_{j-1}^2 + \sum_{j=1}^{k^*+\ell^*} y_{j-1}\varepsilon_j}{\sum_{j=1}^{k^*+\ell^*} y_{j-1}^2},$$

gauname

$$|\widehat{\rho}_{k^*+\ell^*}-\widehat{\rho}_{k^*}|=|\rho^*-\rho|\frac{\sum_{j=k^*+1}^{k^*+\ell^*}y_{j-1}^2}{\sum_{j=1}^{k^*+\ell^*}y_{j-1}^2}-\frac{|\sum_{j=1}^{k^*+\ell^*}y_{j-1}\varepsilon_j|}{\sum_{j=1}^{k^*+\ell^*}y_{j-1}^2}-\frac{|\sum_{j=1}^{k^*}y_{j-1}\varepsilon_j|}{\sum_{j=1}^{k^*}y_{j-1}^2}. \quad (3.6)$$

Pastebime, kad kiekvienam $l=1,\ldots,n$

$$E\Big(\sum_{j=1}^{k}y_{j-1}\varepsilon_j\Big)^2\leq\max\{(1-\rho^2)^{-1},(1-\rho^{*2})^{-1}\}k \quad (3.7)$$

Be to,

$$\Big|n^{-1}\sum_{j=1}^{k^*}y_{j-1}^2-\frac{k^*}{n(1-\rho^2)}\Big|\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}}0 \quad (3.8)$$

ir

$$\Big|n^{-1}\sum_{j=k^*+1}^{k^*+\ell^*}y_{j-1}^2-\frac{\ell^*}{n(1-\rho^{*2})}\Big|\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}}0. \quad (3.9)$$

Iš tikrųjų, (3.8) gaunamas iš 2.5 lemos. Analogiškai, kaip ir įrodant 2.5 lemą, (3.9) konvergavimui turime

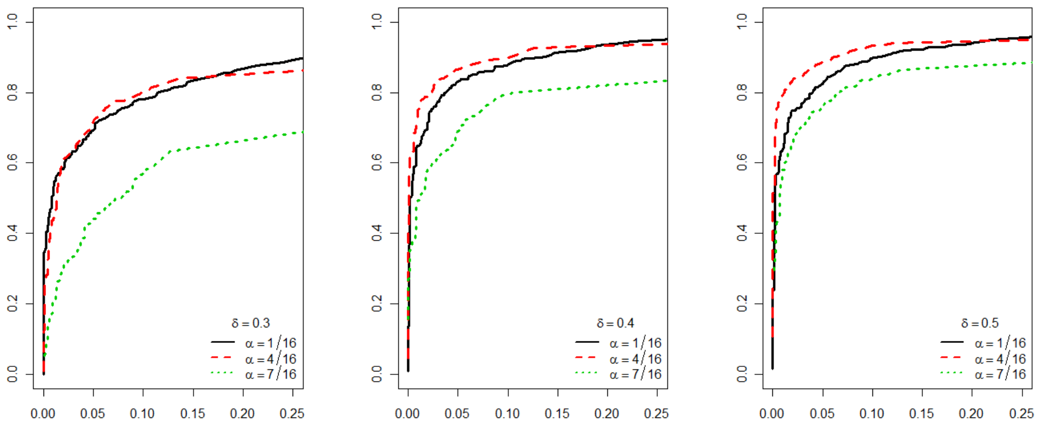
$$\begin{aligned}\Big|n^{-1}\sum_{j=k^*+1}^{k^*+\ell^*}y_{j-1}^2-\frac{\ell^*}{n(1-\rho^*)}\Big|\leq&\frac{2\rho^*}{1-\rho^{*2}}\Big|n^{-1}\sum_{j=k^*+1}^{k^*+\ell^*}y_{j-1}\varepsilon_j\Big|\\&+\frac{1}{1-\rho^{*2}}\Big|n^{-1}\sum_{j=k^*+1}^{k^*+\ell^*}[\varepsilon_l^2-1]\Big|.\end{aligned}$$

Pirmasis dešiniosios nelygybės pusės dėmuo yra $o_P(1)$ remiantis (3.7), o antrasis dėmuo yra $o_P(1)$ pagal didžiųjų skaičių dėsnį. Taigi atsižvelgę į (3.7)–(3.9), iš (3.6) gauname teoremos tvirtinimą. ∎

3.2.1 Kriterijaus galios empirinis tyrimas

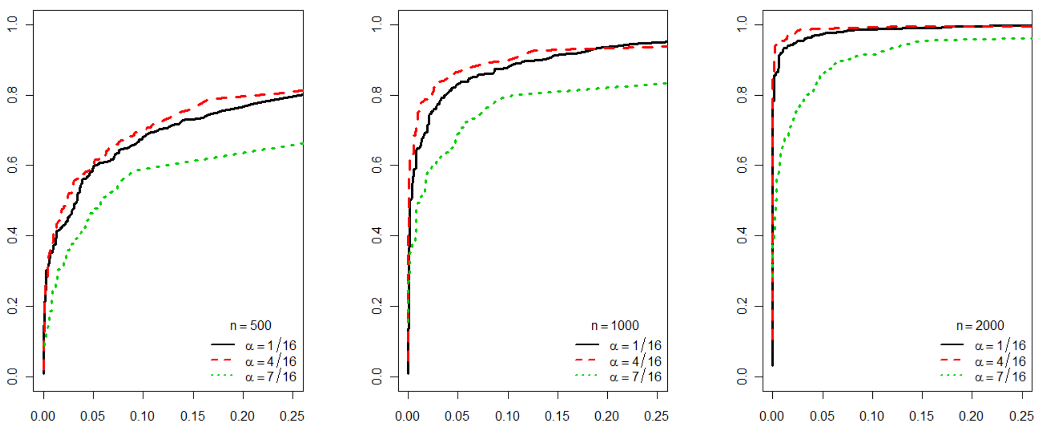
Šiame skyrelyje tirsime, kokie dydžiai ir kaip įtakoja pasiūlyto kriterijaus galią. Naudosime galios grafikus, kurių x-ašyje atidėtos p-reikšmių empirinės pasiskirstymo funkcijos reikšmės, kai teisinga nulinė hipotezė, o y-ašyje atidėtos p-reikšmių empirinės pasiskirstymo funkcijos reikšmės, kai teisinga alternatyvioji hipotezė. Skirtingoms parametrų δ, n, α, k^*, ℓ^*, ρ, ρ^* suskaičiuota po 1000 statistikos reikšmių. Autoregresinio modelio paklaidos generuotos kaip pagal standartinį normalųjį dėsnį pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Ribinė statistika aproksimuota suskaičiavus 10.000 jos reikšmių.

Parametro δ įtaka. Natūralu, kad proceso $r_n(t)$ reikšmės svyruoja vis mažiau, kai t didėja. Dėlto kriterijus galia didėja, kai dydis δ didėja ($n = 1000$, $k^*n^{-1} = 0.5$, $\ell^*n^{-1} = 0.1$, $\rho = 0.5$, $\rho^* = 0.8$):

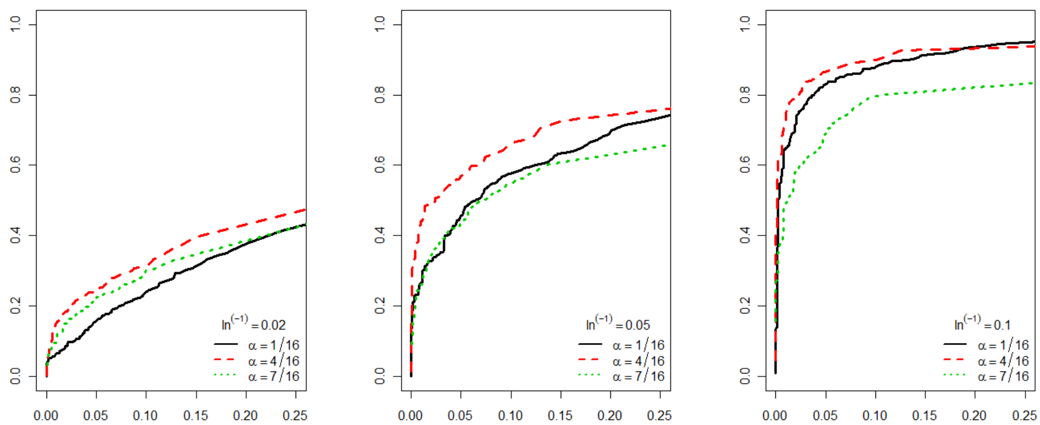


Taigi reikalingas nemažas kiekis duomenų iki autoregresinio modelio pasikeitimo.

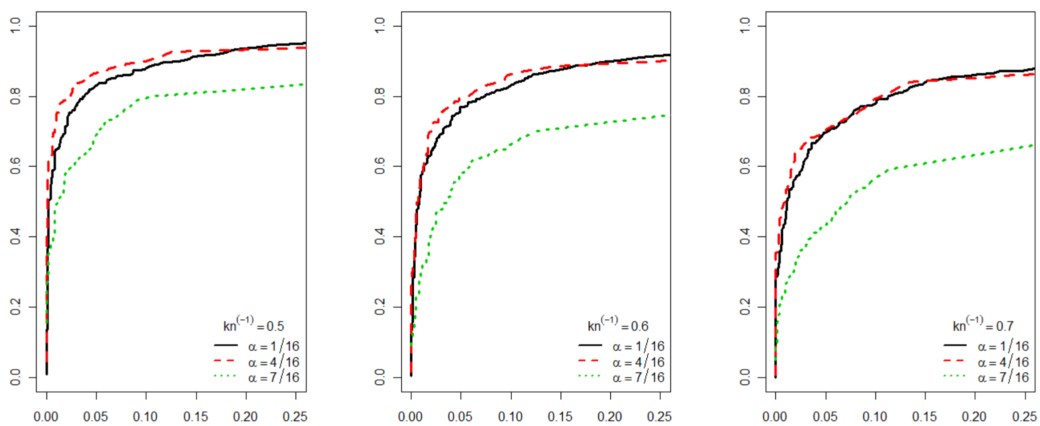
Parametro n įtaka. Kuo daugiau stebėjimų turime, tuo didesnė kriterijaus galia ($\delta = 0.4$, $k^*n^{-1} = 0.5$, $\ell^*n^{-1} = 0.1$, $\rho = 0.5$, $\rho^* = 0.8$):



Pasikeitusio segmento ilgio ir pradžios įtaka. Kuo trumpesnis pasikeitęs segmentas, tuo mažesnė kriterijaus galia. Žemiau pateikti galiuos grafikai, kai pasikeitęs segmentas sudaro 2%, 5% ir 10% visų stebėjimų ($n = 1000$, $\delta = 0.4$, $k^*n^{-1} = 0.5$, $\rho = 0.5$, $\rho^* = 0.8$):



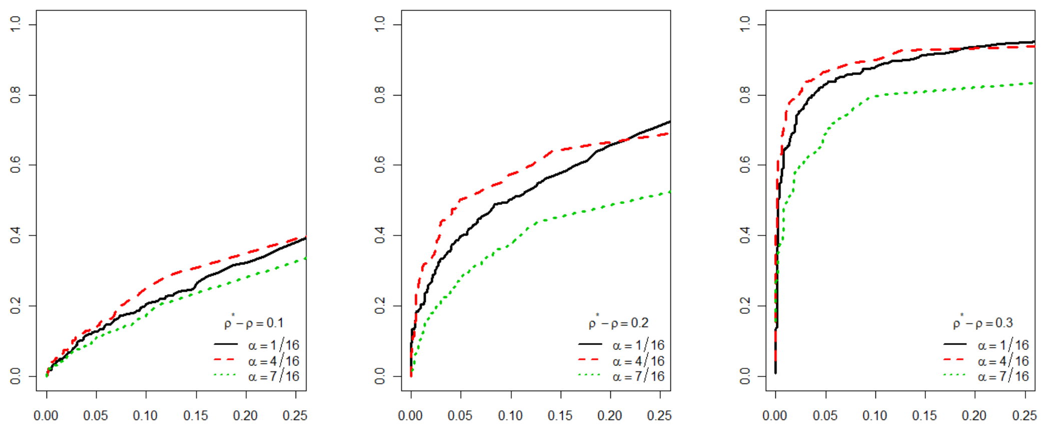
Kriterijaus galią taip pat įtakoja ir pasikeitusio segmento pradžios pozicija. Kuo vėliau prasideda pasikeitęs segmentas, tuo mažesnė kriterijaus galia ($n = 1000$, $\delta = 0.4$, $\ell^*n^{-1} = 0.1$, $\rho = 0.5$, $\rho^* = 0.8$):



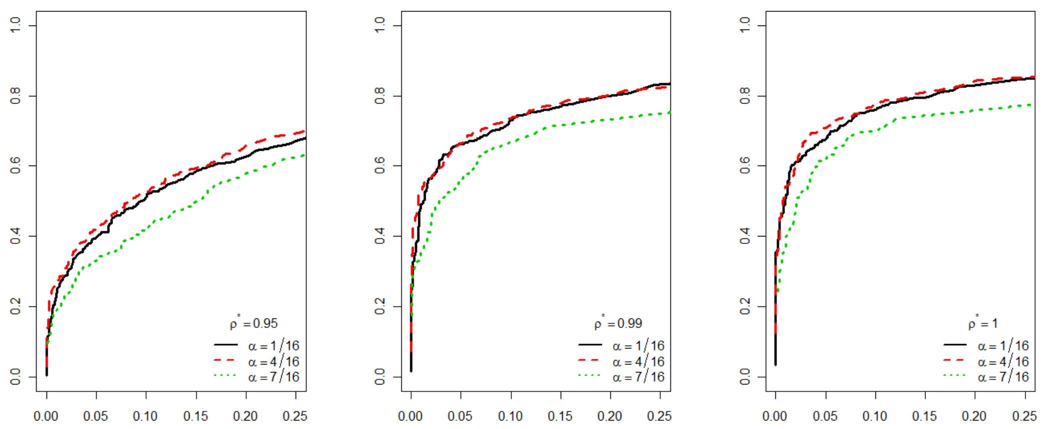
Pasiūlytas kriterijus yra pagrįstas dalinių parametro ρ įvertinių procesu

$r_n(t), t \in [0,1]$. Skirtumas tarp šio proceso reikšmių nesant ir esant pasikeitusiam segmentui mažėja, kai $t \to 1$. Taigi kriterijaus galia didesnė, kai turima daugiau duomenų po pasikeitusio segmento.

Parametrų ρ ir ρ^* įtaka. Kriterijaus galia mažėja mažėjant skirtumui $\rho * -\rho$ ($n = 1000$, $\delta = 0.4$, $k^* n^{-1} = 0.5$, $\ell^* n^{-1} = 0.1$, $\rho = 0.5$):



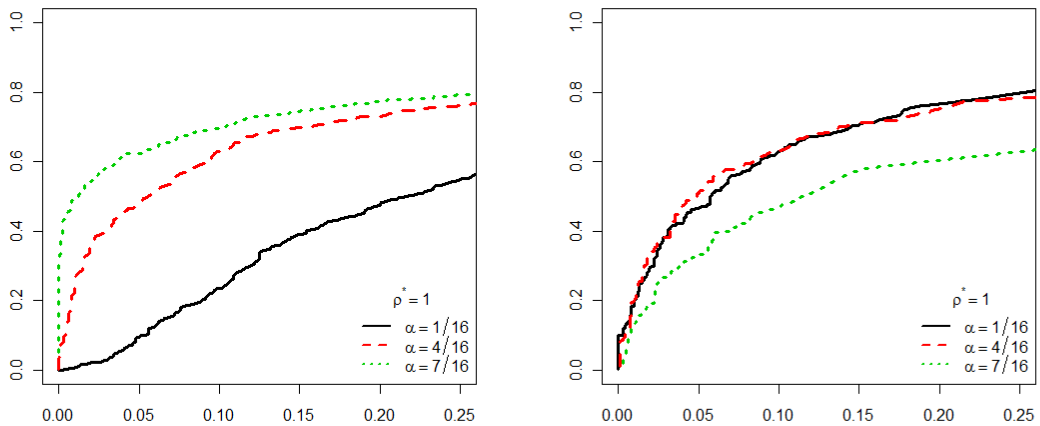
Iš pirmojo grafiko matome, kad kriterijaus galia yra ganėtinai nedidelė, kai $\rho^* - \rho = 0.1$. Toliau nubrėžkime galios grafikus, išlaikydami tą patį skirtumą $\rho^* - \rho = 0.1$, tačiau keisdami parametrų ρ ir ρ^* reikšmes. Matome, kad kriterijaus galia žymiai išauga, didinant šių parametrų reikšmes ($n = 1000$, $\delta = 0.4$, $k^* n^{-1} = 0.5$, $\ell^* n^{-1} = 0.1$):



Taigi pasiūlytas kriterijus galingiausias aptinkant pasikeitimus iš stacionarios būklės į nestacionarią ir pasikeitimus, kai parametro ρ reikšmės yra ganėtinai didelės.

Parametro α įtaka. Kaip matyti iš aukščiau pateiktų grafikų, didžiausia kriterijaus galia gauta, kai $\alpha = 1/4$. Kai α reikšmės artimos $1/2$, galia žymiai sumažėja, išskyrus atvejį su trumpu (2%) pasikeitusiu segmentu.

Kriterijų galios palyginimas. Palyginę 3.1.1 ir 3.2.1 skyreliuose pateiktus galios grafikus matome, kad antrasis kriterijus, pagrįstas modelio dalinių parametrų įvertinių procesu, yra galingesnis už pirmąjį kriterijų, pagrįstą modelio paklaidų dalinių sumų procesu. Tačiau pastarasis kriterijus tampa galingesnis, kai pasikeitęs segmentas yra arčiau stebėjimų pradžios. Taip yra todėl, kad (priešingai antrajam) pirmasis kriterijus nėra jautrus pasikeitusio segmento pradžios pozicijai. Žemiau pateikti galios grafikai, kai $k^*n^{-1} = 0.2$ ($n = 1000$, $\ell^*n^{-1} = 0.1$, $\rho = 0.9$, $\rho^* = 1$, $\delta = 0.15$):



3.1 pav.: Kriterijaus, pagrįsto paklaidų dalinių sumų procesu (kairėje), ir kriterijaus, pagrįsto parametro ρ dalinių įvertinių procesu (dešinėje), galios grafikai, kai $k^*n^{-1} = 0.2$.

4 skyrius

AR(1) modelio pasikeitusio segmento vertinimas

Šiame skyriuje kiekvienam natūriniam skaičiui $n \in \mathbb{N}$ nagrinėjamas pirmos eilės autoregresinis modelis su epideminiu pasikeitimu:

$$y_i^{(n)} = \rho_n y_{i-1}^{(n)} \mathbf{1}_{I^{*c}}(i) + \rho_n^* y_{i-1}^{(n)} \mathbf{1}_{I^*}(i) + \varepsilon_i^{(n)}, \tag{4.1}$$

čia $i \in N_n := \{1, 2, \dots, n\}$. Stebėjimų indeksų intervalinių poaibių aibė I_n apibrėžiama taip:

$$I_n := \{\{k+1, \dots, k+\ell\}, \quad \ell = 1, \dots, n, \quad k = 0, \dots, n-\ell\}.$$

Šios aibės poaibis

$$I^* = I^*(n) = \{k_n^* + 1, \dots, k_n^* + \ell_n^*\} \in I_n$$

apibrėžia epideminį pasikeitimą su pradžia k_n^* ir ilgiu ℓ_n^*, epideminio pasikeitimo papildinys $I^{*c} = N_n \backslash I^*$. Šio skyriaus tikslas yra įvertinti nežinomus epideminio pasikeitimo pradžią k_n^* ir ilgį ℓ_n^*.

(4.1) modelis turi tenkinti šias prielaidas:

(A1) $\forall n \in \mathbb{N}$ paklaidos $\varepsilon_1^{(n)}, \dots, \varepsilon_n^{(n)}$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su vidurkiu $E\varepsilon_1^{(n)} = 0$ ir baigtine dispersija $\sigma^2 = E(\varepsilon_1^{(n)})^2 < \infty$;

(A2) $y_0^{(n)} = 0$;

(A3) $\exists \theta_0, \theta_1 \in (0,1): \quad \ell_n^* \in [\theta_0 n, \theta_1 n]$.

Trečioji prielaida (A3) reiškia, kad epideminio pasikeitimo ilgis ℓ_n^* turi būti proporcingas stebėjimų skaičiui n.

Siekiant supaprastinti žymėjimus, toliau indeksas n bus praleidžiamas. Aibėms $A, I \in I_n$ apibrėžkime

$$AI := A \cap I, \quad Q(A) := \sum_{i \in A} y_{i-1}^2, \quad R(A) := \sum_{i \in A} y_{i-1}\varepsilon_i, \quad S(A) := \sum_{i \in A} y_i y_{i-1}.$$

Toliau nagrinėjamos tik tokios aibės A, kurios priklauso stebėjimų indeksų intervalinių poaibių aibei I_n. Apibrėžkime

$$\hat{\rho}(A) := \frac{S(A)}{Q(A)},$$
$$RSS_n(A) := \sum_{i \in A^c} (y_i - \hat{\rho}(A^c) y_{i-1})^2 + \sum_{i \in A} (y_i - \hat{\rho}(A) y_{i-1})^2,$$

čia $A \in I_n$ ir $A^c = N_n \setminus A$.

(4.1) modelio parametrus ir epideminį pasikeitimą vertiname mažiausių kvadratų metodu:

$$(\hat{k^*}, \hat{k^*} + \hat{\ell^*}) = \hat{I}^* = \arg\min_{I \in I_n} RSS_n(I). \tag{4.2}$$

Dydžiui $0 \leq \beta < \theta_0/3$ apibrėžkime

$$I_\beta = (\hat{k^*} + \beta n, \hat{k^*} + \hat{\ell^*} - \beta n), \quad J_\beta = [1, \hat{k^*} - \beta n] \cup [\hat{k^*} + \hat{\ell^*} + \beta n, n].$$

Įrodant $\hat{I}^*$ įvertinių suderinamumą tinkamas β pasirinkimas užtikrina, kad su didele tikimybe abu intervalai I_β ir J_β yra netušti. Nagrinėsime ρ ir ρ^* įvertinius, apibrėžtus tokiu būdu:

$$\hat{\rho}^* = \hat{\rho}(I_\beta), \quad \hat{\rho} = \hat{\rho}(J_\beta). \tag{4.3}$$

4.1 Pasikeitimas iš stacionarios būklės į stacionarią

Šiame skyrelyje įrodoma žemiau pateikta 4.1 teorema (4.1) modelio parametrų k^*, ℓ^*, ρ ir ρ^* įvertiniams, kai autoregresinis procesas keičiasi iš stacionarios būklės į stacionarią.

4.1 teorema. *Tarkime,* (4.1) *modelio parametrai* $|\rho| < 1$, $|\rho^*| < 1$ *ir tenkinamos* $(A1)$-$(A3)$ *prielaidos. Tada*

(i) *parametrų* (k^*, ℓ^*) (4.2) *įvertiniams teisinga:*

$$|\hat{k^*} - k^*| + |\hat{\ell^*} - \ell^*| = O_P\Big(\frac{\sqrt{n}}{|\rho - \rho^*|}\Big);$$

(ii) *parametrų* ρ *ir* ρ^* (4.3) *įvertiniams su* $\beta = 0$ *teisinga:*

$$|\rho^* - \hat{\rho^*}| = O_P(n^{-1/2}), \quad |\rho - \hat{\rho}| = O_P(n^{-1/2}).$$

4.1.1 Pagalbinės lemos

Prieš pereinant prie 4.1 teoremos įrodymo, įrodykime keletą pagalbinių lemų.

4.1 lema. *Sakykime,* $A \in I_n$. *Tada* (4.1) *modeliui teisinga tapatybė*

$$RSS_n(A) - RSS_n(I^*) = (\rho - \rho^*)^2\delta_1(A, I^*) + 2(\rho - \rho^*)\delta_2(A, I^*) + \delta_3(A, I^*), \quad (4.4)$$

čia

$$\delta_1(A, I^*) = \frac{Q(AI^*)Q(AI^{*c})}{Q(A)} + \frac{Q(A^cI^*)Q(A^cI^{*c})}{Q(A^c)},$$
$$\delta_2(A, I^*) = \frac{Q(AI^*)R(A)}{Q(A)} + \frac{Q(A^cI^*)R(A^c)}{Q(A^c)} - R(I^*),$$
$$\delta_3(A, I^*) = r_1(I^*) - r_1(A), \quad r_1(A) = \frac{R^2(A)}{Q(A)} + \frac{R^2(A^c)}{Q(A^c)}.$$

Įrodymas. Kadangi $\mathbf{1}_A\mathbf{1}_{A^c} = 0$, funkciją RSS_n galima užrašyti tokiu būdu:

$$RSS_n(A) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - \hat{\rho}(A)y_{i-1}\mathbf{1}_A - \hat{\rho}(A^c)y_{i-1}\mathbf{1}_{A^c}]^2.$$

Pažymėkime

$$v_A(i) := [(\hat{\rho}(A) - \rho^*)\mathbf{1}_{AI^*} + (\hat{\rho}(A) - \rho)\mathbf{1}_{AI^{*c}} + (\hat{\rho}(A^c) - \rho^*)\mathbf{1}_{A^cI^*} + (\hat{\rho}(A^c) - \rho)\mathbf{1}_{A^cI^{*c}}](i).$$

Tada

$$\begin{aligned} RSS_n(A) &= \sum_{i=1}^{n}[y_i - \rho^* y_{i-1}\mathbf{1}_{I^*}(i) - \rho y_{i-1}\mathbf{1}_{I^{*c}}(i) - v_A(i)y_{i-1}]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}[\varepsilon_i - v_A(i)y_{i-1}]^2. \end{aligned}$$

Taigi

$$\begin{aligned} RSS_n(A) - RSS_n(I^*) &= \sum_{i=1}^{n}[\varepsilon_i - v_A(i)y_{i-1}]^2 - \sum_{i=1}^{n}[\varepsilon_i - v_{I^*}(i)y_{i-1}]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_A^2(i)y_{i-1}^2 - \sum_{i=1}^{n} v_{I^*}^2(i)y_{i-1}^2 \\ &+ 2\sum_{i=1}^{n} v_{I^*}(i)y_{i-1}\varepsilon_i - 2\sum_{i=1}^{n} v_A(i)y_{i-1}\varepsilon_i. \end{aligned}$$

Kadangi aibių AI^*, AI^{*c}, A^cI^* ir A^cI^{*c} sankirtos paporiui yra tuščios aibės,

$$v_A^2 = (\hat{\rho}(A) - \rho^*)^2\mathbf{1}_{AI^*} + (\hat{\rho}(A) - \rho)^2\mathbf{1}_{AI^{*c}} + (\hat{\rho}(A^c) - \rho^*)^2\mathbf{1}_{A^cI^*} + (\hat{\rho}(A^c) - \rho)^2\mathbf{1}_{A^cI^{*c}}$$

ir

$$v_{I^*}^2 = (\hat{\rho}(I^*) - \rho^*)^2\mathbf{1}_{I^*} + (\hat{\rho}(I^{*c}) - \rho)^2\mathbf{1}_{I^{*c}}.$$

Taigi

$$\begin{aligned}
RSS_n(A) - RSS_n(I^*) = &(\hat{\rho}(A) - \rho^*)^2 Q(AI^*) + (\hat{\rho}(A) - \rho)^2 Q(AI^{*c}) \\
&+ (\hat{\rho}(A^c) - \rho^*)^2 Q(A^c I^*) + (\hat{\rho}(A^c) - \rho)^2 Q(A^c I^{*c}) \\
&- (\hat{\rho}(I^*) - \rho^*)^2 Q(I^*) - (\hat{\rho}(I^{*c}) - \rho)^2 Q(I^{*c}) \\
&- 2(\hat{\rho}(A) - \rho^*) R(AI^*) - 2(\hat{\rho}(A) - \rho) R(AI^{*c}) \\
&- 2(\hat{\rho}(A^c) - \rho^*) R(A^c I^*) - 2(\hat{\rho}(A^c) - \rho) R(A^c I^{*c}) \\
&+ 2(\hat{\rho}(I^*) - \rho^*) R(I^*) + 2(\hat{\rho}(I^{*c}) - \rho) R(I^{*c}).
\end{aligned}$$

Įvedus žymėjimus

$$B(A) := (\hat{\rho}(A) - \rho^*)^2 Q(AI^*) + (\hat{\rho}(A) - \rho)^2 Q(AI^{*c})$$

ir

$$D(A) := (\hat{\rho}(A) - \rho^*) R(AI^*) + (\hat{\rho}(A) - \rho) R(AI^{*c})$$

turime

$$\begin{aligned}
RSS_n(A) - RSS_n(I^*) = &[B(A) + B(A^c) - B(I^*) - B(I^{*c})] \\
&+ 2[D(I^*) + D(I^{*c}) - D(A) - D(A^c)].
\end{aligned}$$

Kiekvienai aibei $A \in I_n$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}(A) - \rho^* &= \frac{S(AI^*) + S(AI^{*c})}{Q(A)} - \rho^* = \frac{\rho^* Q(AI^*) + \rho Q(AI^{*c}) + R(A)}{Q(A)} - \rho^* \\
&= (\rho - \rho^*) \frac{Q(AI^{*c})}{Q(A)} + \frac{R(A)}{Q(A)}
\end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}(A) - \rho &= \frac{S(AI^*) + S(AI^{*c})}{Q(A)} - \rho = \frac{\rho^* Q(AI^*) + \rho Q(AI^{*c}) + R(A)}{Q(A)} - \rho \\
&= (\rho^* - \rho) \frac{Q(AI^*)}{Q(A)} + \frac{R(A)}{Q(A)}.
\end{aligned}$$

Iš čia gauname, kad

$$\begin{aligned}
B(A) &= (\hat{\rho}(A) - \rho^*)^2 Q(AI^*) + (\hat{\rho}(A) - \rho)^2 Q(AI^{*c}) \\
&= \frac{1}{Q^2(A)}\Big[(\rho - \rho^*)^2 Q(AI^*)Q(AI^{*c})Q(A) + R^2(A)Q(A)\Big] \\
&= (\rho - \rho^*)^2 \frac{Q(AI^*)Q(AI^{*c})}{Q(A)} + \frac{R^2(A)}{Q(A)}
\end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned}
D(A) &= (\hat{\rho}(A) - \rho^*)R(AI^*) + (\hat{\rho}(A) - \rho)R(AI^{*c}) \\
&= \frac{1}{Q(A)}(\rho - \rho^*)[R(AI^*)Q(AI^{*c}) - R(AI^{*c})Q(AI^*)] + \frac{R^2(A)}{Q(A)} \\
&= (\rho - \rho^*)\Big[R(AI^*) - \frac{R(A)Q(AI^*)}{Q(A)}\Big] + \frac{R^2(A)}{Q(A)}.
\end{aligned}$$

Taigi

$$\begin{aligned}
B(A) + B(A^c) =& (\rho - \rho^*)^2 \frac{Q(AI^*)Q(AI^{*c})}{Q(A)} + \frac{R^2(A)}{Q(A)} \\
&+ (\rho - \rho^*)^2 \frac{Q(A^cI^*)Q(A^cI^{*c})}{Q(A^c)} + \frac{R^2(A^c)}{Q(A^c)} \\
=& (\rho - \rho^*)^2 \delta_1(A, I^*) + r_1(A).
\end{aligned}$$

Kadangi $\delta_1(I^*, I^*) = 0$, gauname

$$B(I^*) + B(I^{*c}) = r_1(I^*).$$

Taigi

$$B(A) + B(A^c) - B(I^*) - B(I^{*c}) = (\rho - \rho^*)^2 \delta_1(A, I^*) + r_1(A) - r_1(I^*).$$

Taip pat gauname, kad

$$\begin{aligned}
D(A) + D(A^c) &= (\rho - \rho^*)R(A)\Big(1 - \frac{Q(AI^*)}{Q(A)}\Big) + (\rho - \rho^*)R(A^c)\Big(1 - \frac{Q(A^cI^*)}{Q(A^c)}\Big) \\
&= -(\rho - \rho^*)\delta_2(A, I^*) + r_1(A).
\end{aligned}$$

Iš $\delta_2(I^*, I^*) = 0$ seka, kad $D(I^*) + D(I^{*c}) = r_1(I^*)$. Taigi

$$D(I^*) + D(I^{*c}) - D(A) - D(A^c) = r_1(I^*) - r_1(A) + (\rho - \rho^*)\delta_2(A, I^*)$$

ir

$$\begin{aligned} RSS_n(A) - RSS_n(I^*) =& (\rho - \rho^*)^2\delta_1(A, I^*) + r_1(A) - r_1(I^*) \\ & + 2(r_1(I^*) - r_1(A)) + 2(\rho - \rho^*)\delta_2(A, I^*) \\ =& (\rho - \rho^*)^2\delta_1(A, I^*) + 2(\rho - \rho^*)\delta_2(A, I^*) + r_1(I^*) - r_1(A). \end{aligned}$$

■

4.1 pastaba. 4.1 lema teisinga bet kokiems (4.1) modelio parametrams ρ ir ρ^*, t.y. ne tik esant pasikeitimui iš stacionarios būklės į stacionarią.

4.2 lema. *Tarkime, tenkinamos* (4.1) *teoremos sąlygos. Tada*

$$n^{-1/2} \max_{1 \le i \le n} |y_i| \xrightarrow[n \to \infty]{\mathrm{P}} 0.$$

Įrodymas. Pastebime, kad

$$y_i = \rho_i y_{i-1} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

čia

$$\rho_i = \rho^* \mathbf{1}_{I^*}(i) + \rho \mathbf{1}_{I^{*c}}(i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Taigi

$$y_i = \sum_{k=1}^{i} \Big(\prod_{j=k+1}^{i} \rho_j \Big) \varepsilon_k, \quad i = 1, \dots, n. \tag{4.5}$$

Pažymėję $d_{ik} = \prod_{j=k+1}^{i} \rho_j$ kiekvienam $\tau > 0$ apibrėžiame

$$P_n(\tau) := P(n^{-1/2} \max_{1 \le i \le n} |y_i| > \tau) \le \sum_{i=1}^{n} P\Big(\Big| \sum_{k=1}^{i} d_{ik}\varepsilon_i \Big| > \tau n^{1/2} \Big).$$

Kadangi pagal (A1) prielaidą $E\varepsilon_i = 0$, (4.1) modelio paklaidas galime užrašyti tokiu būdu:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i =& \varepsilon_i' + \varepsilon_i'', \\
\varepsilon_i' =& \varepsilon_i \mathbf{1}_{\{|\varepsilon_i| \le \delta n^{1/2}\}} - E\varepsilon_i \mathbf{1}_{\{|\varepsilon_i| \le \delta n^{1/2}\}}, \\
\varepsilon_i'' =& \varepsilon_i \mathbf{1}_{\{|\varepsilon_i| > \delta n^{1/2}\}} - E\varepsilon_i \mathbf{1}_{\{|\varepsilon_i| > \delta n^{1/2}\}},
\end{aligned}$$

kur $\delta > 0$ bet koks teigiamas skaičius. Tada $P_n(\tau) \le P_n'(\tau/2) + P_n''(\tau/2)$, čia

$$\begin{aligned}
P_n'(\tau/2) &= \sum_{i=1}^{n} P\Big(\Big| \sum_{k=1}^{i} d_{ik} \varepsilon_i' \Big| > \frac{\tau}{2} n^{1/2} \Big), \\
P_n''(\tau/2) &= \sum_{i=1}^{n} P\Big(\Big| \sum_{k=1}^{i} d_{ik} \varepsilon_i'' \Big| > \frac{\tau}{2} n^{1/2} \Big).
\end{aligned}$$

Pritaikę Čebyšovo nelygybę, turime:

$$\begin{aligned}
P_n''(\tau/2) &\le 4\tau^{-2} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} E\Big(\sum_{k=1}^{i} d_{ik} \varepsilon_i'' \Big)^2 = 4\tau^{-2} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} d_{ik}^2 E(\varepsilon_i'')^2 \\
&\le 4\tau^{-2} (1 - \rho_{max}^2)^{-1} E(\varepsilon_1'')^2,
\end{aligned}$$

čia $\rho_{max} = \max\{\rho, \rho^*\}$. Remiantis tuo, kad

$$E(\varepsilon_1'')^2 = E\varepsilon_1^2 \mathbf{1}\{|\varepsilon_1| > \delta n^{1/2}\} - (E\varepsilon_1)^2 \mathbf{1}\{|\varepsilon_1| > \delta n^{1/2}\} \le E\varepsilon_1^2 \mathbf{1}\{|\varepsilon_1| > \delta n^{1/2}\} \to 0,$$

kai $n \to \infty$, gauname:

$$\lim_{n\to\infty} P_n''(\tau/2) = 0. \tag{4.6}$$

Tarkime, $q > 2$. Tada naudodami Čebyšovo ir Rozentalio nelygybes galime įvertinti dydį $P_n'(\tau/2)$:

$$\begin{aligned}
P_n'(\tau) &\leq 2^q \tau^{-q} n^{-q/2} \sum_{i=1}^{n} E\Big(\sum_{k=1}^{i} d_{ik}\varepsilon_i'\Big)^q \\
&\leq 2^q c_q \tau^{-q} n^{-q/2} \sum_{i=1}^{n} \Big[\Big(\sum_{k=1}^{i} d_{ik}^2 E(\varepsilon_i')^2\Big)^{q/2} + \sum_{k=1}^{i} d_{ik}^2 E|\varepsilon_i'|^q\Big] \\
&\leq 2^q c_q \tau^{-q}(1-\rho_{max}^2)^{-q/2} n^{1-q/2} E|\varepsilon_1'|^q,
\end{aligned}$$

čia konstanta c_q priklauso tik nuo q. Kadangi

$$E|\varepsilon_1'|^q \leq 2^q E|\varepsilon_1|^q \mathbf{1}_{\{|\varepsilon_1| \leq \delta n^{1/2}\}} \leq 2^q \delta^{q-2} n^{(q-2)/2} E\varepsilon_1^2,$$

gauname

$$P_n'(\tau/2) \leq 2^q c_q \tau^{-q}(1-\rho_{max}^2)^{-q/2}\delta^{q-2}.$$

Kadangi $\delta > 0$ parinktas laisvai, gauname

$$\lim_{n\to\infty} P_n'(\tau/2) = 0. \tag{4.7}$$

Remiantis (4.6) ir (4.7), gauname, kad $\lim_{n\to\infty} P_n(\tau) = 0$. ■

Tegul $|A|$ žymi aibės $A \in I_n$ elementų skaičių.

4.3 lema. *Tarkime, tenkinamos* (4.1) *teoremos sąlygos. Tada*

(*i*) *seka* $\left\{\sup_{A\in I_n} \frac{|R(A)|}{\sqrt{n}}, n \geq 1\right\}$ *yra stochastiškai aprėžta;*

(*ii*) $\sup_{A\in I_n, A\subset I^*} \left|\frac{Q(A)}{n} - \frac{|A|n^{-1}\sigma^2}{1-\rho^{*2}}\right| = o_P(1)$, *kai* $n \to \infty$*;*

(*iii*) $\sup_{A\in I_n, A\subset I^{*c}} \left|\frac{Q(A)}{n} - \frac{|A|n^{-1}\sigma^2}{1-\rho^2}\right| = o_P(1)$, *kai* $n \to \infty$.

Įrodymas. (i) Kiekvienai aibei $A = \{k+1, \ldots, k+\ell\} \in I_n$,

$$|R(A)| \leq 2 \max_{1\leq k\leq n} \Big|\sum_{i=1}^{k} y_{i-1}\varepsilon_i\Big|.$$

Nesunkiai galima įsitikinti, kad $\left(\sum_{i=1}^{k} y_{i-1}\varepsilon_i, k \geq 1\right)$ yra martingalas σ-algebrų $\mathcal{F}_k = \sigma(\varepsilon_j, j = 1, \ldots, k), k \geq 1$ atžvilgiu:

$$E(\sum_{i=1}^{k} y_{i-1}\varepsilon_i \big| \mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} y_{i-1}\varepsilon_i + E(y_{k-1}\varepsilon_k | \mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} y_{i-1}\varepsilon_i.$$

Taigi $\left(\Big|\sum_{i=1}^{k} y_{i-1}\varepsilon_i\Big|, k \geq 1\right)$ tuo pačiu yra ir submartingalas. Pritaikę Dubo nelygybę submartingalams, turime:

$$E \max_{1\leq k\leq n} \Big(\sum_{i=1}^{k} y_{i-1}\varepsilon_i\Big)^2 \leq cE\Big(\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\varepsilon_i\Big)^2 = c\sum_{i=1}^{n} Ey_{i-1}^2\varepsilon_i^2 = c\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} Ey_{i-1}^2.$$

Panaudoję (4.5) išraišką ir pažymėję $\widetilde{\rho} = \max\{\rho^*, \rho\}$, gauname:

$$Ey_i^2 = \sigma^2 \sum_{k=1}^{i} \prod_{j=k+1}^{i} \rho_j^2 \leq \sigma^2 \sum_{k=1}^{i} \widetilde{\rho}^{2(i-k)} \leq \frac{\sigma^2}{1-\widetilde{\rho}^2}.$$

Taigi $E \max_{1\leq k\leq n} \left(\sum_{i=1}^{k} y_{i-1}\varepsilon_i\right)^2 \leq c\sigma^4 n/(1-\widetilde{\rho}^2)$. Iš čia seka, kad seka $\left\{\sup_{A\in I_n} \frac{|R(A)|}{\sqrt{n}}, n \geq 1\right\}$ yra stochastiškai aprėžta.

(ii) Kiekvienam $i \in I^*$ turime

$$y_i = \rho^* y_{i-1} + \varepsilon_i.$$

Tegu $A = \{k+1, \ldots, k+\ell\} \subset I^*$. Tada kiekvienam $i \in A$ teisinga:

$$y_i^2 = \rho^{*2} y_{i-1}^2 + 2\rho^* y_{i-1}\varepsilon_i + \varepsilon_i^2.$$

Susumavę pagal visus $i \in A$, gauname:

$$\rho^{*2} \sum_{i=k+1}^{k+\ell} y_{i-1}^2 = \sum_{i=k+1}^{k+\ell} y_i^2 - 2\rho^* \sum_{i=k+1}^{k+\ell} y_{i-1}\varepsilon_i - \sum_{i=k+1}^{k+\ell} \varepsilon_i^2.$$

Taigi

$$\sum_{i\in A} y_{i-1}^2 = -\frac{1}{1-\rho^{*2}} \Big\{[y_{k+\ell}^2 - y_k^2] - 2\rho^* \sum_{i=k+1}^{k+\ell} y_{i-1}\varepsilon_i - \sum_{i=k+1}^{k+\ell} \varepsilon_i^2\Big\} \tag{4.8}$$

ir

$$\max_{A\subset I^*}\Big|n^{-1}Q(A)-n^{-1}|A|\frac{\sigma^2}{1-\rho^{*2}}\Big|\le\max_{A\subset I^*}\Big|\frac{1}{n(1-\rho^{*2})}\sum_{i\in A}[\varepsilon_i^2-\sigma^2]\Big|$$
$$+\frac{2|\rho^*|}{n(1-\rho^{*2})}\max_{A\subset I^*}|R(A)|+\frac{2}{n(1-\rho^{*2})}\max_{1\le k\le n}y_k^2.$$

Remiantis 4.2 lema

$$\frac{2}{n(1-\rho^{*2})}\max_{1\le k\le n}y_k^2=o_P(1).$$

Pagal didžiųjų skaičių dėsnį

$$\max_{A\subset I^*}\Big|\frac{1}{n}\sum_{i\in A}[\varepsilon_i^2-\sigma^2]\Big|\le\frac{2}{n}\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k}[\varepsilon_i^2-\sigma^2]\Big|=o_P(1).$$

Remiantis šios lemos (i) atveju

$$\max_{A\subset I^*}|R(A)|=o_P(1).$$

Taigi, teisingas lemos (ii) teiginys.

(iii) Kiekvienam $i\in I^{*c}$ turime

$$y_i=\rho y_{i-1}+\varepsilon_i.$$

Tegu $A=\{k+1,\dots,k+\ell\}\subset I^{*c}$. Tada kiekvienam $i\in A$ teisinga:

$$y_i^2=\rho^2y_{i-1}^2+2\rho y_{i-1}\varepsilon_i+\varepsilon_i^2.$$

Susumavę pagal visus $i\in A$, gauname:

$$\rho^2\sum_{i=k+1}^{k+\ell}y_{i-1}^2=\sum_{i=k+1}^{k+\ell}y_i^2-2\rho\sum_{i=k+1}^{k+\ell}y_{i-1}\varepsilon_i-\sum_{i=k+1}^{k+\ell}\varepsilon_i^2.$$

Taigi

$$\sum_{i\in A}y_{i-1}^2=-\frac{1}{1-\rho^2}\Big\{[y_{k+\ell}^2-y_k^2]-2\rho\sum_{i=k+1}^{k+\ell}y_{i-1}\varepsilon_i-\sum_{i=k+1}^{k+\ell}\varepsilon_i^2\Big\}\tag{4.9}$$

ir

$$\max_{A\subset I^{*c}}\left|n^{-1}Q(A)-n^{-1}|A|\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}\right| \le \max_{A\subset I^{*c}}\left|\frac{1}{n(1-\rho^2)}\sum_{i\in A}[\varepsilon_i^2-\sigma^2]\right|$$
$$+\frac{2|\rho|}{n(1-\rho^2)}\max_{A\subset I^{*c}}|R(A)|+\frac{2}{n(1-\rho^2)}\max_{1\le k\le n}y_k^2.$$

Remiantis 4.2 lema
$$\frac{2}{n(1-\rho^2)}\max_{1\le k\le n}y_k^2=o_P(1).$$
Pagal didžiųjų skaičių dėsnį

$$\max_{A\subset I^{*c}}\left|\frac{1}{n}\sum_{i\in A}[\varepsilon_i^2-\sigma^2]\right| \le \frac{2}{n}\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}[\varepsilon_i^2-\sigma^2]\right|=o_P(1).$$

Remiantis šios lemos (i) atveju

$$\max_{A\subset I^{*c}}|R(A)|=o_P(1).$$

Taigi teisingas lemos (ii) teiginys. ∎

Aibėms $A, I\in I_n$ apibrėžkime dydį $\Delta_1(A,I)$:

$$\Delta_1(A,I)=\frac{|AI|\cdot|AI^c|\cdot\sigma^2}{|AI|(1-\rho^2)+|AI^c|(1-\rho^{*2})}+\frac{|A^cI|\cdot|A^cI^c|\cdot\sigma^2}{|A^cI|(1-\rho^2)+|A^cI^c|(1-\rho^{*2})}. \tag{4.10}$$

4.4 lema. *Tarkime, tenkinamos* (4.1) *teoremos sąlygos ir $A\in I_n$. Tada dydžiui $\Delta_1(A,I^*)$, apibrėžtam (4.10) tapatybe ir dydžiams $\delta_i(A,I^*), i=1,2,3$, apibrėžtiems 4.1 lemoje, teisinga:*

(i) $\sup_{A\in I_n}|\delta_1(A,I^*)-\Delta_1(A,I^*)|\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}}0$;

(ii) $P(\sup_{A\in I_n}|2(\rho-\rho^*)\delta_2(A,I^*)+\delta_3(A,I^*)|>M|\rho-\rho^*|\sqrt{n})\to 0,$ *kai* $n\to\infty,\ M\to\infty$.

Įrodymas.

(i) Pažymėkime $S := |\delta_1(A, I^*) - \Delta_1(A, I^*)|$. Pastebime, kad

$$\begin{aligned}
S \leq &\left|\frac{Q(AI^*)Q(AI^{*c})}{Q(A)} - \frac{|AI^*| \cdot |AI^{*c}| \cdot \sigma^2}{|AI^*|(1-\rho^2) + |AI^{*c}|(1-\rho^{*2})}\right| \\
&+ \left|\frac{Q(A^cI^*)Q(A^cI^{*c})}{Q(A^c)} - \frac{|A^cI^*| \cdot |A^cI^{*c}| \cdot \sigma^2}{|A^cI^*|(1-\rho^2) + |A^cI^{*c}|(1-\rho^{*2})}\right| \\
= &\left|\left(\frac{1}{Q(AI^*)} + \frac{1}{Q(AI^{*c})}\right)^{-1} - \left(\frac{(1-\rho^{*2})}{|AI^*|\sigma^2} + \frac{(1-\rho^2)}{|AI^{*c}|\sigma^2}\right)^{-1}\right| \\
&+ \left|\left(\frac{1}{Q(A^cI^*)} + \frac{1}{Q(A^cI^{*c})}\right)^{-1} - \left(\frac{(1-\rho^{*2})}{|A^cI^*|\sigma^2} + \frac{(1-\rho^2)}{|A^cI^{*c}|\sigma^2}\right)^{-1}\right|.
\end{aligned}$$

Remiantis 4.3 lema, kai $n \to \infty$, turime

$$\begin{aligned}
\sup_{A \in I_n}\left|\frac{Q(AI^*)}{n} - \frac{|AI^*|n^{-1}\sigma^2}{1-\rho^{*2}}\right| &= o_P(1), \\
\sup_{A \in I_n}\left|\frac{Q(AI^{*c})}{n} - \frac{|AI^{*c}|n^{-1}\sigma^2}{1-\rho^2}\right| &= o_P(1), \\
\sup_{A \in I_n}\left|\frac{Q(A^cI^*)}{n} - \frac{|A^cI^*|n^{-1}\sigma^2}{1-\rho^{*2}}\right| &= o_P(1), \\
\sup_{A \in I_n}\left|\frac{Q(A^cI^{*c})}{n} - \frac{|A^cI^{*c}|n^{-1}\sigma^2}{1-\rho^2}\right| &= o_P(1).
\end{aligned}$$

Taigi teisingas teoremos (i) teiginys.

(ii) Dydis

$$\delta_1(A, I^*) = \frac{Q(AI^*)Q(AI^{*c})}{Q(A)} + \frac{Q(A^cI^*)Q(A^cI^{*c})}{Q(A^c)}.$$

Turime, kad $Q(AI^*) \leq Q(A)$ ir $Q(A^cI^*) \leq Q(A^c)$. Be to, remiantis 4.3 lema dydžiai $R(A)$, $R(A^c)$, $R(I^*)$, $R(I^{*c})$ yra $O_P(n^{1/2})$. Taigi gauname

$$|\delta_2(A, I^*)| \leq |R(A)| + |R(A^c)| + |R(I^*)| = O_P(n^{1/2}).$$

Be to, remiantis 4.3 lema dydžiai $Q(A)$, $Q(A^c)$, $Q(I^*)$, $Q(I^{*c})$ yra $O_P(n)$ ir

$$|\delta_3(A, I^*)| \leq \frac{R^2(I^*)}{Q(I^*)} + \frac{R^2(I^{*c})}{Q(I^{*c})} + \frac{R^2(A)}{Q(A)} + \frac{R^2(A^c)}{Q(A^c)} = O_P(1).$$

Taigi teisingas teoremos (ii) tvirtinimas. ■

4.5 lema. *Tarkime,* $A = \{k+1, \ldots, k+\ell\} \in I_n$ *ir* $I = \{j+1, \ldots, j+m\} \in I_n$. *Tada dydžiui* $\Delta := \Delta_1(A, I)$*, apibrėžtam (4.10) tapatybe, teisinga nelygybė*

$$\Delta \geq c_0\big(|j-k|+|\ell-m|\big) \min\left\{\left(1-\frac{|j-k|+|\ell-m|}{\ell}\right), \left(1-\frac{|j-k|+|\ell-m|}{n-\ell}\right)\right\}, \tag{4.11}$$

čia $c_0 = 2^{-1}\sigma^2 \min\{(1-\rho^2)^{-1}, (1-\rho^{*2})^{-1}\}$.

Įrodymas. Dydį $\Delta_1(A, I)$ galima įvertinti iš apačios $\Delta_1(A, I) \geq 2c_0\Delta_1'(A, I)$, čia

$$\Delta_1'(A, I) = \frac{|AI| \cdot |AI^c|}{|A|} + \frac{|A^cI| \cdot |A^cI^c|}{|A^c|}.$$

Toliau išnagrinėkime visus galimus atvejus:

a) $k < j < k+\ell < j+m$.

Tada

$$\Delta_1'(A, I) = (j-k)\left(1-\frac{j-k}{\ell}\right) + (j-k+m-\ell)\left(1-\frac{j-k+m-\ell}{n-\ell}\right). \tag{4.12}$$

Jei $m > \ell$, atmetame pirmąjį (4.12) dėmenį ir gauname

$$\Delta_1'(A, I) > (j-k+m-\ell)\left(1-\frac{j-k+m-\ell}{n-\ell}\right).$$

Iš čia gaunama (4.11) nelygybė. Jei $m < \ell$, atmetame antrąjį (4.12) dėmenį. Pasinaudoję tuo, kad $j+m > k+\ell$, gauname $j-k > \ell-m$. Taigi $2^{-1}((j-k)+(\ell-m)) \leq j-k \leq (j-k)+(\ell-m)$ ir

$$\Delta_1'(A, I) > 2^{-1}((j-k)+(\ell-m))\left(1-\frac{(j-k)+(\ell-m)}{\ell}\right).$$

Iš čia gaunama (4.11) nelygybė.

b) $k < j < j+m < k+\ell$.

Turime

$$\Delta_1'(A, I) = \frac{(\ell-m)(n-\ell)}{n-m} = (\ell-m)\left(1-\frac{\ell-m}{n-m}\right).$$

Remiantis tuo, kad $k+\ell > j+m >$, gauname $\ell-m > j-k$. Be to, $n-m>n-\ell$. Taigi $2^{-1}((\ell-m)+(j-k)) \leq \ell-m \leq (\ell-m)+(j-k)$ ir

$$\Delta_1'(A,I) \geq 2^{-1}((\ell-m)+(j-k))\left(1-\frac{(\ell-m)+(j-k)}{n-\ell}\right).$$

Iš pastarosios nelygybės gaunama (4.11).

c) $j<k<j+m<k+\ell$.

Tada

$$\Delta_1'(A,I) = (k-j+\ell-m)\Big(1-\frac{k-j+\ell-m}{\ell}\Big) + (k-j)\Big(1-\frac{k-j}{n-\ell}\Big). \quad (4.13)$$

Jei $\ell > m$, atmetame antrąjį (4.13) dėmenį ir gauname

$$\Delta_1'(A,I) > (k-j+\ell-m)\Big(1-\frac{k-j+\ell-m}{\ell}\Big).$$

Iš čia gaunama (4.11) nelygybė. Jei $m>\ell$, atmetame pirmąjį (4.13) dėmenį. Pasinaudoję tuo, kad $j+m<k+\ell$, gauname $k-j>m-\ell$. Taigi $2^{-1}((k-j)+(m-\ell)) \leq k-j \leq (k-j)+(m-\ell)$ ir

$$\Delta_1'(A,I) > 2^{-1}((k-j)+(m-\ell))\Big(1-\frac{(k-j)+(m-\ell)}{n-\ell}\Big).$$

Iš čia gaunama (4.11) nelygybė.

d) $j<k<k+\ell<j+m$.

Turime

$$\Delta_1'(A,I) = \frac{(m-\ell)(n-m)}{n-\ell} = (m-\ell)\left(1-\frac{m-\ell}{n-\ell}\right).$$

Remiantis tuo, kad $j+m>k+\ell$, gauname $m-\ell>k-j$. Taigi $2^{-1}((m-\ell)+(k-j)) \leq m-\ell \leq (m-\ell)+(k-j)$ ir

$$\Delta_1'(A,I) \geq 2^{-1}((m-\ell)+(k-j))\left(1-\frac{(m-\ell)+(k-j)}{n-\ell}\right).$$

Iš pastarosios nelygybės gaunama (4.11).

e) $k<k+\ell<j<j+m$ arba $j<j+m<k<k+\ell$.

Abiem atvejais turime

$$\Delta_1'(A, I) = m\left(1 - \frac{m}{n-l}\right).$$

Kadangi $m < n - \ell$, $\Delta_1'(A, I) > 0$, t.y kairioji (4.11) nelygybės pusė yra teigiama. Pasinaudoję tuo, kad $k - j > m$, gauname

$$\frac{|j-k| + |\ell - m|}{\ell} > 1$$

ir dešinioji (4.11) nelygybės pusė yra neigiama. Taigi įrodėme (4.11) nelygybę visoms galimoms aibių A ir I kombinacijoms. ▪

4.1.2 4.1 teoremos įrodymas

Pastebime, kad

$$P(RSS_n(\hat{I}^*) - RSS_n(I^*) \leq 0) = 1.$$

Remiantis (4.1) galima užrašyti:

$$RSS_n(\hat{I}^*) - RSS_n(I^*) = (\rho - \rho^*)^2 \delta_1(\hat{I}^*, I^*) + \tilde{\delta_3}(\hat{I}^*, I^*),$$

čia

$$\tilde{\delta_3}(\hat{I}^*, I^*) = 2(\rho - \rho^*)\delta_2(\hat{I}^*, I^*) + \delta_3(\hat{I}^*, I^*).$$

Taigi

$$\begin{aligned}
1 &= P(RSS_n(\hat{I}^*) - RSS_n(I^*) \leq 0) = P((\rho - \rho^*)^2 \delta_1(\hat{I}^*, I^*) + \tilde{\delta_3}(\hat{I}^*, I^*) \leq 0) \\
&\leq P((\rho - \rho^*)^2 \delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq -\tilde{\delta_3}(\hat{I}^*, I^*), -\tilde{\delta_3}(\hat{I}^*, I^*) \leq c) + P(-\tilde{\delta_3}(\hat{I}^*, I^*) > c) \\
&\leq P((\rho - \rho^*)^2 \delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq c) + P(|\tilde{\delta_3}(\hat{I}^*, I^*)| > c).
\end{aligned}$$

Įvertinkime tikimybę

$$\begin{aligned}
P_1 &:= P((\rho - \rho^*)^2 \delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq c) \\
&\leq P((\rho - \rho^*)^2 (\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq c, (\rho - \rho^*)^2 (\delta_1(\hat{I}^*, I^*) - \Delta_1(\hat{I}^*, I^*) \geq -\varepsilon) \\
&+ P(\rho - \rho^*)^2 (\delta_1(\hat{I}^*, I^*) - \Delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq -\varepsilon) \\
&\leq P((\rho - \rho^*)^2 \Delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq c + \varepsilon) + P(|(\rho - \rho^*)^2 (\delta_1(\hat{I}^*, I^*) - \Delta_1(\hat{I}^*, I^*)| \geq \varepsilon).
\end{aligned}$$

Taigi

$$\begin{aligned} &P((\rho-\rho^*)^2\Delta_1(\hat{I}^*, I^*) \le c+\varepsilon) \ge \\ &\ge 1 - P(|(\rho-\rho^*)^2(\delta_1(\hat{I}^*, I^*) - (\rho-\rho^*)^2\Delta_1(\hat{I}^*, I^*)| \ge \varepsilon) - P(|\tilde{\delta_3}(\hat{I}^*, I^*)| > c). \end{aligned}$$

Pagal 4.4 lemą

$$|\delta_1(\hat{I}^*, I^*) - \Delta_1(\hat{I}^*, I^*)| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 0$$

ir

$$P(|\tilde{\delta_3}(\hat{I}^*, I^*)| > M|\rho-\rho^*|\sqrt{n}) \to 0, \quad \text{kai} \quad n\to\infty,\ M\to\infty.$$

Pasirinkę $c = M|\rho-\rho^*|\sqrt{n}$, gauname

$$P\left((\rho-\rho^*)^2\Delta_1(\hat{I}^*, I^*) \le c+\varepsilon\right) \to 1, \quad \text{kai} \quad c\to\infty. \tag{4.14}$$

Pasinaudoję (4.14) ir 4.5 lema, baigiame 4.1 teoremos (i) teiginio įrodymą.

(ii) Iš pradžių įrodysime, kad

$$|\rho^* - \hat{\rho^*}| = O_P(n^{-1/2}),$$

čia $\hat{\rho}^* = \hat{\rho}(\hat{I}^*)$. Turime, kad

$$\rho^* - \hat{\rho^*} = \frac{\rho^*\sum_{i\in\hat{I}^*} y_{i-1}^2 - \sum_{i\in\hat{I}^*} y_i y_{i-1}}{Q(\hat{I}^*)}.$$

Remiantis tuo, kas paskutiniosios trupmenos skaitiklis

$$\sum_{i\in\hat{I}^*} y_{i-1}(\rho^* y_{i-1} - y_i) = -R(\hat{I}^*) + (\rho^*-\rho)Q(\hat{I}^* I^{*c}),$$

gauname

$$|\rho^* - \hat{\rho^*}| \le \frac{|R(\hat{I}^*)|}{Q(\hat{I}^*)} + |\rho-\rho^*|\frac{Q(\hat{I}^* I^{*c})}{Q(\hat{I}^*)}.$$

Remdamiesi šios teoremos (i) teiginiu tariame, kad $|\hat{k^*} - k^*| + |\hat{\ell^*} - \ell^*| \le \varepsilon\sqrt{n}|\rho-\rho^*|^{-1}$ su kaip norima mažu dydžiu $\varepsilon > 0$. Remdamiesi šia prielaida galime įvertinti

$$Q(\hat{I}^*) \geq \sum_{i=k^*+\varepsilon\sqrt{n}|\rho-\rho^*|^{-1}}^{k^*+\ell^*-\varepsilon\sqrt{n}|\rho-\rho^*|^{-1}} y_{i-1}^2 = O_P(n)$$

ir

$$Q(\hat{I}^* I^{*c}) \leq \sum_{i=k^*-\varepsilon\sqrt{n}|\rho-\rho^*|^{-1}}^{k^*} y_{i-1}^2 + \sum_{i=k^*+\ell^*}^{k^*+\ell^*+\varepsilon\sqrt{n}|\rho-\rho^*|^{-1}} y_{i-1}^2 = O_P(\varepsilon\sqrt{n}|\rho-\rho^*|^{-1}).$$

Be to $R(\hat{I}^*) = O_P(\sqrt{n})$. Iš čia gauname, kad $|\rho^* - \hat{\rho^*}| = O_P(n^{-1/2})$.

Įrodykime, kad

$$|\rho - \hat{\rho}| = O_P(n^{-1/2}),$$

čia $\hat{\rho} = \hat{\rho}(\hat{I}_0^{*c})$. Turime

$$\rho - \hat{\rho} = \frac{\rho \sum_{i \in \hat{I}^{*c}} y_{i-1}^2 - \sum_{i \in \hat{I}^{*c}} y_i y_{i-1}}{Q(\hat{I}^{*c})}.$$

Trupmenos skaitiklis

$$\sum_{i \in \hat{I}^{*c}} y_{i-1}(\rho y_{i-1} - y_i) = -R(\hat{I}^{*c}) - (1-\rho) Q(\hat{I}^{*c} I^*)$$

ir

$$|\rho - \hat{\rho}| \leq \frac{|R(\hat{I}^{*c})|}{Q(\hat{I}^{*c})} + (\rho - \rho^*) \frac{Q(\hat{I}^{*c} I^*)}{Q(\hat{I}^{*c})}.$$

Pasinaudoję prielaida, kad $|\hat{k^*} - k^*| + |\hat{\ell^*} - \ell^*| \leq \varepsilon\sqrt{n}|\rho-\rho^*|^{-1}$ su kaip norima mažu dydžiu $\varepsilon > 0$, gauname

$$Q(\hat{I}^{*c} I^*) \leq \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\varepsilon\sqrt{n}|\rho-\rho^*|^{-1}} y_{i-1}^2 + \sum_{i=k^*+\ell^*-\varepsilon\sqrt{n}|\rho-\rho^*|^{-1}}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2 = O_P(\varepsilon\sqrt{n}|\rho-\rho^*|^{-1}).$$

Be to $R(\hat{I}^{*c}) = O_P(\sqrt{n})$ ir $Q(\hat{I}^{*c}) = O_P(n)$. Iš čia gauname, kad $|\rho - \hat{\rho}| = O_P(n^{-1/2})$.

4.2 Pasikeitimas iš stacionarios būklės į nestacionarią

Šiame skyrelyje įrodoma žemiau pateikta 4.2 teorema (4.1) modelio parametrų k^*, ℓ^*, ρ ir ρ^* įvertiniams, kai autoregresinis procesas keičiasi iš stacionarios būklės į nestacionarią.

4.2 teorema. *Tarkime,* (4.1) *modelio parametrai* $|\rho| < 1$, $|\rho^*| = 1$ *ir tenkinamos* $(A1)$-$(A3)$ *prielaidos. Tada*

(i) *parametrų* (k^*, ℓ^*) (4.2) *įvertiniams teisinga:*

$$|\hat{k^*} - k^*| + |\hat{\ell^*} - \ell^*| = o_P(n);$$

(ii) *parametrų* ρ *ir* ρ^* (4.3) *įvertiniams su bet kuriuo* $0 < \beta < \theta_0/3$ *teisinga:*

$$|1 - \hat{\rho^*}| = O_P(n^{-1}), \quad |\rho - \hat{\rho}| = O_P(n^{-1/2}).$$

4.2.1 Pagalbinės lemos

Prieš pereinant prie 4.2 teoremos įrodymo, įrodykime keletą pagalbinių lemų dydžiams $R(A)$ ir $Q(A)$ atsižvelgdami į skirtingas aibių A ir I^* kombinacijos.

4.6 lema. *Tarkime, tenkinamos* (4.2) *teoremos sąlygos. Tegu* (τ_n) *žymi seką, artėjančią į begalybę, kai* $n \to \infty$. *Tada*

(i) *jei* $\tau_n/k^* \le 1$ *kiekvienam* $n \ge 1$, *tada kai* $n \to \infty$,

(a) $\max_{1 \le k \le \tau_n} \left| \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i y_{i-1} \right| = O_P(\sqrt{\tau_n})$;

(b) $\max_{k^* - \tau_n \le k \le k^*} \left| \sum_{i=k+1}^{k^*} \varepsilon_i y_{i-1} \right| = O_P(\sqrt{\tau_n})$;

(ii) *jei* $\tau_n/\ell^* \le 1$ *kiekvienam* $n \ge 1$, *tada kai* $n \to \infty$,

(a) $\max_{k^* < k \le k^* + \tau_n} \left| \sum_{i=k^*+1}^{k} \varepsilon_i y_{i-1} \right| = O_P(\tau_n)$;

(b) $\max_{k^* + \ell^* - \tau_n < k \le k^* + \ell^*} \left| \sum_{i=k+1}^{k^*+\ell^*} \varepsilon_i y_{i-1} \right| = O_P(\sqrt{n\tau_n})$;

(iii) *jei* $\tau_n/(n - k^* - \ell^*) \le 1$ *kiekvienam* $n \ge 1$, *tada kai* $n \to \infty$,

(a) $\max_{k^* + \ell^* < k \le k^* + \ell^* + \tau_n} \left| \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k} \varepsilon_i y_{i-1} \right| = O_P(\sqrt{n})$;

(b) $\max_{n-\tau_n\le k\le n}\left|\sum_{i=k+1}^{n}\varepsilon_i y_{i-1}\right| = O_P(\sqrt{n})$.

Įrodymas.

(i) (a) Kadangi $(\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i y_{i-1}, k\ge 1)$ yra martingalas, pagal Dubo nelygybę turime

$$E\max_{1\le k\le\tau_n}\Big|\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2 \le 4E\Big|\sum_{i=1}^{\tau_n}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2.$$

Kadangi visiems $i\le k^*$ stebėjimai $y_i=\sum_{j=1}^{i}\rho^{i-j}\varepsilon_j$, gauname $Ey_i^2\le(1-\rho^2)^{-1}$. Taigi

$$E\Big|\sum_{i=1}^{\tau_n}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2 = \sum_{i=1}^{\tau_n}Ey_{i-1}^2 \le \tau_n(1-\rho^2)^{-1}$$

ir iš čia seka teiginys (a).

(b) Kadangi $(\sum_{i=k^*-\tau_n+1}^{k}\varepsilon_i y_{i-1}, k>k^*-\tau_n)$ yra martingalas ir

$$\sum_{i=k+1}^{k^*}\varepsilon_i y_{i-1} = \left(\sum_{i=k^*-\tau_n+1}^{k^*} - \sum_{i=k^*-\tau_n+1}^{k}\right)\varepsilon_i y_{i-1},$$

pritaikę Dubo nelygybę gauname

$$E\max_{k^*-\tau_n\le k\le k^*}\Big|\sum_{i=k+1}^{k^*}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2 \le 16E\Big|\sum_{i=k^*-\tau_n+1}^{k^*}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2.$$

Kiekvienam $i\le k^*$ stebėjimai $y_i=\sum_{j=1}^{i}\rho^{i-j}\varepsilon_j$ ir $Ey_i^2\le(1-\rho^2)^{-1}$. Taigi

$$E\Big|\sum_{i=k^*-\tau_n+1}^{k^*}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2 = \sum_{i=k^*-\tau_n+1}^{k^*}Ey_{i-1}^2 \le \tau_n(1-\rho^2)^{-1}.$$

(ii) (a) Kadangi $(\sum_{i=k^*+1}^{k}\varepsilon_i y_{i-1}, k>k^*)$ yra martingalas, pagal Dubo nelygybę turime

$$E\max_{k^*<k\le k^*+\tau_n}\Big|\sum_{i=k^*+1}^{k}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2 \le 4E\Big|\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2.$$

Kadangi visiems $i:\ k^*+1\le i\le k^*+\ell^*$ stebėjimai $y_i=y_{k^*}+\sum_{j=k^*+1}^{i}\varepsilon_j$, gauname $Ey_i^2=Ey_{k^*}^2+i-k^*\le(1-\rho^2)^{-1}+i-k^*$. Taigi

$$E\Big|\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2=\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n}Ey_{i-1}^2\le\frac{\tau_n}{1-\rho^2}+\frac{(k^*+\tau_n+k^*)\tau_n}{2}-k^*\tau_n=\frac{\tau_n}{1-\rho^2}+\frac{\tau_n^2}{2}$$

ir iš čia seka teiginys (a).

(b) Kadangi $(\sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n+1}^{k}\varepsilon_i y_{i-1}, k>k^*+\ell^*-\tau_n)$ yra martingalas ir

$$\sum_{i=k+1}^{k^*+\ell^*}\varepsilon_i y_{i-1}=\Bigg(\sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n+1}^{k^*+\ell^*}-\sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n+1}^{k}\Bigg)\varepsilon_i y_{i-1},$$

pritaikę Dubo nelygybę gauname

$$E\max_{k^*+\ell^*-\tau_n<k\le k^*+\ell^*}\Big|\sum_{i=k+1}^{k^*+\ell^*}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2\le 16E\Big|\sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n+1}^{k^*+\ell^*}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2.$$

Kadangi visiems $i:k^*+\ell^*+1\le i\le k^*+\ell^*$ stebėjimai $y_i=y_{k^*}+\sum_{k=k^*+1}^{i}\varepsilon_k$, turime $Ey_i^2=Ey_{k^*}^2+i-k^*\le(1-\rho^2)^{-1}+i-k^*$. Taigi

$$\begin{aligned}E\Big|\sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n+1}^{k^*+\ell^*}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2&=\sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n+1}^{k^*+\ell^*}Ey_{i-1}^2\\&\le\frac{a_n}{1-\rho^2}+\frac{(k^*+\ell^*-\tau_n+k^*+\ell^*)a_n}{2}-k^*a_n\\&=\frac{a_n}{1-\rho^2}+\ell^*\tau_n-\tau_n^2.\end{aligned}$$

Kadangi $\ell^*\sim n$, iš čia gaunamas lemos tvirtinimas.

(iii) (a) Martingalui $(\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k}\varepsilon_i y_{i-1}, k>k^*+\ell^*)$ pritaikę Dubo nelygybę gauname

$$E\max_{k^*+\ell^*<k\le k^*+\ell^*+\tau_n}\Big|\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2\le 4E\Big|\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2\le\frac{4(\tau_n+\ell^*)}{(1-\rho^2)}.$$

Kadangi $\tau_n\le n$ ir $\ell^*\sim n$ iš čia seka teiginys (a).

(b) Kadangi $(\sum_{i=n-\tau_n+1}^{k} \varepsilon_i y_{i-1}, k > k^* + \ell^*)$ yra martingalas ir

$$\sum_{i=k+1}^{n} \varepsilon_i y_{i-1} = \left(\sum_{i=n-\tau_n+1}^{n} - \sum_{i=n-\tau_n+1}^{k} \right) \varepsilon_i y_{i-1},$$

pritaikę Dubo nelygybę gauname

$$E \max_{n-\tau_n \le k \le n} \Big| \sum_{i=k+1}^{n} \varepsilon_i y_{i-1} \Big|^2 \le 16E \Big| \sum_{n-\tau_n+1}^{n} \varepsilon_i y_{i-1} \Big|^2.$$

Kadangi visiems i $i : k^* + \ell^* < i \le n$ teisinga $E(y_i^2) \le \rho^{2(i-(k^*+\ell^*))}\ell^* + \frac{1}{1-\rho^2}$, tai

$$E\Big| \sum_{n-\tau_n+1}^{n} \varepsilon_i y_{i-1} \Big|^2 = \sum_{n-\tau_n+1}^{n} E y_{i-1}^2 \le \frac{\tau_n + \ell^*}{(1-\rho^2)}.$$

Patebėjus, kad $\tau_n \le n$ ir $\ell \sim n$, gaunamas lemos tvirtinimas. ■

4.7 lema. *Tarkime, tenkinamos* (4.2) *teoremos sąlygos. Tegu* (τ_n) *žymi seką, artėjančią į begalybę, kai* $n \to \infty$*. Tada*

(*i*) *jei* $\tau_n/k^* \le 1$ *kiekvienam* $n \ge 1$*, tada*

  (*a*) $(1-\rho^2)\tau_n^{-1} \sum_{i=1}^{\tau_n} y_{i-1}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 1;$

  (*b*) $(1-\rho^2)\tau_n^{-1} \sum_{i=k^*-\tau_n+1}^{k^*} y_{i-1}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 1;$

(*ii*) *jei* $\tau_n/\ell^* \le 1$ *kiekvienam* $n \ge 1$*, tada egzistuoja tokia konstanta* $c > 0$*, kad kiekvienam* $\varepsilon > 0$

  (*a*) $\limsup_{n\to\infty} P\Big(\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \le \varepsilon \tau_n^2 \Big) \le c\varepsilon;$

  (*b*) $\limsup_{n\to\infty} P\Big(\sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2 \le \varepsilon \tau_n^2 \Big) \le c\varepsilon;$

(*iii*) *jei* $\tau_n/(n-k^*-\ell^*) \le 1$ *kiekvienam* $n \ge 1$ *ir* $\sqrt{n} = o(\tau_n)$*, tada*

  (*a*) $(1-\rho^2)\tau_n^{-1} \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 1;$

  (*b*) $(1-\rho^2)\tau_n^{-1} \sum_{i=n-\tau_n+1}^{n} y_{i-1}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 1.$

Įrodymas.

(i) Visiems $i \in A := [1, \dots, \tau_n]$ stebėjimai $y_i = \rho y_{i-1} + \varepsilon_i$ ir $y_i^2 = \rho^2 y_{i-1}^2 + 2\rho y_{i-1}\varepsilon_i + \varepsilon_i^2$. Susumavę pagal visus $i \in A$ gauname

$$\rho^2 \sum_{i=1}^{\tau_n} y_{i-1}^2 = \sum_{i=1}^{\tau_n} y_i^2 - 2\rho \sum_{i=1}^{\tau_n} y_{i-1}\varepsilon_i - \sum_{i=1}^{\tau_n} \varepsilon_i^2.$$

Taigi

$$\sum_{i=1}^{\tau_n} y_{i-1}^2 = -\frac{1}{1-\rho^2}\Big\{ \big[y_{\tau_n}^2 - y_0^2\big] - 2\rho \sum_{i=1}^{\tau_n} y_{i-1}\varepsilon_i - \sum_{i=1}^{\tau_n} \varepsilon_i^2 \Big\}. \tag{4.15}$$

Arba

$$Q(A) = -\frac{1}{1-\rho^2}\Big\{ y_{\tau_n}^2 - 2\rho R(A) - \sum_{i \in A} \varepsilon_i^2 \Big\}.$$

Kadangi $y_{\tau_n}^2 = O_P(1)$ ir remiantis 4.6Lemos (i) dalimi $R(A) = o_P(\tau_n)$, gauname

$$P - \lim_{n\to\infty} \tau_n^{-1} Q(A) = P - \lim_{n\to\infty} \tau_n^{-1} \sum_{i \in A} \varepsilon_i^2 = 1$$

pagal didžiųjų skaičių dėsnį. Taigi įrodėme teiginį (a). Teiginys (b) įrodomas analogiškai.

(ii) Įvertinkime

$$\begin{aligned} P\Big(\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \le \varepsilon\tau_n^2\Big) &= P\Big(\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} \Big(y_{k^*} + \sum_{j=k^*+1}^{i-1} \varepsilon_j\Big)^2 \le \varepsilon\tau_n^2\Big) \\ &\le P\Big(\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} \Big(\sum_{j=k^*+1}^{i-1} \varepsilon_j\Big)^2 \le 3\varepsilon\tau_n^2\Big) + P(y_{k^*}^2 \ge \varepsilon\tau_n) \\ &= P\Big(\sum_{i=1}^{\tau_n} \Big(\sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon_j\Big)^2 \le 3\varepsilon\tau_n^2\Big) + A_n, \end{aligned}$$

čia $A_n \to 0$, kai $n \to \infty$. Pagal invariantiškumo principą ir tolydaus atvaizdžio teoremą (žr. [11] 1 išvadą psl. 31), kiekvienam $x > 0$ turime

$$\limsup_{n\to\infty} P\Big(\tau_n^{-2} \sum_{i=1}^{\tau_n} \Big(\sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon_j\Big)^2 \le x\Big) \le P\Big(\int_0^1 W^2(s)ds \le x\Big),$$

čia $\{W(t), t \in [0,1]\}$ yra standartinis Vynerio procesas. Pastebėję, kad egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$,

$$P\Big(\int_0^1 W^2(s)ds \le \varepsilon\Big) \le c\varepsilon,$$

baigiame teiginio (a) įrodymą. Teiginio (b) įrodymas analogiškas.

(iii) Įrodymas analogiškas (i) atvejui, tik aibė $A := (k^*+\ell^*, \dots, k^*+\ell^*+\tau_n]$ arba $A := (n-\tau_n, \dots, n]$ ir $R(A) = O_P(\sqrt{n})$ pagal 4.6 lemos (iii) dalį. ∎

4.2.2 4.2 teoremos įrodymas

Dydį $\varepsilon > 0$ pasirinkime laisvai. Aibė

$$\Omega_1 = \Big\{\omega : \frac{|\hat{I}^* I^*| \cdot |\hat{I}^* I^{*c}|}{|\hat{I}^*|} + \frac{|\hat{I}^{*c} I^*| \cdot |\hat{I}^{*c} I^{*c}|}{|\hat{I}^{*c}|} \ge 2\varepsilon n\Big\} \subset \Omega_{11} \cup \Omega_{12},$$

čia

$$\Omega_{11} = \Big\{\omega : \frac{|\hat{I}^* I^*| \cdot |\hat{I}^* I^{*c}|}{|\hat{I}^*|} \ge \varepsilon n\Big\}, \quad \Omega_{12} = \Big\{\omega : \frac{|\hat{I}^{*c} I^*| \cdot |\hat{I}^{*c} I^{*c}|}{|\hat{I}^{*c}|} \ge \varepsilon n\Big\}.$$

Paprastumo dėlei pažymėkime $P_i(A) := P(A \cap \Omega_{1i}), i = 1, 2$. Kaip ir ankstesniame skyrelyje remdamiesi 4.1 lema, galime užrašyti

$$RSS_n(\hat{I}^*) - RSS_n(I^*) = (1-\rho)^2 \delta_1(\hat{I}^*, I^*) + \tilde{\delta_3}(\hat{I}^*, I^*),$$

čia

$$\tilde{\delta_3}(\hat{I}^*, I^*) = -2(1-\rho)\delta_2(\hat{I}^*, I^*) + \delta_3(\hat{I}^*, I^*).$$

Gauname

$$\begin{aligned} 1 &= P(RSS_n(\hat{I}^*) - RSS_n(I^*) \le 0) = P((1-\rho)^2 \delta_1(\hat{I}^*, I^*) + \tilde{\delta_3}(\hat{I}^*, I^*) \le 0) \\ &\le (P_1 + P_2)((1-\rho)^2 \delta_1(\hat{I}^*, I^*) \le \varepsilon d_n) + (P_1 + P_2)(-\tilde{\delta_3}(\hat{I}^*) \ge \varepsilon d_n) + P(\Omega_1^c). \end{aligned}$$

Taigi turime įrodyti, kad kai $d_n = (1-\rho)n$ egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, kad

$$\lim_{n\to\infty} (P_1 + P_2)((1-\rho)^2 \delta_1(\hat{I}^*, I^*) \le \varepsilon d_n) \le c\varepsilon \tag{4.16}$$

ir

$$\lim_{n\to\infty}(P_1+P_2)(-\tilde{\delta_3}(\hat{I^*})\geq \varepsilon d_n)=0. \tag{4.17}$$

Remiantis (4.16) ir (4.17) gaunamas 4.2 teoremos rezultatas. Toliau išnagrinėsime visas galimas pasikeitusio segmento ir jo įvertinio kombinacijas. Yra šeši galimi atvejai:

(a) $\Omega_a := \{\hat{k}^* < k^* < \hat{k}^* + \hat{\ell}^* < k^* + \ell^*\}$;

(b) $\Omega_b := \{\hat{k}^* < k^* < k^* + \ell^* < \hat{k}^* + \hat{\ell}^*\}$;

(c) $\Omega_c := \{k^* < \hat{k}^* < k^* + \ell^* < \hat{k}^* + \hat{\ell}^*\}$;

(d) $\Omega_d := \{k^* < \hat{k}^* < \hat{k}^* + \hat{\ell}^* < k^* + \ell^*\}$;

(e) $\Omega_e := \{\hat{k}^* < \hat{k}^* + \hat{\ell}^* < k^* < k^* + \ell^*\}$;

(f) $\Omega_f := \{k^* < k^* + \ell^* < \hat{k}^* < \hat{k}^* + \hat{\ell}^*\}$.

Pastebėję, kad $\Omega_{11}\cap\Omega_\dagger=\emptyset$, kai $\dagger = d,e,f$, ir $\Omega_{12}\cap\Omega_b=\emptyset$, turime

$$\begin{aligned}
P_1 &\leq P_{1a}+P_{1b}+P_{1c},\\
P_2 &\leq P_{1a}+P_{1c}+P_{1d}+P_{1e}+P_{1f},
\end{aligned}$$

čia $P_{i\ddagger}(A)=P_i(A,\Omega_\ddagger)$. Taigi turime įrodyti, kad

$$\lim_{n\to\infty} P_{i\ddagger}((1-\rho)^2\delta_1(\hat{I^*},I^*)\leq d_n)\leq c\varepsilon \tag{4.18}$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} P_{i\ddagger}(-\tilde{\delta_3}(\hat{I^*})\geq \varepsilon d_n)=0, \tag{4.19}$$

kai i=1, $\ddagger = a,b,c$ ir i=2, $\ddagger = a,c,d,e,f$. Pastebėję, kad

$$\begin{aligned}
-\tilde{\delta_3}(\widehat{I^*}) \leq 2(1-\rho)\Big[&\frac{Q(\widehat{I^*}I^*)|R(\widehat{I^*}I^{*c})|}{Q(\widehat{I^*})}+\frac{Q(\widehat{I^*}I^{*c})|R(\widehat{I^*}I^*)|}{Q(\widehat{I^*})}\\
&+\frac{Q(\widehat{I^{*c}}I^*)|R(\widehat{I^{*c}}I^{*c})|}{Q(\widehat{I^{*c}})}+\frac{Q(\widehat{I^{*c}}I^{*c})|R(\widehat{I^{*c}}I^*)|}{Q(\widehat{I^{*c}})}\Big]\\
&+\frac{R^2(\widehat{I^*})}{Q(\widehat{I^*})}+\frac{R^2(\widehat{I^{*c}})}{Q(\widehat{I^{*c}})} := 2(1-\rho)[A_{n1}+A_{n2}+A_{n3}+A_{n4}]+A_{n5}+A_{n6},
\end{aligned}$$

(4.19) galime pakeisti

$$\lim_{n\to\infty} P_{i\ddagger}\left((1-\rho)A_{nv} \geq \frac{\varepsilon d_n}{16}\right) = 0, \tag{4.20}$$

kai $v = 1, \ldots, 4$ ir

$$\lim_{n\to\infty} P_{i\ddagger}\left(A_{nv} \geq \frac{\varepsilon d_n}{4}\right) = 0, \tag{4.21}$$

kai $v = 5, 6$.

Tegu $\tau_n = \varepsilon n$. Aibėje Ω_{11} $|\hat{I}^* I^*| \geq \tau_n$ ir $|\hat{I}^* I^{*c}| \geq \tau_n$. Aibėje Ω_{12} $|\hat{I}^{*c} I^*| \geq \tau_n$ ir $|\hat{I}^{*c} I^{*c}| \geq \tau_n$.

Tikimybės P_{1a} vertinimas.

Turime įvertinti šias tikimybes:

$$P'_{1a} := P_{1a}((1-\rho)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n), \quad \text{ir} \quad P''_{1a} := P_{1a}(-\delta_3(\hat{I}^*) \geq \varepsilon d_n).$$

Pradėkime nuo P'_{1a}. Turime, kad $Q(\hat{I}^* I^{*c}) \geq \sum_{i=k^*-\tau_n+1}^{k^*} y_{i-1}^2$. Pažymėkime

$$\Omega'_{1a} := \left\{\left|(1-\rho^2)\tau_n^{-1} \sum_{i=k^*-\tau_n+1}^{k^*} y_{i-1}^2 - 1\right| < 1/2\right\} \cap \Omega_{1a}$$

Aibėje Ω'_{1a} $Q(\hat{I}^* I^{*c}) \geq \frac{1}{2}\tau_n(1-\rho^2)^{-1}$ ir tada

$$\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \geq \left(\frac{1}{Q(\hat{I}^* I^*)} + \frac{1}{Q(\hat{I}^* I^{*c})}\right)^{-1} \geq \left(\frac{1}{Q(\hat{I}^* I^*)} + \frac{2(1-\rho^2)}{\tau_n}\right)^{-1}.$$

Kadangi

$$\frac{(1-\rho)^2}{\varepsilon d_n} > \frac{1}{\varepsilon \tau_n^2} + \frac{2(1-\rho^2)}{\tau_n}$$

pakankamai dideliems n, remiantis 4.7 lema gauname

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} P_{1a}((1-\rho)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} [P_{1a}((1-\rho)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n, \Omega'_{1a}) + P(\Omega'^c_{1a})] \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} P_{1a}(Q(\hat{I}^* I^*) \leq \varepsilon \tau_n^2).
\end{aligned}$$

Taigi

$$\limsup_{n\to\infty} P'_{1a} \leq \limsup_{n\to\infty} P_{1a}(Q(\hat{I}^* I^*) \leq \varepsilon\tau_n^2) \leq \limsup_{n\to\infty} P\Big(\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \leq \varepsilon\tau_n^2\Big).$$

Remiantis 4.7 lema egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, kad

$$\limsup_{n\to\infty} P'_{1a} \leq c\varepsilon.$$

Toliau nagrinėkime P''_{1a}. Aibėje Ω_a teisinga

$$A_{n1} := \frac{Q(\widehat{I}^* I^*)|R(\widehat{I}^* I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^*)} \leq |R(\widehat{I}^* I^{*c})| \leq \max_{1\leq j\leq k^*} \Big|\sum_{i=j}^{k^*} y_{i-1}\varepsilon_i\Big|.$$

Pagal 4.6 lemą paskutinis dydis yra $O_P(n^{1/2})$. Taigi įrodėme (4.20), kai $v = 1$.

Turime, kad

$$\begin{aligned} A_{n3} :=& \frac{Q(\widehat{I}^{*c} I^*)|R(\widehat{I}^{*c} I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^{*c})} \leq |R(\widehat{I}^{*c} I^{*c})| \\ &\leq \max_{1\leq j\leq k^*} \Big|\sum_{i=1}^{j} y_{i-1}\varepsilon_i\Big| + \Big|\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{n} y_{i-1}\varepsilon_k\Big|. \end{aligned}$$

Iš čia vėl remiantis 4.6 lema gaunama (4.20), kai $v = 3$.

Įvertinkime

$$A_{n2} := \frac{Q(\widehat{I}^* I^{*c})|R(\widehat{I}^* I^*)|}{Q(\widehat{I}^*)} \leq \frac{\sum_{i=1}^{k^*} y_{i-1}^2 \max_{k^*<j\leq k^*+\ell^*} \Big|\sum_{i=k^*+1}^{j} y_{i-1}\varepsilon_i\Big|}{\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2}.$$

Kiekvienam $\eta > 0$

$$\begin{aligned} P_{1a}((1-\rho)A_{n2} \geq \varepsilon d_n/16) \leq P\Big(&\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \leq \eta\tau_n^2\Big) + \\ + P\Big(\sum_{i=1}^{k^*} y_{i-1}^2 &\max_{k^*<j\leq k^*+\ell^*} \Big|\sum_{i=k^*+1}^{j} y_{i-1}\varepsilon_i\Big| \geq \varepsilon d_n \eta\tau_n^2/16(1-\rho)\Big). \end{aligned}$$

Taigi remiantis 4.6 ir 4.7 lemomis gauname, kad $\limsup_{n\to\infty} P_{1a}((1-\rho)A_{n2} \geq \varepsilon d_n/16) \leq c\eta$. Kadangi $\eta > 0$ buvo pasirinktas laisvai, iš čia gauname (4.20), kai $v = 2$.

Nagrinėkime dydį

$$A_{n4} := \frac{Q(\widehat{I}^{*c} I^{*c})|R(\widehat{I}^{*c} I^{*})|}{Q(\widehat{I}^{*c})}.$$

Išskirkime du atvejus:

I atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^{*c} I^{*}| \leq a_n$. Tada remiantis 4.6 lema

$$|R(\widehat{I}^{*c} I^{*})| \leq \max_{k^*+\ell^*-a_n<k\leq k^*+\ell^*} \Big| \sum_{i=k+1}^{k^*+\ell^*} \varepsilon_i y_{i-1}| = O_P(\sqrt{na_n}).$$

Taigi

$$A_{n4} \leq |R(\widehat{I}^{*c} I^{*})| = O_P(\sqrt{na_n}).$$

Parinkę a_n tokį, kad $a_n/n \to 0$, gauname $d_n^{-1} A_{n4} = o_P(1)$.

II atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^{*c} I^{*}| \geq a_n$. Tada remiantis 4.7 lema

$$Q(\widehat{I}^{*c}) \geq \sum_{i=k^*+\ell^*-a_n}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2 = O_P(a_n^2).$$

Taip pat turime, kad

$$Q(\widehat{I}^{*c} I^{*c})|R(\widehat{I}^{*c} I^{*})| = O_P(n^2).$$

Taigi parinkę tokį a_n, kad $na_n^{-2} \to 0$ kai $n \to \infty$, gauname, kad $d_n^{-1} A_{n4} = o_P(1)$. Taigi remdamiesi 4.6 ir 4.7 lemomis bei parinkę, pavyzdžiui, $a_n = n^{2/3}$, gauname (4.20), kai $v = 4$.

Kadangi remiantis 4.6 lema $|R(\widehat{I}^{*})| = O_P(n)$ ir aibėje Ω_{1a}

$$Q(\widehat{I}^{*}) \geq \sum_{k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2,$$

turime

$$P_{1a}(A_{n5} \geq \varepsilon d_n/4) = P_{1a}(Q(\widehat{I}^*) \leq \frac{4M^2n^2}{\varepsilon d_n}) + P(|R(\widehat{I}^*)| \geq Mn)$$
$$\leq P(\sum_{k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \leq \frac{4M^2n^2}{\varepsilon d_n}) + P(|R(\widehat{I}^*)| \geq Mn).$$

Iš čia remiantis 4.7 lema ir parinkus tokį dydį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, gaunama (4.21), kai $v = 5$. M galime parinkti, pavyzdžiui, lygų $n^{1/3}$.

Beliko išnagrinėti A_{n6}. Vėl išskirkime du atvejus.

I atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^{*c}I^*| \leq a_n$. Tada remiantis 4.6 lema $R(\widehat{I}^{*c}) = O_P(\sqrt{na_n})$. Be to, pagal 4.7 lemą konstantai $c > 0$ $Q(\widehat{I}^{*c}) \geq cn$ su tikimybe artima 1. Taigi kai $a_n/n \to 0$, $A_{n6} = o_P(d_n)$.

II atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^{*c}I^*| \geq a_n$. Tada $R(\widehat{I}^{*c}) = O_P(n)$. Be to, tikimybė, kad $Q(\widehat{I}^{*c}) \geq \eta a_n^2$, artėja į 1, kai η artėja į 0. Taigi $A_{n6} = o_P(d_n)$, kai $n/a_n^2 \to 0$. Pasirinkę $a_n = n^{2/3}$ gauname (4.21).

Tikimybės P_{1b} vertinimas.

Turime įvertinti šias tikimybes:

$$P'_{1b} := P_{1b}((1-\rho)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n), \quad \text{ir} \quad P''_{1b} := P_{1b}(-\delta_3(\hat{I}^*) \geq \varepsilon d_n).$$

Pradėkime nuo P'_{1b}. Turime, kad

$$Q(\hat{I}^*I^{*c}) \geq \left(\mathbf{1}_{k^*-\hat{k}^*>\tau_n/2} \sum_{i=k^*-\tau_n/2+1}^{k^*} + \mathbf{1}_{k^*-\hat{k}^*\leq\tau_n/2} \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n/2} \right) y_{i-1}^2.$$

Pažymėkime

$$\Omega_{1b}^{(1)} := \left\{ \left| (1-\rho^2)\frac{2}{\tau_n} \sum_{i=k^*-\tau_n/2+1}^{k^*} y_{i-1}^2 - 1 \right| < 1/2 \right\} \cap \Omega_{1b},$$
$$\Omega_{1b}^{(2)} := \left\{ \left| (1-\rho^2)\frac{2}{\tau_n} \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n/2} y_{i-1}^2 - 1 \right| < 1/2 \right\} \cap \Omega_{1b}.$$

Aibėse $\Omega_{1b}^{(1)}$ ir $\Omega_{1b}^{(2)}$ dydis $Q(\hat{I}^* I^{*c}) \geq \frac{1}{4}\tau_n(1-\rho^2)^{-1}$ ir

$$\delta_1(\hat{I^*}, I^*) = \Big(\frac{1}{Q(I^*)} + \frac{1}{Q(\hat{I}^* I^{*c})}\Big)^{-1} \geq \Big(\frac{1}{Q(I^*)} + \frac{4(1-\rho^2)}{\tau_n}\Big)^{-1}.$$

Kadangi

$$\frac{(1-\rho)^2}{\varepsilon d_n} > \frac{1}{\varepsilon\tau_n^2} + \frac{2(1-\rho^2)}{\tau_n}$$

pakankamai dideliems n, gauname

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} P_{1b}((1-\rho)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty}[P_{1b}((1-\rho)^2\delta_1(\hat{I^*}, I^*) \leq \varepsilon d_n, \Omega_{1b}^{(i)}) + P(\Omega_{1b}^{(i)c})] \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} P_{1b}(Q(I^*) \leq \varepsilon\tau_n^2).
\end{aligned}$$

Taigi remiantis 4.7 lema $\limsup_{n\to\infty} P'_{1b}$ nedidesnis už

$$\limsup_{n\to\infty} P\Bigg(\left(\mathbf{1}_{k^*-\hat{k}^*>\tau_n/2}\sum_{i=k^*-\tau_n/2+1}^{k^*} + \mathbf{1}_{k^*-\hat{k}^*\leq\tau_n/2}\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n/2}\right) y_{i-1}^2\Bigg) \leq c\varepsilon.$$

Nagrinėkime tikimybę P''_{1b}. Aibėje Ω_b

$$\begin{aligned}
A_{n1} :=& \frac{Q(I^*)|R(\widehat{I}^* I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^*)} \leq |R(\widehat{I}^* I^{*c})| \\
&\leq \max_{1\leq j\leq k^*}\Big|\sum_{i=j}^{k^*} y_{i-1}\varepsilon_i\Big| + \max_{k^*+\ell^*<j\leq n}\Big|\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{j} y_{i-1}\varepsilon_i\Big|.
\end{aligned}$$

Remiantis 4.6 lema abu dėmenys yra $O_P(n^{1/2})$. Iš čia gauname (4.20), kai $v=1$.

Turime, kad

$$\begin{aligned}
&A_{n2} := \frac{Q(\widehat{I}^* I^{*c})|R(I^*)|}{Q(\widehat{I}^*)} \leq \\
&\leq \frac{\left(\sum_{i=1}^{k^*} + \sum_{k^*+\ell^*+1}^{n}\right) y_{i-1}^2 \max_{k^*<j\leq k^*+\ell^*}\left|\sum_{i=k^*+1}^{j} y_{i-1}\varepsilon_i\right|}{\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2}
\end{aligned}$$

ir kiekvienam $\eta > 0$

$$P_{1b}((1-\rho)A_{n2} \geq \varepsilon d_n/16) \leq P\Big(\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \leq \eta\tau_n^2\Big)$$
$$+ P\Big(\Big(\sum_{i=1}^{k^*} + \sum_{k^*+\ell^*+1}^{n}\Big) y_{i-1}^2 \max_{k^*<j\leq k^*+\ell^*}\Big|\sum_{i=k^*+1}^{j} y_{i-1}\varepsilon_i\Big| \geq \varepsilon d_n \eta\tau_n^2/16(1-\rho)\Big).$$

Taigi remiantis 4.6 ir 4.7 lemomis gauname $\limsup_{n\to\infty} P_{1b}((1-\rho)A_{n2} \geq \varepsilon d_n/16) \leq c\eta$. Kadangi $\eta > 0$ buvo pasirinktas laisvai, iš čia gaunamas (4.20), kai $v = 2$.

A_{n3} ir A_{n4} aibėje Ω_{1b} yra lygūs nuliui, todėl akivaizdu, kad teisinga (4.20), kai $v = 3, 4$.

Kadangi remiantis 4.6 lema $|R(\widehat{I}^*)| = O_P(n)$ ir aibėje Ω_{1b}

$$Q(\widehat{I}^*) \geq \sum_{k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2,$$

tai

$$P_{1b}(A_{n5} \geq \varepsilon d_n/4) \leq P(\sum_{k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \leq \frac{4M^2n^2}{\varepsilon d_n}) + P(|R(\widehat{I}^*)| \geq Mn).$$

Iš čia parinkus tokį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, ir remiantis 4.7 lema gaunama (4.21), kai $v = 5$. Dydį M, pavyzdžiui, galime parinkti lygų $n^{1/3}$.

Belieka išnagrinėti A_{n6}. Kadangi remiantis 4.6 lema $|R(\widehat{I}^{*c})| = O_P(\sqrt{n})$ ir remiantis 4.7 lema $Q(\widehat{I}^{*c}) = O_P(n)$, turime

$$P_{1b}(A_{n6} \geq \varepsilon d_n/4) = P_{1b}(Q(\widehat{I}^{*c}) \leq \frac{4M^2n}{\varepsilon d_n}) + P(|R(\widehat{I}^{*c})| \geq M\sqrt{n}).$$

Taigi parinkus tokį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, gauname (4.21), kai $v = 6$. Dydį M, pavyzdžiui, galime parinkti lygų $n^{1/3}$.

Tikimybės P_{1c} vertinimas.

Turime įvertinti šias tikimybes:

$$P'_{1c} := P_{1c}((1-\rho)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n), \quad \text{and} \quad P''_{1c} := P_{1c}(-\delta_3(\hat{I}^*) \geq \varepsilon d_n).$$

Pradėkime nuo P'_{1c}. Turime, kad $Q(\hat{I}^*I^{*c}) \geq \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n} y_{i-1}^2$. Pažymėkime

$$\Omega'_{1c} := \Big\{ \Big| (1-\rho^2)\tau_n^{-1} \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n} y_{i-1}^2 - 1 \Big| < 1/2 \Big\} \cap \Omega_{1c}.$$

Aibėje Ω'_{1c} $Q(\hat{I}^*I^{*c}) \geq \frac{1}{2}\tau_n(1-\rho^2)^{-1}$ ir tada

$$\delta_1(\hat{I^*}, I^*) \geq \Big(\frac{1}{Q(\hat{I}^*I^*)} + \frac{1}{Q(\hat{I}^*I^{*c})} \Big)^{-1} \geq \Big(\frac{1}{Q(\hat{I}^*I^*)} + \frac{2(1-\rho^2)}{\tau_n} \Big)^{-1}.$$

Kadangi

$$\frac{(1-\rho)^2}{\varepsilon d_n} > \frac{1}{\varepsilon \tau_n^2} + \frac{2(1-\rho^2)}{\tau_n}$$

pakankamai dideliems n, remiantis 4.7 lema gauname

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} P_{1c}((1-\rho)^2\delta_1(\hat{I^*}, I^*) \leq \varepsilon d_n) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} [P_c((1-\rho)^2\delta_1(\hat{I^*}, I^*) \leq \varepsilon d_n, \Omega'_{1c}) + P(\Omega'^{c}_{1c})] \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} P_{1c}(Q(\hat{I}^*I^*) \leq \varepsilon \tau_n^2).
\end{aligned}$$

Taigi

$$\limsup_{n\to\infty} P'_{1c} \leq \limsup_{n\to\infty} P_{1c}(Q(\hat{I}^*I^*) \leq \varepsilon\tau_n^2) \leq \limsup_{n\to\infty} P\Big(\sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2 \leq \varepsilon \tau_n^2 \Big).$$

Remiantis 4.7 lema egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, kad

$$\limsup_{n\to\infty} P'_{1c} \leq c\varepsilon.$$

Toliau nagrinėkime P''_{1c}. Tada aibėje Ω_a

$$A_{n1} := \frac{Q(\widehat{I}^*I^*)|R(\widehat{I}^*I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^*)} \leq |R(\widehat{I}^*I^{*c})| \leq \max_{k^*+\ell^*<j\leq n} \Big| \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{j} y_{i-1}\varepsilon_i \Big|.$$

Remiantis 4.6 lema dešinioji nelygybės pusė yra $O_P(n^{1/2})$. Taigi įrodėme (4.20), kai $v = 1$.

Dydis

$$A_{n3} := \frac{Q(\widehat{I}^{*c}I^*)|R(\widehat{I}^{*c}I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^{*c})} \le |R(\widehat{I}^{*c}I^{*c})| \le \Big|\sum_{i=1}^{k^*} y_{i-1}\varepsilon_i\Big| + \max_{k^*+\ell^*<k\le n}\Big|\sum_{i=k}^{n} y_{i-1}\varepsilon_k\Big|.$$

Iš čia remdamiesi 4.6 lema gauname (4.20), kai $v = 3$.

Įvertinkime

$$A_{n2} := \frac{Q(\widehat{I}^*I^{*c})|R(\widehat{I}^*I^*)|}{Q(\widehat{I}^*)} \le \frac{\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{n} y_{i-1}^2 \max_{k^*\le k\le k^*+\ell^*}\Big|\sum_{i=k+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}\varepsilon_i\Big|}{\sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2}.$$

Kiekvienam $\eta > 0$

$$P_{1c}((1-\rho)A_{n2} \ge \varepsilon d_n/16) \le P\Big(\sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2 \le \eta\tau_n^2\Big) +$$
$$+ P\Big(\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{n} y_{i-1}^2 \max_{k^*\le k\le k^*+\ell^*}\Big|\sum_{i=k+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}\varepsilon_i\Big| \ge \varepsilon d_n\eta\tau_n^2/16(1-\rho)\Big).$$

Remdamiesi 4.6 ir 4.7 lemomis gauname, kad $\limsup_{n\to\infty} P_{1c}((1-\rho)A_{n2} \ge \varepsilon d_n/16) \le c\eta$. Kadangi $\eta > 0$ pasirinktas laisvai, iš čia gaunama(4.20), kai $v = 2$.

Nagrinėdami dydį

$$A_{n4} := \frac{Q(\widehat{I}^{*c}I^{*c})|R(\widehat{I}^{*c}I^*)|}{Q(\widehat{I}^{*c})}$$

išskirkime du atvejus:

I atvejis. Tarkime, $|\widehat{I}^{*c}I^*| \le a_n$. Tada remiantis 4.6 lema

$$|R(\widehat{I}^{*c}I^*)| \le \max_{k^*<k\le k^*+a_n}\Big|\sum_{i=k^*+1}^{k} \varepsilon_i y_{i-1}| = O_P(\sqrt{na_n}).$$

Taigi

$$A_{n4} \le |R(\widehat{I}^{*c}I^*)| = O_P(\sqrt{na_n}).$$

Parinkę tokį a_n, kad $a_n/n \to 0$, gauname $d_n^{-1}A_{n4} = o_P(1)$.

II atvejis. Tarkime, $|\widehat{I}^{*c}I^*| \geq a_n$. Tada remiantis 4.7 lema

$$Q(\widehat{I}^{*c}) \geq \sum_{i=k^*+1}^{k^*+a_n} y_{i-1}^2 = O_P(a_n^2).$$

Pastebime, kad remiantis 4.6 ir 4.7 lemomis

$$Q(\widehat{I}^{*c}I^{*c})|R(\widehat{I}^{*c}I^*)| = O_P(n^2).$$

Iš čia gauname, kad $d_n^{-1}A_{n4} = o_P(1)$, kai n tolstant į begalybę $na_n^{-2} \to 0$. Parinkus, pavyzdžiui, $a_n = n^{2/3}$, teisinga (4.20), kai $v = 4$.

Remiantis 4.6 lema $|R(\widehat{I}^*)| = O_P(n)$. Be to, aibėje Ω_{1c} dydis $Q(\widehat{I}^*) \geq \sum_{k^*+\ell^*-\tau_n}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2$. Taigi

$$P_{1c}(A_{n5} \geq \varepsilon d_n/4) \leq P(\sum_{k^*+\ell^*-\tau_n}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2 \leq \frac{4M^2n^2}{\varepsilon d_n}) + P(|R(\widehat{I}^*)| \geq Mn)$$

Parinkę tokį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, ir remdamiesi 4.7 lema, gauname (4.21), kai $v = 5$. Dydį M, pavyzdžiui, galime parinkti lygų $n^{1/3}$.

Beliko išnagrinėti A_{n6}. Vėl išskirkime du atvejus.

I atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^{*c}I^*| \leq a_n$. Tada remiantis 4.6 lema $R(\widehat{I}^{*c}) = O_P(a_n)$. Be to, pagal 4.7 lemą konstantai $c > 0$ $Q(\widehat{I}^{*c}) \geq cn$ su tikimybe artima 1. Taigi kai $a_n/n \to 0$, $A_{n6} = o_P(d_n)$.

II atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^{*c}I^*| \geq a_n$. Tada $R(\widehat{I}^{*c}) = O_P(n)$. Be to, tikimybė, kad $Q(\widehat{I}^{*c}) \geq \eta a_n^2$, artėja į 1, kai η artėja į 0. Taigi $A_{n6} = o_P(d_n)$, kai $n/a_n^2 \to 0$. Pasirinkę $a_n = n^{2/3}$ gauname (4.21).

Tikimybės P_{2a} vertinimas.

Turime įvertinti šias tikimybes

$$P'_{2a} := P_{2a}((1-\rho)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n), \quad \text{ir} \quad P''_{2a} := P_{2a}(-\delta_3(\hat{I}^*) \geq \varepsilon d_n).$$

Pradėkime nuo P'_{2a}. Turime, kad

$$Q(\hat{I}^{*c}I^{*c}) \geq \left(\mathbf{1}_{\hat{k}^* > \tau_n/2} \sum_{i=1}^{\tau_n/2} + \mathbf{1}_{\hat{k}^* \leq \tau_n/2} \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n/2} \right) y_{i-1}^2.$$

Pažymėkime

$$\Omega_{2a}^{(1)} := \Big\{ \Big| (1-\rho^2) \frac{2}{\tau_n} \sum_{i=1}^{\tau_n/2} y_{i-1}^2 - 1 \Big| < 1/2 \Big\} \cap \Omega_{2a},$$

$$\Omega_{2a}^{(2)} := \Big\{ \Big| (1-\rho^2) \frac{2}{\tau_n} \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n/2} y_{i-1}^2 - 1 \Big| < 1/2 \Big\} \cap \Omega_{2a}.$$

Tada aibėje $\Omega_{2a}^{(1)}$ arba $\Omega_{2a}^{(2)}$ teisinga $Q(\hat{I}^{*c} I^{*c}) \geq \frac{1}{4}\tau_n (1-\rho^2)^{-1}$ ir

$$\delta_1(\hat{I}^*, I^*) = \Big(\frac{1}{Q(\hat{I}^{*c} I^*)} + \frac{1}{Q(\hat{I}^{*c} I^{*c})} \Big)^{-1} \geq \Big(\frac{1}{Q(\hat{I}^{*c} I^*)} + \frac{4(1-\rho^2)}{\tau_n} \Big)^{-1}.$$

Kadangi

$$\frac{(1-\rho)^2}{\varepsilon d_n} > \frac{1}{\varepsilon \tau_n^2} + \frac{2(1-\rho^2)}{\tau_n}$$

pakankamai dideliems n, remiantis 4.7 lema, kai $i=1$ arba $i=2$, gauname

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} P_{2a}((1-\rho)^2 \delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} [P_{2a}((1-\rho)^2 \delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n, \Omega_{2a}^{(i)}) + P(\Omega_{2a}^{(i)c})] \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} P_{2a}(Q(\hat{I}^{*c} I^*) \leq \varepsilon \tau_n^2). \end{aligned}$$

Tada

$$\limsup_{n\to\infty} P'_{2a} \leq \limsup_{n\to\infty} P\Big(\sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2 \leq \varepsilon \tau_n^2 \Big) \leq c\varepsilon.$$

Pereikime prie P''_{2a} tikimybės. Aibėje Ω_a

$$A_{n1} := \frac{Q(\widehat{I}^* I^*) |R(\widehat{I}^* I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^*)} \leq |R(\widehat{I}^* I^{*c})| \leq \max_{1\leq j\leq k^*} \Big| \sum_{i=j}^{k^*} y_{i-1}\varepsilon_i \Big|.$$

Remiantis 4.6 lema paskutinis dydis yra $O_P(n^{1/2})$. Iš čia gaunama (4.20), kai $v=1$.

Įvertinkime dydį

$$A_{n3} := \frac{Q(\widehat{I}^{*c}I^*)|R(\widehat{I}^{*c}I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^{*c})} \le |R(\widehat{I}^{*c}I^{*c})| \le$$
$$\le \max_{1\le k\le k^*}\Big|\sum_{i=1}^{k} y_{i-1}\varepsilon_i\Big| + \Big|\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{n} y_{i-1}\varepsilon_k\Big|.$$

Remiantis 4.6 lema dešinioji nelygybės pusė yra $O_P(n^{1/2})$ ir iš čia gauname (4.20), kai $v = 3$.

Vertindami

$$A_{n2} := \frac{Q(\widehat{I}^* I^{*c})|R(\widehat{I}^* I^*)|}{Q(\widehat{I}^*)}.$$

išskirkime du atvejus:

I atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^* I^*| \le a_n$. Tada remiantis 4.6 lema

$$|R(\widehat{I}^* I^*)| \le \max_{k^*<k\le k^*+a_n}\Big|\sum_{i=k^*+1}^{k}\varepsilon_i y_{i-1}| = O_P(a_n).$$

Taigi

$$A_{n2} \le |R(\widehat{I}^* I^*)| = O_P(a_n).$$

Parinkę tokį a_n, kad $a_n/n \to 0$, gauname $d_n^{-1}A_{n2} = o_P(1)$.

II atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^* I^*| \ge a_n$. Tada remiantis 4.7 lema

$$Q(\widehat{I}^*) \ge \sum_{i=k^*+1}^{k^*+a_n} y_{i-1}^2 = O_P(a_n^2).$$

Be to, remiantis 4.6 ir 4.7 lemomis

$$Q(\widehat{I}^* I^{*c})|R(\widehat{I}^* I^*)| = O_P(n^2).$$

Parinkus tokį a_n, kad $na_n^{-2} \to 0$, kai $n \to \infty$, gauname $d_n^{-1}A_{n2} = o_P(1)$. Taigi parinkus $a_n = n^{2/3}$ gauname (4.20), kai $v = 2$.

Įvertinkime

$$A_{n4} := \frac{Q(\widehat{I}^{*c} I^{*c})|R(\widehat{I}^{*c} I^{*})|}{Q(\widehat{I}^{*c})} \leq$$
$$\leq \frac{\left(\sum_{i=1}^{k^*} + \sum_{k^*+\ell^*+1}^{n}\right) y_{i-1}^2 \max_{k^* \leq j < k^*+\ell^*} \left|\sum_{i=j+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}\varepsilon_i\right|}{\sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2}.$$

Be to, kiekvienam $\eta > 0$

$$P_{2a}((1-\rho)A_{n4} \geq \varepsilon d_n/16) \leq P\Big(\sum_{i=k^*+\ell*^- \tau_n+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2 \leq \eta\tau_n^2\Big) +$$
$$+ P\Big(\left(\sum_{i=1}^{k^*} + \sum_{k^*+\ell^*+1}^{n}\right) y_{i-1}^2 \max_{k^* \leq j < k^*+\ell^*} \left|\sum_{i=j+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}\varepsilon_i\right| \geq \varepsilon d_n \eta \tau_n^2/16(1-\rho)\Big).$$

Taigi remiantis 4.6 ir 4.7 lemomis, gauname $\limsup_{n\to\infty} P_{2a}((1-\rho)A_{n4} \geq \varepsilon d_n/16) \leq c\eta$. Kadangi $\eta > 0$ buvo pasirinktas laisvai, iš čia gaunama (4.20), kai $v = 4$.

Pereikime prie dydžio A_{n5}. Išskirkime du atvejus:

I atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^* I^*| \leq a_n$. Tada remiantis 4.6 lema $R(\widehat{I}^*) = O_P(a_n)$. Be to, pagal 4.7 lemą teigiamai konstantai $c > 0$ $Q(\widehat{I}^*) \geq cn$ su tikimybe artima 1. Iš čia $A_{n5} = o_P(d_n)$, kai $a_n/n \to 0$.

I atvejis. Tarkime, $|\widehat{I}^* I^*| \geq a_n$. Tada remiantis 4.6 ir 4.7 lemomis $R(\widehat{I}^*) = O_P(n)$, o kai $\eta \to 0$ $Q(\widehat{I}^*) \geq \eta a_n^2$ su tikimybe artima 1. Taigi $A_{n5} = o_P(d_n)$, kai $n/a_n^2 \to 0$. Iš čia parinkus $a_n = n^{2/3}$ gauname (4.21), kai $v = 5$.

Kadangi remiantis 4.6 lema $|R(\widehat{I}^{*c})| = O_P(n)$ ir aibėje Ω_{2a} teisinga $Q(\widehat{I}^{*c}) \geq \sum_{k^*+\ell^*-\tau_n+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2$, turime

$$P_{2a}(A_{n6} \geq \varepsilon d_n/4) \leq P(\sum_{k^*+\ell^*-\tau_n+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2 \leq \frac{4M^2n^2}{\varepsilon d_n}) + P(|R(\widehat{I}^{*c})| \geq Mn).$$

Parinkus tokį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, ir remdamiesi 4.7 lema gauname (4.21), kai $v = 6$. Dydį M galime parinkti, pavyzdžiui, lygų $n^{1/3}$.

Tikimybės P_{2c} vertinimas.

Turime įvertinti šias tikimybes:

$$P'_{2c} := P_{2c}((1-\rho)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \le \varepsilon d_n), \quad \text{ir} \quad P''_{2c} := P_{2c}(-\delta_3(\hat{I}^*) \ge \varepsilon d_n).$$

Pradėkime nuo P'_{2c}. Turime, kad

$$Q(\hat{I}^{*c} I^{*c}) \ge \left(\mathbf{1}_{k^* > \tau_n/2} \sum_{i=1}^{\tau_n/2} + \mathbf{1}_{k^* \le \tau_n/2} \sum_{i=n-\tau_n/2+1}^{n} \right) y_{i-1}^2.$$

Pažymėkime

$$\Omega_{2c}^{(1)} := \left\{ \left| (1-\rho^2)\frac{2}{\tau_n} \sum_{i=1}^{\tau_n/2} y_{i-1}^2 - 1 \right| < 1/2 \right\} \cap \Omega_{2c},$$
$$\Omega_{2c}^{(2)} := \left\{ \left| (1-\rho^2)\frac{2}{\tau_n} \sum_{i=n-\tau_n/2+1}^{n} y_{i-1}^2 - 1 \right| < 1/2 \right\} \cap \Omega_{2c}.$$

Tada aibėje $\Omega_{2c}^{(1)}$ arba $\Omega_{2c}^{(2)}$ teisinga $Q(\hat{I}^{*c} I^{*c}) \ge \frac{1}{4}\tau_n(1-\rho^2)^{-1}$ ir

$$\delta_1(\hat{I}^*, I^*) = \left(\frac{1}{Q(\hat{I}^{*c} I^*)} + \frac{1}{Q(\hat{I}^{*c} I^{*c})} \right)^{-1} \ge \left(\frac{1}{Q(\hat{I}^{*c} I^*)} + \frac{4(1-\rho^2)}{\tau_n} \right)^{-1}.$$

Kadangi

$$\frac{(1-\rho)^2}{\varepsilon d_n} > \frac{1}{\varepsilon \tau_n^2} + \frac{2(1-\rho^2)}{\tau_n}$$

pakankamai dideliems n, remiantis 4.7 lema, kai $i = 1$ arba $i = 2$, gauname

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} P_{2c}((1-\rho)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \le \varepsilon d_n) \\ &\le \limsup_{n\to\infty} [P_{2c}((1-\rho)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \le \varepsilon d_n, \Omega_{2c}^{(i)}) + P(\Omega_{2c}^{(i)c})] \\ &\le \limsup_{n\to\infty} P_{2c}(Q(\hat{I}^{*c} I^*) \le \varepsilon \tau_n^2). \end{aligned}$$

Tada

$$\limsup_{n\to\infty} P'_{2c} \le \limsup_{n\to\infty} P\left(\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \le \varepsilon \tau_n^2 \right) \le c\varepsilon.$$

Pereikime prie tikimybės P''_{2c}. Aibėje Ω_c turime

$$A_{n1} := \frac{Q(\widehat{I}^* I^*)|R(\widehat{I}^* I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^*)} \le |R(\widehat{I}^* I^{*c})| \le \max_{k^*+\ell^*<j\le n} \Big|\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{j} y_{i-1}\varepsilon_i\Big|.$$

Remiantis 4.6 lema paskutinis dydis yra $O_P(n^{1/2})$. Taigi teisinga (4.20), kai $v = 1$.

Dydis

$$A_{n3} := \frac{Q(\widehat{I}^{*c} I^*)|R(\widehat{I}^{*c} I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^{*c})} \le |R(\widehat{I}^{*c} I^{*c})| \le \Big|\sum_{i=1}^{k^*} y_{i-1}\varepsilon_i\Big| + \max_{k^*+\ell^*<k\le n}\Big|\sum_{i=k}^{n} y_{i-1}\varepsilon_k\Big|.$$

Remiantis 4.6 dešinioji nelygybės pusė yra $O_P(n^{1/2})$, taigi teisinga (4.20), kai $v = 3$.

Vertindami dydį

$$A_{n2} := \frac{Q(\widehat{I}^* I^{*c})|R(\widehat{I}^* I^*)|}{Q(\widehat{I}^*)}.$$

išnagrinėkime du atvejus:

I atvejis. Tarkime, $|\widehat{I}^* I^*| \le a_n$. Tada remiantis 4.6 lema

$$|R(\widehat{I}^{*c} I^*)| \le \max_{k^*+\ell^*-a_n\le k<k^*+\ell^*} \Big|\sum_{i=k+1}^{k^*+\ell^*} \varepsilon_i y_{i-1}| = O_P(a_n).$$

Taigi

$$A_{n2} \le |R(\widehat{I}^* I^*)| = O_P(a_n).$$

Parinkę tokį a_n, kad $a_n/n \to 0$, gauname $d_n^{-1} A_{n2} = o_P(1)$.

II atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^* I^*| \ge a_n$. Tada remiantis 4.7 lema

$$Q(\widehat{I}^*) \ge \sum_{i=k^*+\ell^*-a_n+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2 = O_P(a_n^2).$$

Be to, pagal 4.6 ir 4.7 lemas

$$Q(\widehat{I}^* I^{*c})|R(\widehat{I}^* I^*)| = O_P(n^2).$$

Užtikrinus, kad $na_n^{-2} \to 0$, kai $n \to \infty$, gausime $d_n^{-1} A_{n2} = o_P(1)$. Taigi parinkę $a_n = n^{2/3}$, įrodome (4.20), kai $v = 2$.

Įvertiname

$$A_{n4} := \frac{Q(\widehat{I}^{*c} I^{*c}) |R(\widehat{I}^{*c} I^{*})|}{Q(\widehat{I}^{*c})} \le \frac{K_1 K_2}{K_3},$$

čia

$$K_1 = \left(\sum_{i=1}^{k^*} + \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{n} \right) y_{i-1}^2, \ K_2 = \max_{k^* < k \le k^* + \ell^*} \Big| \sum_{i=k^*+1}^{k} y_{i-1} \varepsilon_i \Big|, \ K_3 = \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2.$$

Kiekvienam $\eta > 0$

$$P_{2c}((1-\rho) A_{n4} \ge \varepsilon d_n / 16) \le P\Big(K_3 \le \eta \tau_n^2 \Big) + P\Big(K_1 K_2 \ge \varepsilon d_n \eta \tau_n^2 / 16(1-\rho) \Big).$$

Taigi remiantis 4.6 ir 4.7 lemomis gauname $\limsup_{n\to\infty} P_{2c}((1-\rho) A_{n4} \ge \varepsilon d_n / 16) \le c\eta$. Kadangi $\eta > 0$ pasirinktas laisvai, iš čia gaunama (4.20), kai $v = 4$.

Pereikime prie dydžio A_{n5}. Išskirkime du atvejus:

I atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^* I^*| \le a_n$. Tada remiantis 4.6 lema $R(\widehat{I}^*) = O_P(\sqrt{n a_n})$. Be to, pagal 4.7 lemą teigiamai konstantai $c > 0$ $Q(\widehat{I}^*) \ge cn$ su tikimybe artima 1. Iš čia $A_{n5} = o_P(d_n)$, kai $a_n / n \to 0$.

I atvejis. Tarkime, $|\widehat{I}^* I^*| \ge a_n$. Tada remiantis 4.6 ir 4.7 lemomis $R(\widehat{I}^*) = O_P(n)$, o kai $\eta \to 0$ $Q(\widehat{I}^*) \ge \eta a_n^2$ su tikimybe artima 1. Taigi $A_{n5} = o_P(d_n)$, kai $n / a_n^2 \to 0$. Iš čia parinkus $a_n = n^{2/3}$ gauname (4.21), kai $v = 5$.

Kadangi remiantis 4.6 lema $|R(\widehat{I}^{*c})| = O_P(n)$ ir aibėje Ω_{2c} $Q(\widehat{I}^{*c}) \ge \sum_{k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2$, gauname

$$P_{2c}(A_{n6} \ge \varepsilon d_n / 4) \le P(\sum_{k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \le \frac{4M^2 n^2}{\varepsilon d_n}) + P(|R(\widehat{I}^{*c})| \ge Mn).$$

Parinkę tokį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, ir remdamiesi 4.7 lema, gauname (4.21), kai $v = 6$. Dydį M galime parinkti, pavyzdžiui, lygų $n^{1/3}$.

Tikimybės P_{2d} vertinimas. Turime įvertinti tikimybes

$$P_{2d}' := P_{2d}((1-\rho)^2 \delta_1(\hat{I}^*, I^*) \le \varepsilon d_n), \quad \text{ir} \quad P_{2d}'' := P_{2d}(-\delta_3(\hat{I}^*) \ge \varepsilon d_n).$$

Pradėkime nuo P'_{2d}. Įvertinkime

$$Q(\hat{I}^{*c}I^{*c}) = Q(I^{*c}) \geq \left(\mathbf{1}_{k^*>\tau_n/2} \sum_{i=1}^{\tau_n/2} + \mathbf{1}_{k^* \leq \tau_n/2} \sum_{i=n-\tau_n/2+1}^{n} \right) y_{i-1}^2.$$

Pažymėkime

$$\Omega_{2d}^{(1)} := \left\{ \left| (1-\rho^2) \frac{2}{\tau_n} \sum_{i=1}^{\tau_n/2} y_{i-1}^2 - 1 \right| < 1/2 \right\} \cap \Omega_{2d},$$
$$\Omega_{2d}^{(2)} := \left\{ \left| (1-\rho^2) \frac{2}{\tau_n} \sum_{i=n-\tau_n/2+1}^{n} y_{i-1}^2 - 1 \right| < 1/2 \right\} \cap \Omega_{2d}.$$

Tada aibėje $\Omega_{2d}^{(1)}$ arba $\Omega_{2d}^{(2)}$ teisinga $Q(\hat{I}^{*c}I^{*c}) \geq \frac{1}{4}\tau_n(1-\rho^2)^{-1}$ ir

$$\delta_1(\hat{I}^*, I^*) = \Big(\frac{1}{Q(\hat{I}^{*c}I^*)} + \frac{1}{Q(\hat{I}^{*c}I^{*c})} \Big)^{-1} \geq \Big(\frac{1}{Q(\hat{I}^{*c}I^*)} + \frac{4(1-\rho^2)}{\tau_n} \Big)^{-1}.$$

Kadangi

$$\frac{(1-\rho)^2}{\varepsilon d_n} > \frac{1}{\varepsilon \tau_n^2} + \frac{2(1-\rho^2)}{\tau_n}$$

pakankamai dideliems n, remiantis 4.7 lema, kai $i = 1$ arba $i = 2$, gauname

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} P_{2d}((1-\rho)^2 \delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} [P_{2d}((1-\rho)^2 \delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n, \Omega_{2d}^{(i)}) + P(\Omega_{2d}^{(i)c})] \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} P_{2d}(Q(\hat{I}^{*c}I^*) \leq \varepsilon \tau_n^2).
\end{aligned}$$

Tada $\limsup_{n\to\infty} P'_{2d}$ nedidesnis už

$$\limsup_{n\to\infty} P\left(\left(\mathbf{1}_{\hat{k}^*-k^*>\tau_n/2} \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n/2} + \mathbf{1}_{\hat{k}^*-k^* \leq \tau_n/2} \sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n/2}^{k^*+\ell^*} \right) y_{i-1}^2 \leq \varepsilon \tau_n^2 \right) \leq c\varepsilon.$$

Toliau nagrinėsime tikimybę P''_{2d}. Aibėje Ω_d dydžiai A_{n1} ir A_{n2} yra lygūs 0. Dydį A_{n3} galime įvertinti

$$A_{n3} = \frac{Q(\widehat{I}^{*c}I^*)|R(I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^{*c})} \leq |R(I^{*c})| = \Big| \sum_{i=1}^{k^*} y_{i-1}\varepsilon_i \Big| + \Big| \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{n} y_{i-1}\varepsilon_k \Big|.$$

Iš čia remdamiesi 4.6 lema gauname (4.20), kai $v = 3$.

Įvertinkime dydį

$$A_{n4} = Q(I^{*c})|R(\widehat{I}^{*c}I^*)|/Q(\widehat{I}^{*c}) \leq \frac{N_1 N_2}{N_3},$$

čia

$$N_1 = \left(\sum_{i=1}^{k^*} + \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{n}\right) y_{i-1}^2,$$

$$N_2 = \max_{k^*<k\leq k^*+\ell^*}\Big|\sum_{i=k^*+1}^{k} y_{i-1}\varepsilon_i\Big| + \max_{k^*\leq k<k^*+\ell^*}\Big|\sum_{i=k+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}\varepsilon_i\Big|,$$

$$N_3 = \left(\mathbf{1}_{\hat{k}^*-k^*>\tau_n/2}\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n/2} + \mathbf{1}_{\hat{k}^*-k^*\leq\tau_n/2}\sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n/2}^{k^*+\ell^*}\right) y_{i-1}^2.$$

Kiekvienam $\eta > 0$ turime

$$P_{2d}((1-\rho)A_{n4} \geq \varepsilon d_n/16) \leq P\Big(N_3 \leq \eta\tau_n^2\Big) + P\left(N_1N_2 \geq \varepsilon d_n \eta\tau_n^2/16(1-\rho)\right).$$

Remdamiesi 4.6 ir 4.7 lemomis gauname, kad $\limsup_{n\to\infty} P_{2d}((1-\rho)A_{n4} \geq \varepsilon d_n/16) \leq c\eta$. Kadangi $\eta > 0$ laisvai pasirinktas iš čia gaunama (4.20), kai $v = 4$.

Pereikime prie dydžio A_{n5}. Išskirkime du atvejus:

I atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^* I^*| \leq a_n$. Tada remiantis 4.6 lema $R(\widehat{I}^*) = O_P(\sqrt{na_n})$. Be to, pagal 4.7 lemą teigiamai konstantai $c > 0$ $Q(\widehat{I}^*) \geq cn$ su tikimybe artima 1. Iš čia $A_{n5} = o_P(d_n)$, kai $a_n/n \to 0$.

I atvejis. Tarkime, $|\widehat{I}^* I^*| \geq a_n$. Tada remiantis 4.6 ir 4.7 lemomis $R(\widehat{I}^*) = O_P(n)$, o kai $\eta \to 0$ $Q(\widehat{I}^*) \geq \eta a_n^2$ su tikimybe artima 1. Taigi $A_{n5} = o_P(d_n)$, kai $n/a_n^2 \to 0$. Iš čia parinkus $a_n = n^{2/3}$ gauname (4.21), kai $v = 5$.

Kadangi remiantis 4.6 lema $|R(\widehat{I}^{*c})| = O_P(n)$ ir aibėje Ω_{2d}

$$Q(\widehat{I}^{*c}) \geq \left(\mathbf{1}_{\hat{k}^*-k^*>\tau_n/2}\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n/2} + \mathbf{1}_{\hat{k}^*-k^*\leq\tau_n/2}\sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n/2}^{k^*+\ell^*}\right) y_{i-1}^2,$$

gauname

$$P_{2d}(A_{n6} \geq \varepsilon d_n/4) = P_{2d}(Q(\widehat{I}^{*c}) \leq \frac{4M^2n^2}{\varepsilon d_n}) + P(|R(\widehat{I}^{*c})| \geq Mn).$$

Parinkus tokį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, įrodomas (4.21), kai $v = 6$. Dydį M galime parinkti lygų $n^{1/3}$.

Tikimybės P_{2e} vertinimas.

Įvertinsime šias dvi tikimybes:

$$P'_{2e} := P_{2e}((1-\rho)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n), \quad \text{ir} \quad P''_{2e} := P_{2e}(-\delta_3(\hat{I}^*) \geq \varepsilon d_n).$$

Pradėkime nuo P'_{2e}. Turime, kad $Q(\hat{I}^{*c}I^{*c})$ nemažesnis už

$$\left(\mathbf{1}_{\hat{k}^*>\tau_n/3}\sum_{i=1}^{\tau_n/3} + \mathbf{1}_{k^*-\hat{k}^*-\hat{\ell}^*>\tau_n/3}\sum_{i=k^*-\tau_n/3+1}^{k^*} + \mathbf{1}_{n-k^*-\ell^*>\tau_n/3}\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n/3}\right) y_{i-1}^2.$$

Pažymėkime

$$\Omega_{2e}^{(1)} := \left\{\left|(1-\rho^2)\frac{3}{\tau_n}\sum_{i=1}^{\tau_n/3} y_{i-1}^2 - 1\right| < 1/2\right\} \cap \Omega_{2e},$$

$$\Omega_{2e}^{(2)} := \left\{\left|(1-\rho^2)\frac{3}{\tau_n}\sum_{i=k^*-\tau_n/3+1}^{k^*} y_{i-1}^2 - 1\right| < 1/2\right\} \cap \Omega_{2e},$$

$$\Omega_{2e}^{(3)} := \left\{\left|(1-\rho^2)\frac{3}{\tau_n}\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n/3} y_{i-1}^2 - 1\right| < 1/2\right\} \cap \Omega_{2e}.$$

Tada aibėje $\Omega_{2e}^{(1)}$ arba $\Omega_{2e}^{(2)}$ arba $\Omega_{2e}^{(3)}$ teisinga $Q(\hat{I}^{*c}I^{*c}) \geq \frac{1}{4}\tau_n(1-\rho^2)^{-1}$ ir

$$\delta_1(\hat{I}^*, I^*) = \Big(\frac{1}{Q(\hat{I}^{*c}I^*)} + \frac{1}{Q(\hat{I}^{*c}I^{*c})}\Big)^{-1} \geq \Big(\frac{1}{Q(\hat{I}^{*c}I^*)} + \frac{4(1-\rho^2)}{\tau_n}\Big)^{-1}.$$

Kadangi

$$\frac{(1-\rho)^2}{\varepsilon d_n} > \frac{1}{\varepsilon\tau_n^2} + \frac{2(1-\rho^2)}{\tau_n}$$

pakankamai dideliems n, remiantis 4.7 lema, kai $i = 1$ arba $i = 2$ arba $i = 3$, gauname

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} P_{2e}((1-\rho)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \le \varepsilon d_n) \\
&\le \limsup_{n\to\infty} [P_{2e}((1-\rho)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \le \varepsilon d_n, \Omega_{2e}^{(i)}) + P(\Omega_{2e}^{(i)c})] \\
&\le \limsup_{n\to\infty} P_{2e}(Q(\hat{I}^{*c} I^*) \le \varepsilon\tau_n^2).
\end{aligned}$$

Tada

$$\limsup_{n\to\infty} P'_{2e} \le \limsup_{n\to\infty} P\Big(\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \le \varepsilon\tau_n^2\Big) \le c\varepsilon.$$

Pereikime prie tikimybės P''_{2e}. Aibėje Ω_e dydžiai A_{n1} ir A_{n2} yra lygūs 0. Dydis

$$\begin{aligned}
A_{n3} &= \frac{Q(I^*)|R(\widehat{I}^{*c} I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^{*c})} \le |R(\widehat{I}^{*c} I^{*c})| \\
&\le \max_{1\le k\le k^*} \Big|\sum_{i=1}^{k} y_{i-1}\varepsilon_i\Big| + \max_{1\le k\le k^*} \Big|\sum_{i=k}^{k^*} y_{i-1}\varepsilon_i\Big| + \Big|\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{n} y_{i-1}\varepsilon_i\Big|.
\end{aligned}$$

Remiantis 4.6 lema dešinioji nelygybės pusė yra $O_P(n^{1/2})$ ir iš čia gauname, kad teisinga (4.20), kai $v = 3$.

Įvertinkime

$$\begin{aligned}
A_{n4} &= \frac{Q(\widehat{I}^{*c} I^{*c})|R(I^*)|}{Q(\widehat{I}^{*c})} \le \\
&\le \frac{\Big(\sum_{i=1}^{k^*} + \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{n}\Big) y_{i-1}^2 \max_{k^*<k\le k^*+\ell^*} \Big|\sum_{i=k^*+1}^{k} y_{i-1}\varepsilon_i\Big|}{\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2}.
\end{aligned}$$

Be to, kiekvienam $\eta > 0$

$$\begin{aligned}
&P_{2e}((1-\rho)A_{n4} \ge \varepsilon d_n/16) \le P\Big(\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \le \eta\tau_n^2\Big) + \\
&+ P\Big(\Big(\sum_{i=1}^{k^*} + \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{n}\Big) y_{i-1}^2 \max_{k^*<k\le k^*+\ell^*} \Big|\sum_{i=k^*+1}^{k} y_{i-1}\varepsilon_i\Big| \ge \varepsilon d_n\eta\tau_n^2/16(1-\rho)\Big).
\end{aligned}$$

Taigi remdamiesi 4.6 ir 4.7 lemomis gauname $\limsup_{n\to\infty} P_{2e}((1-\rho)A_{n4} \geq \varepsilon d_n/16) \leq c\eta$. Kadangi $\eta > 0$ pasirinktas laisvai, iš čia seka (4.20), kai $v = 4$.

Pereikime prie dydžio A_{n5}. Tikimybė

$$P_{2e}(A_{n6} \geq \varepsilon d_n/4) = P_{2e}(Q(\widehat{I}^*) \leq \frac{4M^2 n}{\varepsilon d_n}) + P(|R(\widehat{I}^*)| \geq M\sqrt{n}).$$

Remiantis 4.6 ir 4.7 lemomis $|R(\widehat{I}^*)| = O_P(\sqrt{n})$ ir $Q(\widehat{I}^*) = O_P(n)$. Taigi parinkę tokį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, gauname (4.21), kai $v = 5$. Dydį M, pavyzdžiui, galime parinkti lygų $n^{1/3}$.

Remiantis 4.6 lema $|R(\widehat{I}^{*c})| = O_P(n)$ ir aibėje Ω_{2e} $Q(\widehat{I}^{*c}) \geq \sum_{k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2$. Be to,

$$P_{2e}(A_{n6} \geq \varepsilon d_n/4) \leq P(\sum_{k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \leq \frac{4M^2 n^2}{\varepsilon d_n}) + P(|R(\widehat{I}^{*c})| \geq Mn).$$

Taigi parinkus tokį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, ir remiantis 4.7 lema gauname (4.21), kai $v = 6$. Dydį M, pavyzdžiui, galime parinkti lygų $n^{1/3}$.

Tikimybės P_{2f} vertinimas. Turime įvertinti tikimybes

$$P'_{2f} := P_{2f}((1-\rho)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n), \quad \text{ir} \quad P''_{2f} := P_{2f}(-\delta_3(\hat{I}^*) \geq \varepsilon d_n).$$

Pradėkime nuo P'_{2f}. Turime, kad $Q(\hat{I}^{*c} I^{*c})$ nemažesnis už

$$\left(\mathbf{1}_{k^* > \tau_n/3} \sum_{i=1}^{\tau_n/3} + \mathbf{1}_{\hat{k}^* - k^* - \ell^* > \tau_n/3} \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n/3} + \mathbf{1}_{n - \hat{k}^* - \hat{\ell}^* > \tau_n/3} \sum_{i=n-\tau_n/3+1}^{n} \right) y_{i-1}^2.$$

Pažymėkime

$$\Omega_{2f}^{(1)} := \left\{ \left| (1-\rho^2)\frac{3}{\tau_n} \sum_{i=1}^{\tau_n/3} y_{i-1}^2 - 1 \right| < 1/2 \right\} \cap \Omega_{2f},$$

$$\Omega_{2f}^{(2)} := \left\{ \left| (1-\rho^2)\frac{3}{\tau_n} \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n/3} y_{i-1}^2 - 1 \right| < 1/2 \right\} \cap \Omega_{2f},$$

$$\Omega_{2f}^{(3)} := \left\{ \left| (1-\rho^2)\frac{3}{\tau_n} \sum_{i=n-\tau_n/3+1}^{n} y_{i-1}^2 - 1 \right| < 1/2 \right\} \cap \Omega_{2f}.$$

Tada aibėje $\Omega_{2f}^{(1)}$ arba $\Omega_{2f}^{(2)}$ arba $\Omega_{2f}^{(3)}$teisinga $Q(\hat{I}^{*c}I^{*c}) \geq \frac{1}{4}\tau_n(1-\rho^2)^{-1}$ ir

$$\delta_1(\hat{I}^*, I^*) = \Big(\frac{1}{Q(\hat{I}^{*c}I^*)} + \frac{1}{Q(\hat{I}^{*c}I^{*c})}\Big)^{-1} \geq \Big(\frac{1}{Q(\hat{I}^{*c}I^*)} + \frac{4(1-\rho^2)}{\tau_n}\Big)^{-1}.$$

Kadangi

$$\frac{(1-\rho)^2}{\varepsilon d_n} > \frac{1}{\varepsilon\tau_n^2} + \frac{2(1-\rho^2)}{\tau_n}$$

pakankamai dideliems n, remiantis 4.7 lema, kai $i = 1$ arba $i = 2$ arba $i = 3$, gauname

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} P_{2f}((1-\rho)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty}[P_{2f}((1-\rho)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n, \Omega_{2f}^{(i)}) + P(\Omega_{2f}^{(i)c})] \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} P_{2f}(Q(\hat{I}^{*c}I^*) \leq \varepsilon\tau_n^2).
\end{aligned}$$

Tada

$$\limsup_{n\to\infty} P'_{2f} \leq \limsup_{n\to\infty} P\Big(\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \leq \varepsilon\tau_n^2\Big) \leq c\varepsilon.$$

Pereikime prie tikimybės P''_{2f}. Aibėje Ω_f dydžiai A_{n1} ir A_{n2} yra lygūs 0. Turime, kad

$$\begin{aligned}
A_{n3} &= \frac{Q(I^*)|R(\widehat{I}^{*c}I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^{*c})} \leq |R(\widehat{I}^{*c}I^{*c})| \\
&\leq \Big|\sum_{i=1}^{k^*} y_{i-1}\varepsilon_i\Big| + \max_{k^*+\ell^*<k\leq n}\Big|\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k} y_{i-1}\varepsilon_i\Big| + \max_{k^*+\ell^*\leq k<n}\Big|\sum_{i=k+1}^{n} y_{i-1}\varepsilon_i\Big|.
\end{aligned}$$

Remaintis 4.6 dešinioji nelygybės pusė yra $O_P(n^{1/2})$ ir iš čia gauname (4.20), kai for $v = 3$.

Įvertinkime

$$\begin{aligned}
A_{n4} &= \frac{Q(\widehat{I}^{*c}I^{*c})|R(I^*)|}{Q(\widehat{I}^{*c})} \leq \\
&\leq \frac{\Big(\sum_{i=1}^{k^*} + \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{n}\Big) y_{i-1}^2 \max_{k^*<k\leq k^*+\ell^*}\Big|\sum_{i=k^*+1}^{k} y_{i-1}\varepsilon_i\Big|}{\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2}.
\end{aligned}$$

Be to, kiekvienam $\eta > 0$

$$P_{2f}((1-\rho)A_{n4} \geq \varepsilon d_n/16) \leq P\Big(\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \leq \eta\tau_n^2\Big)+$$
$$+P\Big(\Big(\sum_{i=1}^{k^*}+\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{n}\Big)y_{i-1}^2 \max_{k^*<k\leq k^*+\ell^*}\Big|\sum_{i=k^*+1}^{k} y_{i-1}\varepsilon_i\Big| \geq \varepsilon d_n\eta\tau_n^2/16(1-\rho)\Big).$$

Taigi remdamiesi 4.6 ir 4.7 lemomis, gauname $\limsup_{n\to\infty} P_{2f}((1-\rho)A_{n4} \geq \varepsilon d_n/16) \leq c\eta$. Kadangi $\eta > 0$ pasirinktas laisvai, iš čia gaunama (4.20), kai $v = 4$.

Pereikime prie dydžio A_{n5}. Tikimybė

$$P_{2f}(A_{n6} \geq \varepsilon d_n/4) = P_{2f}(Q(\widehat{I}^*) \leq \frac{4M^2 n}{\varepsilon d_n}) + P(|R(\widehat{I}^*)| \geq M\sqrt{n}).$$

Remiantis 4.6 ir 4.7 lemomis $|R(\widehat{I}^*)| = O_P(\sqrt{n})$ ir $Q(\widehat{I}^*) = O_P(n)$. Taigi parinkę tokį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, gauname (4.21), kai $v = 5$. Dydį M, pavyzdžiui, galime parinkti lygų $n^{1/3}$.

Kadangi remiantis 4.6 lema $|R(\widehat{I}^{*c})| = O_P(n)$ ir aibėje Ω_{2f} $Q(\widehat{I}^{*c}) \geq \sum_{k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2$, gauname

$$P_{2f}(A_{n6} \geq \varepsilon d_n/4) \leq P(\sum_{k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \leq \frac{4M^2n^2}{\varepsilon d_n}) + P(|R(\widehat{I}^{*c})| \geq Mn).$$

Taigi parinkus tokį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, ir remiantis 4.7 lema gauname (4.21), kai $v = 6$. Dydį M, pavyzdžiui, galime parinkti lygų $n^{1/3}$.

(ii) Iš pradžių įrodysime, kad

$$|1-\hat{\rho}^*| = O_P(n^{-1}),$$

čia $\hat{\rho}^* = \hat{\rho}(I_\beta)$. Galime užrašyti

$$1-\hat{\rho}^* = \frac{Q(I_\beta) - \sum_{i\in I_\beta} y_i y_{i-1}}{Q(I_\beta)}.$$

Dešiniojoje lygybės pusėje esančios trupmenos skaitiklį perrašome tokiu būdu:

$$\sum_{i\in I_\beta} y_{i-1}(y_{i-1}-y_i) = -R(I_\beta) + (1-\rho)Q(I_\beta).$$

Taigi gauname, kad

$$|1-\hat{\rho^*}| \le \frac{|R(I_\beta)|}{Q(I_\beta)} + (1-\rho)\frac{Q(I_\beta I^{*c})}{Q(I_\beta)}.$$

Remdamiesi jau įrodyta šios teoremos (i) dalimi tariame, kad kaip norima mažam $\varepsilon:\ 0<\varepsilon<\beta\ |\hat{k^*}-k^*| + |\hat{\ell^*}-\ell^*| \le \varepsilon n$. Tada $I_\beta I^{*c} = \emptyset$ bei remiantis 4.6 ir 4.7 lemomis $R(I_\beta) = O_P(n)$ ir $Q(I_\beta) = O_P(n^2)$. Taigi $|\rho-\hat\rho| = O_P(n^{-1})$.

Taigi $|1-\hat{\rho^*}| = O_P(n^{-1})$.

Dabar įrodysime, kad

$$|\rho-\hat\rho| = O_P(n^{-1/2}),$$

čia $\hat\rho = \hat\rho(J_\beta)$. Turime, kad

$$\rho-\hat\rho = \frac{\rho Q(J_\beta) - \sum_{i\in J_\beta} y_i y_{i-1}}{Q(J_\beta)}.$$

Dešiniojoje lygybės pusėje esančios trupmenos skaitiklis yra lygus

$$\sum_{i\in J_\beta} y_{i-1}(\rho y_{i-1}-y_i) = -R(J_\beta) - (1-\rho)Q(J_\beta I^*)$$

ir gauname, kad

$$|\rho-\hat\rho| \le \frac{|R(J_\beta)|}{Q(J_\beta)} + (1-\rho)\frac{Q(J_\beta I^*)}{Q(J_\beta)}.$$

Remdamiesi jau įrodyta šios teoremos (i) dalimi tariame, kad kaip norima mažam $\varepsilon:\ 0<\varepsilon<\beta\ |\hat{k^*}-k^*|+|\hat{\ell^*}-\ell^*| \le \varepsilon n$. Tada $J_\beta I^* = \emptyset$ bei remiantis 4.6 ir 4.7 lemomis $R(J_\beta) = O_P(\sqrt{n})$ ir $Q(J_\beta) = O_P(n)$. Taigi $|\rho-\hat\rho| = O_P(n^{-1/2})$.

4.3 Pasikeitimas iš nestacionarios būklės į stacionarią

Šiame skyrelyje įrodoma žemiau pateikta 4.3 teorema (4.1) modelio parametrų k^*, ℓ^*, ρ ir ρ^* įvertiniams, kai autoregresinis procesas keičiasi iš nestacionarios būklės į stacionarią.

4.3 teorema. *Tarkime,* (4.1) *modelio parametrai* $|\rho| = 1$, $|\rho^*| < 1$ *ir tenkinamos* $(A1)$-$(A3)$ *prielaidos. Tada*

(i) *parametrų* (k^*, ℓ^*) (4.2) *įvertiniams teisinga:*

$$|\hat{k^*} - k^*| + |\hat{\ell^*} - \ell^*| = o_P(n);$$

(ii) *parametrų* ρ *ir* ρ^* (4.3) *įvertiniams su bet kuriuo* $0 < \beta < \theta_0/3$ *teisinga:*

$$|1 - \hat{\rho}| = O_P(n^{-1}), \quad |\rho^* - \hat{\rho^*}| = O_P(n^{-1/2}).$$

4.3.1 Pagalbinės lemos

Prieš pereinant prie 4.3 teoremos įrodymo, įrodykime keletą pagalbinių lemų dydžiams $R(A)$ ir $Q(A)$ atsižvelgdami į skirtingas aibių A ir I^* kombinacijos.

4.8 lema. *Tarkime, tenkinamos* (4.3) *teoremos sąlygos. Tegu* (τ_n) *žymi seką, artėjančią į begalybę, kai* $n \to \infty$. *Tada*

(i) *jei* $\tau_n/k^* \le 1$ *kiekvienam* $n \ge 1$, *tada kai* $n \to \infty$,

(a) $\max_{1 \le k \le \tau_n} \left| \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i y_{i-1} \right| = O_P(\tau_n)$;

(b) $\max_{k^* - \tau_n \le k \le k^*} \left| \sum_{i=k+1}^{k^*} \varepsilon_i y_{i-1} \right| = O_P(\sqrt{n\tau_n})$;

(ii) *jei* $\tau_n/\ell^* \le 1$ *kiekvienam* $n \ge 1$, *tada kai* $n \to \infty$,

(a) $\max_{k^* < k \le k^* + \tau_n} \left| \sum_{i=k^*+1}^{k} \varepsilon_i y_{i-1} \right| = O_P(\sqrt{n})$;

(b) $\max_{k^* + \ell^* - \tau_n < k \le k^* + \ell^*} \left| \sum_{i=k+1}^{k^*+\ell^*} \varepsilon_i y_{i-1} \right| = O_P(\sqrt{n})$;

(iii) *jei* $\tau_n/(n - k^* - \ell^*) \le 1$ *kiekvienam* $n \ge 1$, *tada kai* $n \to \infty$,

(a) $\max_{k^* + \ell^* < k \le k^* + \ell^* + \tau_n} \left| \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k} \varepsilon_i y_{i-1} \right| = O_P(\sqrt{n\tau_n})$;

(b) $\max_{n-\tau_n\le k\le n}\left|\sum_{i=k+1}^n \varepsilon_i y_{i-1}\right| = O_P(\sqrt{n\tau_n})$.

Įrodymas.

(i) (a) Kadangi $(\sum_{i=1}^k \varepsilon_i y_{i-1}, k\ge 1)$ yra martingalas, pagal Dubo nelygybę turime

$$E\max_{1\le k\le\tau_n}\Big|\sum_{i=1}^k \varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2 \le 4E\Big|\sum_{i=1}^{\tau_n}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2.$$

Kadangi visiems $i\le k^*$ stebėjimai $y_i=\sum_{j=1}^i \varepsilon_j$, gauname $Ey_i^2=i$. Taigi

$$E\Big|\sum_{i=1}^{\tau_n}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2 = \sum_{i=1}^{\tau_n} Ey_{i-1}^2 \le \frac{\tau_n^2}{2}$$

ir iš čia seka teiginys (a).

(b) Kadangi $(\sum_{i=k^*-\tau_n+1}^k \varepsilon_i y_{i-1}, k>k^*-\tau_n)$ yra martingalas ir

$$\sum_{i=k+1}^{k^*}\varepsilon_i y_{i-1} = \left(\sum_{i=k^*-\tau_n+1}^{k^*} - \sum_{i=k^*-\tau_n+1}^{k}\right)\varepsilon_i y_{i-1},$$

pritaikę Dubo nelygybę gauname

$$E\max_{k^*-\tau_n\le k\le k^*}\Big|\sum_{i=k+1}^{k^*}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2 \le 16E\Big|\sum_{i=k^*-\tau_n+1}^{k^*}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2.$$

Kiekvienam $i\le k^*$ stebėjimai $y_i=\sum_{j=1}^i\varepsilon_j$ ir $Ey_i^2=i$. Taigi

$$E\Big|\sum_{i=k^*-\tau_n+1}^{k^*}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2 = \sum_{i=k^*-\tau_n+1}^{k^*} Ey_{i-1}^2 \le \frac{(k^*-\tau_n+k^*)\tau_n}{2}\le n\tau_n.$$

(ii) (a) Kadangi $(\sum_{i=k^*+1}^k \varepsilon_i y_{i-1}, k>k^*)$ yra martingalas, pagal Dubo nelygybę turime

$$E\max_{k^*<k\le k^*+\tau_n}\Big|\sum_{i=k^*+1}^k \varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2 \le 4E\Big|\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2.$$

Kadangi visiems $i:\ k^*+1\le i\le k^*+\ell^*$ stebėjimai $y_i=\rho^{*i-k^*}y_{k^*}+\sum_{j=k^*+1}^i\rho^{*i-j}\varepsilon_j$, gauname $Ey_i^2=\rho^{*2(i-j)}Ey_{k^*}^2+\sum_{j=k^*+1}^i\rho^{*2(i-j)}\le(1-\rho^{*2})^{-1}+$

$k^*\rho^{*2(i-k^*)}$. Taigi

$$E\Big|\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2=\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n}Ey_{i-1}^2\le\frac{k^*+\tau_n}{1-\rho^{*2}}\le\frac{n}{1-\rho^{*2}}$$

ir iš čia seka teiginys (a).

(b) Kadangi $(\sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n+1}^{k}\varepsilon_i y_{i-1}, k>k^*+\ell^*-\tau_n)$ yra martingalas ir

$$\sum_{i=k+1}^{k^*+\ell^*}\varepsilon_i y_{i-1}=\left(\sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n+1}^{k^*+\ell^*}-\sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n+1}^{k}\right)\varepsilon_i y_{i-1},$$

pritaikę Dubo nelygybę gauname

$$E\max_{k^*+\ell^*-\tau_n<k\le k^*+\ell^*}\Big|\sum_{i=k+1}^{k^*+\ell^*}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2\le 16E\Big|\sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n+1}^{k^*+\ell^*}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2.$$

Kadangi visiems $i:k^*+\ell^*+1\le i\le k^*+\ell^*$ stebėjimai $y_i=\rho^{*i-k^*}y_{k^*}+\sum_{j=k^*+1}^{i}\rho^{*i-j}\varepsilon_j$, turime $Ey_i^2=\rho^{*2(i-j)}Ey_{k^*}^2+\sum_{j=k^*+1}^{i}\rho^{*2(i-j)}\le(1-\rho^{*2})^{-1}+k^*\rho^{*2(i-k^*)}$. Taigi

$$E\Big|\sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n+1}^{k^*+\ell^*}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2=\sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n+1}^{k^*+\ell^*}Ey_{i-1}^2\le\frac{k^*+\tau_n}{1-\rho^{*2}}\le\frac{n+\tau_n}{1-\rho^{*2}}$$

ir iš čia gaunamas lemos tvirtinimas.

(iii) (a) Martingalui $(\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k}\varepsilon_i y_{i-1}, k>k^*+\ell^*)$ pritaikę Dubo nelygybę gauname

$$E\max_{k^*+\ell^*<k\le k^*+\ell^*+\tau_n}\Big|\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2\le 4E\Big|\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2.$$

Kadangi visiems $i:k^*+\ell^*<i\le n$ stebėjimai $y_i=y_{k^*+\ell^*}+\sum_{j=k^*+\ell^*+1}^{i}\varepsilon_j$ ir $E(y_i^2)\le\rho^{*2\ell^*}k^*+\frac{1}{1-\rho^{*2}}+i-(k^*+\ell^*)$, tai

$$\begin{aligned}E\Big|\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n}\varepsilon_i y_{i-1}\Big|^2&=\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n}Ey_{i-1}^2\le\rho^{*2\ell^*}\tau_n k^*+\\&+\frac{\tau_n}{(1-\rho^{*2})}+\frac{(2(k^*+\ell^*)+\tau_n)\tau_n}{2}\le 2n\tau_n+\frac{\tau_n}{(1-\rho^{*2})}\end{aligned}$$

ir iš čia seka teiginys (a).

(b) Kadangi $(\sum_{i=n-\tau_n+1}^{k} \varepsilon_i y_{i-1}, k > k^* + \ell^*)$ yra martingalas ir

$$\sum_{i=k+1}^{n} \varepsilon_i y_{i-1} = \left(\sum_{i=n-\tau_n+1}^{n} - \sum_{i=n-\tau_n+1}^{k} \right) \varepsilon_i y_{i-1},$$

pritaikę Dubo nelygybę gauname

$$E \max_{n-\tau_n \le k \le n} \Big| \sum_{i=k+1}^{n} \varepsilon_i y_{i-1} \Big|^2 \le 16E \Big| \sum_{n-\tau_n+1}^{n} \varepsilon_i y_{i-1} \Big|^2.$$

Kadangi visiems i $i : k^* + \ell^* < i \le n$ teisinga $E(y_i^2) \le \rho^{*2\ell^*} k^* + \frac{1}{1-\rho^{*2}} + i - (k^* + \ell^*)$, tai

$$E\Big| \sum_{n-\tau_n+1}^{n} \varepsilon_i y_{i-1} \Big|^2 = \sum_{n-\tau_n+1}^{n} E y_{i-1}^2 \le \frac{\tau_n}{(1-\rho^{*2})} + (n - \ell^*)\tau_n$$

ir iš čia gaunamas lemos tvirtinimas. ∎

4.9 lema. *Tarkime, tenkinamos* (4.3) *teoremos sąlygos. Tegu* (τ_n) *žymi seką, artėjančią į begalybę, kai* $n \to \infty$*. Tada*

(i) *jei* $\tau_n / k^* \le 1$ *kiekvienam* $n \ge 1$ *ir* $\sqrt{n} = o(\tau_n)$, *tada*

  (a) $\limsup_{n\to\infty} P\Big(\sum_{i=1}^{\tau_n} y_{i-1}^2 \le \varepsilon \tau_n^2 \Big) \le c\varepsilon;$

  (b) $\limsup_{n\to\infty} P\Big(\sum_{i=k^*-\tau_n+1}^{k^*} y_{i-1}^2 \le \varepsilon \tau_n^2 \Big) \le c\varepsilon;$

(ii) *jei* $\tau_n / \ell^* \le 1$ *kiekvienam* $n \ge 1$, *tada egzistuoja tokia konstanta* $c > 0$, *kad kiekvienam* $\varepsilon > 0$

  (a) $(1-\rho^{*2})\tau_n^{-1} \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 1;$

  (b) $(1-\rho^{*2})\tau_n^{-1} \sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}} 1;$

(iii) *jei* $\tau_n / (n - k^* - \ell^*) \le 1$ *kiekvienam* $n \ge 1$ *ir* $\sqrt{n} = o(\tau_n)$, *tada*

  (a) $\limsup_{n\to\infty} P\Big(\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \le \varepsilon \tau_n^2 \Big) \le c\varepsilon;$

  (b) $\limsup_{n\to\infty} P\Big(\sum_{i=n-\tau_n+1}^{n} y_{i-1}^2 \le \varepsilon \tau_n^2 \Big) \le c\varepsilon;$

Įrodymas.

(i) Įvertinkime

$$P\Big(\sum_{i=1}^{\tau_n} y_{i-1}^2 \le \varepsilon\tau_n^2\Big) = P\Big(\sum_{i=1}^{\tau_n}\Big(\sum_{j=1}^{i-1}\varepsilon_j\Big)^2 \le \varepsilon\tau_n^2\Big)$$
$$\le P\Big(\sum_{i=1}^{\tau_n}\Big(\sum_{j=1}^{i-1}\varepsilon_j\Big)^2 \le 3\varepsilon\tau_n^2\Big)$$
$$= P\Big(\sum_{i=1}^{\tau_n}\Big(\sum_{j=1}^{i-1}\varepsilon_j\Big)^2 \le 3\varepsilon\tau_n^2\Big).$$

Pagal invariantiškumo principą ir tolydaus atvaizdžio teoremą (žr. [11] 1 išvadą psl. 31), kiekvienam $x > 0$ turime

$$\limsup_{n\to\infty} P\Big(\tau_n^{-2}\sum_{i=1}^{\tau_n}\Big(\sum_{j=1}^{i-1}\varepsilon_j\Big)^2 \le x\Big) \le P\Big(\int_0^1 W^2(s)ds \le x\Big),$$

čia $\{W(t), t \in [0,1]\}$ yra standartinis Vynerio procesas. Pastebėję, kad egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$,

$$P\Big(\int_0^1 W^2(s)ds \le \varepsilon\Big) \le c\varepsilon,$$

baigiame teiginio (a) įrodymą. Teiginio (b) įrodymas analogiškas.

(ii) Visiems $i \in A := [k^* + 1, \ldots, k^* + \tau_n]$ stebėjimai $y_i = \rho^* y_{i-1} + \varepsilon_i$ ir $y_i^2 = \rho^{*2} y_{i-1}^2 + 2\rho^* y_{i-1}\varepsilon_i + \varepsilon_i^2$. Susumavę pagal visus $i \in A$ gauname

$$\rho^{*2}\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 = \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_i^2 - 2\rho^*\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}\varepsilon_i - \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n}\varepsilon_i^2.$$

Taigi

$$\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 = -\frac{1}{1-\rho^{*2}}\Big\{\big[y_{k^*+\tau_n}^2 - y_{k^*}^2\big] - 2\rho^*\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}\varepsilon_i - \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n}\varepsilon_i^2\Big\}. \quad (4.22)$$

Arba

$$Q(A) = -\frac{1}{1-\rho^{*2}}\Big\{\big[y_{k^*+\tau_n}^2 - y_{k^*}^2\big] - 2\rho^* R(A) - \sum_{i\in A}\varepsilon_i^2\Big\}.$$

Kadangi $y^2_{k^*+\tau_n} = O_P(1)$, $y^2_{k^*} = O_P(1)$ ir remiantis 4.6Lemos (ii) dalimi $R(A) = o_P(\tau_n)$, gauname

$$P-\lim_{n\to\infty}\tau_n^{-1}Q(A) = P-\lim_{n\to\infty}\tau_n^{-1}\sum_{i\in A}\varepsilon_i^2 = 1$$

pagal didžiųjų skaičių dėsnį. Taigi įrodėme teiginį (a). Teiginys (b) įrodomas analogiškai.

(iii) Įvertinkime

$$\begin{aligned}
&P\Big(\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \le \varepsilon\tau_n^2\Big) = P\Big(\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n}\Big(y_{k^*+\ell^*} + \sum_{j=k^*+\ell^*+1}^{i-1}\varepsilon_j\Big)^2 \le \varepsilon\tau_n^2\Big)\\
&\le P\Big(\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n}\Big(\sum_{j=k^*+\ell^*+1}^{i-1}\varepsilon_j\Big)^2 \le 3\varepsilon\tau_n^2\Big) + P(y^2_{k^*+\ell^*} \ge \varepsilon\tau_n)\\
&= P\Big(\sum_{i=1}^{\tau_n}\Big(\sum_{j=1}^{i-1}\varepsilon_j\Big)^2 \le 3\varepsilon\tau_n^2\Big) + A_n,
\end{aligned}$$

čia $A_n \to 0$, kai $n \to \infty$. Pagal invariantiškumo principą ir tolydaus atvaizdžio teoremą (žr. [11] 1 išvadą psl. 31), kiekvienam $x > 0$ turime

$$\limsup_{n\to\infty} P\Big(\tau_n^{-2}\sum_{i=1}^{\tau_n}\Big(\sum_{j=1}^{i-1}\varepsilon_j\Big)^2 \le x\Big) \le P\Big(\int_0^1 W^2(s)ds \le x\Big),$$

čia $\{W(t), t \in [0,1]\}$ yra standartinis Vynerio procesas. Pastebėję, kad egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$,

$$P\Big(\int_0^1 W^2(s)ds \le \varepsilon\Big) \le c\varepsilon,$$

baigiame teiginio (a) įrodymą. Teiginio (b) įrodymas analogiškas. ∎

4.3.2 4.3 teoremos įrodymas

Dydį $\varepsilon > 0$ pasirinkime laisvai. Aibė

$$\Omega_1 = \Big\{\omega : \frac{|\hat{I}^*I^*|\cdot|\hat{I}^*I^{*c}|}{|\hat{I}^*|} + \frac{|\hat{I}^{*c}I^*|\cdot|\hat{I}^{*c}I^{*c}|}{|\hat{I}^{*c}|} \ge 2\varepsilon n\Big\} \subset \Omega_{11}\cup\Omega_{12},$$

čia

$$\Omega_{11} = \Big\{\omega : \frac{|\hat{I}^* I^*| \cdot |\hat{I}^* I^{*c}|}{|\hat{I}^*|} \geq \varepsilon n\Big\}, \quad \Omega_{12} = \Big\{\omega : \frac{|\hat{I}^{*c} I^*| \cdot |\hat{I}^{*c} I^{*c}|}{|\hat{I}^{*c}|} \geq \varepsilon n\Big\}.$$

Paprastumo dėlei pažymėkime $P_i(A) := P(A \cap \Omega_{1i}), i = 1, 2$. Kaip ir ankstesniame skyrelyje remdamiesi 4.1 lema, galime užrašyti

$$RSS_n(\hat{I}^*) - RSS_n(I^*) = (1 - \rho^*)^2 \delta_1(\hat{I}^*, I^*) + \tilde{\delta_3}(\hat{I}^*, I^*),$$

čia

$$\tilde{\delta_3}(\hat{I}^*, I^*) = 2(1 - \rho^*)\delta_2(\hat{I}^*, I^*) + \delta_3(\hat{I}^*, I^*).$$

Gauname

$$\begin{aligned} 1 &= P(RSS_n(\hat{I}^*) - RSS_n(I^*) \leq 0) = P((1 - \rho^*)^2 \delta_1(\hat{I}^*, I^*) + \tilde{\delta_3}(\hat{I}^*, I^*) \leq 0) \\ &\leq (P_1 + P_2)((1 - \rho^*)^2 \delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n) + (P_1 + P_2)(-\tilde{\delta_3}(\hat{I}^*) \geq \varepsilon d_n) + P(\Omega_1^c). \end{aligned}$$

Taigi turime įrodyti, kad kai $d_n = (1 - \rho^*)n$ egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, kad

$$\lim_{n\to\infty} (P_1 + P_2)((1 - \rho^*)^2 \delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n) \leq c\varepsilon \tag{4.23}$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} (P_1 + P_2)(-\tilde{\delta_3}(\hat{I}^*) \geq \varepsilon d_n) = 0. \tag{4.24}$$

Remiantis (4.23) ir (4.24) gaunamas 4.3 teoremos rezultatas. Toliau išnagrinėsime visas galimas pasikeitusio segmento ir jo įvertinio kombinacijas. Yra šeši galimi atvejai:

(a) $\Omega_a := \{\hat{k}^* < k^* < \hat{k}^* + \hat{\ell}^* < k^* + \ell^*\}$;

(b) $\Omega_b := \{\hat{k}^* < k^* < k^* + \ell^* < \hat{k}^* + \hat{\ell}^*\}$;

(c) $\Omega_c := \{k^* < \hat{k}^* < k^* + \ell^* < \hat{k}^* + \hat{\ell}^*\}$;

(d) $\Omega_d := \{k^* < \hat{k}^* < \hat{k}^* + \hat{\ell}^* < k^* + \ell^*\}$;

(e) $\Omega_e := \{\hat{k}^* < \hat{k}^* + \hat{\ell}^* < k^* < k^* + \ell^*\}$;

(f) $\Omega_f := \{k^* < k^* + \ell^* < \hat{k}^* < \hat{k}^* + \hat{\ell}^*\}$.

Pastebėję, kad $\Omega_{11} \cap \Omega_{\dagger} = \emptyset$, kai $\dagger = d, e, f$, ir $\Omega_{12} \cap \Omega_b = \emptyset$, turime

$$P_1 \leq P_{1a} + P_{1b} + P_{1c},$$
$$P_2 \leq P_{1a} + P_{1c} + P_{1d} + P_{1e} + P_{1f},$$

čia $P_{i\,\ddagger}(A) = P_i(A, \Omega_{\ddagger})$. Taigi turime įrodyti, kad

$$\lim_{n\to\infty} P_{i\,\ddagger}((1-\rho^*)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq d_n) \leq c\varepsilon \tag{4.25}$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} P_{i\,\ddagger}(-\tilde{\delta_3}(\hat{I}^*) \geq \varepsilon d_n) = 0, \tag{4.26}$$

kai i=1, $\ddagger = a, b, c$ ir i=2, $\ddagger = a, c, d, e, f$. Pastebėję, kad

$$\begin{aligned}-\tilde{\delta_3}(\widehat{I}^*) \leq 2(1-\rho^*)\Big[&\frac{Q(\widehat{I}^*I^*)|R(\widehat{I}^*I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^*)} + \frac{Q(\widehat{I}^*I^{*c})|R(\widehat{I}^*I^*)|}{Q(\widehat{I}^*)} \\ &+ \frac{Q(\widehat{I}^{*c}I^*)|R(\widehat{I}^{*c}I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^{*c})} + \frac{Q(\widehat{I}^{*c}I^{*c})|R(\widehat{I}^{*c}I^*)|}{Q(\widehat{I}^{*c})}\Big] \\ &+ \frac{R^2(\widehat{I}^*)}{Q(\widehat{I}^*)} + \frac{R^2(\widehat{I}^{*c})}{Q(\widehat{I}^{*c})} := 2(1-\rho^*)[A_{n1} + A_{n2} + A_{n3} + A_{n4}] + A_{n5} + A_{n6},\end{aligned}$$

(4.26) galime pakeisti

$$\lim_{n\to\infty} P_{i\ddagger}\left((1-\rho^*)A_{nv} \geq \frac{\varepsilon d_n}{16}\right) = 0, \tag{4.27}$$

kai $v = 1, \ldots, 4$ ir

$$\lim_{n\to\infty} P_{i\ddagger}\left(A_{nv} \geq \frac{\varepsilon d_n}{4}\right) = 0, \tag{4.28}$$

kai $v = 5, 6$.

Tegu $\tau_n = \varepsilon n$. Aibėje Ω_{11} $|\hat{I}^*I^*| \geq \tau_n$ ir $|\hat{I}^*I^{*c}| \geq \tau_n$. Aibėje Ω_{12} $|\hat{I}^{*c}I^*| \geq \tau_n$ ir $|\hat{I}^{*c}I^{*c}| \geq \tau_n$.

Tikimybės P_{1a} vertinimas.

Turime įvertinti šias tikimybes:

$$P'_{1a} := P_{1a}((1-\rho^*)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n), \quad \text{ir} \quad P''_{1a} := P_{1a}(-\delta_3(\hat{I}^*) \geq \varepsilon d_n).$$

Pradėkime nuo P'_{1a}. Turime, kad $Q(\hat{I}^*I^*) \geq \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2$. Pažymėkime

$$\Omega'_{1a} := \Big\{ \Big| (1-\rho^{*2})\tau_n^{-1} \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 - 1 \Big| < 1/2 \Big\} \cap \Omega_{1a}$$

Aibėje Ω'_{1a} $Q(\hat{I}^*I^*) \geq \frac{1}{2}\tau_n(1-\rho^{*2})^{-1}$ ir tada

$$\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \geq \Big(\frac{1}{Q(\hat{I}^*I^*)} + \frac{1}{Q(\hat{I}^*I^{*c})} \Big)^{-1} \geq \Big(\frac{2(1-\rho^2)}{\tau_n} + \frac{1}{Q(\hat{I}^*I^{*c})} \Big)^{-1}.$$

Kadangi

$$\frac{(1-\rho^*)^2}{\varepsilon d_n} > \frac{1}{\varepsilon\tau_n^2} + \frac{2(1-\rho^{*2})}{\tau_n}$$

pakankamai dideliems n, remiantis 4.9 lema gauname

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} P_{1a}((1-\rho^*)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} [P_{1a}((1-\rho^*)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n, \Omega'_{1a}) + P(\Omega'^{c}_{1a})] \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} P_{1a}(Q(\hat{I}^*I^{*c}) \leq \varepsilon\tau_n^2). \end{aligned}$$

Taigi

$$\limsup_{n\to\infty} P'_{1a} \leq \limsup_{n\to\infty} P_{1a}(Q(\hat{I}^*I^{*c}) \leq \varepsilon\tau_n^2) \leq \limsup_{n\to\infty} P\Big(\sum_{i=k^*-\tau_n+1}^{k^*} y_{i-1}^2 \leq \varepsilon\tau_n^2 \Big).$$

Remiantis 4.9 lema egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, kad

$$\limsup_{n\to\infty} P'_{1a} \leq c\varepsilon.$$

Toliau nagrinėkime P''_{1a}. Įvertinkime

$$A_{n1} := \frac{Q(\widehat{I}^*I^*)|R(\widehat{I}^*I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^*)} \leq \frac{\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2 \max_{1\leq j<k^*} \Big| \sum_{i=k^*-j}^{k^*} y_{i-1}\varepsilon_i \Big|}{\sum_{i=k^*-\tau_n+1}^{k^*} y_{i-1}^2}.$$

Kiekvienam $\eta > 0$

$$P_{1a}((1-\rho)A_{n2} \geq \varepsilon d_n/16) \leq P\Big(\sum_{i=k^*-\tau_n+1}^{k^*} y_{i-1}^2 \leq \eta\tau_n^2\Big)+$$
$$+P\Big(\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2 \max_{1\leq j<k^*}\Big|\sum_{i=k^*-j}^{k^*} y_{i-1}\varepsilon_i\Big| \geq \varepsilon d_n\eta\tau_n^2/16(1-\rho)\Big).$$

Taigi remiantis 4.8 ir 4.9 lemomis gauname, kad $\limsup_{n\to\infty} P_{1a}((1-\rho)A_{n1} \geq \varepsilon d_n/16) \leq c\eta$. Kadangi $\eta > 0$ buvo pasirinktas laisvai, iš čia gauname (4.27), kai $v = 1$.

Aibėje Ω_a teisinga

$$A_{n2} := \frac{Q(\widehat{I}^* I^{*c})|R(\widehat{I}^* I^*)|}{Q(\widehat{I}^*)} \leq |R(\widehat{I}^* I^*)| \leq \max_{k^*\leq j\leq k^*+\ell^*}\Big|\sum_{i=k^*+1}^{j} y_{i-1}\varepsilon_i\Big|.$$

Pagal 4.8 lemą paskutinis dydis yra $O_P(n^{1/2})$. Taigi įrodėme (4.27), kai $v = 2$.

Nagrinėkime dydį

$$A_{n3} := \frac{Q(\widehat{I}^{*c} I^*)|R(\widehat{I}^{*c} I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^{*c})}.$$

Išskirkime du atvejus:

I atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^{*c} I^{*c}| \leq a_n$. Tada remiantis 4.8 lema

$$|R(\widehat{I}^{*c} I^{*c})| \leq \max_{1<k\leq a_n}\Big|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i y_{i-1}| + \max_{n-a_n<k\leq n}\Big|\sum_{i=k+1}^{n} \varepsilon_i y_{i-1}| = O_P(\sqrt{na_n}).$$

Taigi

$$A_{n4} \leq |R(\widehat{I}^{*c} I^{*c})| = O_P(\sqrt{na_n}).$$

Parinkę a_n tokį, kad $a_n/n \to 0$, gauname $d_n^{-1}A_{n4} = o_P(1)$.

II atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^{*c} I^{*c}| \geq a_n$. Tada remiantis 4.9 lema

$$Q(\widehat{I}^{*c}) \geq \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\frac{a_n}{2}} y_{i-1}^2 = O_P(a_n^2).$$

Taip pat turime, kad

$$Q(\widehat{I}^{*c}I^{*})|R(\widehat{I}^{*c}I^{*c})| = O_P(n^2).$$

Taigi parinkę tokį a_n, kad $na_n^{-2} \to 0$ kai $n \to \infty$, gauname, kad $d_n^{-1}A_{n3} = o_P(1)$. Taigi remdamiesi 4.8 ir 4.9 lemomis bei parinkę, pavyzdžiui, $a_n = n^{2/3}$, gauname (4.27), kai $v = 3$.

Turime, kad

$$A_{n4} := \frac{Q(\widehat{I}^{*c}I^{*c})|R(\widehat{I}^{*c}I^{*})|}{Q(\widehat{I}^{*c})} \le |R(\widehat{I}^{*c}I^{*})| \le \max_{1\le j<\ell^*} \Big| \sum_{i=k^*+\ell^*-j}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}\varepsilon_i \Big|$$

Iš čia vėl remiantis 4.8 lema gaunama (4.27), kai $v = 4$.

Kadangi remiantis 4.8 lema $|R(\widehat{I}^{*})| = O_P(n)$ ir aibėje Ω_{1a}

$$Q(\widehat{I}^{*}) \ge \sum_{k^*-\tau_n+1}^{k^*} y_{i-1}^2,$$

turime

$$\begin{aligned} P_{1a}(A_{n5} \ge \varepsilon d_n/4) &= P_{1a}(Q(\widehat{I}^{*}) \le \frac{4M^2n^2}{\varepsilon d_n}) + P(|R(\widehat{I}^{*})| \ge Mn) \\ &\le P(\sum_{k^*-\tau_n+1}^{k^*} y_{i-1}^2 \le \frac{4M^2n^2}{\varepsilon d_n}) + P(|R(\widehat{I}^{*})| \ge Mn). \end{aligned}$$

Iš čia remiantis 4.9 lema ir parinkus tokį dydį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, gaunama (4.28), kai $v = 5$. M galime parinkti, pavyzdžiui, lygų $n^{1/3}$.

Beliko išnagrinėti A_{n6}. Vėl išskirkime du atvejus.

I atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^{*c}I^{*c}| \le a_n$. Tada remiantis 4.8 lema $R(\widehat{I}^{*c}) = O_P(\sqrt{na_n})$. Be to, pagal 4.9 lemą konstantai $c > 0$ $Q(\widehat{I}^{*c}) \ge cn$ su tikimybe artima 1. Taigi kai $a_n/n \to 0$, $A_{n6} = o_P(d_n)$.

II atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^{*c}I^{*c}| \ge a_n$. Tada $R(\widehat{I}^{*c}) = O_P(n)$. Be to, tikimybė, kad $2Q(\widehat{I}^{*c}) \ge \eta a_n^2$, artėja į 1, kai η artėja į 0. Taigi $A_{n6} = o_P(d_n)$, kai $n/a_n^2 \to 0$. Pasirinkę $a_n = n^{2/3}$ gauname (4.28).

Tikimybės P_{1b} vertinimas.

Turime įvertinti šias tikimybes:

$$P'_{1b} := P_{1b}((1-\rho)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \le \varepsilon d_n), \quad \text{ir} \quad P''_{1b} := P_{1b}(-\delta_3(\hat{I}^*) \ge \varepsilon d_n).$$

Pradėkime nuo P'_{1b}. Turime, kad

$$Q(\hat{I}^* I^*) \ge \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2.$$

Pažymėkime

$$\Omega_{1b} := \Big\{ \Big| (1-\rho^{*2})\tau_n^{-1} \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 - 1 \Big| < 1/2 \Big\} \cap \Omega_{1b}.$$

Aibėje Ω_{1b} dydis $Q(\hat{I}^* I^*) \ge \frac{1}{2}\tau_n(1-\rho^{*2})^{-1}$ ir

$$\delta_1(\hat{I}^*, I^*) = \Big(\frac{1}{Q(I^*)} + \frac{1}{Q(\hat{I}^* I^{*c})} \Big)^{-1} \ge \Big(\frac{1}{Q(\hat{I}^* I^{*c})} + \frac{2(1-\rho^{*2})}{\tau_n} \Big)^{-1}.$$

Panašiai kaip vertinant tikimybę P_{1a} remdamiesi 4.9 lema gauname, kad

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} P_{1b}((1-\rho^*)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \le \varepsilon d_n) \\ &\le \limsup_{n\to\infty} [P_{1b}((1-\rho^*)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \le \varepsilon d_n, \Omega_{1b}) + P(\Omega_{1b}^c)] \\ &\le \limsup_{n\to\infty} P_{1b}(Q(\hat{I}^* I^{*c}) \le \varepsilon \tau_n^2). \end{aligned}$$

Taigi remiantis 4.9 lema

$$\limsup_{n\to\infty} P'_{1b} \le \limsup_{n\to\infty} P\Big(\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \le \varepsilon \tau_n^2 \Big) \le c\varepsilon.$$

Nagrinėkime tikimybę P''_{1b}. Turime, kad

$$A_{n1} := \frac{Q(I^*)|R(\widehat{I^* I^{*c}})|}{Q(\widehat{I}^*)} \le \frac{T_1 T_2}{T_3},$$

čia

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2, \\
T_2 &= \max_{1<j\le k^*} \Big| \sum_{i=j}^{k^*} y_{i-1}\varepsilon_i \Big| + \max_{k^*+\ell^*<j\le n} \Big| \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{j} y_{i-1}\varepsilon_i \Big|, \\
T_3 &= \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2.
\end{aligned}
$$

ir kiekvienam $\eta > 0$

$$
P_{1b}((1-\rho)A_{n1} \ge \varepsilon d_n/16) \le P\Big(T_3 \le \eta\tau_n^2\Big) + P\Big(T_1 T_2 \ge \varepsilon d_n \eta \tau_n^2/16(1-\rho)\Big).
$$

Taigi remiantis 4.8 ir 4.9 lemomis gauname $\limsup_{n\to\infty} P_{1b}((1-\rho)A_{n1} \ge \varepsilon d_n/16) \le c\eta$. Kadangi $\eta > 0$ buvo pasirinktas laisvai, iš čia gaunama (4.27), kai $v = 1$.

Aibėje Ω_b

$$
A_{n2} := \frac{Q(\widehat{I}^* I^{*c})|R(I^*)|}{Q(\widehat{I}^*)} \le |R(I^*)| \le \max_{k^*\le j\le k^*+\ell^*} \Big| \sum_{i=k^*+1}^{j} y_{i-1}\varepsilon_i \Big|.
$$

Kadangi $\ell^* \sim n$ remiantis 4.8 lema paskutinis dydis yra $O_P(n^{1/2})$. Iš čia gauname (4.27), kai $v = 1$.

A_{n3} ir A_{n4} aibėje Ω_{1b} yra lygūs nuliui, todėl akivaizdu, kad teisinga (4.27), kai $v = 3, 4$.

Kadangi remiantis 4.8 lema $|R(\widehat{I}^*)| = O_P(n)$ ir aibėje Ω_{1b}

$$
Q(\widehat{I}^*) \ge \left(\mathbf{1}_{k^*-\hat{k}^*\ge\tau_n/2} \sum_{i=k^*-\tau_n/2}^{k^*} + \mathbf{1}_{k^*-\hat{k}^*<\tau_n/2} \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n/2} \right) y_{i-1}^2,
$$

tai

$$
\begin{aligned}
&P_{1b}(A_{n5} \ge \varepsilon d_n/4) \le P(|R(\widehat{I}^*)| \ge Mn) + \\
&+ P\left(\left(\mathbf{1}_{k^*-\hat{k}^*\ge\tau_n/2} \sum_{i=k^*-\tau_n/2}^{k^*} + \mathbf{1}_{k^*-\hat{k}^*<\tau_n/2} \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n/2} \right) y_{i-1}^2 \le \frac{4M^2n^2}{\varepsilon d_n} \right).
\end{aligned}
$$

Iš čia parinkus tokį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, ir remiantis 4.9 lema gaunama (4.28), kai $v = 5$. Dydį M, pavyzdžiui, galime parinkti lygų $n^{1/3}$.

Belieka išnagrinėti A_{n6}. Kadangi remiantis 4.8 lema $|R(\widehat{I}^{*c})| = O_P(n)$ ir remiantis 4.9 lema $Q(\widehat{I}^{*c}) = O_P(n^2)$, turime

$$P_{1b}(A_{n6} \geq \varepsilon d_n/4) = P_{1b}(Q(\widehat{I}^{*c}) \leq \frac{4M^2n^2}{\varepsilon d_n}) + P(|R(\widehat{I}^{*c})| \geq Mn).$$

Taigi parinkus tokį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, gauname (4.28), kai $v = 6$. Dydį M, pavyzdžiui, galime parinkti lygų $n^{1/3}$.

Tikimybės P_{1c} vertinimas.

Turime įvertinti šias tikimybes:

$$P'_{1c} := P_{1c}((1-\rho^*)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n), \quad \text{and} \quad P''_{1c} := P_{1c}(-\delta_3(\hat{I}^*) \geq \varepsilon d_n).$$

Pradėkime nuo P'_{1c}. Turime, kad $Q(\hat{I}^* I^*) \geq \sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2$. Pažymėkime

$$\Omega'_{1c} := \left\{ \left| (1-\rho^2)\tau_n^{-1} \sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2 - 1 \right| < 1/2 \right\} \cap \Omega_{1c}.$$

Aibėje Ω'_{1c} $Q(\hat{I}^* I^*) \geq \frac{1}{2}\tau_n(1-\rho^{*2})^{-1}$ ir tada

$$\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \geq \Big(\frac{1}{Q(\hat{I}^* I^*)} + \frac{1}{Q(\hat{I}^* I^{*c})}\Big)^{-1} \geq \Big(\frac{1}{Q(\hat{I}^* I^{*c})} + \frac{2(1-\rho^{*2})}{\tau_n}\Big)^{-1}.$$

Kadangi

$$\frac{(1-\rho^*)^2}{\varepsilon d_n} > \frac{1}{\varepsilon \tau_n^2} + \frac{2(1-\rho^{*2})}{\tau_n}$$

pakankamai dideliems n, remiantis 4.7 lema gauname

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} P_{1c}((1-\rho^*)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} [P_{1c}((1-\rho^*)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n, \Omega'_{1c}) + P(\Omega'^{c}_{1c})] \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} P_{1c}(Q(\hat{I}^* I^{*c}) \leq \varepsilon \tau_n^2).
\end{aligned}$$

Taigi

$$\limsup_{n\to\infty} P'_{1c} \le \limsup_{n\to\infty} P_{1c}(Q(\hat{I}^* I^{*c}) \le \varepsilon\tau_n^2) \le \limsup_{n\to\infty} P\Big(\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \le \varepsilon\tau_n^2\Big).$$

Remiantis 4.7 lema egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, kad

$$\limsup_{n\to\infty} P'_{1c} \le c\varepsilon.$$

Toliau nagrinėkime P''_{1c}. Įvertinkime

$$A_{n1} := \frac{Q(\widehat{I}^* I^*)|R(\widehat{I}^* I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^*)} \le \frac{\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2 \max_{k^*<k\le n} \Big|\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k} y_{i-1}\varepsilon_i\Big|}{\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n} y_{i-1}^2}.$$

Kiekvienam $\eta > 0$

$$\begin{aligned} P_{1c}((1-\rho^*)A_{n1} \ge \varepsilon d_n/16) &\le P\Big(\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \le \eta\tau_n^2\Big) \\ &+ P\Big(\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2 \max_{k^*<k\le n}\Big|\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k} y_{i-1}\varepsilon_i\Big| \ge \varepsilon d_n\eta\tau_n^2/16(1-\rho)\Big). \end{aligned}$$

Remdamiesi 4.8 ir 4.9 lemomis gauname, kad $\limsup_{n\to\infty} P_{1c}((1-\rho^*)A_{n1} \ge \varepsilon d_n/16) \le c\eta$. Kadangi $\eta > 0$ pasirinktas laisvai, iš čia gaunama (4.27), kai $v = 1$.

Aibėje Ω_c

$$A_{n2} := \frac{Q(\widehat{I}^* I^{*c})|R(\widehat{I}^* I^*)|}{Q(\widehat{I}^*)} \le |R(\widehat{I}^* I^*)| \le \max_{k^*<j\le k^*+\ell^*}\Big|\sum_{i=j}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}\varepsilon_i\Big|.$$

Kadangi $\ell^* \sim n$ remiantis 4.8 lema dešinioji nelygybės pusė yra $O_P(n^{1/2})$. Taigi įrodėme (4.27), kai $v = 2$.

Nagrinėdami dydį

$$A_{n3} := \frac{Q(\widehat{I}^{*c} I^*)|R(\widehat{I}^{*c} I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^{*c})}$$

išskirkime du atvejus:

I atvejis. Tarkime, $|\widehat{I}^{*c}I^{*c}| \le a_n$. Tada remiantis 4.8 lema

$$|R(\widehat{I}^{*c}I^{*c})| \le \sum_{i=1}^{k^*} \varepsilon_i y_{i-1} + \max_{n-a_n<k\le n} \Big|\sum_{i=k}^{n} \varepsilon_i y_{i-1}| = O_P(\sqrt{na_n}).$$

Taigi

$$A_{n3} \le |R(\widehat{I}^{*c}I^{*c})| = O_P(\sqrt{na_n}).$$

Parinkę tokį a_n, kad $a_n/n \to 0$, gauname $d_n^{-1}A_{n3} = o_P(1)$.

II atvejis. Tarkime, $|\widehat{I}^{*c}I^{*c}| \ge a_n$. Tada remiantis 4.9 lema $Q(\widehat{I}^{*c}) \ge \sum_{i=1}^{a_n/2} y_{i-1}^2 = O_P(a_n^2)$ arba $Q(\widehat{I}^{*c}) \ge \sum_{i=n-a_n/2+1}^{n} y_{i-1}^2 = O_P(a_n^2)$. Pastebime, kad remiantis 4.8 ir 4.9 lemomis

$$Q(\widehat{I}^{*c}I^*)|R(\widehat{I}^{*c}I^{*c})| = O_P(n^2).$$

Iš čia gauname, kad $d_n^{-1}A_{n3} = o_P(1)$, kai n tolstant į begalybę $na_n^{-2} \to 0$. Parinkus, pavyzdžiui, $a_n = n^{2/3}$, teisinga (4.27), kai $v = 3$.

Dydis

$$A_{n4} := \frac{Q(\widehat{I}^{*c}I^{*c})|R(\widehat{I}^{*c}I^*)|}{Q(\widehat{I}^{*c})} \le |R(\widehat{I}^{*c}I^*)| \le \max_{k^*<k\le k^*+\ell^*} \Big|\sum_{i=k^*+1}^{k} y_{i-1}\varepsilon_k\Big|.$$

Kadangi $\ell^* \sim n$ iš čia remdamiesi 4.8 lema gauname (4.27), kai $v = 4$.

Remiantis 4.8 lema $|R(\widehat{I}^*)| = O_P(n)$. Be to, aibėje Ω_{1c} dydis $Q(\widehat{I}^*) \ge \sum_{k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n} y_{i-1}^2$. Taigi

$$P_{1c}(A_{n5} \ge \varepsilon d_n/4) \le P(\sum_{k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n} y_{i-1}^2 \le \frac{4M^2n^2}{\varepsilon d_n}) + P(|R(\widehat{I}^*)| \ge Mn)$$

Parinkę tokį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, ir remdamiesi 4.9 lema, gauname (4.28), kai $v = 5$. Dydį M, pavyzdžiui, galime parinkti lygų $n^{1/3}$.

Beliko išnagrinėti A_{n6}. Vėl išskirkime du atvejus.

I atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^{*c}I^{*c}| \le a_n$. Tada remiantis 4.8 lema $R(\widehat{I}^{*c}) = O_P(\sqrt{na_n})$. Be to, pagal 4.9 lemą konstantai $c > 0$ $Q(\widehat{I}^{*c}) \ge cn$ su tikimybe artima 1. Taigi kai $a_n/n \to 0$, $A_{n6} = o_P(d_n)$.

II atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^{*c}I^{*c}| \ge a_n$. Tada $R(\widehat{I}^{*c}) = O_P(n)$. Be to, tikimybė, kad $Q(\widehat{I}^{*c}) \ge \eta a_n^2$, artėja į 1, kai η artėja į 0. Taigi $A_{n6} = o_P(d_n)$, kai $n/a_n^2 \to 0$. Pasirinkę $a_n = n^{2/3}$ gauname (4.28).

Tikimybės P_{2a} vertinimas.

Turime įvertinti šias tikimybes:

$$P'_{2a} := P_{2a}((1-\rho^*)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \le \varepsilon d_n), \quad \text{ir} \quad P''_{2a} := P_{2a}(-\delta_3(\hat{I}^*) \ge \varepsilon d_n).$$

Pradėkime nuo P'_{2a}. Turime, kad $Q(\hat{I}^{*c}I^*) \ge \sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2$. Pažymėkime

$$\Omega'_{2a} := \left\{\left|(1-\rho^{*2})\tau_n^{-1}\sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2 - 1\right| < 1/2\right\} \cap \Omega_{2a}$$

Aibėje Ω'_{2a} $Q(\hat{I}^*I^*) \ge \frac{1}{2}\tau_n(1-\rho^{*2})^{-1}$ ir tada

$$\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \ge \left(\frac{1}{Q(\hat{I}^{*c}I^*)} + \frac{1}{Q(\hat{I}^{*c}I^{*c})}\right)^{-1} \ge \left(\frac{2(1-\rho^2)}{\tau_n} + \frac{1}{Q(\hat{I}^{*c}I^{*c})}\right)^{-1}.$$

Kadangi

$$\frac{(1-\rho^*)^2}{\varepsilon d_n} > \frac{1}{\varepsilon\tau_n^2} + \frac{2(1-\rho^{*2})}{\tau_n}$$

pakankamai dideliems n, remiantis 4.9 lema gauname

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} P_{2a}((1-\rho^*)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \le \varepsilon d_n) \\
&\le \limsup_{n\to\infty}[P_{2a}((1-\rho^*)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \le \varepsilon d_n, \Omega'_{2a}) + P(\Omega'^c_{2a})] \\
&\le \limsup_{n\to\infty} P_{2a}(Q(\hat{I}^{*c}I^{*c}) \le \varepsilon\tau_n^2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} P'_{2a} &\le \limsup_{n\to\infty} P_{2a}(Q(\hat{I}^{*c}I^{*c}) \le \varepsilon\tau_n^2) \\
&\le \limsup_{n\to\infty} P\left(\left(\mathbf{1}_{\hat{k}^* \ge \tau_n/2}\sum_{i=1}^{\tau_n/2} + \mathbf{1}_{n-k^*-\ell^* > \tau_n/2}\sum_{i=n-\tau_n/2}^{n}\right) y_{i-1}^2 \le \varepsilon\tau_n^2\right).
\end{aligned}$$

Remiantis 4.9 lema egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, kad

$$\limsup_{n\to\infty} P'_{2a} \le c\varepsilon.$$

Pereikime prie P''_{2a} tikimybės. Vertindami

$$A_{n1} := \frac{Q(\widehat{I}^* I^*)|R(\widehat{I}^* I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^*)}.$$

išskirkime du atvejus:

I atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^* I^{*c}| \le a_n$. Tada remiantis 4.8 lema

$$|R(\widehat{I}^* I^{*c})| \le \max_{k^*-a_n \le k \le k^*} \Big| \sum_{i=k+1}^{k^*} \varepsilon_i y_{i-1}\Big| = O_P(a_n).$$

Taigi

$$A_{n1} \le |R(\widehat{I}^* I^{*c})| = O_P(a_n).$$

Parinkę tokį a_n, kad $a_n/n \to 0$, gauname $d_n^{-1} A_{n1} = o_P(1)$.

II atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^* I^{*c}| \ge a_n$. Tada remiantis 4.9 lema

$$Q(\widehat{I}^*) \ge \sum_{i=k^*-a_n}^{k^*} y_{i-1}^2 = O_P(a_n^2).$$

Be to, remiantis 4.8 ir 4.9 lemomis

$$Q(\widehat{I}^* I^*)|R(\widehat{I}^* I^{*c})| = O_P(n^2).$$

Parinkus tokį a_n, kad $na_n^{-2} \to 0$, kai $n \to \infty$, gauname $d_n^{-1} A_{n1} = o_P(1)$. Taigi parinkus $a_n = n^{2/3}$ gauname (4.27), kai $v = 2$.

Aibėje Ω_a

$$A_{n2} := \frac{Q(\widehat{I}^* I^{*c})|R(\widehat{I}^* I^*)|}{Q(\widehat{I}^*)} \le |R(\widehat{I}^* I^*)| \le \max_{k^* < j \le k^*+\ell^*} \Big| \sum_{i=k^*+1}^{j} y_{i-1}\varepsilon_i \Big|.$$

Kadangi $\ell^* \sim n$ remiantis 4.8 lema paskutinis dydis yra $O_P(n^{1/2})$. Iš čia gaunama (4.27), kai $v = 2$.

Įvertinkime

$$A_{n3} := \frac{Q(\widehat{I}^* I^*)|R(\widehat{I}^{*c} I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^{*c})} \le \frac{U_1 U_2}{U_3},$$

čia

$$U_1 = \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2,$$

$$U_2 = \max_{1\le j<k^*} \Big|\sum_{i=1}^{j} y_{i-1}\varepsilon_i\Big| + \max_{k^*+\ell^*<j\le n} \Big|\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{j} y_{i-1}\varepsilon_i\Big|,$$

$$U_3 = \left(\mathbf{1}_{\hat{k}^*\ge\tau_n/2}\sum_{i=1}^{\tau_n/2} + \mathbf{1}_{n-k^*-\ell^*>\tau_n/2}\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n}\right) y_{i-1}^2.$$

Be to, kiekvienam $\eta > 0$

$$P_{2a}((1-\rho^*)A_{n3} \ge \varepsilon d_n/16) \le P\Big(U_3 \le \eta\tau_n^2\Big) + P\Big(U_1U_2 \ge \varepsilon d_n\eta\tau_n^2/16(1-\rho)\Big).$$

Taigi remiantis 4.8 ir 4.9 lemomis, gauname $\limsup_{n\to\infty} P_{2a}((1-\rho^*)A_{n3} \ge \varepsilon d_n/16) \le c\eta$. Kadangi $\eta > 0$ buvo pasirinktas laisvai, iš čia gaunama (4.27), kai $v = 3$.

Įvertinkime dydį

$$A_{n4} := \frac{Q(\widehat{I}^{*c}I^{*c})|R(\widehat{I}^{*c}I^*)|}{Q(\widehat{I}^{*c})} \le |R(\widehat{I}^{*c}I^*)| \le \max_{k^*<j\le k^*+\ell^*} \Big|\sum_{i=j}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}\varepsilon_i\Big|$$

Kadangi $\ell^* \sim n$ remiantis 4.8 lema dešinioji nelygybės pusė yra $O_P(n^{1/2})$ ir iš čia gauname (4.27), kai $v = 3$.

Pereikime prie dydžio A_{n5}. Išskirkime du atvejus:

I atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^*I^{*c}| \le a_n$. Tada remiantis 4.8 lema $R(\widehat{I}^*) = O_P(a_n)$. Be to, pagal 4.9 lemą teigiamai konstantai $c > 0$ $Q(\widehat{I}^*) \ge cn$ su tikimybe artima 1. Iš čia $A_{n5} = o_P(d_n)$, kai $a_n/n \to 0$.

I atvejis. Tarkime, $|\widehat{I}^*I^{*c}| \ge a_n$. Tada remiantis 4.8 ir 4.9 lemomis $R(\widehat{I}^*) = O_P(n)$, o kai $\eta \to 0$ $Q(\widehat{I}^*) \ge \eta a_n^2$ su tikimybe artima 1. Taigi $A_{n5} = o_P(d_n)$, kai $n/a_n^2 \to 0$. Iš čia parinkus $a_n = n^{2/3}$ gauname (4.28), kai $v = 5$.

Kadangi remiantis 4.8 lema $|R(\widehat{I}^{*c})| = O_P(n)$ ir aibėje Ω_{2a} teisinga

$$Q(\widehat{I}^{*c}) \ge \left(\mathbf{1}_{\hat{k}^*\ge\tau_n/2}\sum_{i=1}^{\tau_n/2} + \mathbf{1}_{n-k^*-\ell^*>\tau_n/2}\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n}\right) y_{i-1}^2,$$

turime

$$P_{2a}(A_{n6} \geq \varepsilon d_n/4) \leq P\left(\left(\mathbf{1}_{\hat{k}^* \geq \tau_n/2} \sum_{i=1}^{\tau_n/2} + \mathbf{1}_{n-k^*-\ell^* > \tau_n/2} \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n} \right) y_{i-1}^2 \leq \frac{4M^2n^2}{\varepsilon d_n} \right)$$
$$+ P(|R(\widehat{I}^{*c})| \geq Mn).$$

Parinkus tokį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, ir remdamiesi 4.9 lema gauname (4.28), kai $v = 6$. Dydį M galime parinkti, pavyzdžiui, lygų $n^{1/3}$.

Tikimybės P_{2c} vertinimas.

Turime įvertinti šias tikimybes:

$$P'_{2c} := P_{2c}((1-\rho^*)^2 \delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n), \quad \text{ir} \quad P''_{2c} := P_{2c}(-\delta_3(\hat{I}^*) \geq \varepsilon d_n).$$

Pradėkime nuo P'_{2c}. Turime, kad $Q(\hat{I}^{*c}I^*) \geq \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2$. Pažymėkime

$$\Omega'_{2c} := \left\{ \left| (1-\rho^{*2})\tau_n^{-1} \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 - 1 \right| < 1/2 \right\} \cap \Omega_{2c}$$

Aibėje Ω'_{2c} $Q(\hat{I}^{*c}I^*) \geq \frac{1}{2}\tau_n(1-\rho^{*2})^{-1}$ ir tada

$$\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \geq \Big(\frac{1}{Q(\hat{I}^{*c}I^*)} + \frac{1}{Q(\hat{I}^{*c}I^{*c})} \Big)^{-1} \geq \Big(\frac{2(1-\rho^{*2})}{\tau_n} + \frac{1}{Q(\hat{I}^{*c}I^{*c})} \Big)^{-1}.$$

Kadangi

$$\frac{(1-\rho^*)^2}{\varepsilon d_n} > \frac{1}{\varepsilon \tau_n^2} + \frac{2(1-\rho^{*2})}{\tau_n}$$

pakankamai dideliems n, remiantis 4.9 lema gauname

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} P_{2c}((1-\rho^*)^2 \delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} [P_{2c}((1-\rho^*)^2 \delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n, \Omega'_{2c}) + P(\Omega'^{c}_{2c})] \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} P_{2c}(Q(\hat{I}^{*c}I^{*c}) \leq \varepsilon \tau_n^2).
\end{aligned}$$

Taigi

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} P'_{2c} &\le \limsup_{n\to\infty} P_{2c}(Q(\hat{I}^{*c}I^{*c}) \le \varepsilon\tau_n^2)\\ &\le \limsup_{n\to\infty} P\Big(\mathbf{1}_{k^*\ge\tau_n/2}\sum_{i=1}^{\tau_n/2} y_{i-1}^2 + \mathbf{1}_{k^*<\tau_n/2}\sum_{i=n-\tau_n/2}^{n} y_{i-1}^2 \le \varepsilon\tau_n^2\Big).\end{aligned}$$

Remiantis 4.9 lema egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, kad

$$\limsup_{n\to\infty} P'_{2c} \le c\varepsilon.$$

Pereikime prie tikimybės P''_{2c}. Vertindami dydį

$$A_{n1} := \frac{Q(\widehat{I}^* I^*)|R(\widehat{I}^* I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^*)}.$$

išnagrinėkime du atvejus:

I atvejis. Tarkime, $|\widehat{I}^* I^{*c}| \le a_n$. Tada remiantis 4.8 lema

$$|R(\widehat{I}^* I^{*c})| \le \max_{k^*+\ell^*\le k<k^*+\ell^*+a_n} \Big|\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k} \varepsilon_i y_{i-1}\Big| = O_P(a_n).$$

Taigi

$$A_{n2} \le |R(\widehat{I}^* I^{*c})| = O_P(a_n).$$

Parinkę tokį a_n, kad $a_n/n \to 0$, gauname $d_n^{-1}A_{n1} = o_P(1)$.

II atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^* I^{*c}| \ge a_n$. Tada remiantis 4.9 lema

$$Q(\widehat{I}^*) \ge \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+a_n} y_{i-1}^2 = O_P(a_n^2).$$

Be to, pagal 4.8 ir 4.9 lemas

$$Q(\widehat{I}^* I^*)|R(\widehat{I}^* I^{*c})| = O_P(n^2).$$

Užtikrinus, kad $na_n^{-2} \to 0$, kai $n \to \infty$, gausime $d_n^{-1}A_{n1} = o_P(1)$. Taigi parinkę $a_n = n^{2/3}$, įrodome (4.27), kai $v = 1$.

Aibėje Ω_c turime

$$A_{n2} := \frac{Q(\widehat{I}^* I^{*c})|R(\widehat{I}^* I^*)|}{Q(\widehat{I}^*)} \le |R(\widehat{I}^* I^*)| \le \max_{k^*<j\le k^*+\ell^*} \Big|\sum_{i=j}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}\varepsilon_i\Big|.$$

Kadangi $\ell^* \sim n$ remaintis 4.8 lema paskutinis dydis yra $O_P(n^{1/2})$. Taigi teisinga (4.27), kai $v = 2$.

Įvertiname

$$A_{n3} := \frac{Q(\widehat{I}^{*c} I^*)|R(\widehat{I}^{*c} I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^{*c})} \le$$
$$\le \frac{\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2 \left(\sum_{i=1}^{k^*} y_{i-1}\varepsilon_i + \max_{n-(\tau_n-k^*)<k\le n} \Big|\sum_{i=k}^{n} y_{i-1}\varepsilon_i\Big|\right)}{\mathbf{1}_{k^*\ge\tau_n/2}\sum_{i=1}^{\tau_n/2} y_{i-1}^2 + \mathbf{1}_{k^*<\tau_n/2}\sum_{i=n-\tau_n/2}^{n} y_{i-1}^2}$$

Kiekvienam $\eta > 0$

$$P_{2c}((1-\rho)A_{n3} \ge \varepsilon d_n/16) \le$$
$$P\Big(\mathbf{1}_{k^*\ge\tau_n/2}\sum_{i=1}^{\tau_n/2} y_{i-1}^2 + \mathbf{1}_{k^*<\tau_n/2}\sum_{i=n-\tau_n/2}^{n} y_{i-1}^2 \le \eta\tau_n^2\Big)$$
$$+ P\Big(\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2 \left(\sum_{i=1}^{k^*} y_{i-1}\varepsilon_i + \max_{n-(\tau_n-k^*)<k\le n} \Big|\sum_{i=k}^{n} y_{i-1}\varepsilon_i\Big|\right) \ge \varepsilon d_n \eta\tau_n^2/16(1-\rho)\Big).$$

Taigi remiantis 4.8 ir 4.9 lemomis gauname $\limsup_{n\to\infty} P_{2c}((1-\rho^*)A_{n3} \ge \varepsilon d_n/16) \le c\eta$. Kadangi $\eta > 0$ pasirinktas laisvai, iš čia gaunama (4.27), kai $v = 3$.

Dydis

$$A_{n4} := \frac{Q(\widehat{I}^{*c} I^{*c})|R(\widehat{I}^{*c} I^*)|}{Q(\widehat{I}^{*c})} \le |R(\widehat{I}^{*c} I^*)| \le \max_{k^*<k\le k^*+\ell^*} \Big|\sum_{i=k^*+1}^{k} y_{i-1}\varepsilon_k\Big|.$$

Remiantis 4.8 dešinioji nelygybės pusė yra $O_P(n^{1/2})$, taigi teisinga (4.27), kai $v = 4$.

Pereikime prie dydžio A_{n5}. Išskirkime du atvejus:

I atvejis. Tarkime, kad $|\widehat{I}^* I^{*c}| \le a_n$. Tada remiantis 4.8 lema $R(\widehat{I}^*) = O_P(\sqrt{na_n})$. Be to, pagal 4.9 lemą teigiamai konstantai $c > 0$ $Q(\widehat{I}^*) \ge cn$ su tikimybe artima 1. Iš čia $A_{n5} = o_P(d_n)$, kai $a_n/n \to 0$.

I atvejis. Tarkime, $|\widehat{I}^* I^{*c}| \geq a_n$. Tada remiantis 4.8 ir 4.9 lemomis $R(\widehat{I}^*) = O_P(n)$, o kai $\eta \to 0$ $Q(\widehat{I}^*) \geq \eta a_n^2$ su tikimybe artima 1. Taigi $A_{n5} = o_P(d_n)$, kai $n/a_n^2 \to 0$. Iš čia parinkus $a_n = n^{2/3}$ gauname (4.28), kai $v = 5$.

Kadangi remiantis 4.8 lema $|R(\widehat{I}^{*c})| = O_P(n)$ ir aibėje Ω_{2c}

$$Q(\widehat{I}^{*c}) \geq \mathbf{1}_{k^* \geq \tau_n/2} \sum_{i=1}^{\tau_n/2} y_{i-1}^2 + \mathbf{1}_{k^* < \tau_n/2} \sum_{i=n-\tau_n/2}^{n} y_{i-1}^2,$$

gauname

$$\begin{aligned} P_{2c}(A_{n6} \geq \varepsilon d_n/4) \leq & P(\mathbf{1}_{k^* \geq \tau_n/2} \sum_{i=1}^{\tau_n/2} y_{i-1}^2 + \mathbf{1}_{k^* < \tau_n/2} \sum_{i=n-\tau_n/2}^{n} y_{i-1}^2 \leq \frac{4M^2 n^2}{\varepsilon d_n}) \\ & + P(|R(\widehat{I}^{*c})| \geq Mn). \end{aligned}$$

Parinkę tokį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, ir remdamiesi 4.9 lema, gauname (4.28), kai $v = 6$. Dydį M galime parinkti, pavyzdžiui, lygų $n^{1/3}$.

Tikimybės P_{2d} vertinimas.

Turime įvertinti šias tikimybes:

$$P'_{2d} := P_{2d}((1-\rho^*)^2 \delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n), \quad \text{ir} \quad P''_{2d} := P_{2d}(-\delta_3(\hat{I}^*) \geq \varepsilon d_n).$$

Pradėkime nuo P'_{1d}. Turime, kad

$$Q(\hat{I}^{*c} I^*) \geq \left(\mathbf{1}_{\hat{k}^* - k^* > \tau_n/2} \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n/2} + \mathbf{1}_{\hat{k}^* - k^* \leq \tau_n/2} \sum_{i=k^*+\ell^*-\tau_n}^{k^*+\ell^*} \right) y_{i-1}^2.$$

Pažymėkime

$$\Omega_{2d}^{(1)} := \left\{ \left| (1-\rho^{*2}) \frac{2}{\tau_n} \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n/2} y_{i-1}^2 - 1 \right| < 1/2 \right\} \cap \Omega_{2d},$$

$$\Omega_{2d}^{(2)} := \left\{ \left| (1-\rho^{2*}) \frac{2}{\tau_n} \sum_{i=k^*+\ell^*+\tau_n/2}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2 - 1 \right| < 1/2 \right\} \cap \Omega_{2d}.$$

Aibėse $\Omega_{2d}^{(1)}$ ir $\Omega_{2d}^{(2)}$ dydis $Q(\hat{I}^{*c}I^*) \geq \frac{1}{4}\tau_n(1-\rho^{*2})^{-1}$ ir

$$\delta_1(\hat{I}^*, I^*) = \left(\frac{1}{\hat{I}^{*c}I^*} + \frac{1}{Q(\hat{I}^{*c}I^{*c})}\right)^{-1} \geq \left(\frac{1}{\hat{I}^{*c}I^{*c}} + \frac{4(1-\rho^{*2})}{\tau_n}\right)^{-1}.$$

Imdami $i = 1$, kai $\hat{k}^* - k^* > \tau_n/2$, ir $i = 2$, kai $\hat{k}^* - k^* \leq \tau_n/2$, bei remdamiesi 4.7 lema gauname, kad

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} P_{2d}((1-\rho^*)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty}[P_{2d}((1-\rho^*)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n, \Omega_{2d}^{(i)}) + P(\Omega_{2d}^{(i)c})] \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} P_{2d}(Q(I^{*c}) \leq \varepsilon\tau_n^2).
\end{aligned}$$

Taigi remiantis 4.7 lema

$$\limsup_{n\to\infty} P'_{2d} \leq \limsup_{n\to\infty} P\Bigg(\left(\mathbf{1}_{k^*>\tau_n/2}\sum_{i=1}^{\tau_n/2} + \mathbf{1}_{k^*\leq\tau_n/2}\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n/2}\right) y_{i-1}^2\Bigg) \leq c\varepsilon.$$

Toliau nagrinėsime tikimybę P''_{2d}. Aibėje Ω_d dydžiai A_{n1} ir A_{n2} yra lygūs 0.

Įvertinkime dydį $A_{n3} = Q(\widehat{I}^{*c}I^*)|R(\widehat{I}^{*c}I^{*c})|/Q(\widehat{I}^{*c})$:

$$A_{n3} \leq \frac{\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2\left(\left|\sum_{i=1}^{k^*} y_{i-1}\varepsilon_i\right| + \left|\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{n} y_{i-1}\varepsilon_i\right|\right)}{\left(\mathbf{1}_{k^*>\tau_n/2}\sum_{i=1}^{\tau_n/2} + \mathbf{1}_{k^*\leq\tau_n/2}\sum_{i=n-\tau_n/2}^{n}\right) y_{i-1}^2}.$$

Kiekvienam $\eta > 0$ turime

$$\begin{aligned}
&P_{2d}((1-\rho^*)A_{n3} \geq \varepsilon d_n/16) \leq \\
&\leq P\Bigg(\left(\mathbf{1}_{k^*>\tau_n/2}\sum_{i=1}^{\tau_n/2} + \mathbf{1}_{k^*\leq\tau_n/2}\sum_{i=n-\tau_n/2}^{n}\right) y_{i-1}^2 \leq \eta\tau_n^2\Bigg) \\
&+ P\left(\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2\left(\left|\sum_{i=1}^{k^*} y_{i-1}\varepsilon_i\right| + \left|\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{n} y_{i-1}\varepsilon_i\right|\right) \geq \varepsilon d_n\eta\tau_n^2/16(1-\rho)\right).
\end{aligned}$$

Remdamiesi 4.8 ir 4.9 lemomis gauname, kad $\limsup_{n\to\infty} P_{2d}((1-\rho^*)A_{n3} \geq \varepsilon d_n/16) \leq c\eta$. Kadangi $\eta > 0$ laisvai pasirinktas iš čia gaunama (4.27), kai $v = 3$.

Dydį A_{n4} galime įvertinti

$$A_{n4} = \frac{Q(\widehat{I}^{*c}I^{*c})|R(\widehat{I}^{*c}I^*)|}{Q(\widehat{I}^{*c})} \le |R(\widehat{I}^{*c}I^*)| = \Big|\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}\varepsilon_i\Big|.$$

Kadangi $\ell^* \sim n$ iš čia remdamiesi 4.8 lema gauname (4.27), kai $v = 4$.

Pereikime prie dydžio A_{n5}. Kadangi remiantis 4.6 lema $|R(\widehat{I}^*)| = O_P(\sqrt{n})$ ir remiantis 4.7 lema $Q(\widehat{I}^*) = O_P(n)$, turime

$$P_{2d}(A_{n5} \ge \varepsilon d_n/4) = P_{2d}(Q(\widehat{I}^*) \le \frac{4M^2n}{\varepsilon d_n}) + P(|R(\widehat{I}^*)| \ge M\sqrt{n}).$$

Taigi parinkus tokį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, gauname (4.28), kai $v = 5$. Dydį M, pavyzdžiui, galime parinkti lygų $n^{1/3}$.

Kadangi remiantis 4.8 lema $|R(\widehat{I}^{*c})| = O_P(n)$ ir aibėje Ω_{2d}

$$Q(\widehat{I}^{*c}) \ge \left(\mathbf{1}_{k^*>\tau_n/2}\sum_{i=k^*-\tau_n/2}^{k^*} + \mathbf{1}_{\hat{k}^*\le\tau_n/2}\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n/2}\right) y_{i-1}^2,$$

gauname

$$P_{2d}(A_{n6} \ge \varepsilon d_n/4) = P_{2d}(Q(\widehat{I}^{*c}) \le \frac{4M^2n^2}{\varepsilon d_n}) + P(|R(\widehat{I}^{*c})| \ge Mn).$$

Parinkus tokį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, įrodomas (4.28), kai $v = 6$. Dydį M galime parinkti lygų $n^{1/3}$.

Tikimybės P_{2e} vertinimas.

Turime įvertinti šias tikimybes:

$$P'_{2e} := P_{2e}((1-\rho^*)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \le \varepsilon d_n), \quad \text{ir} \quad P''_{2e} := P_{2e}(-\delta_3(\hat{I}^*) \ge \varepsilon d_n).$$

Pradėkime nuo P'_{2e}. Turime, kad $Q(\hat{I}^{*c}I^*) = Q(I^*) \ge \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2$. Pažymėkime

$$\Omega'_{2e} := \left\{\left|(1-\rho^{*2})\tau_n^{-1}\sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 - 1\right| < 1/2\right\} \cap \Omega_{2e}$$

Aibėje Ω'_{2e} $Q(\hat{I}^{*c}I^*) \geq \frac{1}{2}\tau_n(1-\rho^{*2})^{-1}$ ir tada

$$\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \geq \Big(\frac{1}{Q(\hat{I}^{*c}I^*)} + \frac{1}{Q(\hat{I}^{*c}I^{*c})}\Big)^{-1} \geq \Big(\frac{2(1-\rho^{*2})}{\tau_n} + \frac{1}{Q(\hat{I}^{*c}I^{*c})}\Big)^{-1}.$$

Kadangi

$$\frac{(1-\rho^*)^2}{\varepsilon d_n} > \frac{1}{\varepsilon\tau_n^2} + \frac{2(1-\rho^{*2})}{\tau_n}$$

pakankamai dideliems n, remiantis 4.9 lema gauname

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} P_{2e}((1-\rho^*)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty}[P_{2e}((1-\rho^*)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \leq \varepsilon d_n, \Omega'_{2e}) + P(\Omega'^c_{2e})] \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} P_{2e}(Q(\hat{I}^{*c}I^{*c}) \leq \varepsilon\tau_n^2).
\end{aligned}$$

Taigi

$$\limsup_{n\to\infty} P'_{2e} \leq \limsup_{n\to\infty} P_{2e}(Q(\hat{I}^{*c}I^{*c}) \leq \varepsilon\tau_n^2) \leq \limsup_{n\to\infty} P\Big(X_3 \leq \varepsilon\tau_n^2\Big),$$

čia

$$X_3 = \left(\mathbf{1}_{\hat{k}^* > \tau_n/3}\sum_{i=1}^{\tau_n/3} + \mathbf{1}_{k^*-\hat{k}^*-\hat{\ell}^* > \tau_n/3}\sum_{i=k^*-\tau_n/3+1}^{k^*} + \mathbf{1}_{n-k^*-\ell^* > \tau_n/3}\sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n/3}\right) y_{i-1}^2.$$

Remiantis 4.9 lema egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, kad

$$\limsup_{n\to\infty} P'_{2e} \leq c\varepsilon.$$

Pereikime prie tikimybės P''_{2e}. Aibėje Ω_e dydžiai A_{n1} ir A_{n2} yra lygūs 0. Įvertinkime

$$A_{n3} = \frac{Q(I^*)|R(\widehat{I}^{*c}I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^{*c})} \leq \frac{X_1X_2}{X_3}$$

čia

$$X_1 = \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2,$$
$$X_2 = \left(\max_{1<k\le k^*} \left| \sum_{i=1}^{k} \right| + \max_{1<k\le k^*} \left| \sum_{i=k+1}^{k^*} \right| + \left| \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{n} \right| \right) y_{i-1}\varepsilon_i.$$

Be to, kiekvienam $\eta > 0$

$$P_{2e}((1-\rho^*)A_{n4} \ge \varepsilon d_n/16) \le P\Big(X_3 \le \eta\tau_n^2\Big) + P\Big(X_1X_2 \ge \varepsilon d_n \eta \tau_n^2/16(1-\rho^*)\Big).$$

Taigi remdamiesi 4.8 ir 4.9 lemomis gauname $\limsup_{n\to\infty} P_{2e}((1-\rho^*)A_{n3} \ge \varepsilon d_n/16) \le c\eta$. Kadangi $\eta > 0$ pasirinktas laisvai, iš čia seka (4.27), kai $v = 3$.

Dydis

$$A_{n4} = \frac{Q(\widehat{I}^{*c} I^{*c})|R(I^*)|}{Q(\widehat{I}^{*c})} \le |R(I^*)| = \Big| \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}\varepsilon_i \Big|.$$

Remiantis 4.8 lema dešinioji nelygybės pusė yra $O_P(n^{1/2})$ ir iš čia gauname, kad teisinga (4.27), kai $v = 4$.

Pereikime prie dydžio A_{n5}. Tikimybė

$$P_{2e}(A_{n5} \ge \varepsilon d_n/4) = P_{2e}\left(Q(\widehat{I}^*) \le \frac{4M^2n^2}{\varepsilon d_n}\right) + P(|R(\widehat{I}^*)| \ge Mn).$$

Remiantis 4.8 ir 4.9 lemomis $|R(\widehat{I}^*)| = O_P(n)$ ir $Q(\widehat{I}^*) = O_P(n^2)$. Taigi parinkę tokį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, gauname (4.28), kai $v = 5$. Dydį M, pavyzdžiui, galime parinkti lygų $n^{1/3}$.

Remiantis 4.8 lema $|R(\widehat{I}^{*c})| = O_P(n)$ ir aibėje Ω_{2e} teisinga $Q(\widehat{I}^{*c}) \ge X_3$. Be to,

$$P_{2e}(A_{n6} \ge \varepsilon d_n/4) \le P(|R(\widehat{I}^{*c})| \ge Mn) + P\left(X_3 \le \frac{4M^2n^2}{\varepsilon d_n}\right).$$

Taigi parinkus tokį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, ir remiantis 4.9 lema gauname (4.28), kai $v = 6$. Dydį M, pavyzdžiui, galime parinkti lygų $n^{1/3}$.

Tikimybės P_{2f} vertinimas.

Turime įvertinti šias tikimybes:

$$P'_{2f} := P_{2f}((1-\rho^*)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \le \varepsilon d_n), \quad \text{ir} \quad P''_{2f} := P_{2f}(-\delta_3(\hat{I}^*) \ge \varepsilon d_n).$$

Pradėkime nuo P'_{2f}. Turime, kad $Q(\hat{I}^{*c}I^*) = Q(I^*) \ge \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2$. Pažymėkime

$$\Omega'_{2f} := \left\{ \left| (1-\rho^{*2})\tau_n^{-1} \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\tau_n} y_{i-1}^2 - 1 \right| < 1/2 \right\} \cap \Omega_{2f}$$

Aibėje Ω'_{2f} $Q(\hat{I}^{*c}I^*) \ge \frac{1}{2}\tau_n(1-\rho^{*2})^{-1}$ ir tada

$$\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \ge \left(\frac{1}{Q(\hat{I}^{*c}I^*)} + \frac{1}{Q(\hat{I}^{*c}I^{*c})} \right)^{-1} \ge \left(\frac{2(1-\rho^{*2})}{\tau_n} + \frac{1}{Q(\hat{I}^{*c}I^{*c})} \right)^{-1}.$$

Kadangi

$$\frac{(1-\rho^*)^2}{\varepsilon d_n} > \frac{1}{\varepsilon \tau_n^2} + \frac{2(1-\rho^{*2})}{\tau_n}$$

pakankamai dideliems n, remiantis 4.9 lema gauname

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} P_{2f}((1-\rho^*)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \le \varepsilon d_n) \\
&\le \limsup_{n\to\infty} [P_{2f}((1-\rho^*)^2\delta_1(\hat{I}^*, I^*) \le \varepsilon d_n, \Omega'_{2f}) + P(\Omega'^c_{2f})] \\
&\le \limsup_{n\to\infty} P_{2f}(Q(\hat{I}^{*c}I^{*c}) \le \varepsilon \tau_n^2).
\end{aligned}$$

Taigi

$$\limsup_{n\to\infty} P'_{2f} \le \limsup_{n\to\infty} P_{2f}(Q(\hat{I}^{*c}I^{*c}) \le \varepsilon\tau_n^2) \le \limsup_{n\to\infty} P(G_3 \le \varepsilon\tau_n^2),$$

čia

$$G_3 = \left(\mathbf{1}_{k^*>\tau_n/3} \sum_{i=1}^{\tau_n/3} + \mathbf{1}_{\hat{k}^*-k^*-\ell^*>\tau_n/3} \sum_{i=k^*+\ell^*+1}^{k^*+\ell^*+\tau_n/3} + \mathbf{1}_{n-\hat{k}^*-\hat{\ell}^*>\tau_n/3} \sum_{i=n-\tau_n/3+1}^{n} \right) y_{i-1}^2.$$

Remiantis 4.9 lema egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, kad

$$\limsup_{n\to\infty} P'_{2f} \le c\varepsilon.$$

Pereikime prie tikimybės P''_{2f}. Aibėje Ω_f dydžiai A_{n1} ir A_{n2} yra lygūs 0.

Įvertinkime

$$A_{n3} = \frac{Q(I^*)|R(\widehat{I}^{*c}I^{*c})|}{Q(\widehat{I}^{*c})} \leq \frac{G_1 G_2}{G_3},$$

čia

$$G_1 = \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}^2$$

$$G_2 = \left(\Big| \sum_{i=1}^{k*} \Big| + \max_{k^*+\ell^*<k\leq n} \Big| \sum_{i=k^*+\ell^*}^{k} \Big| + \max_{k^*+\ell^*<k\leq n} \Big| \sum_{i=k}^{n} \Big| \right) y_{i-1}\varepsilon_i.$$

Be to, kiekvienam $\eta > 0$

$$P_{2f}((1-\rho^*)A_{n4} \geq \varepsilon d_n/16) \leq P\Big(G_3 \leq \eta\tau_n^2\Big) + P\Big(G_1 G_2 \geq \varepsilon d_n \eta \tau_n^2/16(1-\rho^*)\Big).$$

Taigi remdamiesi 4.8 ir 4.9 lemomis gauname $\limsup_{n\to\infty} P_{2f}((1-\rho^*)A_{n3} \geq \varepsilon d_n/16) \leq c\eta$. Kadangi $\eta > 0$ pasirinktas laisvai, iš čia seka (4.27), kai $v = 3$.

Dydis

$$A_{n4} = \frac{Q(\widehat{I}^{*c}I^{*c})|R(I^*)|}{Q(\widehat{I}^{*c})} \leq |R(I^*)| = \Big| \sum_{i=k^*+1}^{k^*+\ell^*} y_{i-1}\varepsilon_i \Big|.$$

Remiantis 4.8 lema dešinioji nelygybės pusė yra $O_P(n^{1/2})$ ir iš čia gauname, kad teisinga (4.27), kai $v = 4$.

Pereikime prie dydžio A_{n5}. Tikimybė

$$P_{2f}(A_{n5} \geq \varepsilon d_n/4) = P_{2f}(Q(\widehat{I}^*) \leq \frac{4M^2n^2}{\varepsilon d_n}) + P(|R(\widehat{I}^*)| \geq Mn).$$

Remiantis 4.8 ir 4.9 lemomis $|R(\widehat{I}^*)| = O_P(n)$ ir $Q(\widehat{I}^*) = O_P(n^2)$. Taigi parinkę tokį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, gauname (4.28), kai $v = 5$. Dydį M, pavyzdžiui, galime parinkti lygų $n^{1/3}$.

Remiantis 4.8 lema $|R(\widehat{I}^{*c})| = O_P(n)$ ir aibėje Ω_{2f} dydis $Q(\widehat{I}^{*c}) \geq G_3$. Be to,

$$P_{2f}(A_{n6} \geq \varepsilon d_n/4) \leq P(|R(\widehat{I}^{*c})| \geq Mn) + P\left(G_3 \leq \frac{4M^2n^2}{\varepsilon d_n}\right).$$

Taigi parinkus tokį $M \to \infty$, kad $Mn^{-1/2} \to 0$, ir remiantis 4.9 lema gauname (4.28), kai $v = 6$. Dydį M, pavyzdžiui, galime parinkti lygų $n^{1/3}$.

(ii) Iš pradžių įrodysime, kad

$$|\rho^* - \hat{\rho^*}| = O_P(n^{-1/2}),$$

čia $\hat{\rho}^* = \hat{\rho}(I_\beta)$. Galime užrašyti

$$\rho^* - \hat{\rho^*} = \frac{\rho^* Q(I_\beta) - \sum_{i\in I_\beta} y_i y_{i-1}}{Q(I_\beta)}.$$

Dešiniojoje lygybės pusėje esančios trupmenos skaitiklį perrašome tokiu būdu:

$$\sum_{i\in I_\beta} y_{i-1}(\rho^* y_{i-1} - y_i) = -R(I_\beta) + (\rho^* - 1)Q(I_\beta I^{*c}).$$

Taigi gauname, kad

$$|\rho^* - \hat{\rho^*}| \le \frac{|R(I_\beta)|}{Q(I_\beta)} + (1-\rho^*)\frac{Q(I_\beta I^{*c})}{Q(I_\beta)}.$$

Remdamiesi jau įrodyta šios teoremos (i) dalimi tariame, kad kaip norima mažam $\varepsilon\ :\ \ 0 < \varepsilon < \beta\ |\hat{k^*} - k^*| + |\hat{\ell^*} - \ell^*| \le \varepsilon n$. Tada $I_\beta I^{*c} = \emptyset$ bei remiantis 4.8 ir 4.9 lemomis $R(\hat{I}_\beta^{*c}) = O_P(n^{1/2})$ ir $Q(\hat{I}_\beta^{*c}) = O_P(n)$. Taigi $|\rho^* - \hat{\rho^*}| = O_P(n^{-1/2})$.

Dabar įrodysime, kad

$$|1 - \hat{\rho}| = O_P(n^{-1}),$$

čia $\hat{\rho} = \hat{\rho}(J_\beta)$. Turime, kad

$$1 - \hat{\rho} = \frac{Q(J_\beta) - \sum_{i\in J_\beta} y_i y_{i-1}}{Q(J_\beta)}.$$

Dešiniojoje lygybės pusėje esančios trupmenos skaitiklis yra lygus

$$\sum_{i\in J_\beta} y_{i-1}(y_{i-1} - y_i) = -R(J_\beta) + (1-\rho^*)Q(J_\beta I^*)$$

ir gauname, kad

$$|\rho - \hat{\rho}| \le \frac{|R(J_\beta)|}{Q(J_\beta)} + (1-\rho^*)\frac{Q(J_\beta I^*)}{Q(J_\beta)}.$$

Remdamiesi jau įrodyta šios teoremos (i) dalimi tariame, kad kaip norima mažam $\varepsilon: \ 0 < \varepsilon < \beta \ |\hat{k^*} - k^*| + |\hat{\ell^*} - \ell^*| \le \varepsilon n$. Tada $J_\beta I^* = \emptyset$ bei remiantis 4.8 ir 4.9 lemomis $R(J_\beta) = O_P(n)$ ir $Q(J_\beta) = O_P(n^2)$. Taigi $|\rho - \hat{\rho}| = O_P(n^{-1})$.

Išvados

Disertacijoje išnagrinėtas pirmos eilės autoregresinio modelio pasikeitusio segmento testavimo ir vertinimo uždavinys. Pasiūlyti kriterijai pasikeitusio segmento testavimui, kurie pagrįsti laužčių procesų konvergavimu Hiolderio erdvėse. Ištirtas statistikų ribinis elgesys. Empirinis galios tyrimas parodo, kad pasiūlytų testų galia didžiausia aptinkant pasikeitimus iš stacionarios būklės į nestacionarią. Taip pat įrodyta, kad pasikeitusio segmento pradžios ir ilgio įvertiniai bei autoregresinio modelio su pasikeitusiu segmentu parametrų įvertiniai yra suderintieji ir pateiktas jų konvergavimo greitis.

Tolimesni galimi uždaviniai - aukštesnių eilių autoregresinių modelių bei modelių papildytų postūmio ir/ar trendo komponente pasikeitusio segmento testavimas ir vertinimas, nagrinėjant įvairesnio tipo alternatyvas.

Literatūra

[1] T. W. Anderson, On asymptotic distributions of estimates of parameters of stochastic difference equations, *The Annals of Mathematical Statistics*, **30**, 676–687 (1959).

[2] M. Bagshaw, R. A. Johnson, Sequentional procedures for detecting parameter changes in a time series model, *Journal of American Statistical Association*, **72**, 593–597 (1977).

[3] J. Bai, On the partial sums of residuals in autoregressive and moving average models, *Journal of Time Series Analysis* **14**, 247–260 (1993).

[4] J. Bai, Least square estimation of a shift in linear processes, *Time Series Analysis*, **15**(5), 453–472 (1994).

[5] J. Bai, H. Chen, T.T.L. Chong, S.X. Wang, Generic consistency of the break-point estimators under specification errors in a multiple-break model, *Econometrics Journal*, **11**, 287–307 (2008).

[6] J. Bai, P. Perron, Computation and analysis of multiple structural change models, *Journal of Applied Econometrics*, **18**, 1–22 (2003).

[7] J. Bai, P. Perron, Estimating and testing linear models with multiple structural changes. *Econometrica*, **66**(1), 47–78 (1998).

[8] A. Banerjee, G. Urga, Modelling structural breaks, long memory and stock market volatility: an overview, *Journal of Econometrics*, **129**, 1–34 (2005).

[9] M. Basseville, N. Nikiforov, *Detection of abrupt changes: theory and application*, Information and system science series, Prentice Hall, New York (1993).

[10] P. K. Bhattacharya, Some aspects of change-point analysis, in: E. Carlstein, H.-G. Müller, D. Siegmund (Eds.), Change Point Problems, IMS Lecture Notes - Monograph Series, **23**, 28–56 (1994).

[11] P. Bilingsley, *Convergence of probability measures*, Wiley, New York (1968).

[12] M. Boutahar, J. Jouini, Evidence on structural changes in U.S. time series, *Economic Modelling*, **22**, 391–422 (2005).

[13] B. E. Brodsky, B. S. Darkhovsky, *Nonparametric methods in change point problems*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, Boston (1993).

[14] F. Busetti, Initial conditions and stationarity tests, *Economic Letters*, **105**, 296–299 (2009).

[15] F. Busetti, A.M.R. Taylor, Tests stationarity against a change in persistence, Discussion Paper, Department of Economics, University of Birmingham, 1–13 (2001).

[16] F. Busetti, A.M.R. Taylor, Tests stationarity against a change in persistence, *Journal of Econometrics*, **123**, 33–66 (2004).

[17] G. Cavaliere, A.M.R. Taylor, Testing for a change in persistence in the presence of non-stationary volatility, *Journal of Econometrics*, **147**(1), 84–98 (2008).

[18] J. Chen, A. K. Gupta, *Parametric statistical change point analysis*, Birkhäuser Verlag, Boston (2000).

[19] T.T. Chong, Structural change in AR(1) models, *Econometric theory*, **17**, 87–155 (2001).

[20] M. Csörgő, L. Horváth, *Limit Theorems in Change-Point Analysis*, John Wiley & Sons, Baffins Lane, Chichester (1997).

[21] R.A. Davies, D. Huang, Y.-C. Yao, Testing for a change in the parameter value and order of an autoregressive model, *Annals of Statistics*, **23**, 282–304 (1995).

[22] Y. Fu, R.N. Curnow, Locating a changed segment in a sequence of Bernoulli variables, *Biometrika*, **77**(2), 295–304 (1990).

[23] E. Gombay, Change detection in autoregressive time series, *Journal of Multivariate Analysis Volume*, **99**(3), 451–464 (2008).

[24] E. Gombay, D. Serban, Monitoring parameter change in AR(p) time series models, *Journal of Multivariate Analysis*, **100**(4), 715–725 (2009).

[25] P. Hackl, A.H. Westlund, Statistical analysis of structural change: an annotated bibliography, *Empirical Economics*, **14**, 167–192 (1989).

[26] P. Hackl, A.H. Westlund (Eds.), *Economic Structural Change: Analysis and Forecasting*, Springer-Verlag, Berlin (1991).

[27] D. Hamadouche, Invariance principles in Hölder spaces, *Portugaliae Mathematics*, **57**, 127–151 (2000).

[28] D.I. Harvey, S.J. Leybourne, A.M.R. Taylor, Modified tests for a change in persistence, *Journal of Econometrics*, **134**(2), 441–469 (2006).

[29] L. Horvath, Change in autoregressive process, *Stochastic Processes and their Applications*, **44**, 221–242 (1993).

[30] M. Hušková, Estimators for epidemic alternatives, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, **36**(2), 281–293 (1995).

[31] V. K. Jandhyala, I. B. MacNeil, Iterated partial sum sequences of regression residuals and tests for changepoints with continuity constraints, *Journal of the Royal Statistical Society*, **59**, 147–156 (1997).

[32] V. K. Jandhyala, I. B. MacNeil, Residuals partial sum limit process for regression models with applications to detecting parameter changes at unknown times, *Stochastic Processes and their Applications*, **33**, 309–323 (1989).

[33] M. Juodis, A. Račkauskas, Ch. Suquet, Hölderian invariance principle for linear processes, *Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistic*, **5**, 1–16 (2009).

[34] M. Kejrival, P. Perron, The limit distribution of the estimates in cointegrated regression models with multiple structural changes, *Journal of Econometrics*, **146**, 59–73 (2008).

[35] J.Y. Kim, Detection of change in persistence of a linear time series, *Journal of Econometrics*, **95**, 97–116, 2000.

[36] S. Kim, S. Cho, S. Lee, On the cusum test for parameter changes in GARCH(1,1) models, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **29**, 445–462 (2000).

[37] W. Krämer, W. Ploberger, R. Alt, Testing for structural change in dynamic models, *Econometrica*, **56**, 1355–1369 (1988).

[38] P.R. Krishnaiah, B.Q. Miao, Review about estimation of change points, in: Handbook of Statistics, **7**, Krishnaiah, P.R., Rao, C.R. (Eds.), New York: Elsevier (1988).

[39] R.J. Kulperger, On the residuals of autoregressive processes and polynomial regression, *Stochastic Processes and their Applications*, **21**, 107–118(1985).

[40] R. J. Kulperger, H. Yu, High moment partial sum processes of residuals in GARCH models and their applications, *The Annals of Statistics*, **33**, 2395–2422 (2005).

[41] E. Kurozumi, Detection of Structural Change in the Long-run Persistence in a Univariate Time Series, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, **67**(2), 181-?206 (2005).

[42] M. Lavielle, E. Moulines, Least Squares estimation of an unknown number of shifts in a time series, *Journal of Time Series Analysis*, **21**(1), 33-59 (2000).

[43] A. Laukaitis, A. Rackauskas, Testing changes in Hilbert space autoregressive mode, *Lithuanian Mathematical Journal*, **42**(4), 2002.

[44] S. Lee, J. Ha, O. Na, S. Na, The cusum test for parameter change in time series models, *Scandinavian Journal of Statistics*, **30**(4), 78–796 (2003).

[45] S. Lee, S. Park, The cusum of squares test for scale changes in infinite order moving average processes, *Scandinavian Journal of Statistics*, **28**, 625–644 (2001).

[46] S. Leybourne, T.-H. Kim, V. Smith, P. Newbold, Tests for a change in persistence against the null of difference-stationarity, *Econometrics Journal*, **6**, 291–311 (2003).

[47] G.S. Maddala, I.M. Kim, *Unit Roots, Cointegration and Structural Change*, Cambridge University Press, Cambridge (1998).

[48] H.B. Mann, A. Wald , On the statistical treatment of linear stochastic difference equations, *Econometrica*, **11**, 173–220 (1943).

[49] P. Perron, Dealing with Structural Breaks, in: Palgrave Handbook of Econometrics, Vol. 1: Econometric Theory, K. Patterson and T.C. Mills (eds.), Palgrave Macmillan, 278–352 (2006).

[50] P. Perron, Trend, unit root and structural change in macroeconomic time series, in: Cointegration for the Applied Economist, Rao, B.B. (Eds.), Basingstoke: Macmillan Press, 113–146 (1994).

[51] P. Perron, Z. Qu. Estimating and testing structural changes in multivariate regressions. *Econometrica*, **75**, 459–502, 2007.

[52] P. Perron, Z. Qu, Estimating restricted structural change models, *Journal of Econometrics*, **134**, 373–399, 2006.

[53] H.M. Pesaran, R.P. Smith, J.S. Yeo, Testing for structural stability and predictive failure: a review, *The Manchester School of Economic & Social Studies*, **53**, 281–295 (1985).

[54] D. Picard, Testing and estimating change-points in time series, *Advances in Applied Probability*, **17**, 841–867 (1985).

[55] A. Račkauskas, I. Rastenė, Hölder convergence of autoregression residuals partial sum processes, *Lithuanian Mathematical Journal*, **48**(4), 438–450, (2008).

[56] A. Račkauskas, Ch. Suquet, Estimation of change points of infinite dimensional parameters in short epidemics, *Lithuanian Mathematical Journal*, **45**(4), 458–474, 2005.

[57] A. Račkauskas, Ch. Suquet, Estimating a changed segment in a sample, *Acta Applicandae Mathematicae*, **97**, 189–210 (2007).

[58] A. Račkauskas, Ch. Suquet, Hölderian invariance principle for triangular arrays of random variables, *Lithuanian Mathematical Journal*, **43**, 423–438 (2003).

[59] A. Račkauskas, Ch. Suquet, Hölder norm test statistics for epidemic change, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **126**(2) 495–520 (2004).

[60] A. Račkauskas, Ch. Suquet, Necessary and sufficient condition for the functional central limit theorem in Hölder spaces, *Journal of Theoretical Probability*, **17**, 221–243 (2004).

[61] P.A. Sánchez, Cambios estructurales en series de tiempo: Una revisión del estrado del arte, *Revista de Ingenierías Universidad de Medellín*, **012**(6), 115–140 (2008).

[62] S.A. Shaban, Change point problem and two-phase regression: an annotated bibliography, *International Statistical Review*, **48**, 83–93 (1980).

[63] D.W.Shin, The limiting distribution of the residuals processes in non-stationary autoregressive processes, *Journal of time series analysis*, **06**, 723–736 (1998).

[64] J.H. Stock, Unit roots, structural breaks and trends, in: Handbook of Econometrics, vol. 4, Engle, R.F., MacFaden, D., (Eds.), Elsevier, 2740–2841 (1994).

[65] Ch. Suquet, Tightness in Schauder decomposable Banach spaces, *Transactions of the American Mathematical Society*, **193**(2), 201–224 (1999).

[66] S. M. Tang, I. B. MacNeil, The effect of serial correlation on tests for parameter change at unknown time, *The Annals of Statistics*, **21**, 552–575 (1993).

[67] D. W. Wichern, R. B. Miller, D. A. Hsu, Changes of variance in first-order autoregressive time series models - with an application, *Applied Statistics*, **25**, 248–256 (1976).

[68] H. Yu, High moment partial sum processes of residuals in ARMA models and their applications, *Journal of time series analysis*, **28**, 72–91 (2007).

[69] S. Zacks, Survey of classical and Bayesian approaches to the change-point problem: fixed and sequential procedures of testing and estimation, in: Recent Advances in Statistics, M.H. Rivzi, J.S. Rustagi, D. Siegmund (Eds.), Academic Press, New York (1983).